

Веснік

Брэсцкага ўніверсітэта

Рэдакцыйная калегія

Галоўны рэдактар
А. М. Сендзер

Намеснік галоўнага рэдактара
А. Я. Будзько

Адкажны рэдактар
М. М. Сендзер

А. Б. Антаневіч (Беларусь)
А. І. Басік (Беларусь)
М. А. Громаў (Расія)
М. І. Ляўчук (Беларусь)
В. С. Манахаў (Беларусь)
І. П. Мартынаў (Беларусь)
А. І. Мелькер (Расія)
У. А. Плецохоў (Беларусь)
В. М. Радзькоў (Беларусь)
В. Р. Самойленка (Украіна)
У. С. Секяржыцкі (Беларусь)
А. А. Трафімук (Беларусь)
Л. Уба (Польшча)

Пасведчанне аб рэгістрацыі
ў Міністэрстве інфармацыі
Рэспублікі Беларусь
№ 1338 ад 28 красавіка 2010 г.

Адрас рэдакцыі:
224016, г. Брэст,
бульвар Касманаўтаў, 21
тэл.: +375-(162)-21-72-07
e-mail: vesnik@brsu.brest.by

Часопіс «Веснік Брэсцкага
ўніверсітэта» выдаецца
са снежня 1997 года

Серыя 4

ФІЗІКА

МАТЭМАТЫКА

НАВУКОВА-ТЭАРЭТЫЧНЫ ЧАСОПІС

Выходзіць два разы ў год

Заснавальнік – Установа адукацыі
«Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт імя А. С. Пушкіна»

№ 1 / 2020

У адпаведнасці з Дадаткам да загада
Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь
ад 01.04.2014 № 94 у рэдакцыі загада Вышэйшай атэстацыйнай камісіі
Рэспублікі Беларусь ад 30.01.2020 № 22
(са змяненнямі, унесенымі загадам ВАК ад 09.03.2020 № 62)
часопіс «Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4. Фізіка. Матэматыка»
ўключаны ў Пералік навуковых выданняў Рэспублікі Беларусь
для апублікавання вынікаў дысертацыйных даследаванняў
па фізіка-матэматычных навуках (Фізіка)

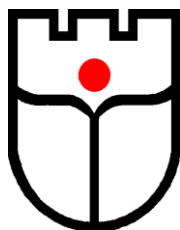
ЗМЕСТ

ФІЗІКА

Ворсин Н. Н., Гладышук А. А., Кушнер Т. Л., Тарасюк Н. П., Чугунов С. В. Моделирование и разработка ALGAN P-I-N фотодиодов.....	5
Ивашкевич А. В., Овсюк Е. М., Кисель В. В., Редьков В. М. Решения уравнения для частицы со спином $3/2$ и оператор спиральности.....	15
Лиопо В. А., Лявшук И. А., Овчинников Е. В., Секержицкий С. С. Особенности структуры сфалерита	36
Sánchez-Bernabe F. J. Fullerenes with Structure of Cubic and Octahedral Type	45
Сендер Н. Н. Экспериментальное определение оптических постоянных поглощающих кристаллов на основе метода иммерсионной эллипсометрии	53

МАТЭМАТЫКА

Грицук Д. В. Построение в системе компьютерной алгебры GAP групп фиксированной производной π -длины	59
Марзан С. А. Разрешимость задачи Коши для нелинейного дифференциального уравнения с производной Капуто комплексного порядка	65
Матысик О. В. Останов по малости невязки в методе итераций неявного типа для решения линейных операторных уравнений первого рода	74
Морозов В. В. Итеративный базис в полиномиальном анализе банаховых уравнений	80
Юдов А. А., Кононюк М. А., Козакевич К. П., Кисилук Е. В. Классификация и исследование инвариантных структур на однородных пространствах со структурной группой – группой Ли движений пятимерного евклидова пространства	95



Vesnik

of Brest University

Editorial Board

Editor-in-chief
A. M. Sendzer

Deputy Editor-in-chief
A. Ya. Budzko

Managing editor
M. M. Sendzer

A. B. Antanevich (Belarus)
A. I. Basik (Belarus)
M. A. Gromau (Russia)
M. I. Liauchuk (Belarus)
V. S. Manakhau (Belarus)
I. P. Martynau (Belarus)
A. I. Melker (Russia)
U. A. Pletsukhou (Belarus)
V. M. Radzkou (Belarus)
V. R. Samoilenka (Ukraine)
U. S. Sekyartzhytski (Belarus)
A. A. Trafimuk (Belarus)
L. Uba (Poland)

Registration Certificate
by Ministry of Information
of the Republic of Belarus
nr 1338 from April 28, 2010

Editorial Office:
224016, Brest,
21, Kosmonavtov Boulevard
tel.: +375-(162)-21-72-07
e-mail: vesnik@brsu.brest.by

Published since December 1997

Series 4

PHYSICS

MATHEMATICS

SCIENTIFIC-THEORETICAL JOURNAL

Issued twice a year

**Founder – Educational Establishment
«Brest State A. S. Pushkin University»**

№ 1 / 2020

According to the Supplement to the order of Supreme Certification Commission of the Republic of Belarus from April 01, 2014 nr 94 as revised by the order of Supreme Certification Commission of the Republic of Belarus from January 30, 2020 nr 22 (with the amendments made by the orders of Supreme Certification Commission from March, 09, 2020 nr 62 the journal «Vesnik of Brest University. Series 4. Physics. Mathematics» was included to the List of scientific editions of the Republic of Belarus for publication of the results of scientific research in physics-mathematical sciences (Physics)

INDEX

PHYSICS

Vorsin N. N., Gladyshuk A. A., Kushner T. L., Tarasyuk N. P., Chugunov S. V. Modelling and Development of AlGaIn p-i-n-Photodiodes	5
Ivashkevich A. V., Ovsyuk E. M., Kisel V. V., Red'kov V. M. Solutions of the Wave Equation for a Spin 3/2 Particle and Helicity Operator	15
Liopo V. A., Liaushuk I. A., Auchynnikau Y. V., Sekerzhitsky S. S. Features of the Structure of Sphalerite	36
Sánchez-Bernabe F. J. Fullerenes with Structure of Cubic and Octahedral Type	45
Sender N. N. Experimental Determination of Optical Constant Absorbing Crystals Based on the Method of Immersion Ellipsometry	53

MATHEMATICS

Gritsuk D. V. Construction of the Groups of the Fixed Derivative π -Length in the System of GAP Computer Algebra.....	59
Marzan S. A. Solvability of the Cauchy Problem for a Nonlinear Differential Equation with a Complex Order Caputo Derivative.....	65
Matysik O. V. Stopping by the Smallness of the Mismissibility in the Method of Iterations of an Implicite Type for the Solution of Linear Operator Equations of the First Kind.....	74
Morozov V.V. An Iterative Basis in the Polynomial Analysis Banach Equations	80
Yudov A. A., Kononyuk M. A., Kazakevich K .P., Kisilyuk E. V. Classification and Study of Invariant Structures on Homogeneous Spaces with a Structural Group – the Lie Group of Motions of a Five-Dimensional Euclidean Space	95

УДК 621.383.52

**Н. Н. Ворсин¹, А. А. Гладышук², Т. Л. Кушнер³,
Н. П. Тарасюк⁴, С. В. Чугунов⁵**

¹канд. физ.-мат. наук, доц. каф. физики

Брестского государственного технического университета

²канд. физ.-мат. наук, проф. каф. физики

Брестского государственного технического университета

³канд.пед. наук, доц. каф. физики

Брестского государственного технического университета

⁴ст. преподаватель каф. физики

Брестского государственного технического университета

⁵ст. преподаватель каф. физики

Брестского государственного технического университета

[e-mail: vorsin@hotmail.com](mailto:vorsin@hotmail.com)

МОДЕЛИРОВАНИЕ И РАЗРАБОТКА AlGaN P-I-N ФОТОДИОДОВ

Тройные сплавы AlGaN с шириной запрещенной зоны от 3,4 до 6,2 эВ весьма перспективны для фотоприемных устройств УФ диапазона длин волн. С помощью программного обеспечения Comsol на основе $Al_xGa_{1-x}N$ разработана модель p-i-n фотодиода, включая его ВАХ, спектральную чувствительность принимаемого излучения и коэффициента поглощения как функции доли алюминия и толщины обедненного слоя. Пиковая чувствительность фотодиода составляет от 0,08 до 0,18 А/Вт при длинах волн 0,2–0,33 мкм. Это соответствует экспериментальным результатам, взятым из литературы.

Введение

III-нитридное соединение материалов, состоящее из InN, GaN, AlN, и их сплавы, являются полупроводниками с интересными физическими свойствами, такими как высокая подвижность электронов, высокое значение скорости насыщения носителей, хорошая термостойкость, прямая и изменяемая по ширине запрещенная зона с высоким коэффициентом оптического поглощения.

Коэффициент поглощения III-нитридных материалов более 10^4 см^{-1} [1]. Значительная доля падающего света проникает в глубину на несколько сотен нанометров поглощающей области. Ширина запрещенной зоны материала $Al_xGa_{1-x}N$ (AlGaN) варьируется в диапазоне от 3,4 до 6,2 эВ в зависимости от пропорции x алюминия в составе соединения $Al_xGa_{1-x}N$ [2; 3]. Благодаря этим физическим свойствам, III-нитридные полупроводники являются перспективными материалами для многочисленных оптоэлектронных устройств, таких как светодиоды, лазерные диоды, солнечные элементы и фотодиоды.

Большинство современных фотодиодов основаны на p-i-n-структуре. Фотоны, поглощенные в области собственной проводимости (i-слой) генерируют электронно-дырочные пары, которые затем разделяются электрическим полем, создавая таким образом электрический ток в нагрузке.

Множественные квантовые ямы (MQW) [4] или сверхрешеточные структуры [4], содержащиеся в нанометровых слоях AlGaN, могут быть использованы в качестве дополнительных факторов для объемных структур, чтобы улучшить кристаллическое качество активных слоев и повысить чувствительность фотодиодов.

В конце нулевых годов Э. Беркман и др. [5] разработали p-i-n-фотодиод InGaN, который показал чувствительность 37 мА/Вт на волне 426 нм. Затем параметр чувстви-

тельности быстро улучшался с каждой новой разработкой. Уже спустя год Су и др. [6] изготовили р-і-п-фотодиод с собственным активным слоем $\text{In}_{0.11}\text{Ga}_{0.89}\text{N}$ и самой высокой спектральной чувствительностью 0,206 А/Вт на длине волны 380 нм. Этот показатель был превзойден Лу и др. [7], которые сообщили о пиковой чувствительности 0,22 А/Вт при 378 нм в несмещенном р-і-п-фотоприемнике.

Все упомянутые достижения относятся к области фиолетового и ближнего ультрафиолетового диапазона. С укорочением длины волны достижимый показатель чувствительности должен уменьшаться, поскольку увеличение энергии фотонов при неизменной величине мощности излучения означает уменьшение плотности фотонного потока. Поэтому на длине волны 200 нм следует ожидать вдвое меньший показатель чувствительности, около 0,1 А/Вт.

В работе предпринята попытка моделирования р-і-п-фотодиодов на основе тройного соединения AlGaN с помощью программного средства Comsol-Multiphysics [8]. На основе построенной модели получены зависимости основных характеристик фотодиодов от таких параметров, как мольная доля алюминия и толщина слоя с собственной проводимостью (і-слоя). Полученная из моделей информация была использована для разработки фотодетектора УФ излучения с максимумом спектральной чувствительности на волне 0,24 мкм.

Результаты моделирования, представленные в этой работе, могут быть использованы для оптимизации фотоприемников AlGaN/GaN и разработки нового поколения оптоэлектронных устройств.

Структура фотодиода и численное моделирование

Исследуемая структура является типичной для нитридных фотодиодов и показана на рисунке 1. Между слоями «п» и «р» с умеренной электронной и дырочной проводимостью помещается і-слой с собственной проводимостью, в котором происходит основное поглощение принимаемого света и преобразование его в свободные носители заряда. Данная трехслойная структура дополняется сверху и снизу (по рисунку 1) слоями с высокой степенью легирования «п+» и «р+», которые позволяют получить омические контакты с металлическими выводами, изображенными на рисунке 1 утолщенными черными линиями.

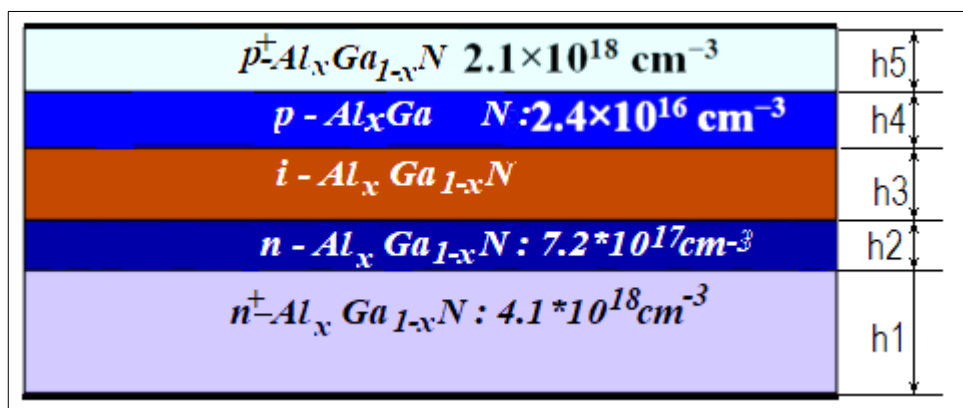


Рисунок 1.

Нижний n^+ -слой, помимо контактирования с выводами, решает еще несколько задач. Он уменьшает прораствание дислокаций от контакта с подложкой в вышележащие слои и компенсирует погрешности глубины травления верхних слоев при разделении диодов. Поэтому толщина нижнего n^+ -слоя существенно превосходит толщину

других слоев. Он наносится на буферный слой AlN, который, в свою очередь, опирается на сапфировую подложку.

Толщины слоев, обозначенные как $h_1 - h_5$, являются параметрами, которые могут оперативно изменяться перед запуском модели на расчет. На практике контактная n^+ -область делается шире остальной структуры и омический контакт реализуется сверху выступающей части. Однако такая геометрия, будучи заложенной в расчет, неоправданно усложняет его без заметного изменения результатов.

Примененная двумерная модель показана на рисунке 1. Эта модель, с учетом одинаковости процессов вдоль горизонтальной оси, фактически является одномерной, что является упрощающим для расчета фактором.

Модуль «оптоэлектроника» Комсола решает ряд основных полупроводниковых уравнений, состоящих из уравнения Пуассона, уравнения неразрывности и уравнений переноса для электронов и дырок. Кроме того, он предлагает несколько современных физических моделей взаимодействия полупроводника с ЭМ излучением.

Ширина запрещенной зоны E_g для $Al_xGa_{1-x}N$ при комнатной температуре рассчитывается по известной формуле [9], которая аппроксимирует реальную зависимость E_g от мольной доли алюминия -x квадратичной зависимостью:

$$E_g^{AlGaN} = xE_g^{AlN} + (1-x)E_g^{GaN} - 1.1x(1-x), \quad (1)$$

Величины запрещенной зоны AlN и GaN составляют:

- 1) $E_g^{AlN} = 6,2$ эВ [11],
- 2) $E_g^{GaN} = 3,42$ эВ [10].

Как известно, потенциал электронного сродства AlGaN уменьшается с увеличением доли алюминия и возрастанием ширины запрещенной зоны по закону, близкому к линейному. В расчет была заложена следующая формула из [11]:

$$\chi = 4,1 + 0,7(E_g^{GaN} - E_g^{AlGaN}) \quad (2)$$

Эффективные плотности состояний в зоне проводимости и в валентной зоне аппроксимируются линейными зависимостями от доли алюминия [11]:

$$\begin{aligned} N_c^{AlGaN} &= \left(\frac{T}{1K}\right)^{3/2} (1,8x + 4,6(1-x)) * 10^{14} \text{ см}^{-3} \\ N_v^{AlGaN} &= \left(\frac{T}{1K}\right)^{3/2} (10,6x + 9,2(1-x)) * 10^{15} \text{ см}^{-3}. \end{aligned} \quad (3)$$

Диэлектрическая проницаемость ϵ и относительные эффективные массы электронов (дырок), m_e (m_h), также полагались линейно зависимыми от доли алюминия и определялись как [11]:

$$\begin{aligned} \epsilon^{AlGaN} &= 10,1x + 10,4(1-x) \\ m_e^{AlGaN} &= 0,314x + 0,2(1-x) \\ m_h^{AlGaN} &= 0,417x + 1,0(1-x) \end{aligned} \quad (4)$$

Существуют температурно-зависимые модели подвижности носителей в нитридных материалах в слабом и сильном полях.

Однако, поскольку расчет проводился только для комнатной температуры (293 К), температурная зависимость была исключена из формул. Это позволяет использовать для подвижности электронов более простое выражение:

$$\mu_e(N, x) = \mu(x)_{\min} + \frac{\mu(x)_{\max} - \mu(x)_{\min}}{1 + \left(\frac{N_{tot}}{N_{ref}}\right)^{\alpha(x)}}, \quad (5)$$

где x – доля алюминия, $N_{\text{ref}} = 10^{17} \text{ см}^{-3}$ – эталонная концентрация примеси, N_{tot} – суммарная концентрация примесей в данном регионе кристалла. Полученные экспериментально [11] величины параметров $\mu(x)_{\text{max}}$, $\mu(x)_{\text{min}}$ и $\alpha(x)$ приведены в таблице.

Таблица. – Величины параметров для формулы (5)

Материал	$\mu_{\text{min}},$ $\text{см}^2/(\text{V}\cdot\text{s})$	$\mu_{\text{max}},$ $\text{см}^2/(\text{V}\cdot\text{s})$	α
GaN	295,0	1460,7	0,66
$\text{Al}_{0,2}\text{Ga}_{0,8}\text{N}$	132,0	306,1	0,29
$\text{Al}_{0,5}\text{Ga}_{0,5}\text{N}$	41,7	208,3	0,12
$\text{Al}_{0,8}\text{Ga}_{0,2}\text{N}$	47,8	199,6	0,17
AlN	297,8	683,8	1,16

Для области с собственной проводимостью $N_{\text{tot}} = 0$ подвижность электронов совпадает с максимальным значением: $\mu_e = \mu_{\text{max}}$. Эта величина вычислялась по аппроксимирующей формуле, которая дает точное совпадение в пяти приведенных в таблице точках: $\mu_e = 18475x^4 - 40696x^3 + 32168x^2 - 10723x + 1460$.

Подвижность дырок принята равной $5 \text{ см}^2 \text{ В}^{-1} \text{ с}^{-1}$ [10].

Ввиду большой ширины запрещенной зоны AlGaN основным механизмом потери носителей в AlGaN является рекомбинация, обусловленная дефектами. В расчетах учитываются две модели рекомбинации. Упрощенная модель рекомбинации, происходящей на дефектах (ловушках) Шокли – Рида – Холла (SRH), в которой ловушкам приписывается один энергетический уровень, а другие характеристики, включая концентрацию дефектов, выражаются временами жизни электронов и дырок. Данное время взято равным 1 нс, а энергетический уровень дефектов взят вблизи середины запрещенной зоны. Второй учитываемый тип – прямая рекомбинация с параметром $C = 10^{-8} \text{ см}^{-3} \text{ с}^{-1}$ [8].

Комсол предлагает несколько моделей оптической генерации и рекомбинации носителей. Была использована модель, основанная на расчете элемента переходной матрицы через время жизни носителя при спонтанной рекомбинации, которое взято равным $\tau_{\text{spont}} = 1 \text{ нс}$. Элемент переходной матрицы также очень сильно зависит от показателя преломления материала – n . Величина последнего, в свою очередь, является функцией длины волны λ . Эту зависимость можно приближенно описать дисперсионным уравнением Селмейера

$$n^2(\lambda) = 1 + \frac{A_0}{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2}, \quad (6)$$

в котором константы A_0 и λ_0 определяются шириной запрещенной зоны и для нитридных соединений аппроксимируются следующими выражениями [1]:

$$\begin{aligned} A_0 &= 6,626 - 0,934E_g + 0,0598E_g^2, \\ \lambda_0 &= (396,8 - 84,12E_g + 6,758E_g^2) [nm] \end{aligned} \quad (7)$$

В данные формулы ширина запрещенной зоны подставляется в эВ, а длина волны – в нм.

Комсол рассчитывает множество величин, в том числе величину коэффициента поглощения и его спектральное поведение – $\alpha(\lambda)$, которое легко пересчитывается в коэффициент экстинкции:

$$k(\lambda) = \frac{\alpha(\lambda)\lambda}{4\pi}$$

Численное моделирование проводилось для AlGaN p-i-n-фотодиод при 293 К. Ширина диода полагалась равной 20 мкм, толщина – размер в глубину – 1 м. Выбор толщины обусловлен особенностью задания абсолютной величины электромагнитной мощности, которая в двумерной задаче считается распределенной в глубину на единицу длины, т. е. на 1 м.

Результаты и обсуждение

Комсол вычисляет большое количество характеристик моделируемых процессов и имеет очень богатый арсенал представления результатов. Наиболее наглядной является графическая форма, используемая далее. На рисунке 2 показан график распределения легирующих примесей для толщины обедненного слоя 2 мкм. Положительным значениям соответствует акцепторная примесь, отрицательным – донорная. На интервале толщины от 0,15 до 2,15 мкм легирование отсутствует. Мы имеем слой с собственной проводимостью, поглощающий падающее на него излучение.

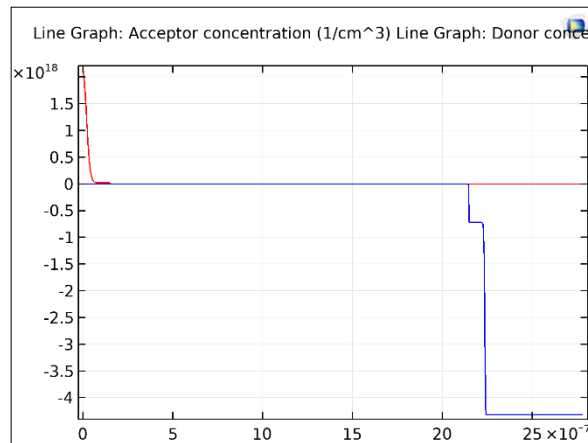


Рисунок 2.

Главными параметрами фотоприемника являются:

- 1) коэффициент преобразования падающей световой мощности в электрический ток (ватт-амперная характеристика),
- 2) зависимость этого коэффициента от длины световой волны (спектральная характеристика).

На рисунке 3 приведены полученные в результате расчетов графики зависимости величины фототока (i_{ph}) от длины световой волны (λ) и мольной доли алюминия в составе i-слоя (x) при падающей световой мощности 1 Вт. Расчеты проводились для толщины i-слоя 0,2 мкм и обратном напряжении, приложенном к фотододу $V_n = 1$ В. Максимум спектральной характеристики, в зависимости от x , приходится на длины волн от $\lambda = 0,2$ до 0,32 мкм. При этом в коротковолновой части диапазона для $x = 0,8$ максимум ватт-амперной характеристики составляет $k = 0,085$ А/Вт, в длинноволновой части – для $x = 0$ – $k = 0,175$ А/Вт.

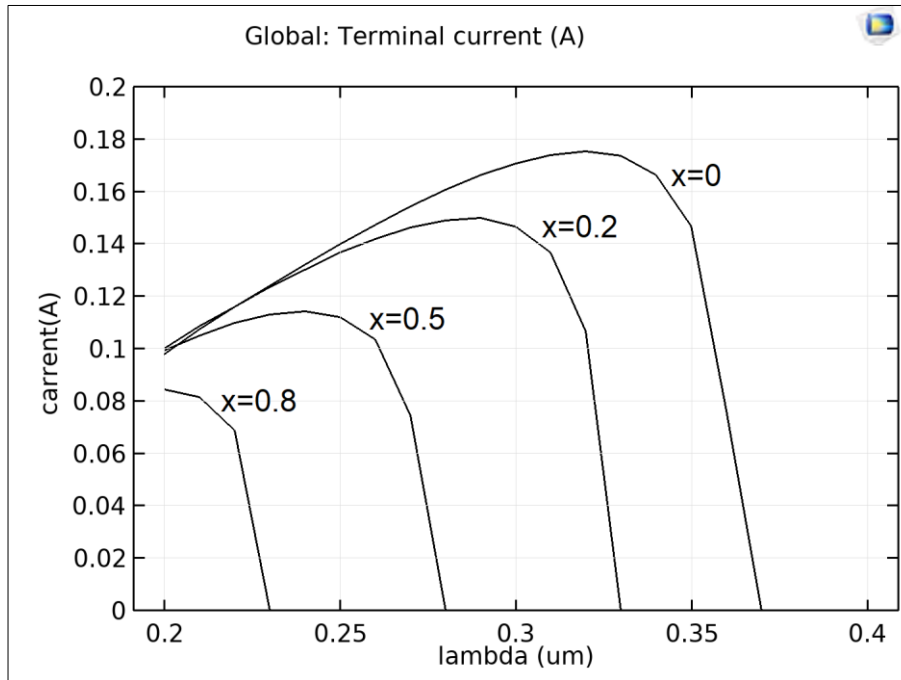


Рисунок 3.

Спад спектральной характеристики при уменьшении длины световой волны вполне очевиден и обусловлен уменьшением плотности фотонного потока при неизменной величине падающей световой мощности и увеличивающейся энергии фотонов.

Кроме того, использованная модель частотной зависимости коэффициента преломления Селмейера определяет увеличение последнего с уменьшением длины световой волны (нормальная дисперсия). Увеличение показателя преломления приводит к уменьшению элемента переходной матрицы в модели поглощения света и соответствующему уменьшению поглощения света.

На рисунке 4 приведены графики дисперсии коэффициента поглощения AlGaIn при различной величине доли алюминия.

Удивительно, но до настоящего времени нет общепризнанных значений этой величины для AlGaIn в области поглощения им световой мощности.

Величина α по одним источникам [12] составляет более 10^5 см^{-1} , а по другим [13] – около $1,8 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$.

Полученные при моделировании величины α скорее подтверждают последние значения. Однако не очевидно, что примененная модель взаимодействия полупроводника с излучением учитывает все механизмы этого процесса.

Пересечение графиков при длине волны 0,23 мкм по-прежнему объясняется дисперсией коэффициента преломления материала, который влияет на величину элемента переходной матрицы при меньших x сильнее, чем при больших.

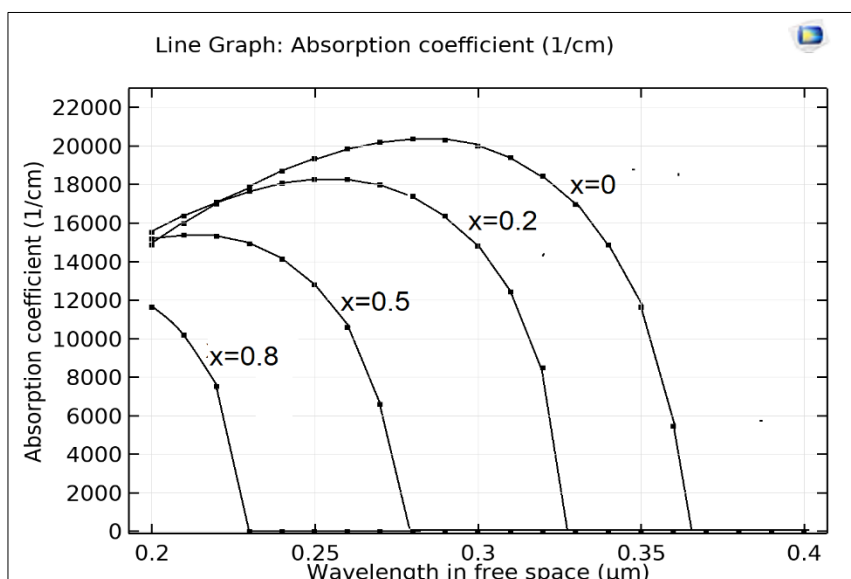


Рисунок 4.

Одним из важных вопросов построения р-і-п фотодиодов является выбор толщины поглощающего і-слоя. Имеются физические основания для ожидания оптимума этой величины по некоторым критериям. Например, увеличение толщины і-слоя, с одной стороны, увеличивает поглощение световой мощности, но с другой – удлиняет путь фотоносителей и увеличивает их потери за счет рекомбинации. Это позволяет предположить наличие оптимума по максимуму коэффициента преобразования.

На рисунке 5 показаны графики ватт-амперных характеристик, рассчитанных для $x = 0$ (чистый GaN) при различных толщинах і-слоя (h_3).

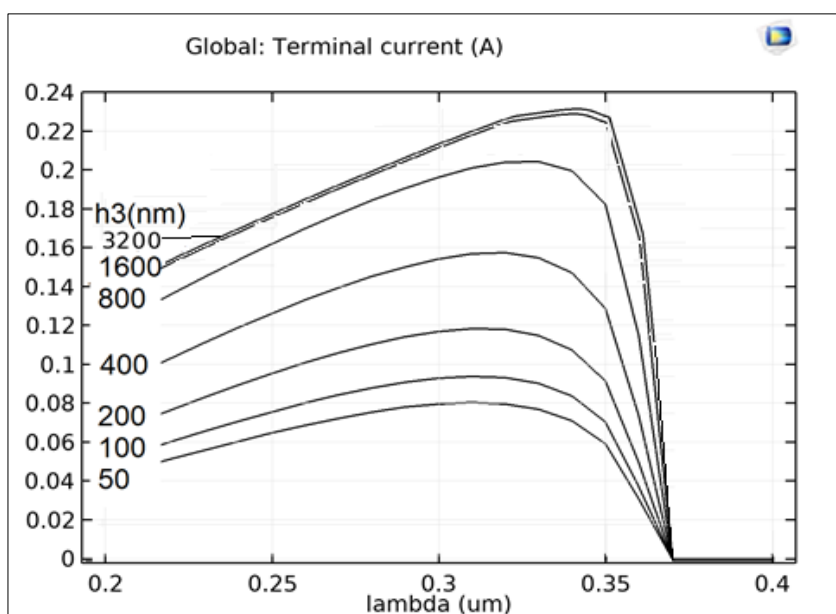


Рисунок 5.

Из данных графиков видно, что изменение толщины і-слоя от 50 до 3200 нм (в 64 раза) увеличивает максимальный фототок от 0,07 до 0,23 А (приблизительно в 3 раза). При этом основной прирост фототока приходится на интервал толщин от 200

до 800 нм. Видимо, этот диапазон толщин *i*-слоя является наилучшим для реализации наибольшего коэффициента преобразования. Тем не менее максимум чувствительности по толщине *i*-слоя не обнаруживается. Кривая графика медленно достигает величины 0,23 А/Вт и далее идет почти горизонтально.

Вольт-амперная характеристика (ВАХ) фотодиода легко строится комсомом, поскольку для этого не нужно учитывать взаимодействие со световым потоком.

На рисунке 6 представлены графики прямой ветви при различных величинах доли алюминия –*x* в твердом растворе. Ход графиков очевиден, поскольку увеличение *x* приводит к увеличению ширины запрещенной зоны, а это, в свою очередь, уменьшает обратный ток и смещает график ВАХ вправо. Интерес представляет лишь величина прямого напряжения, при которой появляется заметный прямой ток. Обозначим его U_x . Тогда $U_0 = 3,2$ В, $U_{0,2} = 3,53$ В, $U_{0,5} = 4,51$ В, $U_{0,8} = 5,2$ В.

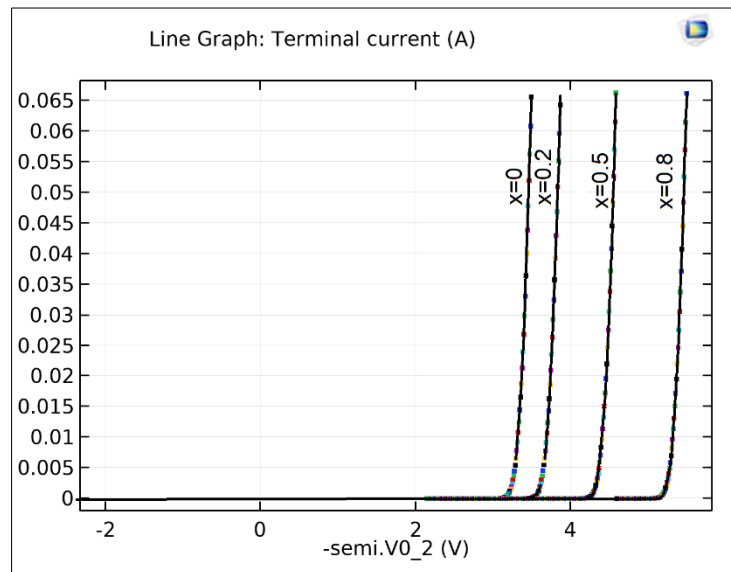


Рисунок 6.

Особого обсуждения заслуживает ветвь обратного напряжения, обуславливающая темновой ток фотодиода. В *p-i-n*-фотодиодах, сделанных на основе широкозонных материалов двойных и тройных соединений нитридов, при комнатных температурах собственная концентрация неосновных носителей заряда очень мала. Следовательно, диффузия носителей заряда не вносит сколько-нибудь заметного вклада в величину темнового тока. Большая ширина запрещенной зоны и толщины *i*-слоя также, практически, обнуляют туннельный ток. Поэтому основной вклад в темновой ток вносят генерационно-рекомбинационные процессы.

Существует несколько гипотез генерации свободных носителей путем их транзита через дефекты кристаллической структуры [12–14]. Хирш и Баррире [12] предложили приписать *p-i-n*-структуре некое сопротивление утечки, обусловленное несовершенством кристаллической структуры. Это сопротивление создает омический обратный ток, пропорциональный обратному напряжению.

Поскольку генерация носителей обусловлена воздействием фононов на валентные и захваченные ловушками электроны, ее интенсивность является функцией температуры. Вид такой функции определяется рассматриваемым механизмом генерации и, как правило, содержит большое количество неопределенных параметров, которые должны подбираться на основе экспериментов.

В такой ситуации нет существенных различий между сложными гипотезами генерации транзитных носителей и простой моделью Шокли – Рида – Холла, в которой требуется только три параметра: расположение энергетического уровня ловушек, время жизни свободных электронов и дырок.

В расчетах было положено: времена жизни $\tau_n = \tau_p = 1\text{ns}$, уровень ловушек на 2 вольта выше потолка валентной зоны. Результат расчета представлен на рисунке 7.

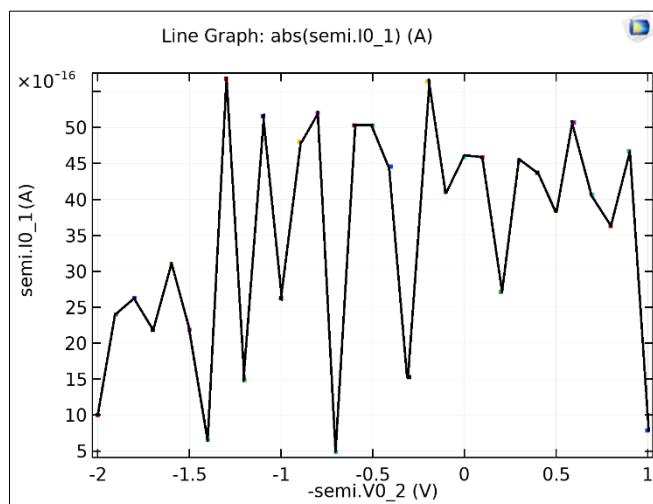


Рисунок 7.

Мы получили хаотичный график темнового тока, который скорее выражает невязку решения и никак не зависит от приложенного обратного напряжения. Средняя величина этого «токового шума» составляет $4 \cdot 10^{-15}$ А. Измерить столь малый ток проблематично, поскольку он сравним с токами утечек диэлектриков. По этой причине ссылки на эксперименты по измерению темнового тока будут малоубедительны. По имеющимся данным [15], величина темнового тока AlGaN фотодиодов составляет около 10^{-14} А, однако делается оговорка о большой погрешности данных измерений.

Заключение

Описанные методы моделирования AlGaN фотодиодов и полученные результаты позволяют вычислить основные характеристики данных приборов до их практической реализации, а также определять требуемые параметры процесса изготовления.

Построенная модель не является полной. В частности, вопросы динамики функционирования: частотные характеристики, быстроедействие – пока остаются без ответа. В то же время выбранное программное средство имеет необходимые для этого инструменты и позволяет в будущем получить ответы на эти вопросы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Оптические свойства пленок GaN/Al₂O₃, легированных кремнием / Н. С. Заяц [и др.] // Физика и техника полупроводников. – 2009. – Т. 43, вып. 5. – С. 617–620.
2. Mohammad, S. N. Progress and prospects of group III-V nitride semiconductors / S. N. Mohammad, H. Morkoç // Progress Quantum Electron. 1996. – Vol. 20. – P. 361.
3. Ambacher, O. Growth and applications of Group III-nitrides / O. Ambacher // J. of Physics D: Applied Physics. – 1998. – Vol. 31. – P. 2653.

4. Enhancement of the conversion efficiency of GaN-based photovoltaic devices with AlGa_N/InGa_N absorption layers / C. C. Yang [et al.] // Appl. Phys. Lett. – 2010. – Vol. 97.
5. Nearly lattice-matched n, i, and p layers for InGa_N p-i-n photodiodes in the 365–500 nm spectral range / E. A. Berkman [et al.] // Appl. Phys. Lett. – 2008. – Vol. 92. – P. 101118-1–101118-3.
6. In_{0.11}Ga_{0.89}N-based p-i-n photodetector / Y. K. Su [et al.] // Phys. Status Solidi. – 2009. – Vol. C 6(S2). – S. 811–813.
7. Optoelectronics Materials and Devices for Sensing and Imaging / Y. Lu, Y. Zhang, X. Y. Li // 7th International Symposium on Advanced Optical Manufacturing and Testing Technologies : Proc. SPIE 9284. – Harbin, 2014.
8. COMSOL Modeling Software [Electronic resource]. – Mode of access: <https://www.comsol.com>.
9. Никонов, А. П. Оптические свойства гетероэпитаксиальных слоев AlGa_N / А. П. Никонов, К. О. Болтарь, Н. И. Яковлева // Приклад. физика. – 2014. – № 2. – С. 50–52.
10. Куэй, Р. Электроника на основе нитрида галлия : пер. с англ. / Р. Куэй. – М. : Техносфера, 2011. – 582 с.
11. ATLAS User's Manual, Device Simulation Software, Version 5.20.2. R [Electronic resource]. – Mode of access: http://www.eng.buffalo.edu/~wie/silvaco/atlas_user_manual.pdf.
12. Hirsch, L. Electrical characterization of InGa_N/Ga_N light emitting diodes grown by molecular beam epitaxy / L. Hirsch, A. S. Barriere // J. of Applied Physics. – 2003. – Vol. 94, № 8. – P. 5014.
13. Мотт, Н. Электронные процессы в некристаллических веществах / Н. Мотт. – М. : Мир, 1982. – 472 с.
14. Temkin, H. Ultraviolet Photodetectors Based on Ga_N and AlGa_N, in Recent and Evolving Advanced Semiconductor and Organic Nano-Technologies / H. Temkin // Nano-scale Electronics and Optoelectronics. – 2003. – Vol. 1.
15. Анализ механизмов темновых токов матриц ультрафиолетовых фотодиодов на основе гетероструктур AlGa_N / Н. И. Яковлева [и др.] // Успехи приклад. физики. – 2018. – Т. 6, № 1. – С. 44–54.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 26.05.2020

Vorsin N. N., Gladyshek A. A., Kushner T. L., Tarasyuk N. P., Chugunov S. V. Modelling and Development of AlGa_N p-i-n-Photodiodes

AlGa_N ternary alloys with a band gap from 3.4 to 6.2 eV are very promising for photodetectors in the UV wavelength range. Using Comsol software based on Al_xGa_{1-x}N, a p-i-n photodiode model was developed, including its I – V characteristic, spectral sensitivity of received radiation, absorption coefficient as a function of aluminum fraction and depletion layer thickness. The peak sensitivity of the photodiode is from 0.08 to 0.18 A / W at wavelengths of 0.2–0.33 μm. This corresponds to experimental results taken from the literature.

УДК 539.12

А. В. Ивашкевич¹, Е. М. Овсиюк², В. В. Кисель³, В. М. Редьков⁴¹студент Мозырского государственного

педагогического университета имени И. П. Шамякина

²канд. физ.-мат. наук, доц. каф. физики и математики

Мозырского государственного педагогического университета имени И. П. Шамякина

³канд. физ.-мат. наук, доц. каф. физики

Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники

⁴д-р физ.-мат. наук, гл. науч. сотрудник

Института физики имени Б. И. Степанова НАН Беларуси

e-mail: v.redkov@ifanbel.bas-net.by

РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ 3/2 И ОПЕРАТОР СПИРАЛЬНОСТИ

Исследуются решения типа плоских волн для массивной частицы со спином 3/2. Волновое уравнение дает алгебраическую систему из четырех уравнений для восьми неизвестных параметров, что предполагает существование четырех независимых решений. Чтобы связать выбор независимых решений с квантовыми числами физического оператора, исследован вопрос о собственных состояниях оператора спиральности. Существуют четыре различных собственных значения оператора спиральности $\sigma = \pm 1/2, \pm 3/2$. Собственные значения $\sigma = \pm 1/2$ оказываются двукратно вырожденными, что приводит к существованию двух различных собственных векторов для каждого из значений $\sigma = -1/2$ и $\sigma = +1/2$, они построены в явном виде. Показано, что собственные векторы со значениями $\sigma = \pm 3/2$ являются решениями волнового уравнения, в то время как двукратно вырожденные собственные векторы по отдельности не являются решениями этого уравнения. Построены решения волнового уравнения в виде суперпозиции таких состояний. Таким образом, для частицы со спином 3/2 в явном виде построена полная система решений типа плоских волн в базисе импульс-спиральность.

Введение

После работ В. Паули, М. Фирца [1; 2] и В. Рариты, Дж. Швингера [3] в физической литературе всегда присутствовал интерес к теории частиц с высшими спинами, в том числе и со спином 3/2 [4–19]. Отметим наиболее значимые аспекты этой теории.

Прежде всего, это вопрос о выборе исходного уравнения, наиболее последовательно он реализуется в рамках теории релятивистских уравнений первого порядка, хотя много исследований выполнено и с использованием уравнений второго порядка или с использованием смешанных вариантов. Выбор того или иного формализма особенно важен при учете внешних электромагнитных (и гравитационных) полей, поскольку это существенно влияет на явный вид конечных уравнений. Формализм уравнений первого порядка автоматически обеспечивает корректное решение вопроса о числе независимых степеней свободы для частицы со спином 3/2 не только в свободном случае, но и в присутствии внешних полей (см. изложение, например, в [17]).

Наибольший интерес в литературе вызывало существование аномальных решений для этой частицы в присутствии внешних полей, которым сопоставляется скорость частицы большая, чем скорость света.

Отдельный интерес представляет случай безмассовой частицы со спином 3/2. Как показали В. Паули и М. Фирц, здесь существует специфическая калибровочная симметрия: 4-градиент от произвольной биспинорной функции $\partial_a \Psi(sx)$ порождает решения безмассового волнового уравнения [17].

Основная цель данной работы состоит в том, чтобы проследить на основе построения в явном виде решений типа плоских волн с учетом диагонализации оператора

спиральности за степенями свободы частицы со спином 3/2. При этом за основу берется формализм уравнений первого порядка в базисе Рариты – Швингера [3].

1. Разделение переменных

В базисе Рариты – Швингера волновое уравнение для свободной частицы со спином 3/2 можно представить в виде совокупности трех уравнений (подробнее см. в приложении А):

$$\left(i\gamma^a \partial_a - \frac{mc}{\hbar}\right) \Psi_l(x) = 0, \quad \gamma^l \Psi_l(x) = 0, \quad \partial_l \Psi^l(x) = 0, \quad (1.1)$$

первое уравнение называем основным, второе и третье – дополнительными. Здесь 16-компонентная волновая функция $\Psi_l(x)$ – это вектор-биспинор:

$$\Psi_{A(l)}(x) = \begin{pmatrix} \Psi_{1(0)}(x) & \Psi_{1(1)}(x) & \Psi_{1(2)}(x) & \Psi_{1(3)}(x) \\ \Psi_{2(0)}(x) & \Psi_{2(1)}(x) & \Psi_{2(2)}(x) & \Psi_{2(3)}(x) \\ \Psi_{3(0)}(x) & \Psi_{3(1)}(x) & \Psi_{3(2)}(x) & \Psi_{3(3)}(x) \\ \Psi_{4(0)}(x) & \Psi_{4(1)}(x) & \Psi_{4(2)}(x) & \Psi_{4(3)}(x) \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

A – биспинорный индекс, (l) – векторный индекс. Используем представление матриц Дирака в спинорном базисе:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & +i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ +i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решения уравнений (1.1) ищем в виде плоских волн:

$$\Psi_l(x) = e^{-i\epsilon t/\hbar} e^{+ip_k x^k} A_l, \quad A_l = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Ниже используем величины: $mc/\hbar = M$, $\epsilon/\hbar c = E$, $p_i/\hbar = k_j$. Учитывая подстановку (1.3), из (1.1) находим алгебраические уравнения (индексы опускаются согласно правилам: $A^0 = A_0, A^j = -A_j$)

$$(\gamma^0 E - \gamma^j k_j - M) A_l = 0, \quad \gamma^0 A_0 + \gamma^j A_j = 0, \quad E A_0 + k_j A_j = 0. \quad (1.4)$$

Первое (основное) уравнение из (1.4) имеет вид:

$$\begin{pmatrix} -M & 0 & (E+k_3) & (k_1-ik_2) \\ 0 & -M & (k_1+ik_2) & (E-k_3) \\ (E-k_3) & -(k_1-ik_2) & -M & 0 \\ -(k_1+ik_2) & (E+k_3) & 0 & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_l \\ b_l \\ c_l \\ d_l \end{pmatrix} = 0, \quad l = 0, 1, 2, 3. \quad (1.5)$$

Из равенства нулю определителя системы (1.5) находим условие связи

$$(-M^2 + E^2 - k_3^2 - k_2^2 - k_1^2)^2 = 0 \Rightarrow E^2 = M^2 + \mathbf{k}^2. \quad (1.6)$$

Убеждаемся, что обращается в ноль также определитель 3×3 -матрицы

$$\det \begin{vmatrix} -M & 0 & (E + k_3) \\ 0 & -M & (k_1 + ik_2) \\ (E - k_3) & -(k_1 - ik_2) & -M \end{vmatrix} = -M(M^2 - E^2 + \mathbf{k}^2) = 0,$$

т. е. ранг матрицы системы (1.5) равен двум. Следовательно, в (1.5) есть только два независимых уравнения, оставляем первые два:

$$(E + k_3) c_l + (k_1 - ik_2) d_l = M a_l, \quad (k_1 + ik_2) c_l + (E - k_3) d_l = M b_l. \quad (1.7)$$

Их решение ($l = 0, 1, 2, 3$) следующее:

$$c_l = \frac{E - k_3}{M} a_l - \frac{k_1 - ik_2}{M} b_l, \quad d_l = -\frac{k_1 + ik_2}{M} a_l + \frac{E + k_3}{M} b_l, \quad (1.8)$$

или коротко: $c_l = \alpha a_l + \beta b_l$, $d_l = \rho a_l + \gamma b_l$.

Получаем явный вид первого дополнительного уравнения из (1.4):

$$\begin{aligned} a_0 + a_3 &= -(b_1 - ib_2), & b_0 - b_3 &= -(a_1 + ia_2), \\ c_0 - c_3 &= d_1 - id_2, & d_0 + d_3 &= c_1 + ic_2. \end{aligned} \quad (1.9)$$

В двух последних уравнениях исключим с помощью (1.8) переменные c_l , d_l ; при этом первые два уравнения оставляем неизменными:

$$\begin{aligned} a_0 + a_3 &= -(b_1 - ib_2), & b_0 - b_3 &= -(a_1 + ia_2), \\ \alpha(a_0 - a_3) + \beta(b_0 - b_3) &= \rho(a_1 - ia_2) + \gamma(b_1 - ib_2), \\ \rho(a_0 + a_3) + \gamma(b_0 + b_3) &= \alpha(a_1 + ia_2) + \beta(b_1 + ib_2). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Здесь имеем восемь переменных a_l , b_l и четыре линейных уравнения. Второе дополнительное уравнение из (1.4) дает

$$\begin{aligned} E a_0 + k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3 &= 0, & E b_0 + k_1 b_1 + k_2 b_2 + k_3 b_3 &= 0, \\ E c_0 + k_1 c_1 + k_2 c_2 + k_3 c_3 &= 0, & E d_0 + k_1 d_1 + k_2 d_2 + k_3 d_3 &= 0. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Два последних уравнения из (1.11) при учете условий (1.8) становятся следствиями двух первых. Следовательно, в системе (1.11) есть только два независимых уравнения:

$$E a_0 + k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3 = 0, \quad E b_0 + k_1 b_1 + k_2 b_2 + k_3 b_3 = 0. \quad (1.12)$$

Соберем вместе уравнения (1.10) и (1.12):

$$\begin{aligned} a_0 + a_3 &= -(b_1 - ib_2), & b_0 - b_3 &= -(a_1 + ia_2), \\ \alpha(a_0 - a_3) + \beta(b_0 - b_3) &= \rho(a_1 - ia_2) + \gamma(b_1 - ib_2), \\ \rho(a_0 + a_3) + \gamma(b_0 + b_3) &= \alpha(a_1 + ia_2) + \beta(b_1 + ib_2), \\ E a_0 + k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3 &= 0, & E b_0 + k_1 b_1 + k_2 b_2 + k_3 b_3 &= 0. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Убедимся, что из первых четырех уравнений в (1.13) следуют два последних. Действительно, методом исключения получаем два уравнения, содержащие соответственно только a_l и b_l (при этом учитываем явный вид коэффициентов $\alpha, \beta, \rho, \sigma$):

$$\begin{aligned}(E - k_3)(a_0 - a_3) + (k_1 + ik_2)(a_1 - ia_2) &= -(k_1 - ik_2)(a_1 + ia_2) - (E + k_3)(a_0 + a_3), \\ (k_1 + ik_2)(b_1 - ib_2) + (E - k_3)(b_0 - b_3) &= -(E + k_3)(b_0 + b_3) - (k_1 - ik_2)(b_1 + ib_2),\end{aligned}$$

эти уравнения дают

$$Ea_0 + k_1a_1 + k_2a_2 + k_3a_3 = 0, \quad Eb_0 + k_1b_1 + k_2b_2 + k_3b_3 = 0. \quad (1.14)$$

Следовательно, в системе (1.13) последние два уравнения можно отбросить.

В системе (1.13) с помощью двух первых уравнений

$$a_0 = -a_3 - (b_1 - ib_2), \quad b_0 = +b_3 - (a_1 + ia_2) \quad (1.15)$$

исключим переменные a_0, b_0 , в результате получим

$$k_1a_1 + k_2a_2 + k_3a_3 = +Ea_3 + E(b_1 - ib_2), \quad k_1b_1 + k_2b_2 + k_3b_3 = -Eb_3 + E(a_1 + ia_2). \quad (1.16)$$

Здесь имеем два уравнения для шести переменных, т. е. должны существовать четыре решения.

Если учесть соотношения (1.15), то из (1.16) следуют уравнения (1.14). Это значит, что эквивалентной формой уравнений (1.16) является совокупность четырех уравнений:

$$\begin{aligned}Ea_0 + k_1a_1 + k_2a_2 + k_3a_3 = 0, \quad Eb_0 + k_1b_1 + k_2b_2 + k_3b_3 = 0, \\ a_0 + a_3 = -(b_1 - ib_2), \quad b_0 - b_3 = -(a_1 + ia_2).\end{aligned} \quad (1.17)$$

Чтобы привязать выбор четырех независимых решений системы уравнений (1.17) к квантовым числам физического оператора, в следующем разделе исследуем вопрос о собственных состояниях оператора спиральности.

2. Оператор спиральности

Будем диагонализировать на решениях дополнительно оператор спиральности:

$$\Sigma = -i(S_1\partial_1 + S_2\partial_2 + S_3\partial_3), \quad \Sigma\Psi(x) = \sigma\Psi(x). \quad (2.1)$$

С учетом подстановки для решений в виде плоских волн для Σ имеем представление

$$\Sigma = i(k_1\sigma^{23} + k_2\sigma^{31} + k_3\sigma^{12}) \otimes I + I \otimes i(k_1j^{23} + k_2j^{31} + k_3j^{12}). \quad (2.2)$$

Приведем явный вид входящих в (2.2) матриц:

$$\begin{aligned}\sigma^{23} = \frac{1}{2}\gamma^2\gamma^3 = -\frac{i}{2}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \sigma^{31} = \frac{1}{2}\gamma^3\gamma^1 = -\frac{i}{2}\begin{vmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{vmatrix}, \\ \sigma^{12} = \frac{1}{2}\gamma^1\gamma^2 = -\frac{i}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix},\end{aligned} \quad (2.3)$$

$$j^{23} = \delta_k^2 g^{3l} - \delta_k^3 g^{2l} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad j^{31} = \delta_k^3 g^{1l} - \delta_k^1 g^{3l} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$j^{12} = \delta_k^1 g^{2l} - \delta_k^2 g^{1l} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (2.4)$$

С учетом (2.3) – (2.4) выражение для оператора спиральности (2.2) принимает вид

$$\Sigma = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} k_3 & k_1 - ik_2 & 0 & 0 \\ k_1 + ik_2 & -k_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & k_1 - ik_2 \\ 0 & 0 & k_1 + ik_2 & -k_3 \end{vmatrix} \otimes I + I \otimes i \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_2 \\ 0 & k_3 & 0 & -k_1 \\ 0 & -k_2 & k_1 & 0 \end{vmatrix}. \quad (2.5)$$

Следовательно, уравнение $\Sigma \Psi = \sigma \Psi$ дает четыре соотношения:

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} k_3 & (k_1 - ik_2) & 0 & 0 \\ (k_1 + ik_2) & -k_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & (k_1 - ik_2) \\ 0 & 0 & (k_1 + ik_2) & -k_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \end{vmatrix} = \sigma \begin{vmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \end{vmatrix},$$

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} k_3 & (k_1 - ik_2) & 0 & 0 \\ (k_1 + ik_2) & -k_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & (k_1 - ik_2) \\ 0 & 0 & (k_1 + ik_2) & -k_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{vmatrix} + i \begin{vmatrix} (k_2 a_3 - k_3 a_2) \\ (k_2 b_3 - k_3 b_2) \\ (k_2 c_3 - k_3 c_2) \\ (k_2 d_3 - k_3 d_2) \end{vmatrix} = \sigma \begin{vmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{vmatrix},$$

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} k_3 & (k_1 - ik_2) & 0 & 0 \\ (k_1 + ik_2) & -k_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & (k_1 - ik_2) \\ 0 & 0 & (k_1 + ik_2) & -k_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{vmatrix} + i \begin{vmatrix} (k_3 a_1 - k_1 a_3) \\ (k_3 b_1 - k_1 b_3) \\ (k_3 c_1 - k_1 c_3) \\ (k_3 d_1 - k_1 d_3) \end{vmatrix} = \sigma \begin{vmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{vmatrix},$$

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} k_3 & (k_1 - ik_2) & 0 & 0 \\ (k_1 + ik_2) & -k_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & (k_1 - ik_2) \\ 0 & 0 & (k_1 + ik_2) & -k_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \\ d_3 \end{vmatrix} + i \begin{vmatrix} (k_1 a_2 - k_2 a_1) \\ (k_1 b_2 - k_2 b_1) \\ (k_1 c_2 - k_2 c_1) \\ (k_1 d_2 - k_2 d_1) \end{vmatrix} = \sigma \begin{vmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \\ d_3 \end{vmatrix}.$$

Отсюда получаем 16 линейных уравнений:

$$\begin{aligned} (k_3 - 2\sigma) a_0 + (k_1 - ik_2) b_0 &= 0, \\ (k_1 + ik_2) a_0 - (k_3 + 2\sigma) b_0 &= 0, \\ (k_3 - 2\sigma) c_0 + (k_1 - ik_2) d_0 &= 0, \\ (k_1 + ik_2) c_0 - (k_3 + 2\sigma) d_0 &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(k_3 - 2\sigma) a_1 + (k_1 - ik_2) b_1 + 2ik_2 a_3 - 2ik_3 a_2 &= 0, \\
(k_1 + ik_2) a_1 - (k_3 + 2\sigma) b_1 + 2ik_2 b_3 - 2ik_3 b_2 &= 0, \\
(k_3 - 2\sigma) c_1 + (k_1 - ik_2) d_1 + 2ik_2 c_3 - 2ik_3 c_2 &= 0, \\
(k_1 + ik_2) c_1 - (k_3 + 2\sigma) d_1 + 2ik_2 d_3 - 2ik_3 d_2 &= 0, \\
(k_3 - 2\sigma) a_2 + (k_1 - ik_2) b_2 + 2ik_3 a_1 - 2ik_1 a_3 &= 0, \\
(k_1 + ik_2) a_2 - (k_3 + 2\sigma) b_2 + 2ik_3 b_1 - 2ik_1 b_3 &= 0, \\
(k_3 - 2\sigma) c_2 + (k_1 - ik_2) d_2 + 2ik_3 c_1 - 2ik_1 c_3 &= 0, \\
(k_1 + ik_2) c_2 - (k_3 + 2\sigma) d_2 + 2ik_3 d_1 - 2ik_1 d_3 &= 0, \\
(k_3 - 2\sigma) a_3 + (k_1 - ik_2) b_3 + 2ik_1 a_2 - 2ik_2 a_1 &= 0, \\
(k_1 + ik_2) a_3 - (k_3 + 2\sigma) b_3 + 2ik_1 b_2 - 2ik_2 b_1 &= 0, \\
(k_3 - 2\sigma) c_3 + (k_1 - ik_2) d_3 + 2ik_1 c_2 - 2ik_2 c_1 &= 0, \\
(k_1 + ik_2) c_3 - (k_3 + 2\sigma) d_3 + 2ik_1 d_2 - 2ik_2 d_1 &= 0.
\end{aligned}$$

Эти уравнения можно разбить на четыре несвязанные группы ($16 = 2 + 2 + 6 + 6$). Первые две системы:

$$\begin{aligned}
(k_3 - 2\sigma) a_0 + (k_1 - ik_2) b_0 &= 0, & (k_1 + ik_2) a_0 - (k_3 + 2\sigma) b_0 &= 0; \\
(k_3 - 2\sigma) c_0 + (k_1 - ik_2) d_0 &= 0, & (k_1 + ik_2) c_0 - (k_3 + 2\sigma) d_0 &= 0
\end{aligned} \tag{2.6}$$

содержат только переменные с индексом 0. Эти уравнения приводят к двум собственным значениям $\sigma = \pm(1/2)\sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2} = \pm(1/2)k$, решения систем (2.6) следующие:

$$b_0 = \frac{\pm k - k_3}{k_1 - ik_2} a_0 = \frac{k_1 + ik_2}{\pm k + k_3} a_0, \quad d_0 = \frac{\pm k - k_3}{k_1 - ik_2} c_0 = \frac{k_1 + ik_2}{\pm k + k_3} c_0. \tag{2.7}$$

Отмечаем, что уравнения (2.6) имеют нетривиальные (ненулевые) решения только для спиральностей $\sigma = \pm \frac{k}{2}$, при всех других спиральностях величины a_0, b_0, c_0, d_0 обращаются в ноль. Легко можно убедиться, что формулы (см. (1.8)) дают выражения для c_0, d_0 , согласующиеся с последним соотношением из (2.7).

Теперь обращаемся к шести уравнениям для величин a_j, b_j :

$$\begin{aligned}
+(k_3 - 2\sigma) a_1 - 2ik_3 a_2 + 2ik_2 a_3 &= -(k_1 - ik_2) b_1, \\
+2ik_3 a_1 + (k_3 - 2\sigma) a_2 - 2ik_1 a_3 &= -(k_1 - ik_2) b_2, \\
-2ik_2 a_1 + 2ik_1 a_2 + (k_3 - 2\sigma) a_3 &= -(k_1 - ik_2) b_3, \\
-(k_3 + 2\sigma) b_1 - 2ik_3 b_2 + 2ik_2 b_3 &= -(k_1 + ik_2) a_1, \\
+2ik_3 b_1 - (k_3 + 2\sigma) b_2 - 2ik_1 b_3 &= -(k_1 + ik_2) a_2, \\
-2ik_2 b_1 + 2ik_1 b_2 - (k_3 + 2\sigma) b_3 &= -(k_1 + ik_2) a_3
\end{aligned} \tag{2.8}$$

и шести уравнениям для c_j, d_j :

$$\begin{aligned}
+(k_3 - 2\sigma) c_1 - 2ik_3 c_2 + 2ik_2 c_3 &= -(k_1 - ik_2) d_1, \\
+2ik_3 c_1 + (k_3 - 2\sigma) c_2 - 2ik_1 c_3 &= -(k_1 - ik_2) d_2, \\
-2ik_2 c_1 + 2ik_1 c_2 + (k_3 - 2\sigma) c_3 &= -(k_1 - ik_2) d_3,
\end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned} -(k_3 + 2\sigma) d_1 - 2ik_3 d_2 + 2ik_2 d_3 &= -(k_1 + ik_2) c_1, \\ +2ik_3 d_1 - (k_3 + 2\sigma) d_2 - 2ik_1 d_3 &= -(k_1 + ik_2) c_2, \\ -2ik_2 d_1 + 2ik_1 d_2 - (k_3 + 2\sigma) d_3 &= -(k_1 + ik_2) c_3; \end{aligned}$$

система (2.9) совпадает с (2.8), поэтому рассматривать ее отдельно не нужно.

Систему (2.8) удобнее записать в расщепленном виде так:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} +(k_3 - 2\sigma) & -2ik_3 & +2ik_2 \\ +2ik_3 & +(k_3 - 2\sigma) & -2ik_1 \\ -2ik_2 & +2ik_1 & +(k_3 - 2\sigma) \end{vmatrix} \mathbf{a} &= -(k_1 - ik_2) \mathbf{b}, \\ \begin{vmatrix} -(k_3 + 2\sigma) & -2ik_3 & +2ik_2 \\ +2ik_3 & -(k_3 + 2\sigma) & -2ik_1 \\ -2ik_2 & +2ik_1 & -(k_3 + 2\sigma) \end{vmatrix} \mathbf{b} &= -(k_1 + ik_2) \mathbf{a}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Действуя методом исключения, получаем уравнения для векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} :

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{vmatrix} -(k_3 + 2\sigma) & -2ik_3 & +2ik_2 \\ +2ik_3 & -(k_3 + 2\sigma) & -2ik_1 \\ -2ik_2 & +2ik_1 & -(k_3 + 2\sigma) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (k_3 - 2\sigma) & -2ik_3 & +2ik_2 \\ +2ik_3 & (k_3 - 2\sigma) & -2ik_1 \\ -2ik_2 & +2ik_1 & (k_3 - 2\sigma) \end{vmatrix} - (k_1^2 + k_2^2) \right\} \mathbf{a} &= 0, \\ \left\{ \begin{vmatrix} (k_3 - 2\sigma) & -2ik_3 & +2ik_2 \\ +2ik_3 & (k_3 - 2\sigma) & -2ik_1 \\ -2ik_2 & +2ik_1 & (k_3 - 2\sigma) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -(k_3 + 2\sigma) & -2ik_3 & +2ik_2 \\ +2ik_3 & -(k_3 + 2\sigma) & -2ik_1 \\ -2ik_2 & +2ik_1 & -(k_3 + 2\sigma) \end{vmatrix} - (k_1^2 + k_2^2) \right\} \mathbf{b} &= 0. \end{aligned}$$

Решим уравнение для вектора \mathbf{a} , а затем вектор \mathbf{b} найдем, пользуясь первым уравнением из (2.10).

Сначала рассмотрим специальный случай ориентации плоской волны:

$$(0, 0, k_3), \quad \begin{vmatrix} 4\sigma^2 + 3k_3^2 & 8ik_3\sigma & 0 \\ -8ik_3\sigma & 4\sigma^2 + 3k_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4\sigma^2 - k_3^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix} = 0, \quad (2.11)$$

отсюда следует уравнение относительно σ : $[(4\sigma^2 + 3k_3^2)^2 - 8^2 k_3^2 \sigma^2] (4\sigma^2 - k_3^2) = 0$, т. е.

$$\sigma = -\frac{1}{2}k, -\frac{1}{2}k, \quad +\frac{1}{2}k, +\frac{1}{2}k, \quad -\frac{3}{2}k, +\frac{3}{2}k; \quad (2.12)$$

обращаем внимание, что два корня двукратно вырождены. Найдем решения уравнения (2.11) для вектора \mathbf{a} .

Пусть $\sigma = \pm \frac{1}{2}k_3$:

$$\begin{vmatrix} 4k_3^2 & \pm 4ik_3^2 & 0 \\ \mp 4ik_3^2 & 4k_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix} = 0,$$

ранг матрицы равен 1, решения следующие:

$$\begin{aligned}\sigma &= -\frac{1}{2}k_3, \quad a_1 - ia_2 = 0, \quad a_3 - \text{любое число}; \\ \sigma &= +\frac{1}{2}k_3, \quad a_1 + ia_2 = 0, \quad a_3 - \text{любое число};\end{aligned}$$

для определенности можно положить $a_3 = \pm a_1$. При каждом σ имеем два собственных вектора:

$$\sigma = -\frac{1}{2}k_3, \quad \mathbf{a} = a_1(1, -i, \pm 1); \quad \sigma = +\frac{1}{2}k_3, \quad \mathbf{a} = a_1(1, +i, \pm 1). \quad (2.13)$$

Пусть $\sigma = \pm \frac{3}{2}k_3$ (в обоих случаях ранг матрицы равен 1):

$$\begin{aligned}\sigma = +\frac{3}{2}k_3, \quad & \begin{vmatrix} 12k_3^2 & +12ik_3^2 & 0 \\ -12ik_3^2 & 12k_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 8k_3^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix} = 0, \quad a_2 = +ia_1, \quad a_3 = 0; \\ \sigma = -\frac{3}{2}k_3, \quad & \begin{vmatrix} 12k_3^2 & -12ik_3^2 & 0 \\ +12ik_3^2 & 12k_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 8k_3^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix} = 0, \quad a_2 = -ia_1, \quad a_3 = 0.\end{aligned} \quad (2.14)$$

Возвращаемся к случаю произвольно ориентированной волны:

$$\begin{vmatrix} 4\sigma^2 - k^2 + 4(k_2^2 + k_3^2) & +8i\sigma k_3 - 4k_1 k_2 & -8i\sigma k_2 - 4k_1 k_3 \\ -8i\sigma k_3 - 4k_1 k_2 & 4\sigma^2 - k^2 + 4(k_1^2 + k_3^2) & 8i\sigma k_1 - 4k_2 k_3 \\ 8i\sigma k_2 - 4k_1 k_3 & -8i\sigma k_1 - 4k_2 k_3 & 4\sigma^2 - k^2 + 4(k_1^2 + k_2^2) \end{vmatrix} \mathbf{a} = 0. \quad (2.15)$$

Убеждаемся, что равенство нулю определителя матрицы дает уже известные корни:

$$\sigma = -\frac{1}{2}k, -\frac{1}{2}k, \quad +\frac{1}{2}k, +\frac{1}{2}k, \quad -\frac{3}{2}k, +\frac{3}{2}k. \quad (2.16)$$

Далее удобно перейти к безразмерным величинам:

$$\frac{k_i}{k} = n_i, \quad n_i n_i = 1, \quad \frac{\sigma}{k} \Rightarrow \sigma, \quad \sigma = -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, +\frac{3}{2},$$

это позволяет представить уравнение (2.15) так:

$$\begin{vmatrix} 4\sigma^2 - 1 + 4(n_2^2 + n_3^2) & +8i\sigma n_3 - 4n_1 n_2 & -8i\sigma n_2 - 4n_1 n_3 \\ -8i\sigma n_3 - 4n_1 n_2 & 4\sigma^2 - 1 + 4(n_1^2 + n_3^2) & 8i\sigma n_1 - 4n_2 n_3 \\ 8i\sigma n_2 - 4n_1 n_3 & -8i\sigma n_1 - 4n_2 n_3 & 4\sigma^2 - 1 + 4(n_1^2 + n_2^2) \end{vmatrix} \mathbf{a} = 0. \quad (2.17)$$

Сначала рассматриваем случай $\sigma = \pm 1/2$:

$$\begin{aligned}(n_2^2 + n_3^2) a_1 + (\pm i n_3 - n_1 n_2) a_2 - (\pm i n_2 + n_1 n_3) a_3 &= 0, \\ -(\pm i n_3 + n_1 n_2) a_1 + (n_1^2 + n_3^2) a_2 + (\pm i n_1 - n_2 n_3) a_3 &= 0, \\ (\pm i n_2 - n_1 n_3) a_1 - (\pm i n_1 + n_2 n_3) a_2 + (n_1^2 + n_2^2) a_3 &= 0.\end{aligned} \quad (2.18)$$

Убеждаемся, что ранг этой системы равен 1, т. е. из трех уравнений существенным является только одно. Для определенности оставляем третье:

$$(\pm in_2 - n_1 n_3) a_1 - (\pm in_1 + n_2 n_3) a_2 + (1 - n_3^2) a_3 = 0. \quad (2.19)$$

У этого уравнения могут существовать два независимых решения (это согласуется с двукратностью корней $\sigma = \pm 1/2$). Наиболее простое решение имеет вид $\mathbf{a}^{(1)} = (n_1, n_2, n_3)$:

$$(\pm in_2 - n_1 n_3) n_1 - (\pm in_1 + n_2 n_3) n_2 + (1 - n_3^2) n_3 = 0.$$

С учетом уравнения (2.19) второе решение строится в виде векторного произведения:

$$\mathbf{a}^{(2)} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \\ (\pm in_2 - n_1 n_3) & -(\pm in_1 + n_2 n_3) & (1 - n_3^2) \end{vmatrix} = (\pm in_1 n_3 + n_2) \mathbf{e}_1 + (\pm in_2 n_3 - n_1) \mathbf{e}_2 \mp i(1 - n_3^2) \mathbf{e}_3;$$

легко можно убедиться, что этот вектор $\mathbf{a}^{(2)}$ удовлетворяет уравнению (2.19). Таким образом, имеем два решения уравнения (2.19):

$$\mathbf{a}^{(1)} = (n_1, n_2, n_3) = \mathbf{n}, \quad \mathbf{a}^{(2)} = (\pm in_1 n_3 + n_2, \pm in_2 n_3 - n_1, \mp i(1 - n_3^2)); \quad (2.20)$$

напоминаем, что в случае $n_1 = 0, n_2 = 0$ нужно использовать результат (2.13).

Теперь рассмотрим случай $\sigma = \pm 3/2$. Ранг системы (2.17) равен 2, для определенности в качестве независимых оставим два первых уравнения:

$$\begin{aligned} (2 + n_2^2 + n_3^2) a_1 + (2i\sigma n_3 - n_1 n_2) a_2 &= (+2i\sigma n_2 + n_1 n_3) a_3, \\ -(2i\sigma n_3 + n_1 n_2) a_1 + (2 + n_1^2 + n_3^2) a_2 &= (-2i\sigma n_1 + n_2 n_3) a_3. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Убеждаемся, что определитель двумерной матрицы слева равен $6(1 - n_3^2)$. Он обращается в ноль при $n_3 = \pm 1$, этот случай особый. Для всех остальных случаев ориентации плоских волн система (2.21) невырожденная и решается обычным способом:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{(3 - 4\sigma^2)n_1 n_3 + 4i\sigma n_2}{6 + (3 - 4\sigma^2)n_3^2} a_3 = \frac{-n_1 n_3 \pm in_2}{1 - n_3^2} a_3, \text{ пусть } a_3 = 1 - n_3^2; \\ a_2 &= \frac{(3 - 4\sigma^2)n_2 n_3 - 4i\sigma n_1}{6 + (3 - 4\sigma^2)n_3^2} a_3 = \frac{-n_2 n_3 \mp in_1}{1 - n_3^2} a_3, \text{ пусть } a_3 = 1 - n_3^2. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Выбор явных значений для a_3 означает, что фиксируется нормировка этих решений.

Для каждого решения $\{a_1, a_2, a_3\}_\sigma$ можно вычислить соответствующий набор величин $\{b_1, b_2, b_3\}_\sigma$, при этом нужно воспользоваться соотношением из (2.10):

$$\begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{n_1 - in_2} \begin{vmatrix} +(n_3 - 2\sigma) & -2in_3 & +2in_2 \\ +2in_3 & +(n_3 - 2\sigma) & -2in_1 \\ -2in_2 & +2in_1 & +(n_3 - 2\sigma) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix}, \quad (2.23)$$

его можно представить в векторной форме так:

$$\mathbf{b} = \frac{1}{n_1 - in_2} [(2\sigma - n_3) \mathbf{a} - 2i \mathbf{n} \times \mathbf{a}]. \quad (2.24)$$

Рассматриваем случай $\sigma = \pm 1/2$. Для решений первого типа $\mathbf{a}^{(1)} = \mathbf{n}$ получим

$$\mathbf{b}^{(1)} = \frac{\pm 1 - n_3}{n_1 - in_2} \mathbf{a}^{(1)}. \quad (2.25)$$

Затем обращаемся к решениям второго типа:

$$\mathbf{a}^{(2)} = (\pm in_1 n_3 + n_2; \pm in_2 n_3 - n_1; \mp i(1 - n_3^2)), \quad \mathbf{b}^{(2)} = \frac{1}{n_1 - in_2} [(\pm 1 - n_3) \mathbf{a}^{(2)} - 2i \mathbf{n} \times \mathbf{a}^{(2)}].$$

Вычисляем векторное произведение $\mathbf{n} \times \mathbf{a}^{(2)}$:

$$\begin{aligned} (\mathbf{n} \times \mathbf{a}^{(2)})_1 &= n_2 a_3^{(2)} - n_3 a_2^{(2)} = (\mp i) a_1^{(2)}, & (\mathbf{n} \times \mathbf{a}^{(2)})_2 &= n_3 a_1^{(2)} - n_1 a_3^{(2)} = (\mp i) a_2^{(2)}, \\ (\mathbf{n} \times \mathbf{a}^{(2)})_3 &= n_1 a_2^{(2)} - n_2 a_1^{(2)} = (\mp i) a_3^{(2)}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Следовательно, выражение для $\mathbf{b}^{(2)}$ следующее:

$$\mathbf{b}^{(2)} = \frac{1}{n_1 - in_2} [(\pm 1 - n_3) - 2i(\mp i)] \mathbf{a}^{(2)} = \frac{(\mp 1 - n_3)}{n_1 - in_2} \mathbf{a}^{(2)}. \quad (2.27)$$

Обращаем внимание на то, что в формулах (2.25) и (2.27) множители различаются.

Теперь рассмотрим состояния со спиральностями $\sigma = \pm 3/2$:

$$\begin{aligned} a_1 &= (-n_1 n_3 \pm in_2), & a_2 &= (-n_2 n_3 \mp in_1), & a_3 &= 1 - n_3^2, \\ b_1 &= \frac{1}{n_1 - n_2} \{ (\pm 3 - n_3) a_1 - 2i(n_2 a_3 - n_3 a_2) \} = \frac{\pm 1 - n_3}{n_1 - in_2} (-n_1 n_3 \pm in_2), \\ b_2 &= \frac{1}{n_1 - n_2} \{ (\pm 3 - n_3) a_2 - 2i(n_3 a_1 - n_1 a_3) \} = \frac{\pm 1 - n_3}{n_1 - in_2} (-n_2 n_3 \mp in_1), \\ b_3 &= \frac{1}{n_1 - n_2} \{ (\pm 3 - n_3) a_3 - 2i(n_1 a_2 - n_2 a_1) \} = \frac{\pm 1 - n_3}{n_1 - in_2} (1 - n_3^2), \end{aligned}$$

или коротко

$$\mathbf{b} = \frac{\pm 1 - n_3}{n_1 - in_2} \mathbf{a}. \quad (2.28)$$

3. Оператор спиральности и решения волнового уравнения

Рассмотрим сначала наиболее простой случай значений спиральности, когда вырождение отсутствует:

$$\begin{aligned} \sigma &= \pm 3/2, \\ a_0 &= 0, \quad b_0 = 0, \quad c_0 = 0, \quad d_0 = 0, \\ a_1 &= (-n_1 n_3 \pm in_2), \quad a_2 = (-n_2 n_3 \mp in_1), \quad a_3 = 1 - n_3^2; \quad \mathbf{b} = \frac{\pm 1 - n_3}{n_1 - in_2} \mathbf{a}, \\ c_1 &\square (-n_1 n_3 \pm in_2), \quad c_2 \square (-n_2 n_3 \mp in_1), \quad c_3 \square 1 - n_3^2; \quad \mathbf{d} = \frac{\pm 1 - n_3}{n_1 - in_2} \mathbf{c}; \end{aligned} \quad (3.1)$$

знак \square указывает на то, что вектор \mathbf{c} восстанавливается с точностью до множителя.

Анализ волнового уравнения для этих состояний дает линейные соотношения:

$$n_1 a_1 + n_2 a_2 + n_3 a_3 = 0, \quad n_1 b_1 + n_2 b_2 + n_3 b_3 = 0.$$

$$a_3 = -(b_1 - ib_2), \quad b_3 = (a_1 + ia_2), \quad (3.2)$$

$$c_l = \frac{E - k_3}{M} a_l - \frac{k_1 - ik_2}{M} b_l, \quad d_l = -\frac{k_1 + ik_2}{M} a_l + \frac{E + k_3}{M} b_l.$$

Покажем, что соотношения (3.1) и (3.2) согласуются друг с другом. Сначала учтем (3.1) в первом уравнении из (3.2):

$$n_1 a_1 + n_2 a_2 + n_3 a_3 = 0 \Rightarrow$$

$$n_1(-n_1 n_3 \pm in_2) + n_2(-n_2 n_3 \mp in_1) + n_3(n_1^2 + n_2^2) \Rightarrow 0 = 0.$$

Проверить второе соотношение из (3.2) не требуется в силу пропорциональности векторов **b** и **a**. Проверим соотношение $a_3 = -(b_1 - ib_2)$:

$$-(b_1 - ib_2) = -\frac{\pm 1 - n_3}{n_1 - in_2} \{(-n_1 n_3 \pm in_2) - i(-n_2 n_3 \mp in_1)\} =$$

$$= -\frac{\pm 1 - n_3}{n_1 - in_2} \{n_1(-n_3 \mp 1) - in_2(-n_3 \mp 1)\} = -(\pm 1 - n_3)(\mp 1 - n_3) = 1 - n_3^2 = a_3.$$

Проверим соотношение $b_3 = (a_1 + ia_2)$:

$$(a_1 + ia_2) = (-n_1 n_3 \pm in_2) + i(-n_2 n_3 \mp in_1) =$$

$$= -n_1 n_3 \pm in_2 - in_2 n_3 \pm n_1 = (n_1 + in_2)(\pm 1 - n_3) \equiv b_3.$$

Воспользовавшись (3.2), найдем c_j :

$$c_j = \frac{E - k_3}{M} a_j - \frac{k_1 - ik_2}{M} \frac{\pm k - k_3}{k_1 - ik_2} a_j = \frac{E \mp k}{M} a_j. \quad (3.3)$$

Найдем d_j :

$$d_j = -\frac{k_1 + ik_2}{M} a_j + \frac{E + k_3}{M} \frac{\pm k - k_3}{k_1 - ik_2} \frac{k_1 + ik_2}{k_1 + ik_2} a_j =$$

$$= -\frac{k_1 + ik_2}{M} a_j \pm \frac{E + k_3}{M} \frac{k \mp k_3}{(k - k_3)(k + k_3)} (k_1 + ik_2) a_j = \frac{k_1 + ik_2}{k_3 \pm k} \left\{ \frac{E \mp k}{M} a_j \right\},$$

т. е. получаем

$$d_j = \frac{k_1 + ik_2}{k_3 \pm k} c_j = \frac{\pm k - k_3}{k_1 - ik_2} c_j, \quad (3.4)$$

что совпадает с последним соотношением в (3.1). Таким образом, согласованность соотношений (3.1) и (3.2) доказана: состояния со спиральностями $\sigma = \pm 3/2$ являются решениями волнового уравнения.

Теперь рассмотрим случай со спиральностями $\sigma = \pm 1/2$. Поскольку здесь есть двукратное вырождение собственных состояний, сначала рассмотрим их по отдельности.

Состояния первого типа задаются соотношениями (см. (2.7)):

$$b_0^{(1)} = \frac{\pm 1 - n_3}{n_1 - in_2} a_0^{(1)} = \frac{n_1 + in_2}{\pm 1 + n_3} a_0^{(1)}, \quad d_0^{(1)} = \frac{\pm 1 - n_3}{n_1 - in_2} c_0^{(1)} = \frac{n_1 + in_2}{\pm 1 + n_3} c_0^{(1)},$$

$$\mathbf{a}^{(1)} = \mathbf{n}, \quad \mathbf{b}^{(1)} = \frac{\pm 1 - n_3}{n_1 - in_2} \mathbf{a}^{(1)}, \quad \mathbf{c}^{(1)} \sqcap \mathbf{a}^{(1)}, \quad \mathbf{d}^{(1)} = \frac{\pm 1 - n_3}{n_1 - in_2} \mathbf{c}^{(1)}. \quad (3.5)$$

Символ \sqcap можна уточніць с помощью линейных соотношений:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^{(1)} &= \frac{E - k_3}{M} \mathbf{a}^{(1)} - \frac{k_1 - ik_2}{M} \mathbf{b}^{(1)} = \frac{E \mp k}{M} \mathbf{a}^{(1)}, \\ \mathbf{d}^{(1)} &= -\frac{k_1 + ik_2}{M} \mathbf{a}^{(1)} + \frac{E + k_3}{M} \mathbf{b}^{(1)} = \frac{k_1 + ik_2}{k_3 \pm k} \left\{ \frac{E \mp k}{M} \mathbf{a}^{(1)} \right\} = \frac{\pm 1 - n_3}{n_1 - in_2} \mathbf{c}^{(1)}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Легко убедиться, что эти состояния не являются решениями волнового уравнения. Действительно, имеем (напоминаем, что $n_i = k_i/k$)

$$Ea_0^{(1)} + k_1 a_1^{(1)} + k_2 a_2^{(1)} + k_3 a_3^{(1)} = 0 \Rightarrow Ea_0^{(1)} + k = 0, \quad a_0^{(1)} = -\frac{k}{E}.$$

Рассматривать уравнение $Eb_0^{(1)} + k_1 b_1^{(1)} + k_2 b_2^{(1)} + k_3 b_3^{(1)} = 0$ нет необходимости, поскольку оно отличается от предыдущего только на множитель. Рассмотрим два оставшихся уравнения:

$$a_0^{(1)} + a_3^{(1)} = -(b_1^{(1)} - ib_2^{(1)}) \Rightarrow -\frac{k}{E} + n_3 = -\frac{\pm 1 - n_3}{n_1 - in_2} (n_1 - in_2) = \pm 1 + n_3 \Rightarrow \frac{k}{E} = \mp 1;$$

аналогично получаем

$$\begin{aligned} b_0^{(1)} - b_3^{(1)} &= -(a_1^{(1)} + ia_2^{(1)}), \quad \frac{\pm 1 - n_3}{n_1 - in_2} \left(-\frac{k}{E} - n_3\right) = -(n_1 + in_2) \Rightarrow \\ (\pm 1 - n_3) \left(\frac{k}{E} + n_3\right) &= (1 - n_3)(1 + n_3) \Rightarrow \frac{k}{E} + n_3 = \pm 1 + n_3, \quad \frac{k}{E} = \pm 1. \end{aligned}$$

т. е. приходим к противоречию, поскольку $E = \sqrt{k^2 + M^2}$.

Теперь рассмотрим для значений $\sigma = \pm 1/2$ решения второго типа. Сначала отмечаем равенства

$$b_0^{(2)} = \frac{\pm 1 - n_3}{n_1 - in_2} a_0^{(2)}, \quad d_0^{(2)} = \frac{\pm 1 - n_3}{n_1 - in_2} c_0^{(2)}, \quad c_0^{(2)} = \frac{E \mp k}{M} a_0^{(2)}. \quad (3.7)$$

Затем рассматриваем векторы $\mathbf{a}^{(2)}, \mathbf{b}^{(2)}, \mathbf{c}^{(2)}, \mathbf{d}^{(2)}$:

$$\begin{aligned} a_1^{(2)} &= \pm in_1 n_3 + n_2, \quad a_2^{(2)} = \pm in_2 n_3 - n_1, \quad a_3^{(2)} = \mp i(1 - n_3^2), \quad \mathbf{b}^{(2)} = \frac{\mp 1 - n_3}{n_1 - in_2} \mathbf{a}^{(2)}, \\ c_1^{(2)} \sqcap (\pm in_1 n_3 + n_2), \quad c_2^{(2)} \sqcap (\pm in_2 n_3 - n_1), \quad c_3^{(2)} \sqcap \mp i(1 - n_3^2), \quad \mathbf{d}^{(2)} &= \frac{\mp 1 - n_3}{n_1 - in_2} \mathbf{c}^{(2)}. \end{aligned}$$

Символ \sqcap можно уточніць с помощью линейных соотношений:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^{(2)} &= \frac{E - k_3}{M} \mathbf{a}^{(2)} - \frac{k_1 - ik_2}{M} \mathbf{b}^{(2)} = \frac{E \pm k}{M} \mathbf{a}^{(2)}, \\ \mathbf{d}^{(2)} &= -\frac{k_1 + ik_2}{M} \mathbf{a}^{(2)} + \frac{E + k_3}{M} \mathbf{b}^{(2)} = \frac{\mp 1 - n_3}{n_1 - in_2} \mathbf{c}^{(2)}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Введем обозначения

$$\Gamma = \frac{\pm 1 - n_3}{n_1 - in_2}, \quad R = \frac{\mp 1 - n_3}{n_1 - in_2}, \quad (3.9)$$

тогда приведенные выше формулы можно представить короче:

$$b_0^{(2)} = \Gamma a_0^{(2)}, \quad d_0^{(2)} = \Gamma c_0^{(2)}, \quad \mathbf{b}^{(2)} = R \mathbf{a}^{(2)}, \quad \mathbf{d}^{(2)} = R \mathbf{c}^{(2)}. \quad (3.10)$$

Теперь проверим выполнимость следствий из волнового уравнения. Из условия

$$Ea_0^{(2)} + k_1 a_1^{(2)} + k_2 a_2^{(2)} + k_3 a_3^{(2)} = 0$$

находим

$$Ea_0^{(2)} + k \{ n_1 (\pm in_1 n_3 + n_2) + n_2 (\pm in_2 n_3 - n_1) + n_3 (\mp i)(n_1^2 + n_2^2) \} = 0 \Rightarrow a_0^{(2)} = 0.$$

Аналогично находим

$$Eb_0^{(2)} + k_1 b_1^{(2)} + k_2 b_2^{(2)} + k_3 b_3^{(2)} = 0 \Rightarrow b_0^{(2)} = 0.$$

Таким образом,

$$a_0^{(2)} = 0, \quad b_0^{(2)} = 0, \quad c_0^{(2)} = 0, \quad d_0^{(2)} = 0. \quad (3.11)$$

Проверим два оставшихся уравнения:

$$\begin{aligned} a_3^{(2)} &= -(b_1^{(2)} - ib_2^{(2)}), \quad a_3^{(2)} = \mp i(1 - n_3^2), \\ -(b_1^{(2)} - ib_2^{(2)}) &= -R [\pm in_1 n_3 + n_2 - i(\pm in_2 n_3 - n_1)] = \\ &= \pm i(1 \pm n_3)(1 \pm n_3) \frac{1 - n_3^2}{(1 - n_3)(1 + n_3)} = \pm i(1 - n_3^2) \frac{1 \pm n_3}{1 \mp n_3} = \frac{R}{\Gamma} a_3^{(2)}, \end{aligned}$$

т. е. уравнение не выполняется.

Рассматриваем последнее оставшееся уравнение $b_3^{(2)} = a_1^{(2)} + ia_2^{(2)}$:

$$\begin{aligned} b_3^{(2)} &= \frac{\mp 1 - n_3}{n_1 - in_2} (\mp i)(1 - n_3^2) = \frac{\mp 1 - n_3}{n_1 - in_2} (\mp i)(n_1 - in_2)(n_1 + in_2) = i(n_1 + in_2)(1 \pm n_3), \\ a_1^{(2)} + ia_2^{(2)} &= \pm in_1 n_3 + n_2 + i(\pm in_2 n_3 - n_1) = \\ &= -i(n_1 + in_2)(1 \mp n_3) \cdot \frac{(1 \pm n_3)}{(1 \pm n_3)} = -i(n_1 + in_2)(1 \pm n_3) \cdot \frac{(1 \mp n_3)}{(1 \pm n_3)} = \frac{\Gamma}{R} b_3^{(2)}, \end{aligned}$$

т. е. это уравнение также не выполняется.

Таким образом, каждое из этих двух состояний несовместимо с волновым уравнением. Будем искать решение волнового уравнения в виде суперпозиции решений типов (1) и (2):

$$\begin{aligned} a_0 &= Fa_0^{(1)} + Ga_0^{(2)}, \quad \mathbf{a} = F\mathbf{a}^{(1)} + G\mathbf{a}^{(2)}, \\ b_0 &= F\Gamma a_0^{(1)} + G\Gamma a_0^{(2)}, \quad \mathbf{b} = F\Gamma \mathbf{a}^{(1)} + G\Gamma \mathbf{a}^{(2)}; \end{aligned} \quad (3.12)$$

напоминаем, что нормировка векторов $\mathbf{a}^{(1)}, \mathbf{a}^{(2)}, \mathbf{b}^{(1)}, \mathbf{b}^{(2)}$ фиксирована, а параметры $a_0^{(1)}, a_0^{(2)}$ не фиксированы, они определяют нормировки двух полных решений.

Находим следствия двух первых уравнений в (1.17):

$$\begin{aligned} E a_0 + \mathbf{k} \mathbf{a} = 0 &\Rightarrow E(F a_0^{(1)} + G a_0^{(2)}) + F k + G \cdot 0 = 0, \\ E b_0 + \mathbf{k} \mathbf{b} = 0 &\Rightarrow E \Gamma(F a_0^{(1)} + G a_0^{(2)}) + F \Gamma k + G \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

т. е.

$$F a_0^{(1)} + G a_0^{(2)} + F \frac{k}{E} = 0 \Rightarrow F \left(a_0^{(1)} + \frac{k}{E} \right) + G a_0^{(2)} = 0. \quad (3.13)$$

С учетом $a_0^{(1)} = -\frac{k}{E}$, $a_0^{(2)} = 0$ заключаем, что уравнение (3.13) ограниченный на параметры F, G не содержит. Теперь обращаемся к двум оставшимся уравнениям из (1.17):

$$a_0 + a_3 = -(b_1 - i b_2), \quad b_0 - b_3 = -(a_1 + i a_2),$$

они эквивалентны следующим:

$$\begin{aligned} (F a_0^{(1)} + G a_0^{(2)}) + (F a_3^{(1)} + G a_3^{(2)}) &= -\left\{ (F \Gamma a_1^{(1)} + G R a_1^{(2)}) - i (F \Gamma a_2^{(1)} + G R a_2^{(2)}) \right\}, \\ (F \Gamma a_0^{(1)} + G \Gamma a_0^{(2)}) - (F \Gamma a_3^{(1)} + G R a_3^{(2)}) &= -\left\{ (F a_1^{(1)} + G a_1^{(2)}) + i (F a_2^{(1)} + G a_2^{(2)}) \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда после перегруппировки слагаемых получаем

$$\begin{aligned} F \left[(a_0^{(1)} + a_3^{(1)}) + \Gamma (a_1^{(1)} - i a_2^{(1)}) \right] + G \left[(a_0^{(2)} + a_3^{(2)}) + R (a_1^{(2)} - i a_2^{(2)}) \right] &= 0, \\ F \left[\Gamma (a_0^{(1)} - a_3^{(1)}) + (a_1^{(1)} + i a_2^{(1)}) \right] + G \left[(\Gamma a_0^{(2)} - R a_3^{(2)}) + (a_1^{(2)} + i a_2^{(2)}) \right] &= 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Отсюда с учетом $a_0^{(1)} = -k/E$, $a_0^{(2)} = 0$ находим два уравнения:

$$\begin{aligned} F \left[-k/E + a_3^{(1)} + \Gamma (a_1^{(1)} - i a_2^{(1)}) \right] + G \left[a_3^{(2)} + R (a_1^{(2)} - i a_2^{(2)}) \right] &= 0, \\ F \left[-\Gamma k/E - \Gamma a_3^{(1)} + (a_1^{(1)} + i a_2^{(1)}) \right] + G \left[-R a_3^{(2)} + (a_1^{(2)} + i a_2^{(2)}) \right] &= 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Учитывая формулы

$$\begin{aligned} a_1^{(1)} = n_1, \quad a_2^{(1)} = n_2, \quad a_3^{(1)} = n_3, \quad \Gamma = \frac{\pm 1 - n_3}{n_1 - i n_2}, \quad R = \frac{\mp 1 - n_3}{n_1 - i n_2}, \\ a_1^{(2)} = \pm i n_1 n_3 + n_2, \quad a_2^{(2)} = \pm i n_2 n_3 - n_1, \quad a_3^{(2)} = \mp i (1 - n_3^2), \end{aligned}$$

получим явный вид этих двух уравнений. Вычисляем

$$a_3^{(1)} + \Gamma (a_1^{(1)} - i a_2^{(1)}) = n_1 + \frac{\pm 1 - n_3}{n_1 - i n_2} (n_1 - i n_2) = \pm 1,$$

$$a_3^{(2)} + R (a_1^{(2)} - i a_2^{(2)}) = \mp i [(1 - n_3)(1 + n_3) + (1 \pm n_3)(1 \pm n_3)] = \mp 2i (1 \pm n_3).$$

Следовательно, первое уравнение в (3.15) примет вид

$$\left(-\frac{k}{E} \pm 1 \right) F \mp 2i (1 \pm n_3) G = 0. \quad (3.16)$$

Вычисляем

$$-\Gamma a_3^{(1)} + (a_1^{(1)} + i a_2^{(1)}) = -\frac{\pm 1 - n_3}{n_1 - i n_2} n_3 + (n_1 + i n_2) \frac{n_1 - i n_2}{n_1 - i n_2} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{n_1 - in_2} [(\mp 1 + n_3)n_3 + (1 - n_3)(1 + n_3)] = \frac{1 \mp n_3}{n_1 - in_2}, \\
 -Ra_3^{(2)} + (a_1^{(2)} + ia_2^{(2)}) &= \pm i(\mp 1 - n_3)(n_1 + in_2) \pm i(n_1 + in_2)(n_3 \mp 1) = \\
 &= \pm i(n_1 + in_2)[\mp 1 - n_3 + n_3 \mp 1] = -2i(n_1 + in_2).
 \end{aligned}$$

Следовательно, второе уравнение в (3.15) принимает вид

$$F \left[\mp \frac{1 \mp n_3}{n_1 - in_2} \frac{k}{E} + \frac{1 \mp n_3}{n_1 - in_2} \right] + G[-2i(n_1 + in_2)] = 0,$$

или

$$\mp \frac{1 \mp n_3}{n_1 - in_2} \left(\frac{k}{E} \mp 1 \right) F - 2i(n_1 + in_2) G = 0,$$

т. е.

$$\left(\frac{k}{E} \mp 1 \right) F \pm 2i(1 \pm n_3) G = 0. \quad (3.17)$$

Полученное (второе) уравнение (3.17) совпадает с (первым) уравнением (3.16).

Таким образом, нужная линейная комбинация решений (3.12) найдена, она определяется уравнением (3.16) – (3.17). Коэффициенты F , G находятся с точностью до общего множителя, что связано со свободой в выборе нормировки решений.

Заключение

Исследованы решения типа плоских волн уравнения для массивной частицы со спином $3/2$. Волновое уравнение дает алгебраическую систему из восьми уравнений для четырех неизвестных параметров, что предполагает существование четырех независимых решений. Чтобы привязать выбор четырех независимых решений к квантовым числам физического оператора, исследован вопрос о собственных состояниях оператора спиральности для частицы со спином $3/2$. Анализ приводит к четырем различным значениям $\sigma = \pm 1/2, \pm 3/2$. Значения $\sigma = \pm 1/2$ оказываются двукратно вырожденными, что приводит к существованию для каждого из этих значений $\sigma = -1/2$ и $\sigma = +1/2$ двух различных собственных векторов состояний. Эти векторы состояний не являются по отдельности решениями волнового уравнения, его решения строятся в виде суперпозиции таких состояний. Найдены коэффициенты нужной линейной комбинации двух решений.

Исследование аналогичной задачи для случая безмассовой частицы со спином $3/2$ будет сделано в отдельной работе. Из общих физических соображений следует ожидать, что состояния со спиральностями $\sigma = \pm 1/2$ должны устраняться калибровочными преобразованиями.

Отметим, что сделанный в работе анализ может быть важным при исследовании частицы со спином $3/2$ во внешнем магнитном поле, поскольку оператор спиральности должен играть существенную роль при решении уравнения.

Приложение А

Общая теория частицы со спином $3/2$

Сначала изложим описание массивной частицы со спином $3/2$ в базисе Рариты – Швингера. В этом базисе уравнение для 16-компонентной волновой функции (вектор-биспинора относительно группы Лоренца) имеет вид

$$(\gamma^a \partial_a + iM) \Psi_c - \frac{1}{3} (\gamma^b \partial_c + \gamma_c \partial^b) \Psi_b + \frac{1}{3} \gamma_c (\gamma^a \partial_a - iM) \gamma^b \Psi_b = 0. \quad (\text{A.1})$$

Потребуются следующие формулы для матриц Дирака:

$$\begin{aligned} \gamma^a \gamma^b + \gamma^b \gamma^a &= 2g^{ab}, \quad \gamma^a \gamma_a = 4, \\ \gamma^a \gamma^b \gamma^d &= \gamma^a g^{bd} - \gamma^b g^{ad} + \gamma^d g^{ab} + i\gamma^5 \varepsilon^{abcd} \gamma_c, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

где использован антисимметричный тензор Леви-Чивита: ε^{cabd} , $\varepsilon^{0123} = +1$.

Исходя из уравнений (A.1) можно получить некоторые дополнительные условия для компонент волновой функции $\Psi_a(x)$. Так, умножим уравнение (A.1) слева на матрицу γ^c , после простых преобразований получим

$$\partial_b \Psi^b = \frac{iM}{2} \gamma_b \Psi^b, \quad (\text{A.3})$$

это первое дополнительное условие. Подействуем на уравнение (A.1) оператором ∂^c :

$$\gamma^a \partial^c \partial_a \Psi_c + iM \partial^c \Psi_c - \frac{1}{3} \gamma^b \partial^c \partial_c \Psi_b - \frac{1}{3} \gamma_c \partial^c \partial^b \Psi_b + \frac{1}{3} \gamma^c \gamma^a \gamma^b \partial_c \partial_a \Psi_b - iM \frac{1}{3} \gamma_c \gamma^b \partial^c \Psi_b = 0.$$

Воспользовавшись формулой из (A.2), найдем

$$\begin{aligned} iM \partial^c \Psi_c - \frac{iM}{3} \gamma_c \gamma^b \partial^c \Psi_b + \gamma^a \partial^c \partial_a \Psi_c - \frac{1}{3} \gamma^b \partial^c \partial_c \Psi_b - \frac{1}{3} \gamma_c \partial^c \partial^b \Psi_b + \\ + \frac{1}{3} (\gamma^c g^{ab} - \gamma^a g^{cb} + \gamma^b g^{ac} + i\gamma^5 \varepsilon^{cabd} \gamma_d) \partial_c \partial_a \Psi_b = 0. \end{aligned}$$

Вклад от члена с антисимметричным тензором Леви-Чивиты равен нулю ввиду свертки его с симметричной величиной $\partial_c \partial_a$, дальше после приведения подобных получим

$$iM \partial^c \Psi_c + \gamma^a \partial_a \left(\frac{2}{3} \partial^c \Psi_c - \frac{iM}{3} \gamma^c \Psi_c \right) = 0, \quad (\text{A.4})$$

это второе дополнительное условие. Если воспользоваться первым дополнительным условием (A.3), то из (A.4) следует

$$\partial^c \Psi_c = 0 \quad (M \neq 0), \quad (\text{A.5})$$

тогда первое дополнительно условие дает

$$\gamma_b \Psi^b = 0. \quad (\text{A.6})$$

При учете соотношений (A.5) и (A.6) исходное уравнение значительно упрощается и принимает вид 4 отдельных уравнений Дирака для компонент вектор-биспинора (приводим здесь же и два дополнительных условия)

$$(i\gamma^a \partial_a - M) \Psi_c = 0, \quad \partial^c \Psi_c = 0, \quad \gamma^c \Psi_c = 0. \quad (\text{A.7})$$

Случай безмассовой частицы значительно отличается от массивного. В исходном уравнении нужно положить $M = 0$:

$$\gamma^a \partial_a \Psi_c - \frac{1}{3} (\gamma^b \partial_c + \gamma_c \partial^b) \Psi_b + \frac{1}{3} \gamma_c \gamma^a \partial_a \gamma^b \Psi_b = 0. \quad (\text{A.8})$$

При этом в качестве первого дополнительного условия получим

$$\partial_b \Psi^b = 0. \quad (\text{A.9})$$

Второе дополнительное условие (A.4) запишется теперь так:

$$\gamma^a \partial_a \frac{2}{3} \partial^c \Psi_c = 0, \quad (\text{A.10})$$

что эквивалентно условию (A.9). При этом исходное уравнение (A.8) упрощается лишь незначительно (рядом приводим и дополнительное уравнение):

$$\gamma^a \partial_a \Psi_c - \frac{1}{3} \gamma^b \partial_c \Psi_b + \frac{1}{3} \gamma_c \gamma^a \gamma^b \partial_a \Psi_b = 0, \quad \partial_b \Psi^b = 0. \quad (\text{A.11})$$

Уравнение (A.8) можно преобразовать к виду, когда становится очевидным существование в теории безмассовой частицы со спином 3/2 калибровочной симметрии. Будем исходить из уравнения, записанного в матричной форме

$$\Gamma^a \partial_a \Psi = 0, \quad \Psi = (\Psi_l), \quad (\text{A.12})$$

где действующие в 16-мерном пространстве матрицы Γ^a задаются соотношением (биспинорные индексы у матрицы не пишем)

$$(\Gamma^a)_k^l = \gamma^a \delta_k^l - \frac{1}{3} \gamma^l \delta_k^a - \frac{1}{3} \gamma_k g^{al} + \frac{1}{3} \gamma_k \gamma^a \gamma^l. \quad (\text{A.13})$$

Совершим над уравнением (A.12) – (A.13) последовательно два преобразования: сначала умножим его слева на невырожденную матрицу C , а затем перейдем к новому представлению волновой функции с помощью матрицы S :

$$\Gamma^a \Rightarrow \Gamma'^a = C \Gamma^a \Rightarrow \tilde{\Gamma}^a = S \Gamma'^a S^{-1}, \quad \tilde{\Psi} = S \Psi. \quad (\text{A.14})$$

Будем использовать матрицы C и S следующего вида:

$$C_a^b = \delta_a^b + c \gamma_a \gamma^b, \quad S_a^b = \delta_a^b + a \gamma_a \gamma^b, \quad (S^{-1})_a^b = \delta_a^b + b \gamma_a \gamma^b, \quad a + b + 4ab = 0. \quad (\text{A.15})$$

Величины a, b, c – пока произвольные параметры; уравнение для a и b получено из соотношения $S S^{-1} = I$. Используя (A.14) и (A.15), вычисляем Γ'^a :

$$(\Gamma'^a)_k^l = \left[\gamma^a \delta_k^l - \frac{1}{3} \gamma^l \delta_k^a + (2c - \frac{1}{3}) \gamma_k g^{al} + \frac{1}{3} \gamma_k \gamma^a \gamma^l \right],$$

а затем $\tilde{\Gamma}^a$:

$$\begin{aligned} (\tilde{\Gamma}^a)_k^l = & \gamma^a \delta_k^l \left\{ 1 - \left[\frac{b+1}{3} + b \left(\frac{2c-1}{3} (1+4a) + 2a \right) \right] \right\} + \\ & + \gamma^l \delta_k^a \left\{ \frac{2b-1}{3} + \left[\frac{b+1}{3} + b \left(\frac{2c-1}{3} (1+4a) + 2a \right) \right] \right\} + \\ & + \gamma_k g^{al} \left\{ \left[(2c-1) \frac{1+4a}{3} + 2a \right] + \left[\frac{b+1}{3} + b \left((2c-1) \frac{1+4a}{3} + 2a \right) \right] \right\} + \\ & + i \gamma^5 \varepsilon_k^{als} \gamma_s \left[\frac{b+1}{3} + b \left((2c-1) \frac{1+4a}{3} + 2a \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Выбираем параметры (a, b, c) так, чтобы в выражении для $\tilde{\Gamma}^a$ все члены, за исключением содержащего символ Леви-Чивита, обратились в ноль. Для этого должны выполняться три равенства:

$$\begin{aligned} a + b + 4ab = 0, \quad 1 - \left[\frac{b+1}{3} + b \left((2c-1) \frac{1+4a}{3} + 2a \right) \right] &= 0, \\ \frac{2b+1}{3} + \left[\frac{b+1}{3} + b \left((2c-1) \frac{1+4a}{3} + 2a \right) \right] &= 0, \\ (1+4a) \frac{2c-1}{3} + 2a + \left[\frac{b+1}{3} + b \left((2c-1) \frac{1+4a}{3} + 2a \right) \right] &= 0. \end{aligned}$$

Эта система уравнений решается следующим образом: из третьего уравнения, учитывая второе, находим $b = -1$, затем из первого уравнения получаем $a = -1/3$, после чего из третьего имеем $c = +2$. Легко убедиться, что этот набор значений

$$a = -\frac{1}{3}, \quad b = -1, \quad c = +2 \quad (\text{A.17})$$

удовлетворяет четвертому уравнению. Таким образом, в результате преобразования

$$S_k^l = \delta_k^l - \frac{1}{3} \gamma_k \gamma^l, \quad \tilde{\Psi}_k = S_k^l \Psi_l \quad (\text{A.18})$$

для матрицы $\tilde{\Gamma}^a$ получаем выражение

$$(\tilde{\Gamma}^a)_k^l = +i \gamma^5 \varepsilon_k^{als} \gamma_s. \quad (\text{A.19})$$

Следовательно, уравнение для безмассового поля со спином $3/2$ можем представить в виде

$$\gamma^a (\tilde{\Gamma}^a)_l^k \tilde{\Psi}_l(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad i \gamma^5 \varepsilon_k^{nal} \gamma_n \partial_a \tilde{\Psi}_l(x) = 0. \quad (\text{A.20})$$

Очевидно, что вектор-биспинор в виде градиента от произвольного биспинора $\Phi(x)$

$$\tilde{\Psi}_l^{grad}(x) = \partial_l \Phi(x) \quad (\text{A.21})$$

всегда будет решением уравнения (A.20). Это свойство иначе называют калибровочной симметрией уравнения безмассовой частицы со спином $3/2$: все его решения определены с точностью до градиента от произвольного биспинора. В исходном базисе решения градиентного типа представляются в виде

$$\Psi_l^{grad}(x) = (\delta_l^k - \gamma_l \gamma^k) \partial_l \Phi(x). \quad (\text{A.22})$$

Уравнение (A.20) можно переписать так (множитель $i\gamma^5$ опускаем):

$$\varepsilon^{abkl} \gamma_b \partial_k \tilde{\Psi}_l = 0. \quad (\text{A.22})$$

Явный вид его довольно громоздкий:

$$\begin{aligned} \gamma_1(\partial_2 \tilde{\Psi}_3 - \partial_3 \tilde{\Psi}_2) + \gamma_2(\partial_3 \tilde{\Psi}_1 - \partial_1 \tilde{\Psi}_3) + \gamma_3(\partial_1 \tilde{\Psi}_2 - \partial_2 \tilde{\Psi}_1) &= 0, \\ -\gamma_0(\partial_2 \tilde{\Psi}_3 - \partial_3 \tilde{\Psi}_2) + \partial_0(\gamma_2 \tilde{\Psi}_3 - \gamma_3 \tilde{\Psi}_2) - (\gamma_2 \partial_3 - \gamma_3 \partial_2) \tilde{\Psi}_0 &= 0, \\ -\gamma_0(\partial_3 \tilde{\Psi}_1 - \partial_1 \tilde{\Psi}_3) + \partial_0(\gamma_3 \tilde{\Psi}_1 - \gamma_1 \tilde{\Psi}_3) - (\gamma_3 \partial_1 - \gamma_1 \partial_3) \tilde{\Psi}_0 &= 0, \\ -\gamma_0(\partial_1 \tilde{\Psi}_2 - \partial_2 \tilde{\Psi}_1) + \partial_0(\gamma_1 \tilde{\Psi}_2 - \gamma_2 \tilde{\Psi}_1) - (\gamma_1 \partial_2 - \gamma_2 \partial_1) \tilde{\Psi}_0 &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Возвратимся к массивному случаю. Уравнение для частицы со спином 3/2 можно привести к виду, когда в нем будут отсутствовать двойные и тройные произведения матриц Дирака. Исходное уравнение в базисе Рариты – Швингера перепишем так:

$$\left\{ \gamma^a \delta_k^l - \frac{1}{3} \delta_k^a \gamma^l - \frac{1}{3} \gamma_k g^{al} + \frac{1}{3} \gamma_k \gamma^a \gamma^l \right\} \partial_a \Psi_l + iM \left(\delta_k^l - \frac{1}{3} \gamma_k \gamma^l \right) \Psi_l = 0. \quad (\text{A.24})$$

Здесь легко устанавливается матричная структура

$$\left\{ (\Gamma^a)_k^l \partial_a + iM \Gamma_k^l \right\} \Psi_l = 0, \quad (\text{A.25})$$

$$(\Gamma^a)_k^l = \gamma^a \delta_k^l - \frac{1}{3} \delta_k^a \gamma^l - \frac{1}{3} \gamma_k g^{al} + \frac{1}{3} \gamma_k \gamma^a \gamma^l, \quad \Gamma_k^l = \delta_k^l - \frac{1}{3} \gamma_k \gamma^l. \quad (\text{A.26})$$

Чтобы упростить уравнение (A.25), умножим его на матрицу

$$\Delta_n^k = \delta_n^k - \gamma_n \gamma^k, \quad (\text{A.27})$$

$$\Delta_n^k \Gamma_k^l = (\delta_n^k - \gamma_n \gamma^k) \left(\delta_k^l - \frac{1}{3} \gamma_k \gamma^l \right) = \delta_n^k - \frac{1}{3} \gamma_n \gamma^l - \gamma_n \gamma^l + \frac{4}{3} \gamma_n \gamma^l = \delta_n^k;$$

т. е. матрица при iM в (A.25) становится единичной. Теперь предстоит найти $\Delta_n^k (\bar{\Gamma}^a)_k^l$. После необходимых вычислений уравнение (A.25) приводится к виду

$$\left\{ (\bar{\Gamma}^a)_n^l \partial_a + iM \delta_n^l \right\} \Psi_l = 0, \quad (\text{A.28})$$

где

$$(\bar{\Gamma}^a)_n^l = \gamma^a \delta_n^l - \frac{1}{3} \delta_n^a \gamma^l - \frac{1}{3} \gamma_n g^{al} - \frac{1}{3} \gamma_n \gamma^l \gamma^a. \quad (\text{A.29})$$

Будем искать преобразование, которое позволит оставить в уравнении только первые степени матриц Дирака. Для этого применим преобразование со структурой

$$\begin{aligned} \Psi_l &= S_l^{\ n} \Psi'_n, \quad \Psi'_n = (S^{-1})_n^{\ l}, \\ S_l^{\ n} &= \delta_l^{\ n} + a \gamma_l \gamma^n, \quad (S^{-1})_n^{\ k} = \delta_n^{\ k} + b \gamma_n \gamma^k. \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

Из условия $S_l^{\ n} (S^{-1})_n^{\ k} = \delta_l^{\ k}$ получим

$$\begin{aligned} &(\delta_l^{\ n} + a \gamma_l \gamma^n)(\delta_n^{\ k} + b \gamma_n \gamma^k) = \\ &= \delta_l^{\ k} + b \gamma_l \gamma^k + a \gamma_l \gamma^k + 4ab \gamma_l \gamma^k = \delta_l^{\ k} \Rightarrow a + b + 4ab = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

Применим это преобразование к уравнению (A.28) – (A.29):

$$\begin{aligned} (S^{-1})_m^{\ n} \left\{ (\bar{\Gamma}^a)_n^{\ l} \partial_a + iM \delta_n^{\ l} \right\} S_l^{\ k} \Psi'_k &= 0 \Rightarrow \\ \left\{ (S^{-1})_m^{\ n} (\bar{\Gamma}^a)_n^{\ l} S_l^{\ k} \partial_a + iM \delta_m^{\ k} \right\} \Psi'_k &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

Нужно получить выражение для матрицы

$$(\Gamma'^a)_m^{\ k} = (S^{-1})_m^{\ n} (\bar{\Gamma}^a)_n^{\ l} S_l^{\ k} = (\delta_m^{\ n} + b \gamma_m \gamma^n) (\bar{\Gamma}^a)_n^{\ l} (\delta_l^{\ k} + a \gamma_l \gamma^k). \quad (\text{A.33})$$

Выполнив нужные вычисления, находим

$$(\Gamma'^a)_m^{\ k} = \gamma^a \delta_m^{\ k} + \left(\frac{2a}{3} - \frac{1}{3} \right) \delta_m^a \gamma^k + (-1 - 2b) \gamma_m g^{ak} + \left(\frac{1}{3} - \frac{2a}{3} - 2ab \right) \gamma_m \gamma^a \gamma^k. \quad (\text{A.34})$$

Требуем

$$\frac{1}{3} - \frac{2a}{3} - 2ab = 0, \quad a + b + 4ab = 0,$$

или

$$b = \frac{a-2}{3}, \quad a + b + 4ab = 0.$$

Таким образом, находим два возможных решения:

$$a = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}, \quad b = \frac{a-2}{3} = \frac{-3 \pm \sqrt{3}}{6}. \quad (\text{A.35})$$

Возвращаясь к (A.34), получим

$$\frac{2a-1}{3} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad (-1-2b) = \mp \frac{1}{\sqrt{3}};$$

следовательно, матрица из (A.34) имеет вид

$$(\Gamma'^a)_m{}^k = \gamma^a \delta_m{}^k \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \delta_m^a \gamma^k \mp \frac{1}{\sqrt{3}} \gamma_m g^{ak}. \quad (\text{A.36})$$

Это представление уравнения для частицы со спином 3/2 в базисе Петраша. Для определенности можно использовать вариант с верхними знаками

$$(\Gamma'^a)_m{}^k = \gamma^a \delta_m{}^k + \frac{1}{\sqrt{3}} \delta_m^a \gamma^k - \frac{1}{\sqrt{3}} \gamma_m g^{ak}. \quad (\text{A.37})$$

Зафиксируем явный вид преобразования к базису Петраша:

$$\Psi_l = S_l{}^n \Psi'_n, \quad S_l{}^n = \delta_l{}^n + \frac{1+\sqrt{3}}{2} \gamma_l \gamma^n, \quad (\text{A.38})$$

$$\Psi'_n = (S^{-1})_n{}^l \Psi_l, \quad (S^{-1})_n{}^k = \delta_n{}^k + \frac{-3+\sqrt{3}}{6} \gamma_n \gamma^k. \quad (\text{A.39})$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pauli, W. Über relativistische Feldgleichungen von Teilchen mit beliebigem Spin im elektromagnetischen Feld / W. Pauli, M. Fierz // *Helv. Phys. Acta.* – 1939. – Bd. 12. – S. 297–300.

2. Fierz, M. On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field / M. Fierz, W. Pauli // *Proc. Roy. Soc. London. A.* – 1939. – Vol. 173. – P. 211–232.

3. Rarita, W. On a theory of particles with half-integral spin / W. Rarita, J. Schwinger // *Phys. Rev.* – 1941. – Vol. 60, № 1. – P. 61–64.

4. Гинзбург, В. Л. К теории частиц со спином 3/2 / В. Л. Гинзбург // *ЖЭТФ.* – 1942. – Т. 12. – С. 425–442.

5. Давыдов, А. С. Волновое уравнение частицы, имеющей спин 3/2, в отсутствие поля / А. С. Давыдов // *ЖЭТФ.* – 1943. – Т. 13, вып. 9-10. – С. 313–319.

6. Johnson, K. Inconsistency of the local field theory of charged spin 3/2 particles / K. Johnson, E. C. G. Sudarshan // *Ann. Phys. N. Y.* – 1961. – Vol. 13, № 1. – P. 121–145.

7. Bender, C. M. Peculiarities of a free massless spin-3/2 field theory / C. M. Bender, B. M. McCoy // Phys. Rev. – 1966. – Vol. 148, № 4. – P. 1375–1380.
8. Hagen, C. R., Search for consistent interactions of the Rarita-Schwinger field / C. R. Hagen, L. P. S. Singh // Phys. Rev. D. – 1982. – Vol. 26, № 2. – P. 393–398.
9. Baisya, H. L. On the Rarita – Schwinger equation for the vector-bispinor field / H. L. Baisya // Nucl. Phys. B. – 1971. – Vol. 29, № 1. – P. 104–124.
10. Loide, R. K. Equations for a vector-bispinor / R. K. Loide // J. Phys. A. – 1984. – Vol. 17, № 12. – P. 2535–2550.
11. Плетюхов, В. А. К теории частиц со спином 3/2 / В. А. Плетюхов, В. И. Стражев // Изв. вузов. Физика. – 1985. – Т. 28, № 1. – С. 91–96.
12. Capri, A. Z. Further problems in spin-3/2 field theories / A. Z. Capri, R. L. Kobes // Phys. Rev. D. – 1980. – Vol. 22. – P. 1967–1978.
13. Darkhosh, T. Is there a solution to the Rarita–Schwinger wave equation in the presence of an external electromagnetic field? / T. Darkhosh // Phys. Rev. D. – 1985. – Vol. 32, № 12. – P. 3251–3255.
14. Cox, W. On the Lagrangian and Hamiltonian constraint algorithms for the Rarita-Schwinger field coupled to an external electromagnetic field / W. Cox // J. Phys. A. – 1989. – Vol. 22, № 10. – P. 1599–1608.
15. Deser, S. Massive spin-3/2 electrodynamics / S. Deser, A. Waldron, V. Pashutsa // Phys. Rev. D. – 2000. – Vol. 62. – Paper 105031.
16. Napsuciale, M. Spin-3/2 Beyond Rarita-Schwinger Framework / M. Napsuciale, M. Kirchbach, S. Rodriguez // Eur. Phys. J. A. – 2006. – Vol. 29. – P. 289–306.
17. Редьков, В. М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В. М. Редьков. – Минск : Беларус. наука, 2009. – 486 с.
18. Плетюхов, В. А. Релятивистские волновые уравнения и внутренние степени свободы / В. А. Плетюхов, В. М. Редьков, В. И. Стражев. – Минск : Беларус. навука, 2015. – 328 с.
19. Elementary Particles with Internal Structure in External Fields. Vol I. General Theory / V. V. Kisel [et al.]. – New York : Nova Science Publishers, 2018. – 404 p.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 28.05.2019

Ivashkevich A. V., Ovsyuk E. M., Kisel V. V., Red'kov V. M. Solutions of the Wave Equation for a Spin 3/2 Particle and Helicity Operator

In the paper, solutions in the form of plane waves for a massive spin 3/2 particle are examined. The wave equation gives 4 algebraic equations for 8 unknown variables, which assumes existence of 4 independent solutions. In order to relate the choice of independent solutions to quantum numbers of a physical operator, we study the problem of eigenvectors for relevant helicity operator. As expected, we obtain 4 eigenvalues, $\sigma = \pm 1/2, \pm 3/2$. The values $\sigma = \pm 1/2$ turn out to have double multiplicity, this leads to existence of two different eigenstates both for $\sigma = -1/2$ and $\sigma = +1/2$. It is shown that the states with the values $\sigma = \pm 3/2$ represent exact solutions of the wave equation. However, the double degenerate states separately do not. It is shown that exact solutions for $\sigma = -1/2$ and $\sigma = +1/2$ of the wave equation can be constructed in the form of special linear combinations of those. Thus, there constructed a complete system of exact solutions for a massive spin 3/2 particle in momentum-helicity basis.

УДК 538.9

В. А. Лионо¹, И. А. Лявшук², Е. В. Овчинников³, С. С. Секержицкий⁴¹д-р физ.-мат. наук, проф., проф. каф. теоретической физики и теплотехники

Гродненского государственного университета имени Янки Купалы

²магистр естеств. наук, ст. преподаватель

каф. информационных систем и технологий

Гродненского государственного университета имени Янки Купалы

³д-р техн. наук, доц., доц. каф. логистики и методов управления

Гродненского государственного университета имени Янки Купалы

⁴канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. общей и теоретической физики

Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

e-mail: ⁴sekerzhitsky@rambler.ru

ОСОБЕННОСТИ СТРУКТУРЫ СФАЛЕРИТА

Проведен анализ алмазоподобной структуры кристаллов сфалерита. Установлена связь между экспериментально определенными параметрами ячейки и табличными значениями размеров атомов (ионов) цинка и серы. Для описания структуры сфалерита и изоморфных его модификаций предложена оболочечная модель, в которой структурным элементом является сфера, окружающая соответствующий тетраэдр. Набор этих сфер формирует трехслойную плотнейшую шаровую упаковку.

Введение

Сфалерит – сернистый цинк. В природе он встречается в магнетических очагах. Его кристаллохимическая формула ZnS , структура алмазоподобная. Еще в глубокой древности были обнаружены «камни» с высокой твердостью, которые после огранки известны нам как бриллианты, дорогие и редкие украшения. Одновременно были обнаружены природные объекты – прозрачные, склонные к огранке, но твердость их много меньше алмазной. Такие объекты (кристаллы) получили название сфалериты (от лат. *sphaleros* ‘обманчивый, ложный’). Когда было установлено, что в состав сфалерита входит цинк, то их стали называть цинковой обманкой. Цвет и свойства сфалеритовых структур изменяются в зависимости от их состава.

Структура сфалерита анализируется на основе структуры алмаза, поэтому эта структура называется алмазоподобной, однако алмаз является монокристаллическим объектом с четко выраженной валентной связью. В сфалеритах имеются атомы двух типов: (С) – катионы и (А) – анионы, вследствие чего в сфалеритах, наряду с ковалентной, имеются элементы ионной связи. Количество катионов и анионов одинаково, поэтому обобщенная химическая формула сфалерита имеет вид (СА).

Целью работы является обоснование применимости оболочечной модели для описания структуры сфалерита (ZnS) и изоморфных ему кристаллов.

Объектом исследования является модульная структура сфалерита на основе оболочечной модели.

Задачи исследования:

1. Показать, что алмазоподобная структура сфалерита и его полиморфных разновидностей может быть построена как плотнейшая упаковка сферических модулей.

2. Проанализировать соотношение параметров ячейки сфалерита с размерами атомов (ионов) ZnS на основе плотнейшей упаковки.

3. Показать, что структурный модуль можно рассматривать как единичный рассеивающий центр с анизотропной амплитудой рассеяния, по смыслу совпадающей с атомной амплитудой.

4. Обосновать методику расчета доли валентной и ионной связей в межатомном взаимодействии на основе параметров ячейки, валентных и ионных радиусов атомов.

Склонность к изоморфизму позволяет выращивать кристаллы с различными сочетаниями анионов и катионов. Эти «сфалериты» функционально являются весьма перспективными материалами для создания опико-электронных устройств и элементов вычислительной техники.

Результаты исследования могут применяться в области кристаллофизики, а также быть полезными для лиц, занимающихся выращиванием и исследованием свойств искусственных кристаллов сфалеритового типа.

Сфалерит как структурно алмазоподобный объект

В кристаллах алмаза каждый атом углерода находится в центре тетраэдра из четырех других атомов углерода. Описывается эта структура следующим образом.

Имеются две ячейки с точечной группой $Fm\bar{3}m$, и одна из них сдвинута относительно другой вдоль $[111]$ на вектор $\vec{r} = \frac{a}{4}\vec{i} + \frac{a}{4}\vec{j} + \frac{a}{4}\vec{k}$ в декартовой системе в точку

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \end{array} \right].$$

Начало координат этих ячеек в кристаллографической системе соответствует

$$[[000]], \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \end{array} \right].$$

Схема структуры алмаза приведена на рисунке 1.

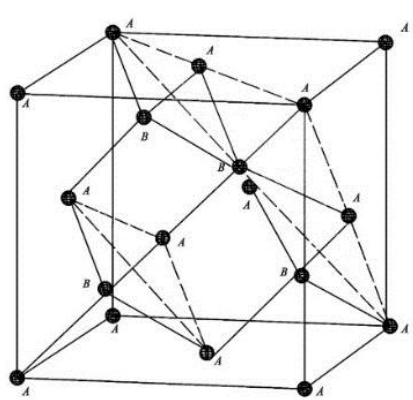


Рисунок 1. – Ячейка алмаза

В ячейке алмаза имеется 8 атомов углерода: $[000]$, $\left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array} \right]$, $\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{array} \right]$, $\left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{array} \right]$,

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \end{array} \right], \left[\begin{array}{ccc} 3 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \end{array} \right], \left[\begin{array}{ccc} 3 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{array} \right], \left[\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{array} \right].$$

Алмазы, как правило, это совершенные кристаллы с очень малым количеством примесей. Эти кристаллы зачастую состоят из двойников. При описании структур кристаллов (особенно неорганических) атомы рассматриваются как точки с рассеивающей способностью, монотонно убывающей в зависимости от модуля обратной решетки,

задаваемого функцией $S = \frac{2 \sin \theta}{\lambda}$. Эти кривые определяют атомные амплитуды рассеяния в электронных единицах (f -кривые). Кроме этого, структура алмаза имеет еще

одно характерное свойство. Все атомы углерода структурно тождественны, т. е. каждый из них можно считать находящимся в центре тетраэдра либо в любой из вершин этого тетраэдра. Следовательно, в модели шаровой упаковки все атомы (точки, ионы) углерода имеют одинаковый размер. Однако создать тетраэдрические структуры из шаров одного типа так, чтобы расстояния между атомами $C-C$ в точках $[[000]]$, $\left[\left[\frac{1}{4} \frac{1}{4} \frac{1}{4}\right]\right]$ и в точках $[[000]]$, $\left[\left[\frac{1}{2} \frac{1}{2} 0\right]\right]$ были одинаковы, невозможно.

В работах О. Моделунга и Ч. Киттеля еще в середине прошлого века было показано, что в алмазе тетраэдр с пятью атомами углерода (C^5) необходимо рассматривать как отдельную структуру. Для описания такого «модуля» на основе оболочечной модели использован метод линейной комбинации атомных орбиталей [1; 2]. Оптические и структурно энергетические зоны исследованы в рамках оболочечной модели.

Формула симметрии $Fm\bar{3}m$ ячейки (голоэдриа кубических решеток) имеет вид $3L_4(3L_{4i})4L_3 6L_2 9PC$. Центр симметрии в ячейке алмаза находится в точке $\pm \left[\left[\frac{1}{8} \frac{1}{8} \frac{1}{8}\right]\right]$.

Знак зависит от направления относительного сдвига подрешеток. В этом случае появляется особое направление $[111]$, вдоль которого расположена ось 3. Остальные три оси 3 исчезают. В то же время рентгеновская дифракция приводит к выводу о наличии симметрии голоэдриа кубической сингонии.

В работе [3] показано, что если в качестве структурной единицы выбрана сфера, описывающая тетраэдр C^5 , то структура алмаза соответствует трехслойной плотнейшей упаковке. Кристаллическая структура сфалерита может быть построена в виде двух кубических ячеек F -типа, в вершинах которых находятся: у одной C – катион, у другой A – анион. Эти две подрешетки сдвинуты по алмазному типу.

Обратная решетка сфалерита

Структурная амплитуда $F(hkl)$ кристалла сфалерита ZnS (AC в общем случае) имеет вид:

$$\begin{aligned} F(hkl) &= \sum f_j \exp\{2\pi i(hx + ky + lz)\} = \\ &= [1 + \exp\{\pi i(h+k)\} + \exp\{\pi i(h+l)\} + \exp\{\pi i(k+l)\}] \times \\ &\times \left[f_A + f_C \exp\left\{\pi i \frac{h+k+l}{2}\right\} \right] \end{aligned} \quad (1)$$

Первый множитель в правой части формулы (1) принимает два значения: «4» при (hkl) одинаковой четности, «0» в остальных случаях. Сумма в ней при всех нечетных (hkl) не равна нулю. При этом $F(hkl) = 4[1 \pm i]$, что соответствует условию отсутствия центра симметрии. При всех четных (hkl) сумма равна $f_A \pm f_C$.

$$f_A + f_C = \begin{cases} +1 & \text{при } h+k+l=4n \\ -1 & \text{при } h+k+l=4n+2 \end{cases} \quad (2)$$

Наличие дифракционных максимумов с $(h+k+l) = 4n+2$ обнаружено экспериментально [4]. В алмазе $f_A = f_C$, т. е. узлы с индексами $h+k+l = 4n+2$ обратной

решетки алмаза отсутствуют. Подчеркнем, что не рефлексы «гаснут», а эти узлы отсутствуют. Ячейка обратной решетки алмаза проанализирована в работе [3]. В сфалеритовых кристаллах узлы с указанными индексами имеют тем больший «вес», чем сильнее отличаются f_A и f_C .

В обратной решетке сфалерита наряду с узлами, свойственными алмазной решетке, появляются узлы, которые в обратной решетке алмаза отсутствуют. «Вес» этих узлов определяется отношениями f_A/f_C или f_C/f_A . В точке $\pm \left[\left[\frac{1}{8} \frac{1}{8} \frac{1}{8} \right] \right]$ у алмаза расположен центр симметрии, а у сфалерита его нет, но если атомам (ионам) приписать знаки плюс и минус или цвет, например, черный и белый, тогда можно говорить о наличии черно-белой симметрии в шубниковском смысле [5].

На основе рентгеновских дифракционных экспериментов можно определить отношение f_A/f_C или f_C/f_A . Если, например, выбрать рефлекс (220) и (222), то отношение их структурных амплитуд равно:

$$\frac{F(222)}{F(220)} = \frac{f_A - f_C}{f_A + f_C}. \quad (3)$$

Т. к. f_j – действительные числа, то

$$F(hkl)_j = \left(\frac{I(hkl)_j}{k} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4)$$

где k – факторы, влияющие на интенсивность, главный из которых (PLG)-фактор. Остальные слабо зависят от угла дифракции [6].

Из (4) следует:

$$\frac{F(hkl)_2}{F(hkl)_1} = \frac{f_A - f_C}{f_A + f_C}, \quad (5)$$

где 1 соответствует рефлексу (220), 2 – (222).

Отношение структурных амплитуд определяется экспериментально. Обозначим это отношение $\frac{F(hkl)_2}{F(hkl)_1} = R$, т. е.

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{R-1}{R+1}. \quad (6)$$

Учитывая, что $f_j = f \left(\frac{\sin \theta}{\lambda} \right)$, в левую часть необходимо внести поправочный коэффициент, определяемый отношением табличных значений f_2/f_1 . Соответственные значения f_j приведены в таблицах, например в [4].

Изменение «веса» узлов обратной решетки с индексами, запрещенными, если $f_1 = f_2$, в структуре, называемой в некоторых работах [7] тонкой, подчеркивает тот факт, что в зависимости от состава кристалла сфалерита меняется его энергетическое состояние. Именно это и объясняет перспективность использования материалов АС в различных практически значимых технических устройствах.

Структурный модуль кристалла сфалерита

Симметрия точечной группы сфалерита $F\bar{4}3m$ имеет вид [8] $3L_{4i}(3L_2)4L_3 6P$. Параметр ячейки $a \approx 5,41 \text{ \AA}$. Расстояние между вершинами тетраэдра и его центром равно $2,35 \text{ \AA}$. Т. к. ячейка сфалерита относится к F -типу, то координаты гомологичных точек ячейки $000, \frac{1}{2} \frac{1}{2} 0, \frac{1}{2} 0 \frac{1}{2}, 0 \frac{1}{2} \frac{1}{2}$. В соответствии с правилами Полинга, которые, строго говоря, относятся к ионным кристаллам, применим их в первом приближении к структуре цинковой обманки. В этом случае можно говорить о плотнейшей упаковке шаров с радиусом $R = a\sqrt{2}/4 = 1,91 \text{ \AA}$. Гомологичные точки правильной системы формируют тетраэдр, ребро которого равно $3,82 \text{ \AA}$. В вершинах этого тетраэдра располагаются атомы (ионы) цинка, а в его центре атомы (ионы) серы. В этом случае расстояние $S - Zn$ должно равняться $1,91 + 0,43 = 2,34$, что согласуется с литературными данными (2,35) [8].

Электронная структура атомов серы и цинка такая: $Zn - 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2$, $S - 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^4$. Тогда можно говорить о том, что каждый атом S находится внутри тетраэдра из атомов Zn , а каждый атом Zn – внутри тетраэдра S , это соответствует геометрическому представлению об атомах ZnS .

Два вида взаимных конфигураций атомов Zn и S приведены на рисунке 2.

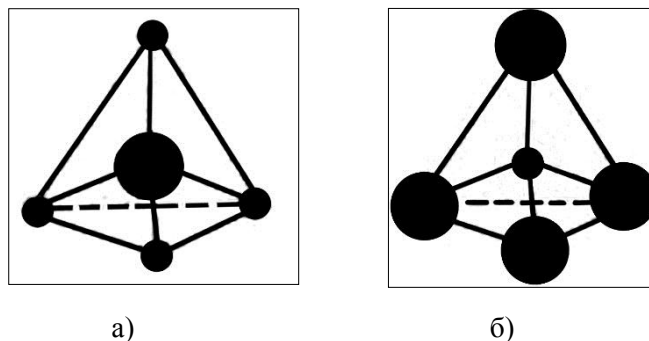


Рисунок 2. – Взаимных конфигураций атомов:
а) Zn в S – тетраэдре,
б) S в тетраэдрическом окружении из Zn

Кристаллы сфалерита с их алмазоподобной структурой характеризуются валентными межатомными взаимодействиями с элементами ионной связи. Если применить принцип плотнейшей упаковки Полинга к сфалериту, то основным тетраэдробразующим атомом является более крупный атом (ион).

Исходя из значений периода решетки и радиусов атомов (ионов) цинка, приходим к выводу, что половина диагонали грани решетки равна $d = a\sqrt{2}/2 = 3,83 \text{ \AA}$.

Следовательно, если один из атомов (ионов) цинка или серы формирует тетраэдр, то его радиус должен быть равен значению $3,83/2$.

Из таблицы 1 видно, что для любых типов связи это условие не выполняется. Если в качестве структурной единицы рассматривать ZnS -тетраэдр, то в соответствии с оболочечной моделью структурной единицей сфалерита является сфера, радиус которой равен сумме радиусов Zn и $S - 1,91 \text{ \AA}$ [1; 2]. Из приведенных данных видно, что для ковалентной связи сумма равна $2,3 \text{ \AA}$, ионной $1,03 \text{ \AA}$. В первом приближении «доля» ковалентной связи (X) может быть определена с учетом ковалентных и ионных радиу-

сов по формуле $2,30x + (1 - x) \cdot 1,03 = 1,91$. Отсюда $x \approx 0,6$. Эта модель, на наш взгляд, применима для любых полиморфных модификаций сфалерита.

Таблица 1. – Радиусы цинка и серы для различных типов связи [9]

	Атомные радиусы	Металлические радиусы	Ковалентные радиусы	Ионные радиусы
Zn	1,35	1,38	1,22	0,74
S	1,00	1,04	1,08	0,29
$r_{Zn} + r_S$	2,35	2,42	2,30	1,03

Если предположить, что в рамках ковалентной связи между атомами создается алмазоподобный электронный каркас, то расстояние между центрами серы и цинка будет определяться не только их ковалентными радиусами, потому что при наличии электронного алмазоподобного каркаса может возникать связь ионного типа. Наличие ионной связи объясняет малую твердость сфалеритов по сравнению с алмазом.

Природные и искусственные кристаллы сфалерита склонны к изоморфизму с широкой вариацией состава. В таблице 2 приведены элементы, которые в кристаллы сфалеритового типа входят в форме: радиусы атомов (ионов) $r_1 > r_2$ [4; 10; 11]. В кристаллах сфалерита в качестве C – катионов и A – анионов могут встречаться их сочетания.

Таблица 2. – Перечень элементов в естественных и искусственных изоморфных сфалериту кристаллах

(1) Название элемента	Be	B	Mg	Al	Si	Ti	Mn	Fe	Co	Ni	Cu	Zn	Ga	Ge	As	Y	Mo
Номер в периодической системе	4	5	12	13	14	22	25	26	27	28	29	30	31	32	33	39	42
(1) Название элемента	Ag	Cd	In	Sn	Pt	Hg											
Номер в периодической системе	47	48	49	50	78	80											
(2) Название элемента	H	C	N	O	F	P	S	Cl	As	Se	Br	Sb	Te	I	Po	B	
Номер в периодической системе	1	6	7	8	9	15	16	17	33	34	35	51	52	53	84	5	

Рассеивающая способность атомного модуля, т. е. амплитуда рассеянного на этом модуле излучения для сфалеритовых структур, при условии: один из атомов (например, A) находится в вершине тетраэдра, а атом C – в его центре.

$$F(hkl) = \Phi(hkl) [1 + \exp\{\pi i(hx + ky)\} + \exp\{\pi i(hx + lz)\} + \exp\{\pi i(ky + lz)\}] \times \sum \left(f_{Zn} + f_S \exp\left\{ \pi i \frac{h+k+l}{2} \right\} \right) \quad , \quad (7)$$

где

$$\Phi(hkl) = \begin{cases} f_C + f_A - P \\ f_C - f_A - N \end{cases} \quad (8)$$

В геометрическом смысле приведенные тетраэдры тождественны друг другу, но в качестве основного можно рассматривать тетраэдр, показанный на рисунке 3. Эти тетраэдры в структуре сфалерита связаны общими вершинами.

Данные тетраэдры можно рассматривать как отдельные структурные модули. Каждому структурному модулю принадлежит $1/4$ вершинного атома цинка и 1 атом серы, что соответствует формуле ZnS .

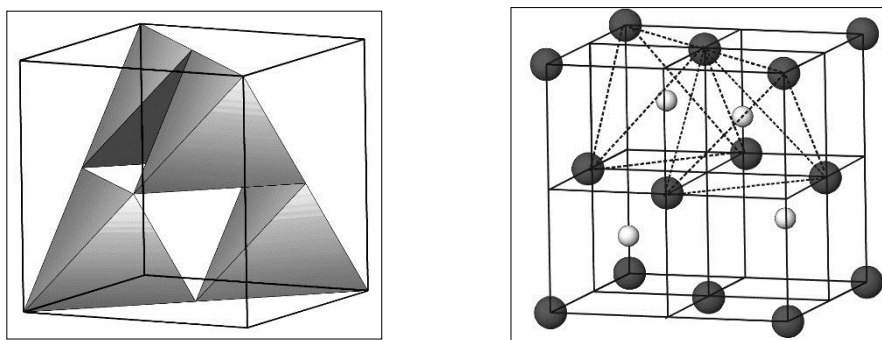


Рисунок 3. – Элементарная ячейка ZnS

Для всех рефлексов с одинаковой четностью индексов, кроме N, N , индексы hkl удовлетворяют условию:

$$(h + k + l) = 2(2n + 1), n = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

Рассматривая ZnS -тетраэдр в качестве единичного (отдельного) элемента, аналогичного атому в монокристалле, следует учитывать, что этот модуль, во-первых, имеет определенную структуру, во-вторых, он соединяется с другими модулями в едином монокристалле. Электроны серы $3p^4$ формируют с $4s^2$ -электронами цинка заполненный уровень, создающий ковалентную связь в пределах модуля, у которого электроны формируют электронный «каркас» кристалла, создающий взаимодействие валентного типа между всеми модулями. Тетраэдрические модули взаимодействуют друг с другом посредством электронного каркаса.

Поскольку структурно-химические направления $[111]$ и $[\bar{1}\bar{1}\bar{1}]$ равноправны, то существуют две энантиоморфные модификации структурно-химического модуля ZnS . При этом в дифракционном отношении их структурные факторы абсолютно одинаковые. Следовательно, и их модули могут рассматриваться в рамках одного подхода. В состоянии плотнейшей трехслойной упаковки сфер, описываемых вокруг ZnS -тетраэдров, рассеивающая способность которых позволяет считать их центрально-симметричными в статистическом смысле.

Точечная группа сфалерита в этом случае описывается как $Fm\bar{3}m$ с коэффициентом компактности $k \approx 74\%$. При изучении структурно-энергетических свойств кристаллов сфалеритового типа следует учитывать как внутримодульные колебания, так и энергетику межмодульных связей. В качестве структурного модуля можно рассматривать и тетраэдр, в вершинах которого расположены атомы (ионы) серы, а цинк

находится внутри этого тетраэдра. И дифракция, и энергетика имеют тот же вид, что и в случае S в тетраэдре Zn .

Выделение структурных модулей в качестве отдельных центров применимо и для прочих веществ, не только сфалеритовой группы, но и для кристаллов со структурами других типов.

Заключение

Кристаллы сфалерита достаточно хорошо изучены. Известна их структура, точечная группа, параметры ячейки. Они относятся к алмазоподобному типу, когда при составе (CA) каждый из атомов находится в тетраэдрической координации. Т. е. атом (A) находится в тетраэдрическом окружении из атомов (C) , и наоборот.

Показано, что принципу плотнейшей шаровой упаковки не соответствуют ни размеры атомов (ионов) Zn , ни размеры атомов S .

Для описания структуры сфалерита предлагается использовать оболочечную модель, когда в качестве структурной единицы рассматривается сфера вокруг тетраэдра Zn . В этом случае несоответствия между атомными, валентными, ионными, металлическими радиусами и параметрами решетки устраняются. Для этого необходимо учитывать, что межатомная связь в сфалерите носит ионно-ковалентный характер.

Предлагается метод расчета ковалентности и ионности по табличным значениям параметра решетки: a -кристаллов сфалеритового типа и значениям ковалентных и ионных радиусов A и C . Для сфалерита доля ковалентности в межатомной связи $Zn-S$ примерно равна 0,6.

Методика выделения структурных модулей в моноатомных кристаллах может быть использована при описании структурно-химических и структурно-энергетических особенностей кристаллов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Моделунг, О. Теория твердого тела / О. Моделунг. – М. : Наука, 1980. – 116 с.
2. Киттель, Ч. Квантовая теория твердого тела / Ч. Киттель. – М. : Наука, 1987. – 491 с.
3. Противоречия в структуре алмаза и их устранение / В. А. Лиопо [и др.] // Гор. механика и машиностроение. – 2018. – № 4. – С. 66–77.
4. Гажулина, А. П. О псевдосимметрических особенностях кристаллов структурного типа сфалерита / А. П. Гажулина, М. О. Марычев // Вестн. Нижегород. ун-та им. Н. И. Лобачевского. – 2011. – № 1. – С. 47–52.
5. Копчик, В. А. Шубниковские группы. Справочник по симметрии и физическим свойствам кристаллических структур / В. А. Копчик ; под ред. Н. В. Белова. – М. : Изд-во МГУ, 1966. – 723 с.
6. Ladd, M. Structure Determination by X-ray Crystallography / M. Ladd, R. Palmer. – Berlin : Springer, 2013. – 756 p.
7. Тонкие особенности кристаллической структуры кубического полупроводникового монокристалла $Zn_{0,9}V_{0,1}Se$ / В. И. Максимов [и др.] // Физика твердого тела. – 2014. – Т. 56, № 12. – С. 2311–2318.
8. Брегг, У. Л. Кристаллическая структура минералов / У. Л. Брегг, Г. Ф. Кларинбул. – М. : Мир, 1967. – 389 с.
9. Бацанов, С. С. Экспериментальные основы структурной химии / С. С. Бацанов. – М. : Изд-во стандартов, 1986. – 240 с.
10. Нарай-Сабо, И. Неорганическая кристаллохимия / И. Нарай-Сабо. – Будапешт : Изд-во Акад. наук Венгрии, 1969. – 504 с.

11. Барский, Л. А. «Принцы и нищие» в царстве минералов / Л. А. Барский. – М. : Наука, 1988. – 119 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 27.12.2019

Liopo V. A., Liaushuk I. A., Auchynnikau Y. V., Sekerzhitsky S. S. Features of the Structure of Sphalerite

The diamond-like structure of sphalerite crystals is analyzed. A connection was established between experimentally determined cell parameters and tabular values of the sizes of atoms (ions) of zinc and sulfur. To describe the structure of sphalerite and its modifications isomorphic, a shell model is proposed in which the structural element is the sphere surrounding the corresponding tetrahedron. A set of these spheres forms a three-layer dense ball package.

F. J. Sánchez-Bernabe

Department of Mathematics Metropolitan Autonomous University

e-mail: fjsb@xanum.uam.mx

FULLERENES WITH STRUCTURE OF CUBIC AND OCTAHEDRAL TYPE

Several fullerenes that resemble Cubic or Octahedral structure are presented, between them a molecule with 128 carbons, and another one with 132.

Calculations

Fullerenes with cubic structure look like a box, and we will distinguish a lateral face, with same structure that the opposite face. Also, we will consider the top of the box and its bottom, both of them with the same structure. Finally, we are going to describe the structure of the frontal face, with the same structure that the face located backwards of the box.

The first example that we consider of a classical fullerene contains 72 carbons (figure 1). A lateral face is formed by a central column of two hexagons (with a pentagon at the top, and another one at the bottom) and, at each side a column of three hexagons, giving 8 hexagons, and two pentagons for this face.

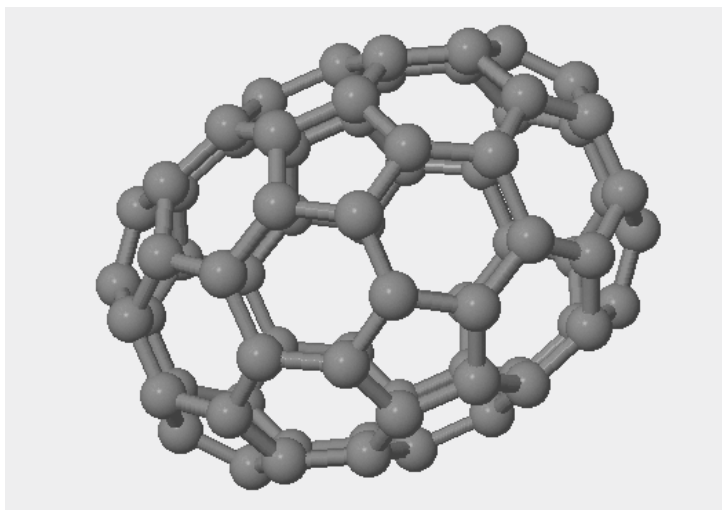


Figure 1. – Lateral face of a fullerene with 72 carbons

The top only provides a row of four hexagons. We observe in figure 2 that this fullerene does not satisfy the isolated pentagon rule.

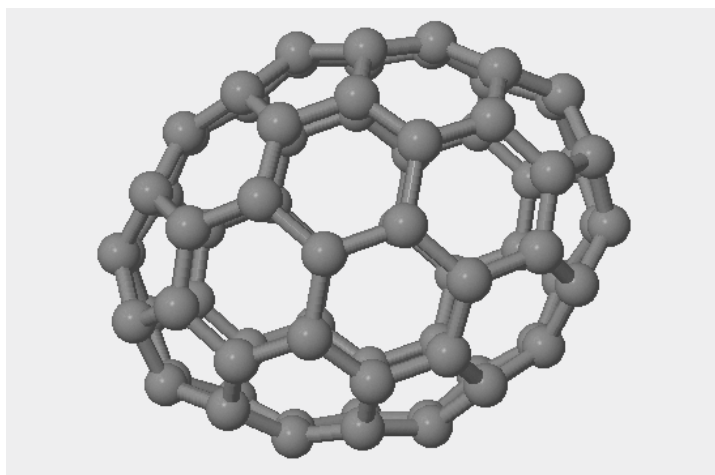


Figure 2. – View from the top of fullerene C₇₂

On the other hand, the frontal face has only one hexagon, and four pentagons (figure 3).

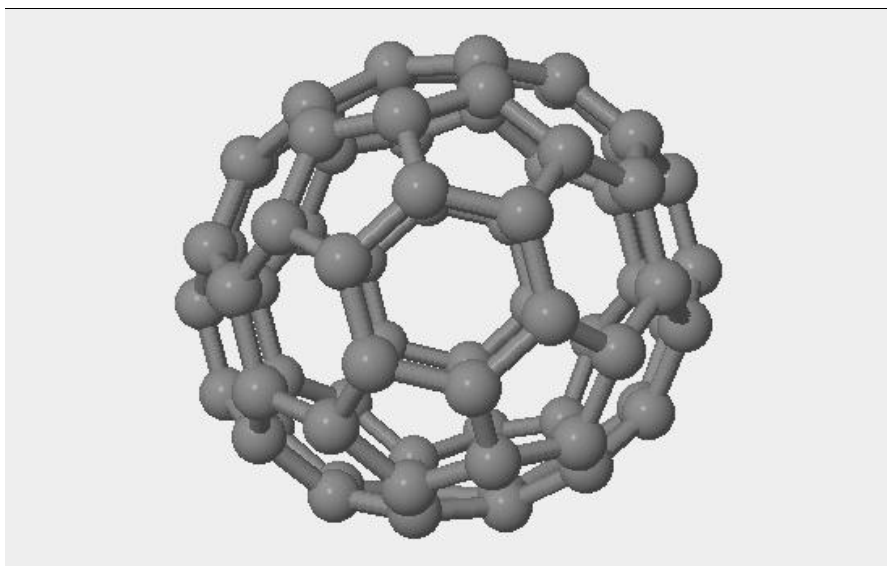


Figure 3. – Frontal face of a classical fullerene with 72 carbons

Therefore, the lateral faces provides 16 hexagons, and 4 pentagons. Then, the top and the bottom provide 8 hexagons, and finally, the frontal, and its opposite face adds two hexagons, and 8 pentagons. Thus, we have 26 hexagons, and 12 pentagons.

Our next molecule contains heptagons. Thus, it is an example of a nonclassical fullerene. We have 128 carbons, 12 pentagons, 30 hexagons, and 12 heptagons, too (figures 4, 5)

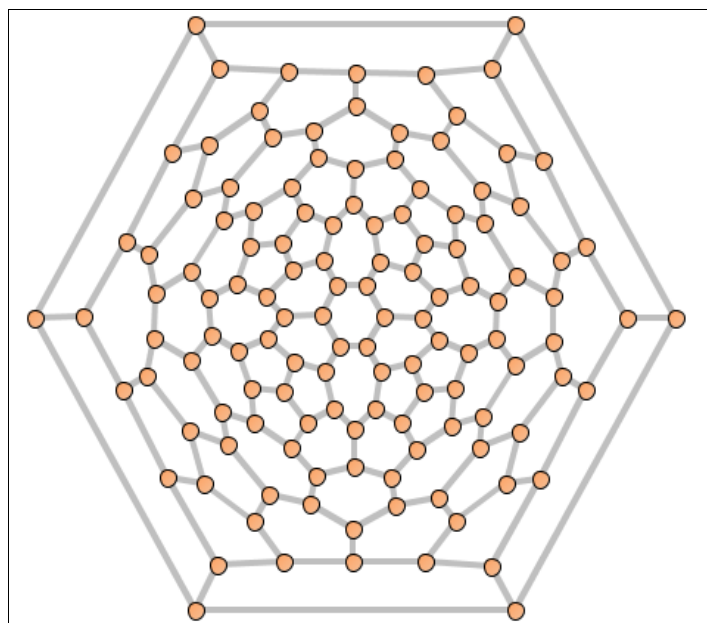


Figure 4. – Schlegel diagram of a nonclassical fullerene with 128 carbons

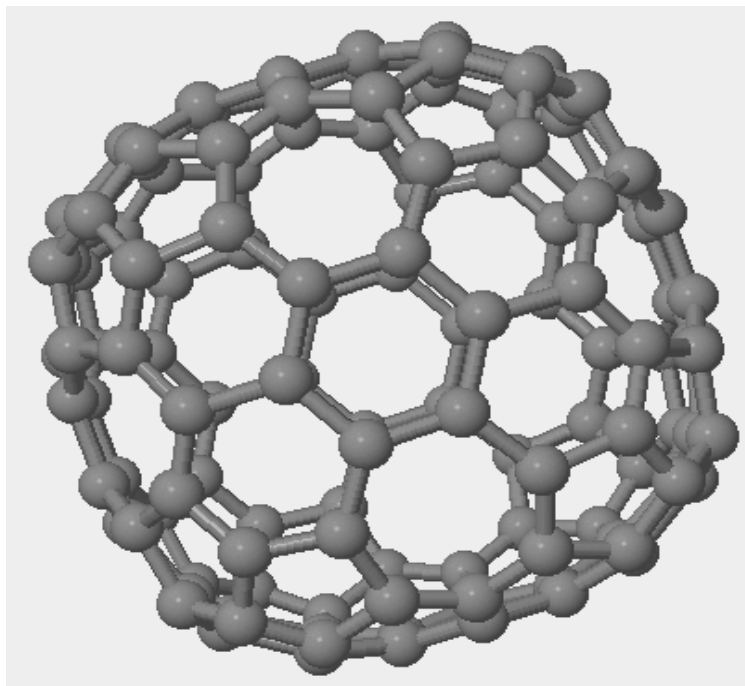


Figure 5. – Lateral face of fullerene C_{128}

The Schlegel diagram of a fullerene with 132 carbons, is shown in figure 6. At the central part, we can observe one hexagon, with 6 neighbours, that are also hexagons. Meanwhile, at the central part of molecule of figure 7, we locate a central hexagon surrounded by 3 heptagons, and 3 pentagons. Actually, figure 6 shows face at the back of the face composed by one hexagon surrounded 6 hexagons displayed on figure 6.

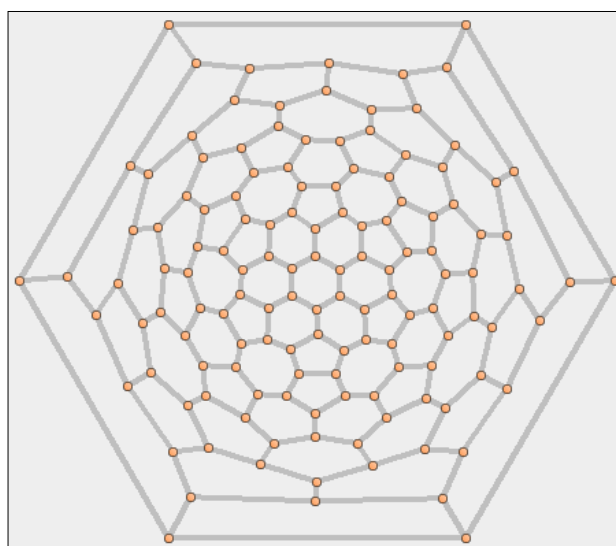


Figure 6. – Schlegel Diagram of a nonclassical fullerene with 132 carbons

We observe too, in figure 6, three couples of pentagons around the central part. Also, we have another close to the top, (12 o'clock) another couple of pentagons at 4 and 5 o'clock; finally, we a couple of pentagons at 7 and 8 o'clock.

Thus, we get 12 pentagons coming from these six couples of pentagons.

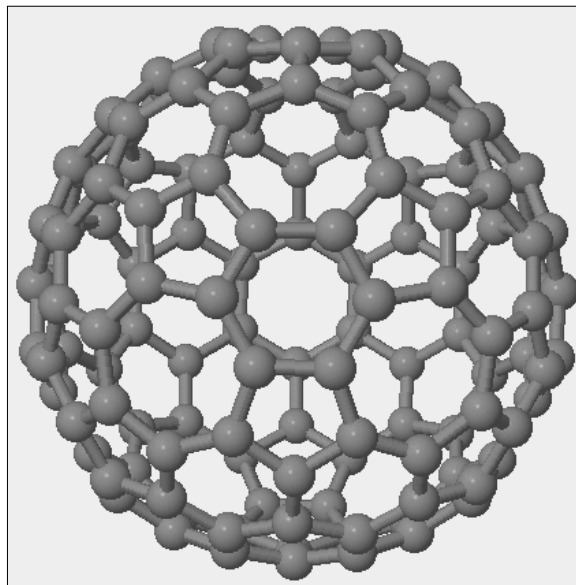


Figure 7. – Nonclassical fullerene with 132 carbons

Since we have two types of faces, the first one with seven hexagons, and there four faces with that structure, we take into account 28 hexagons.

There are also four faces of the other type, each of them adds one hexagon, three heptagons, and 3 pentagons, obtaining four hexagons, 12 heptagons, and 12 pentagons.

Therefore, considering the two types of faces, and the six couples of pentagons, we have a total number of 32 hexagons, 24 pentagons, and 12 heptagons.

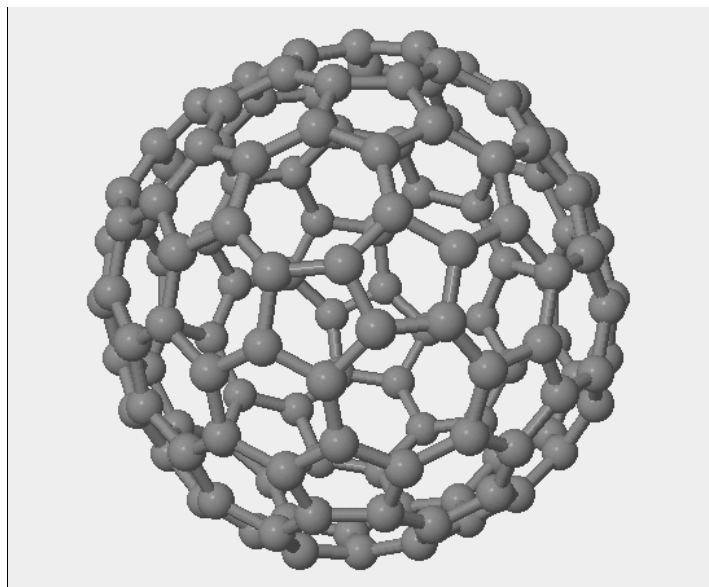


Figure 8. – Another view a nonclassical fullerene with 132 carbons

Our next fullerene has 152 fullerenes, and contains 66 hexagons and 12 pentagons (figures 9–11).

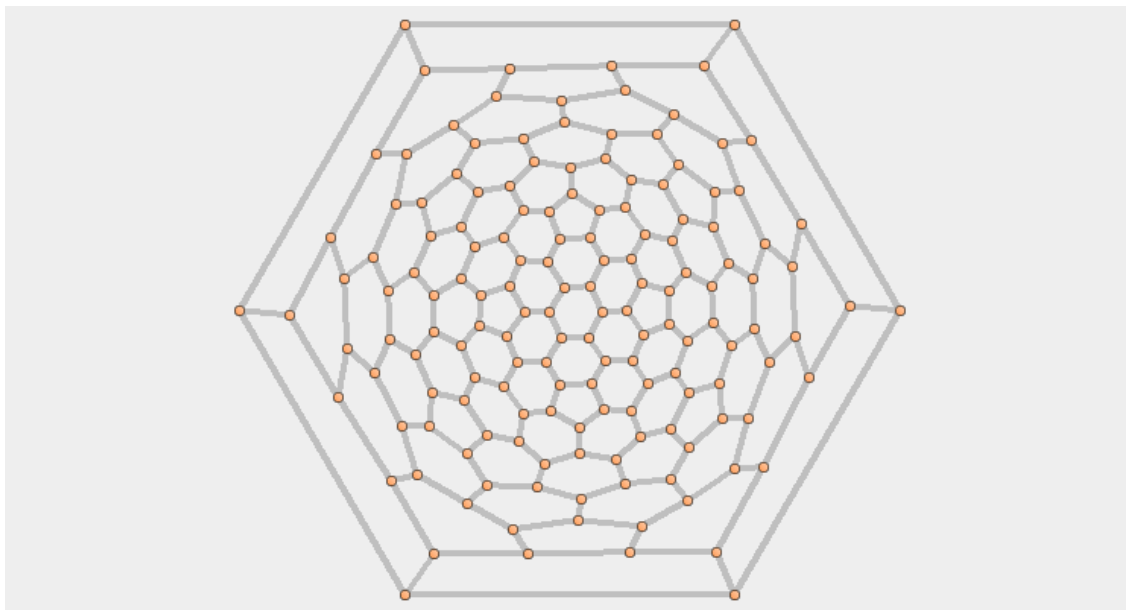


Figure 9. – Schlegel Diagram of a fullerene with 152 carbons

In this construction, a lateral face is formed by six hexagons surrounding one hexagon located at the center. At the upper side of this face we have a pentagon pointing towards the face that form the top of this fullerene. Similarly, we have another pentagon at the lower side of the face, that is pointing towards the face that form the bottom of this fullerene.

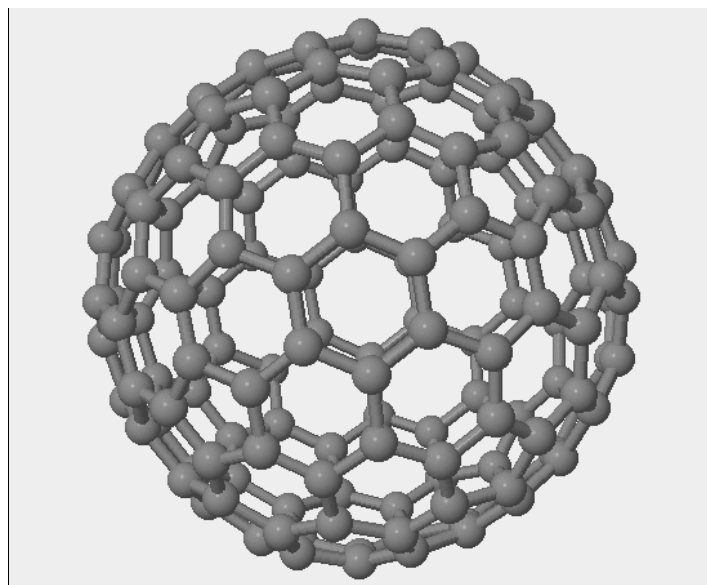


Figure 10. – One of the six faces of a classical fullerene with 152 carbons

The face that we are describing is connected on the left hand side with another face that has a pentagon that is pointing towards the lateral face. In a similar way, the lateral face is connected on the right hand side with another face that has a pentagon that is pointing towards the lateral face. To summarize, our lateral face contains seven hexagons, and four pentagons that are shared with the faces at the top, the bottom, and faces on the left hand side, and the right hand side.

Moreover, between three faces, we have a region formed by three hexagons that is connected with two hexagons of each of the three faces. Also, this region is connected with three pentagons. We can consider this region of three hexagons like a corner of our fullerene.

Counting the number of hexagons of the fullerene, we realize that we have six faces each of them containing seven hexagons. The number of pentagons in opposite sides is four, giving eight pentagons, plus four additional pentagons, for a total number of twelve pentagons, as expected in a classical fullerene.

This fullerene has eight corners, with three hexagons in each of these corners. Therefore, we have six faces with seven hexagons, giving forty two hexagons, plus twenty four hexagons coming from the corners. Thus, we have 66 hexagons, and of course, 12 pentagons for this 152 carbons classical fullerene.

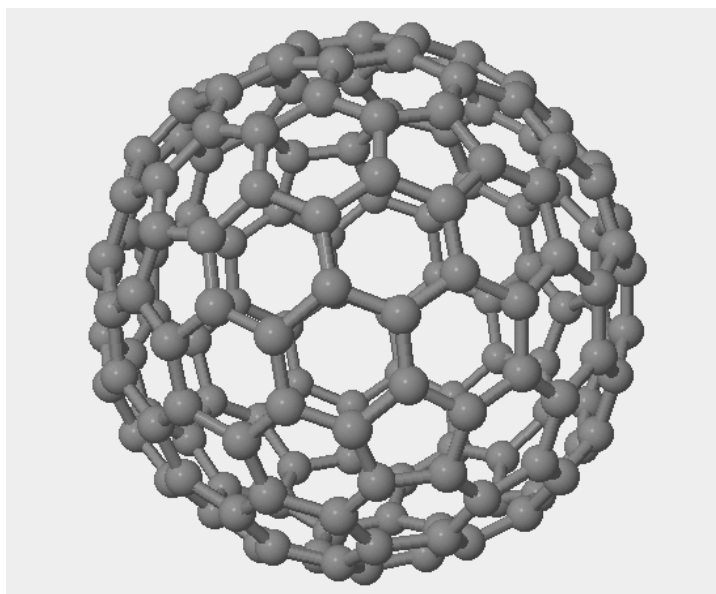


Figure 11. – One of the eight corners of a classical fullerene with 152 carbons

Now, we consider a fullerene with 156 carbons (figure 12). A lateral face is formed by a central column of four hexagons and at each side a column of three hexagons and a couple of outer columns of two hexagons, giving 14 hexagons plus four pentagons at each corner.

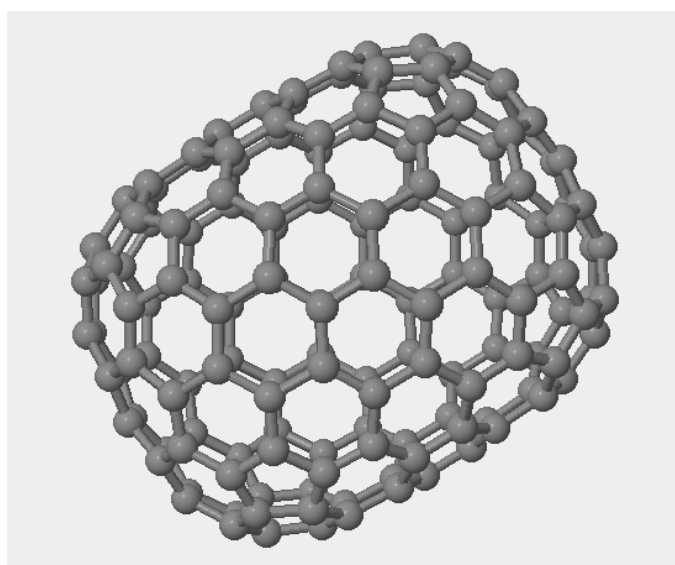


Figure 12. – Lateral face of a classical fullerene with 156 carbons

The top consists of a central column of two hexagons and at each side a column of three hexagons and a couple of outer columns of two hexagons, giving 12 hexagons (figure 13).

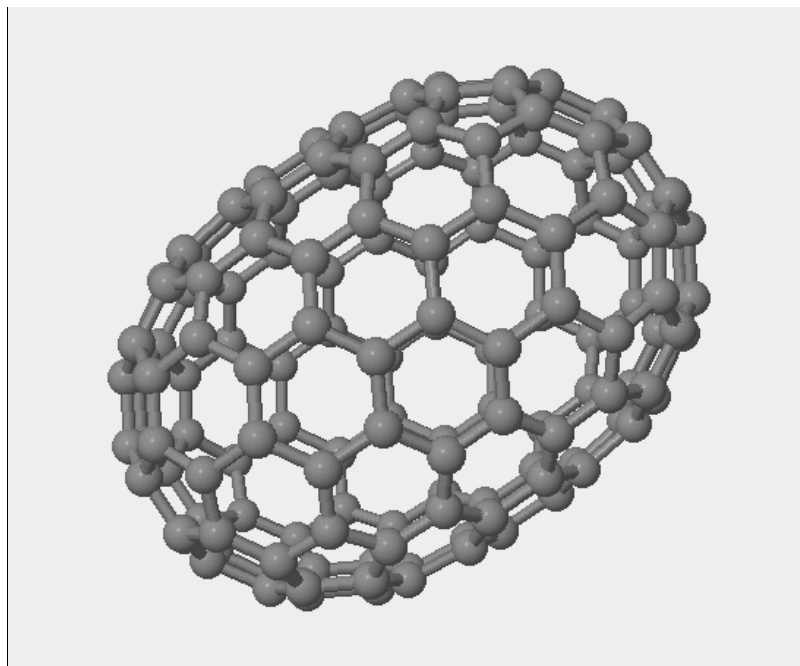


Figure 13. – Upper face of a classical fullerene with 156 carbons

The frontal part of this fullerene is formed by a central column of two hexagons (with a pentagon at the top, and another one at the bottom) and at each side a column of three hexagons, producing 8 hexagons, plus two pentagons (figure 14).

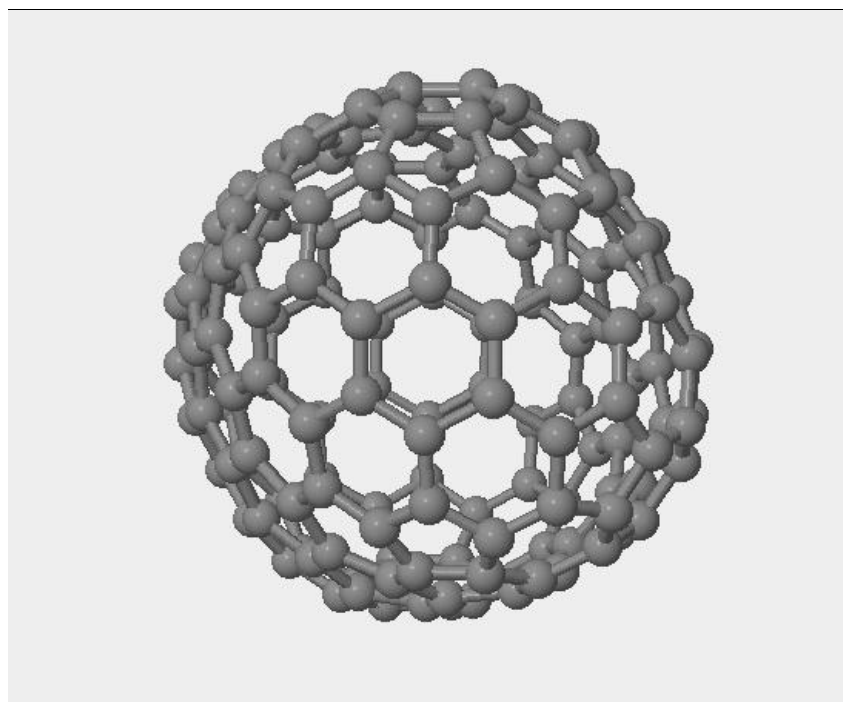


Figure 14. – Frontal face of a classical fullerene with 156 carbons

Since we have two lateral faces, we have to take into account 28 hexagons plus 8 pentagons. Moreover, the top and the bottom contribute with 24 hexagons. Finally, the frontal and the opposite part add 16 hexagons, plus 4 pentagons. Therefore, we have a total number of 68 hexagons, plus 12 pentagons.

Discussion

The first fullerene that we presented contains 72 carbons, with 26 hexagons, and 12 pentagons.

Our next fullerene it not classical because it contains 12 heptagons, besides 30 hexagons, and 12 pentagons. The number of carbons is 128.

Now, we consider a fullerene with 132 carbons. In this case, we have 32 hexagons, 24 pentagons, and 12 heptagons.

The fourth fullerene is classical with 66 hexagons, and 12 pentagons. The number of carbons is 152.

Finally, we consider a fullerene with 156 carbons. In this case, we have 68 hexagons, and 12 heptagons.

REFERENCES

1. C_{62} : Theroretical Evidence for a Nonclassical Fullerene with a heptagon ring / P. W. Ayuela [et al.] // *J. Phys. Chem.* – Vol. 100. – P. 15634–15636.
2. Gaito, S. A Theroretical study of the smallest tetrahedral carbon schwarzites / S. Gaito, L. Colombo, G. Benedek // *Europhysics Letters.* – 1998. – Vol. 44.
3. Optical and Vibrational Properties of Toroidal Carbon Nanotubes / F. Beuerle [et al.] // *Chem. Eur. J.* – 2011. – Vol. 17. – P. 3868–3875.
4. Melker, A. I. Tetrahedral Mini- and Midi- Fullerenes / A. I. Melker, S. A. Starovoirov, R. M. Zarafutdinov // *Materials Phys. and Mech.* – 2019. – Vol. 41. – P. 52–61.
5. Sánchez-Bernabe, F. J. Three Examples of Non-classical Fullerenes with Tetrahedral Structure / F. J. Sánchez-Bernabe // *Informatics, Electronics and Microsystems: Tech Connect Briefs.* – 2017. – Vol. 4. – P. 5–7.
6. Sánchez-Bernabe, F. J. Nonclassical Fullerenes with Cubic and Octahedral Structure / F. J. Sánchez-Bernabe // *Informatics, Electronics and Microsystems: Tech Connect Briefs.* – 2017. – Vol. 4. – P. 12–14.
7. C_{60} : Buckminsterfullerene / H. W. Kroto [et al.] // *Nature.* – 1985. – Vol. 318. – P. 162–163.
8. CaGe – a Virtual Environment for Studying Some Special Classes of Plane Graphs – an update / G. Brinkmann [et al.] // *MATCH Commun. in Math. and in Computer Chem.* – 2010. – Vol. 63, part 3. – P. 533–552.
9. Zhu, H.-Y. Tetrahedral-symmetry tetrahydrofullerenes / H.-Y. Zhu, D. J. Klein // *J. of Molecular Structure.* – 1995. – Vol. 338. – P. 11–23.
10. Decoratiom of the truncated Tetrahedron – An Archimedean Polyhedron – to produce a New Class of Convex equilateral Polyhedra with Tetrahedral Symmetry / S. Schein // *Symmetry.* – 2016. – nr 8. – P. 82.
11. Circulene covered fullerenes / M. V. Diudea [et al.] // *TheoChem.* – 2009. – Vol. 904. – 28–34.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 28.11.2019

УДК 535.012

Н. Н. Сендер

канд. физ.-мат. наук, доц., зав. каф. математического анализа,
дифференциальных уравнений и их приложений
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
e-mail: sender@brsu.brest.by

**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИЧЕСКИХ ПОСТОЯННЫХ
ПОГЛОЩАЮЩИХ КРИСТАЛЛОВ НА ОСНОВЕ МЕТОДА
ИММЕРСИОННОЙ ЭЛЛИПСОМЕТРИИ**

На основе метода иммерсионной эллипсометрии определены оптические постоянные поглощающих одноосных кристаллов и низкосимметричных кристаллов ромбической сингонии, рассчитаны оптические постоянные таких кристаллов, как сапфир, турмалин, ниобат лития легированный Fe, ниобат лития, соль сульфокислоты Tl_3AsS_4 и ортоферрита тербия $TbFeO_3$. Предлагаемый подход позволяет относительно просто вычислить оптические постоянные одноосных и ромбических поглощающих кристаллов. При этом удастся избежать трудностей, связанных с решением обратной задачи, поскольку оптические постоянные вычисляются без использования численных методов простым расчетом определяемых параметров по формулам.

Введение

В [1] предложен эллипсометрический метод измерения коэффициентов отражения изотропных сред с использованием иммерсионной жидкости при условии, что тангенциальная составляющая вектора рефракции остается неизменной при измерении с иммерсией и без нее. Для изотропных систем при этом удастся из эллипсометрических измерений ψ и Δ восстановить абсолютные значения элементов матрицы отражения, что упрощает решение обратной задачи, а также позволяет повысить точность определения оптических постоянных и толщин слоев.

В работе [2] теоретически показана возможность с помощью иммерсионных эллипсометрических измерений восстановить полную комплексную 2×2 матрицу отражения от анизотропной системы. Это существенно изменяет возможность решения обратной задачи эллипсометрии. Появляется перспектива ее надежного решения для поглощающих низкосимметричных кристаллов всех сингоний, а также слоистых анизотропных структур.

Иммерсионный метод, применяемый для определения показателей преломления прозрачных кристаллов, заключается в подборе жидкости с показателем преломления, близким к показателю преломления кристалла. Использование иммерсии в нашем подходе позволяет восстановить матрицу отражения, что принципиально отличает от известных применений иммерсии.

Экспериментальное определение оптических постоянных

При эллипсометрических исследованиях используют различные конструкции кювет [3]. Исходя из анализа ошибок, конструктивных особенностей эллипсометра (невозможность установить угол падения $< 45^\circ$) и необходимости выполнения условия

$$\xi = n_1 \sin \varphi_1 = n_2 \sin \varphi_2 = const, \quad (1)$$

удобно использовать кювету, в которую иммерсионная жидкость заливается плоскопараллельным слоем [3] (рисунок 1). Толщина слоя h подбирается такой, чтобы пучок 1, отраженный от поверхности иммерсии, не перекрывался с пучком 2, отраженным от образца S . Диаметр кюветы выбирается из условия, чтобы поверхность была плоской

и не искривлялась за счет мениска (по крайней мере та часть, от которой отражается пучок), но в то же время он не должен быть большим из-за появления ряби на поверхности жидкости (причины ее появления могут быть различными, любые механические воздействия на установку приводят к появлению ряби, поэтому необходимо принять меры, предотвращающие ее появление), которая вносит искажение в результаты измерений. Эту ситуацию можно сравнить с шероховатостью на поверхности. В этом случае необходим ее учет. Плоскопараллельность слоя иммерсии обеспечивает автоматически выполнение условия (1) при падении света на кристалл. При этом необходим учет изменения поляризации света на границе воздух-иммерсия. Связь между ψ и Δ при падении пучка света из иммерсии (рисунок 1), когда иммерсия является полубесконечной средой, с экспериментальными значениями ψ_0 и Δ_0 в случае плоскопараллельного слоя имеют вид

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \psi &= \cos^2(\varphi_1 - \varphi_2) \operatorname{tg} \psi_0, \\ \Delta &= \Delta_0. \end{aligned} \quad (2)$$

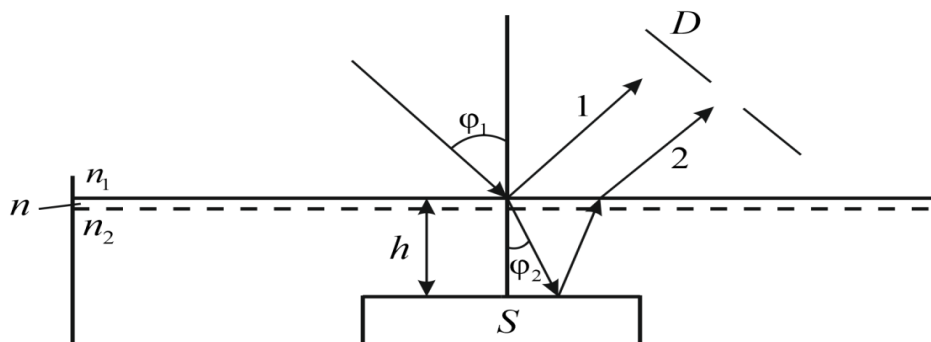


Рисунок 1. – Схема экспериментальных измерений при использовании иммерсионных жидкостей

Эта связь получена в случае резкой границы воздух-иммерсия. Если учесть переходный слой на поверхности жидкости, то полученные выражения отличаются от (2) лишь для Δ [4] (рисунок 1):

$$\Delta = \Delta_0 \pm 4\psi_m \frac{(n_2^2 - 1) \sin^2 \varphi_1}{\sqrt{n_2^2 + 1} (n_2^2 \cos \varphi_1 + \sqrt{n_2^2 - \sin^2 \varphi_1})}, \quad (3)$$

где

$$\psi_m = \left| \frac{\pi h (n_2^2 - n^2)(n^2 - 1)}{\lambda n^2 (n_2^2 - 1)} \sqrt{n_2^2 + 1} \right|,$$

ψ_m – минимальная эллиптичность при отражении от жидкости при угле Брюстера, n и n_2 – показатели преломления переходного слоя (переходный слой моделируется в виде плоскопараллельного изотропного слоя толщиной h) и иммерсионной жидкости. Переходный слой вносит малый вклад ($\ll 10^{-4}$), и им можно пренебречь и пользоваться формулами (2). Если на поверхности иммерсии появляется рябь, то в этом случае необходимо пользоваться формулой (3).

В качестве иммерсионной жидкости был взят глицерин. Выбор глицерина был продиктован следующими соображениями: во-первых, он вязок, что облегчает прово-

дить измерения при такой конструкции кюветы (рисунок 1), во-вторых, показатель преломления глицерина достаточно высок, а, как показывает анализ ошибок, они уменьшаются с увеличением показателя преломления иммерсионной жидкости. Показатель преломления глицерина определялся на рефрактометре на длину волны натрия, а затем с учетом дисперсии показателя преломления глицерина пересчитывался на длину волны $\lambda = 6328 \text{ \AA}$ гелий-неонового лазера. Во время экспериментов было замечено, что при проведении контрольных измерений показателя преломления глицерина он изменялся. Изменение показателя преломления происходило в сторону уменьшения, что объясняется гигроскопичностью глицерина (с течением времени он набирает влагу). Поэтому перед экспериментом необходимо проводить измерения его показателя преломления, как указывалось выше, на рефрактометре с последующим перерасчетом на длину $\lambda = 6328 \text{ \AA}$ или можно провести измерения непосредственно на эллипсометре и рассчитать показатель преломления иммерсионной жидкости по формулам, приведенным в [5], которые работают и в частном случае, когда среда изотропна.

Необходимая точность при определении оптических постоянных обеспечивается значением показателя преломления глицерина с точностью $\pm 0,001$. Была получена зависимость показателя преломления глицерина от температуры для интервала температур $10 \text{ }^\circ\text{C} - 35 \text{ }^\circ\text{C}$; изменения показателя преломления наблюдались в четвертом знаке после запятой, что обеспечивало необходимую точность при нахождении оптических постоянных.

Ориентировка кристаллов относительно плеч эллипсометра осуществлялась по методике, описанной в [6]. При измерении с иммерсией необходима юстировка эллипсометра, чтобы пучок 2 попадал на ФЭУ, а пучок 1 отражался диафрагмой D (рисунок 1). Она осуществлялась следующим образом. Если кристалл плоскопараллельный, то его кладут на дно кюветы и винтами столика добиваются, чтобы отраженный пучок попадал на ФЭУ. Затем заливается иммерсия. После этого винтами, определяющими уровень эллипсометра, добиваются, чтобы отраженные пучки 1 и 2 были в плоскости падения. Наконец, столик опускают вниз приблизительно на толщину слоя глицерина и винтами уровня эллипсометра регулируют, чтобы отраженный пучок 2 попал на ФЭУ. Если все же пучок не будет попадать на ФЭУ, то добиваются попадания на ФЭУ, повторив последние действия несколько раз. Этим автоматически обеспечивается плоскопараллельность слоя иммерсии, находящейся над кристаллом.

Определение ψ и Δ осуществлялось, как описано в [6], с учетом неидеальности компенсатора, его оптической активности, температурных колебаний параметров компенсатора и др. Рассчитанные на их основе оптические постоянные по формулам, приведенным в [7; 8] для одноосных и ромбических поглощающих кристаллов, указаны в таблицах 1 и 2. Полученные значения оптических постоянных хорошо согласуются с литературными, а также со значениями, полученными нами на основе приближенных соотношений и приведенными в таблицах 3 и 4.

Эллипсометрическим методом были определены оптические постоянные ромбических поглощающих кристаллов Tl_3AsS_4 , $TbFeO_3$.

Анализ ошибок иммерсионного метода для ромбических кристаллов в зависимости от угла падения, показателя преломления иммерсионной жидкости проводился следующим образом. Для различных углов падения решалась прямая и обратная задача с введенной в угол падения ошибкой. Затем находилась абсолютная или относительная ошибка от угла падения. Аналогично строилась зависимость от показателя преломления иммерсионной жидкости. Вид этих зависимостей аналогичен зависимостям, изображенным на рисунке 2, которые подтверждают известные из литературы факты о мини-

муме ошибок вблизи псевдобрюстеровского угла, а также уменьшении их при приближении значения показателя преломления иммерсионной жидкости к одному из показателей преломления ромбического кристалла.

Таблица 1. – Оптические постоянные одноосных кристаллов, вычисленные на основе иммерсионного метода

Кристалл	φ , град	θ , град	ψ_1 , град Δ_1 , град	ψ_2 , град Δ_2 , град	$N_0 = n_0 - i\chi_0$	$N_e = n_e - i\chi_e$
Сапфир	65	90	7,35 7,82	19,80 163,20	1,764 - i 0,025	1,758 - i 0,029
Ниобат лития лигированный Fe	60	0	3,25 1,34	26,75 176,75	2,266 - i 0,158	2,198 - i 0,152
Ниобат лития	45	0	2,70 160,62	27,00 178,71	2,286 - i 0,060	2,199 - i 0,050

Таблица 2. – Оптические постоянные поглощающих ромбических кристаллов Tl_3AsS_4 , $TbFeO_3$, рассчитанные на основе иммерсионного метода $N_i = \sqrt{\varepsilon_i} = n_i - i\chi_i$, $i = x, y, z$

Кристалл	φ , град	ψ_x	Δ_x	ψ_y	Δ_y	N_x	N_y	N_z
Соль сульфокислоты Tl_3AsS_4	45	35,78	179,57	35,74	179,62	2,828 -i 0,202	2,773 -i 0,201	2,824 -i 0,202
Ортоферрит тербия $TbFeO_3$	70	25,09	177,89	26,22	178,38	2,426 -i 0,088	2,452 -i 0,089	2,438 -i 0,108

Таблица 3. – Оптические постоянные одноосных кристаллов, вычисленные из эллипсометрических измерений на основе приближенных соотношений

Кристалл	φ , град	θ , град	ψ , град Δ , град	ψ_{\perp} , град Δ_{\perp} , град	Первое приближение		Второе приближение	
					$N_0 =$ $= n_0 - i\chi_0$	$N_e =$ $= n_e - i\chi_e$	$N_0 =$ $= n_0 - i\chi_0$	$N_e =$ $= n_e - i\chi_e$
Рубин	45	90	21,12 179,55	21,38 179,90	1,759 -i 0,003	1,754 -i 0,004	1,759 -i 0,003	1,754 -i 0,004
Турмалин	45	90	18,49 178,78	20,04 177,62	1,644 -i 0,038	1,623 -i 0,033	1,650 -i 0,041	1,624 -i 0,032
Кальцит	45	44,63	16,63 180,0	19,44 180,0	1,637 -i 0,0	1,498 -i 0,0	1,651 -i 0,0	1,486 -i 0,0
Антрацит	45	75,20	23,95 165,70	28,87 164,31	2,073 -i 0,665	1,956 -i 0,655	2,084 -i 0,684	1,961 -i 0,534
Сапфир	65	90	7,21 8,97	7,35 7,82	1,762 -i 0,053	1,757 -i 0,047	1,763 -i 0,052	1,756 -i 0,047
Ниобат лития лигированный Cu	60	90	7,94 176,58	9,90 175,65	2,264 -i 0,046	2,197 -i 0,041	2,297 -i 0,053	2,205 -i 0,037
Кварц	45	90	18,33 177,15	17,52 177,75	1,541 -i 0,036	1,554 -i 0,039	1,543 -i 0,037	1,554 -i 0,040

Таблица 4. – Оптические постоянные поглощающих ромбических кристаллов Tl_3AsS_4 , $TbFeO_3$, вычисленные из эллипсометрических измерений на основе приближенных соотношений $N_i = \sqrt{\epsilon_i} = n_i - i\chi_i$, $i = x, y, z$

Кристалл	φ , град	ψ_x	Δ_x	ψ_y	Δ_y	ψ_z	Δ_z	N_x	N_y	N_z
Соль сульфокислоты Tl_3AsS_4	65	9,41	166,76	9,49	166,87	8,73	165,08	2,828 -i 0,2	2,770 -i 0,20	2,822 -i 0,200
Ортоферрит тербия $TbFeO_3$	70	4,29	16,51	3,87	17,51	4,16	18,64	2,424 -i 0,09	2,453 -i 0,089	2,436 -i 0,100

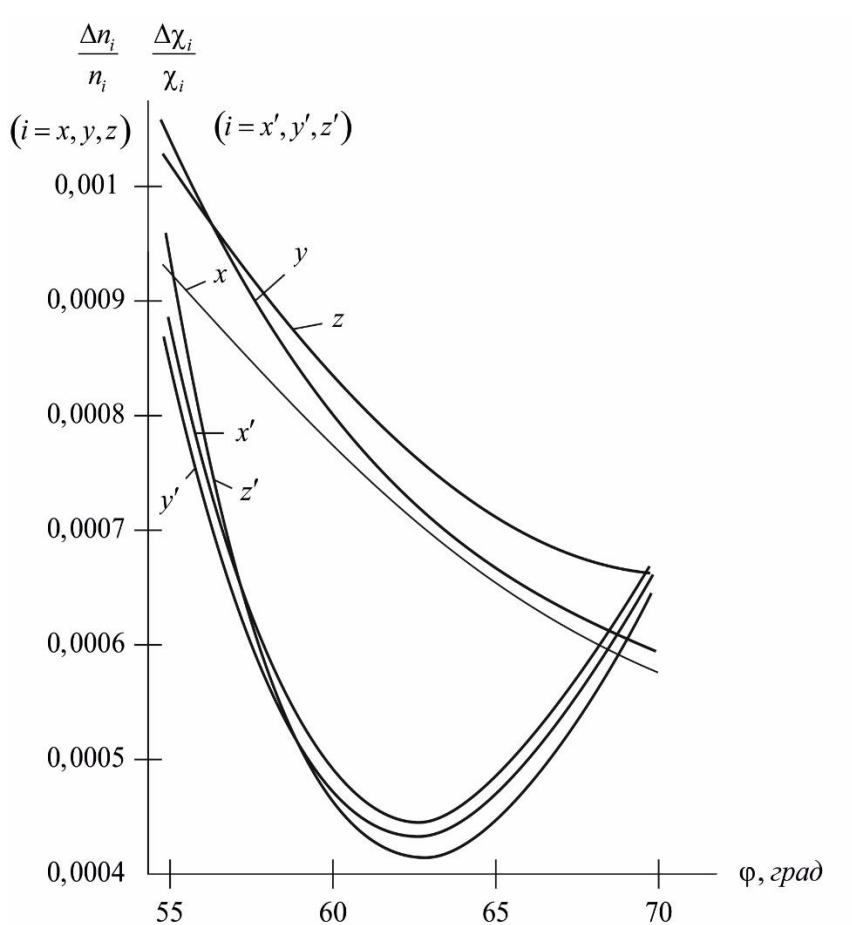


Рисунок 2. – Зависимость относительных ошибок $\frac{\Delta n}{n}$ и $\frac{\Delta \chi}{\chi}$ показателей преломления и коэффициентов поглощения ромбических кристаллов от угла падения φ

Заключение

На основе разработанных методов определения оптических постоянных поглощающих одноосных и ромбических кристаллов был составлен комплекс расчетных программ, по которым и производились расчеты.

Таким образом, предлагаемые подходы позволяют относительно просто вычислить оптические постоянные одноосных и ромбических поглощающих кристаллов по приближенным соотношениям и иммерсионным методом. При этом удается избежать трудностей, связанных с решением обратной задачи, поскольку оптические постоянные вычисляются без потери точности их определения по формулам подстановкой в них измеряемых эллипсометрических параметров.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шве́ц, В. А. О возможности определения комплексных коэффициентов отражения методом эллипсометрии / В. А. Шве́ц // Оптика и спектроскопия. – 1983. – Т. 55, № 3. – С. 558–560.
2. Филиппов, В. В. Определение 2×2 матрицы отражения с помощью иммерсионных эллипсометрических измерений / В. В. Филиппов, М. М. Карпук // Оптика и спектроскопия. – 1987. – Т. 63, № 6. – С. 1392–1394.
3. Пшеницын, В. И. Эллипсометрия в физико-химических исследованиях / В. И. Пшеницын, М. И. Абаев, Н. Ю. Лызлов. – Л. : Химия, 1986. – 152 с.
4. Мардежов, А. С. Учет пленки на границе воздух жидкость при проведении иммерсионных измерений через плоскопараллельный слой жидкости / А. С. Мардежов, К. К. Свиташев, В. А. Шве́ц // Укр. физ. журн. – 1986. – Т. 31, № 2. – С. 48–50.
5. Сендер, Н. Н. Определение оптических постоянных анизотропных поглощающих кристаллов на основе разложения в ряд коэффициентов отражения / Н. Н. Сендер // Весн. Брєсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2016. – № 1. – С. 38–45.
6. Сендер, Н. Н. Экспериментальное определение оптических постоянных поглощающих кристаллов на основе приближенных соотношений / Н. Н. Сендер // Весн. Брєсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2018. – № 1. – С. 48–58.
7. Сендер, Н. Н. Иммерсионный метод определения оптических постоянных анизотропных поглощающих кристаллов / Н. Н. Сендер // Весн. Брєсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2015. – № 2. – С. 40–48.
8. Filippov, V. V. Optical constants of $TbFeO_3$ measured by the immersion ellipsometry method at wavelength $0,63 \mu m$ / V. V. Filippov, I. D. Lomako, N. N. Sender // J. Phys. D. Appl. Phys. – 1994. – № 27. – P. 1964–1967.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 31.03.2020

Sender N. N. Experimental Determination of Optical Constant Absorbing Crystals Based on the Method of Immersion Ellipsometry

Based on the method of immersion ellipsometry, the optical constants absorption crystals of one-axis crystals and low-symmetric crystals of rhombic singonia, the optical constants of such crystals as sapphire, tourmaline, lithium niobate alloyed Fe, lithium niobate, sulfoxide salt Tl_3AsS_4 and terbium orthoferrite $TbFeO_3$. The proposed approach makes it relatively easy to calculate the optical constants of single-axial and rhombic absorption crystals. This avoids the difficulties associated with solving the inverse problem, since the optical constants are calculated without the use of numerical methods by simply calculating the determined parameters according to formulae.

Д. В. Грицук

канд. физ.-мат. наук, доц., зав. каф. прикладной математики и информатики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
e-mail: dmitry.gritsuk@gmail.com

ПОСТРОЕНИЕ В СИСТЕМЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ GAP ГРУПП ФИКСИРОВАННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ π -ДЛИНЫ*

В системе компьютерной алгебры GAP построены примеры, подтверждающие точность полученных оценок производной π -длины π -разрешимой группы с малыми порядками силовских подгрупп и группы с ограничениями на порядки кофакторов. Также в системе GAP построен алгоритм функции по определению π -разрешимости группы и нахождению производной π -длины π -разрешимой группы.

Введение

Установление точности получаемых оценок инвариантов (производной длины, нильпотентной длины и π -длины, производной π -длины) разрешимых и частично разрешимых групп осуществляется путем нахождения примеров групп, свойства которых удовлетворяют условию теоремы. На практике такой процесс является трудной задачей.

Одним из способов решения такой проблемы является использование возможностей различных компьютерных алгебраических систем. Среди имеющегося изобилия такого рода программ выделим компьютерную систему GAP (Group Algorithm Programming) [1; 2], функционал которой как нельзя лучше подходит для изучения вопросов теории групп. Одной из крупнейших библиотек системы GAP является библиотека SmallGroups, которая содержит группы, порядок которых не превышает 2000 (за исключением 49 487 365 422 групп порядка 1024, точное количество которых, кстати, также было определено с помощью системы GAP). Однако не всегда в рамках данной библиотеки можно найти необходимый пример. Данная проблемная ситуация решается за счет использования полупрямого произведения двух произвольных групп K и H с заданными свойствами. Основываясь на теореме Кэли, иногда для ускорения вычислений удобно группы K и H заменять изоморфными группами подстановок.

С использованием преимуществ открытого кода системы был разработан целый ряд программ, отсутствующих в функционале системы GAP который дает возможность построения примеров групп, имеющих высокие значения производной π -длины и порядок которых значительно превышает 2000. Построенные алгоритмы в полном объеме совместимы со всей функциональностью системы, что позволяет в дальнейшем использовать их для исследования подобного рода проблем.

Построение групп фиксированной производной π -длины в системе GAP

Напомним, что группа G называется π -разрешимой, если она обладает субнормальным рядом

$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq G_2 \subseteq \dots \subseteq G_m = G, \quad (1)$$

факторы которого являются либо разрешимыми π -группами, либо π' -группами. Данный ряд будем называть (π', π) -рядом группы G .

*Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф17М-063).

Т. к. необходимым условием для нахождения производной π -длины группы является ее π -разрешимость, то первый из рассматриваемых алгоритмов $\text{IsPiSolvable}(G, \pi)$ позволяет выяснить, обладает группа G этим свойством или нет.

```

IsPiSolvable:=function(G,pi)
local cs,x,fact,j,l;
if usl_pi(G,pi)=0 then
return true;
fi;
cs:=CompositionSeries(G);
l:=List([1..Length(cs)-1],j->FactorGroup(cs[j],cs[j+1]));
return
For All([1..Length(cs)-1], j->(usl_pi(l[j],pi)=1 and IsPrime(Size(l[j]))=true) or
(usl_pi(l[j],pi)=0));
end;

```

Здесь промежуточной функцией является функция $\text{usl_pi}()$, которая проверяет, является ли группа π -группой или нет.

```

usl_pi:=function(G, pi)
local c, d, f, o, obsch;
c:=Size(G);
f:=AsSet(FactorsInt(c));
obsch:=Intersection(f, pi);
if obsch=f then
return 1;
else
if obsch=[] then
return 0;
fi;
return -1;
end;

```

В 2006 г. В. С. Монахов в [3] предложил определение производной π -длины π -разрешимой группы. Напомним это определение.

Пусть G – π -разрешимая группа. Тогда она обладает субнормальным рядом (1), факторы которого являются либо π' -группами, либо абелевыми π -группами для всех i .

Наименьшее число абелевых π -факторов среди всех таких субнормальных рядов группы G называется производной π -длиной π -разрешимой группы G и обозначается через $l_{\pi}^a(G)$. Если $\pi(G) = \pi$, то значение $l_{\pi}^a(G)$ совпадает со значением производной длины группы G .

Система компьютерной алгебры GAP содержит встроенную функцию $\text{DerivedLength}(G)$ для нахождения производной длины разрешимой группы. Ее аналога для частично разрешимых групп в GAP нет.

Разработана функция $\text{proiz}(G, \pi)$ для нахождения производной π -длины π -разрешимой группы.

```

proiz:=function(G, pi)
local index, i, j, s, f, fl, iter, intermed, len, m, i1, i2, H, uslovie;
H:=TrivialSubgroup(G);
intermed:=IntermediateSubgroups(G, H);

```

```

if Length(intermed.subgroups) = 0 then
  if IsNormal(G, H) = true then
    uslovie := usloviapi(FactorGroup(G,H), pi);
    if uslovie >= 0 then
      if IsAbelian(FactorGroup(G,H)) = true and uslovie = 1 then
        return 1;
      else
        return 0;
    fi;
  else
    fi;
  else
    fi;
  else
    fi;
  fi;
  m:=NullMat(Length(intermed.subgroups) + 2,
  Length(intermed.subgroups) + 2);
  for i in intermed.inclusions do
    i1:=i[1]+1;
    i2:=i[2]+1;
    m[i1][i2] := 1;
  od;
  len := Length(intermed.subgroups) + 2;
  return DFS(m, intermed.subgroups, len, 1, G, H, 0, pi, false, H);
end;

```

Промежуточной для функции $\text{proiz}(G, \pi)$ является функция $\text{DFS}()$, которая организует рекуррентный поиск всех субнормальных (π', π) -рядов группы G и определяет из них тот, который имеет наименьшее количество абелевых π -факторов.

```

DFS:=function(A, s, n, v, G, H, current, pi, zapomnili, start)
  local i, index, f1, f, res, min, uslovie, next, start_uslovie, proverili, zapomnin,
  noviy_start;
  min := 0;
  res := current;
  i:=v;
  while i <= n do
    if (A[v][i] > 0) and (i > v) then
      if v = 1
        then f := H;
      else f := s[v-1];
      fi;
      if i = n
        then f1 := G;
      else f1 := s[i-1];
      fi;
      zapomnin := false;
      if IsNormal(f1, f) = true
        then
          uslovie := usloviapi(FactorGroup(f1,f), pi);
          if uslovie >= 0

```

```

    proverili := false;
    if IsAbelian(FactorGroup(f1,f)) = true and uslovie = 1
    then
        zapomnin := true;
        if zapomnili = true and IsNormal(f1, start)
        then
            start_uslovie := usloviapi(FactorGroup(f1, start), pi);
            if IsAbelian(FactorGroup(f1, start)) and start_uslovie = 1
            then
                next := current;
                proverili := true;
                noviy_start := start;
            else
                noviy_start := f;
        fi;
    else
        noviy_start := f;
    fi;

    else
        noviy_start := f;
    fi;
    if IsAbelian(f1) and proverili = false
    then
        next := 1;
        proverili := true;
    fi;
    if proverili = false
    then
        next := current + 1;
    fi;
    else
        next := current;
        noviy_start := f;
    fi;
    if f1 = G
    then
        res := next;
    else
        res := DFS(A, s, n, i, G, H, next, pi, zapomnin, noviy_start);
    fi;
    if res > 0 and res < min or min = 0
    then
        min := res;
    fi;
    else
        fi;
    else
        fi;
    fi;
    i := i+1;
od;
return min;
end

```

Разработанные функции позволяют устанавливать точность получаемых оценок инвариантов частично разрешимых групп. Например, с помощью данных алгоритмов удалось установить точность оценок производной π -длины π -разрешимой группы, полученных в работах [4; 5].

Напомним, что число n свободно от n -х степеней, если p^m не делит n для всех простых p . При $m = 2$ говорят, что n свободно от квадратов, при $m = 3$ – от кубов.

Теорема 1 [4]. Пусть G – π -разрешимая группа.

1) Если порядок π -холловой подгруппы свободен от кубов, то справедливы следующие утверждения:

- a) если $2 \notin \pi$, то $l_{\pi}^{\alpha}(G) \leq 2$;
- b) если $2 \in \pi$, то $l_{\pi}^{\alpha}(G) \leq 3$.

2) Если порядок π -холловой подгруппы свободен от квадратов, то G – разрешимая группа и $l_{\pi}^{\alpha}(G) \leq 2$.

Пример 1. Пусть E – элементарная абелева группа порядка 25. С помощью компьютерной системы GAP построено полупрямое произведение $G = [E]S_3$ порядка 1296. Производная $\{2,3,5\}$ -длина группы G равна 4 и группа G имеет порядок свободный от кубов. Группа $G = A_5 \times ([Z_{29}]Z_7)$ является $\{7,29\}$ -разрешимой группой и порядок $\{7,29\}$ -холловой подгруппы свободен от кубов. Кроме того, производная $\{7,29\}$ -длина группы G равна 2. Таким образом, все оценки производной π -длиной π -разрешимой группы G из теоремы 1 являются точными.

Напомним, что кофактором подгруппы H группы G называется фактор-группа $H/Core_G H$, где $Core_G H$ – ядро подгруппы H в группе G , т. е. наибольшая нормальная подгруппа в G , содержащаяся в H . В дальнейшем кофактор подгруппы H в группе G будем обозначать $Cof_G(H)$.

Теорема 2 [5]. Пусть G – π -разрешимая группа. Если $Cof_G(X)$ циклический, где X – произвольная p -подгруппа группы G и $p \in \pi$, то:

- 1) $l_{\pi}^{\alpha}(G/\Phi(G)) \leq 2$, если $2 \notin \pi$;
- 2) $l_{\pi}^{\alpha}(G/\Phi(G)) \leq 4$, если $2 \in \pi$.

Пример 2. Группа $G = A_5 \times ([Z_{29}]Z_7)$ является $\{7,29\}$ -разрешимой группой и кофакторы 29-подгрупп и 7-подгрупп являются циклическими. Кроме того, производная $\{7,29\}$ -длина группы G равна 2. Таким образом, оценка производной π -длиной π -разрешимой группы G из теоремы 2 (1) является точной.

Заключение

В системе компьютерной алгебры GAP построены примеры, подтверждающие точность оценок производной π -длины π -разрешимой группы, полученных ранее автором совместно с А. А. Трофимуком. В частности, построены примеры, подтверждающие точность оценок производной π -длины π -разрешимой группы с малыми порядками силовских подгрупп и группы с ограничениями на порядки кофакторов.

Также приведены алгоритмы, построенных в GAP функций, по определению π -разрешимости группы и нахождению производной π -длины π -разрешимой группы.

Построенные примеры и разработанные алгоритмы расширяют имеющийся функционал системы компьютерной алгебры GAP и будут способствовать созданию новых теоретико-групповых пакетов этой системы. Найденные оценки инвариантов имеют также важное прикладное значение: они могут быть использованы при построении стойких алгоритмов алгебраической криптографии и защиты информации.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. The GAP Group, GAP – Groups, Algorithms and Programming, Version 4.4. 2016 [Electronic resours]. – Mode of access: <http://gap-system.org>.
2. Грицук, Д. В. Компьютерная алгебра : курс лекций / Д. В. Грицук, А. А. Трофимук / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина. – Брест : БрГУ, 2017. – 112 с.
3. Монахов, В. С. Конечные группы с полунормальной холловой подгруппой / В. С. Монахов // Мат. заметки. – 2006. – Т. 80, № 4. – Р. 573–581.
4. Грицук, Д. В. Оценки производной π -длины π -разрешимой группы, у которой π -холловы подгруппы свободны от n -ых степеней / Д. В. Грицук, А. А. Трофимук, Т. А. Артюшеня // Вестн. Витеб. гос. ун-та им. П. М. Машерова. – 2018. – № 1 (98). – С. 11–15.
5. Грицук, Д. В. Производная p -длина p -разрешимой группы с ограниченными факторами / Д. В. Грицук, А. А. Трофимук // Изв. ГГУ им. Ф. Скорины. Естеств. науки. – 2019. – № 3 (114). – С. 147–152.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 03.04.2020

Gritsuk D. V. Construction of the Groups of the Fixed Derivative π -Length in the System of GAP Computer Algebra

In the system of GAP Computer Algebra the author provides the examples that confirm the accuracy of the obtained estimates of the derivative of the π -length of a π -solvable group with small orders of Sylow subgroups and groups with restrictions on cofactor orders. Also a function algorithm has been built in the GAP system for determining the π -solvability of a group and finding the derivative of the π -length of a π -solvable group.

УДК 517.927.21

С. А. Марзан

канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. математического анализа,
дифференциальных уравнений и их приложений
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
e-mail: marzanserg2@gmail.com

РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПРОИЗВОДНОЙ КАПУТО КОМПЛЕКСНОГО ПОРЯДКА

Исследована задача Коши для нелинейного дифференциального уравнения с производной Капуто комплексного порядка. С использованием условий равносильности задачи интегральному уравнению Вольтерра второго рода получены условия существования ее решения в пространстве непрерывно-дифференцируемых функций. С помощью метода приближений Тонелли построена последовательность функций, сходящаяся к решению рассматриваемой задачи Коши.

1. Постановка задачи

Пусть $I_{a+}^{\alpha}g$ и $D_{a+}^{\alpha}y$ – дробные интегралы и производные Римана – Лиувилля комплексного порядка $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\operatorname{Re}(\alpha) > 0$) на конечном отрезке $[a, b]$ действительной оси:

$$(I_{a+}^{\alpha}g)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{g(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \quad (1)$$

$$(D_{a+}^{\alpha}y)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{y(t)dt}{(x-t)^{1-n+\alpha}}, \quad n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1, \quad (2)$$

($[\operatorname{Re}(\alpha)]$ – целая часть $\operatorname{Re}(\alpha)$) [1, § 2.2, 2.4].

Формулы целочисленного дифференцирования в большинстве своем допускают обобщение на нецелые порядки дифференцирования, а подстановка в формулы дробного дифференцирования вместо дробных порядков натуральных чисел приводит к известным формулам классического математического анализа.

Ряд свойств интегралов и производных, справедливых для классического анализа, остаются справедливыми и для дробных производных и интегралов. Например, для любой суммируемой функции $\varphi(x)$ и для любого $\alpha \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ выполняется равенство $D_{a+}^{\alpha}I_{a+}^{\alpha}\varphi = \varphi(x)$, т. е. дробная производная от дробного интеграла одного и того же порядка суммируемой функции есть сама функция.

Далее, для функции $f(x) \in L_1(a, b)$, имеющей суммируемую дробную производную $D_{a+}^{\alpha}f$, справедливо равенство

$$I_{a+}^{\alpha}D_{a+}^{\alpha}f = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{\alpha-k-1}}{\Gamma(\alpha-k)} f_{n-\alpha}^{(n-k-1)}(a),$$

где $n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1$ и $f_{n-\alpha}(x) = I_{a+}^{n-\alpha}f$. В частности, при $0 < \operatorname{Re}(\alpha) < 1$

$$I_{a+}^{\alpha}D_{a+}^{\alpha}f = f(x) - \frac{f_{1-\alpha}(a)}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha-1}.$$

Если учесть, что для дробной производной порядка α функция $(x-a)^{\alpha-1}$ играет роль константы, то можно говорить, что аналогичное свойство имеет место и в случае интегралов и производных натурального порядка.

В то же время есть и такие свойства дробных интегралов и производных, аналогов которым не существует у производных и интегралов натуральных порядков. Так, дробная производная Римана – Лиувилля имеет существенный недостаток, касающийся ее использования в приложениях, в частности, дробная производная Римана – Лиувилля от константы C не равна нулю:

$$D_{a+}^{\alpha} C = \frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} C.$$

Обозначим через $({}^c D_{a+}^{\alpha} y)(x)$ модифицированную дробную производную, определяемую формулой

$$({}^c D_{a+}^{\alpha} y)(x) = \left(D_{a+}^{\alpha} \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right] \right)(x), \quad (3)$$

где $\alpha \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$, $n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1$ при $\alpha \notin \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, и $n = \alpha$ при $\alpha \in \mathbb{N}$.

Если $\alpha > 0$, $n-1 < \alpha \leq n$ ($n \in \mathbb{N}$) и $y(x) \in C^n[a, b]$ – функция, n раз непрерывно дифференцируемая на $[a, b]$, то при $\alpha \in \mathbb{N}$ производная ${}^c D_{a+}^{\alpha} y$ совпадает с обычной производной:

$$({}^c D_{a+}^{\alpha} y)(x) = (D^n y)(x) \left(n \in \mathbb{N}; D = \frac{d}{dx} \right), \quad (4)$$

а при $n-1 < \alpha < n$ оператор ${}^c D_{a+}^{\alpha}$ представляется в виде композиции оператора дробного интегрирования $I_{a+}^{n-\alpha}$ и оператора дифференцирования D^n :

$$({}^c D_{a+}^{\alpha} y)(x) = (I_{a+}^{n-\alpha} D^n y)(x) \left(n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}; D = \frac{d}{dx} \right). \quad (5)$$

Конструкция (3) введена итальянским механиком Капуто [2–4], и поэтому выражения (3) и (5) называют дробными производными Капуто порядка $\alpha \in \mathbb{C}$ [5; 6; 7, § 2.4.1].

В отличие от дробной производной Римана – Лиувилля, дробная производная Капуто от константы равна нулю:

$${}^c D_{a+}^{\alpha} C = 0.$$

Кроме того, преимуществом определения дробной производной по Капуто является более естественное для практических приложений решение проблемы начальных условий при решении дифференциальных уравнений нецелых порядков.

С точки зрения приложений одной из наиболее актуальных задач теории дифференциальных уравнений дробного порядка является построение теории их разрешимости в различных функциональных пространствах.

Исследуем проблему существования решения задачи Коши для нелинейного дифференциального уравнения с дробной производной Капуто (3) комплексного порядка $\alpha = m + i\theta$ ($m \in \mathbb{N}$, $m > 1$, $\theta \neq 0$)

$$\left({}^c D_{a+}^{m+i\theta} y\right)(x) = f[x, y(x)] \quad (6)$$

с начальными условиями

$$y^{(j)}(a) = b_j, b_j \in \mathbb{C} \quad (j = 0, 1, \dots, m), \quad (7)$$

в пространстве

$$C^{m+i\theta, m}[a, b] = \left\{ y(x) \in C^m[a, b] : {}^c D_{a+}^{m+i\theta} y \in C[a, b] \right\},$$

в предположении, что функция $f[x, y] : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что при любом $y \in R$ $f[x, y] \in C[a, b]$:

$$\max_{(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R}} |f[x, y]| = M < \infty. \quad (8)$$

2. Равносильность задачи Коши интегральному уравнению Вольтерра

Используя свойства дробных производных Римана – Лиувилля (1)–(2) в пространстве $C[a, b]$, установим равносильность решения задачи Коши (6)–(7) в пространстве $C^m[a, b]$ и решения интегрального уравнения Вольтерра второго рода

$$y(x) = \sum_{j=0}^m \frac{b_j}{j!} (x-a)^j + \frac{1}{\Gamma(m+i\theta)} \int_a^x \frac{f[t, y(t)]}{(x-t)^{1-m-i\theta}} dt. \quad (9)$$

Теорема 1. Пусть $\alpha = m + i\theta$ ($m \in \mathbb{N}$, $m > 1$, $\theta \neq 0$), а функция $f[x, y] : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такова, что при любом $y \in R$ $f[x, y] \in C[a, b]$ и выполняется условие (8). Функция $y(x) \in C^m[a, b]$ является решением задачи Коши (6) – (7) тогда и только тогда, когда она является решением интегрального уравнения (9).

Доказательство. Пусть функция $y(x) \in C^m[a, b]$ является решением задачи Коши (6) – (7). Согласно (2) и (3)

$$\left({}^c D_{a+}^{m+i\theta} y\right)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(I_{a+}^{1-i\theta} \left[y(t) - \sum_{j=0}^m \frac{y^{(j)}(a)}{j!} (t-a)^j \right] \right)(x).$$

Т. к. справедливо условие (8), то из равенства (6) следует, что $\left({}^c D_{a+}^{m+i\theta} y\right)(x) \in C[a, b]$, и согласно [9, лемма 1]

$$\left(I_{a+}^{1-i\theta} \left[y(t) - \sum_{j=0}^m \frac{y^{(j)}(a)}{j!} (t-a)^j \right] \right)(x) \in C^{m+1}[a, b].$$

Применяя [9, лемма 4] к функции

$$g(t) = y(t) - \sum_{j=0}^m \frac{y^{(j)}(a)}{j!} (t-a)^j,$$

находим:

$$\begin{aligned} \left(I_{a+}^{m+i\theta} D_{a+}^{m+i\theta} y \right)(x) &= \left(I_{a+}^{m+i\theta} D_{a+}^{m+i\theta} \left[y(t) - \sum_{j=0}^m \frac{y^{(j)}(a)}{j!} (t-a)^j \right] \right)(x) = \\ &= g(x) - \sum_{j=0}^m \frac{y^{(j)}(a)}{j!} (x-a)^j - \sum_{k=1}^{m+1} \frac{y_{1+i\theta}^{(m+1-k)}(a)}{\Gamma(m+i\theta-k+1)} (x-a)^{m+i\theta-k}, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$y_{1+i\theta}(x) = \left(I_{a+}^{1+i\theta} \left[y(t) - \sum_{j=0}^m \frac{y^{(j)}(a)}{j!} (t-a)^j \right] \right)(x).$$

Интегрируя по частям последнее выражение, дифференцируя полученное соотношение и используя [9, лемма 3], имеем:

$$\begin{aligned} y'_{1+i\theta}(x) &= \frac{d}{dx} \left(I_{a+}^{2+i\theta} \left[y'(t) - \sum_{j=1}^m \frac{y^{(j)}(a)}{(j-1)!} (t-a)^{j-1} \right] \right)(x) = \\ &= \left(I_{a+}^{1+i\theta} \left[y'(t) - \sum_{j=1}^m \frac{y^{(j)}(a)}{(j-1)!} (t-a)^{j-1} \right] \right)(x). \end{aligned}$$

Повторяя этот процесс $(m+1-k)$ ($k=0, 1, \dots, m$) раз, приходим к формуле

$$y_{1+i\theta}^{(m+1-k)}(x) = \left(I_{a+}^{1+i\theta} \left[y^{(m+1-k)}(t) - \sum_{j=m+1-k}^m \frac{y^{(j)}(a)}{(j-m-1+k)!} (t-a)^{j-m-1+k} \right] \right)(x).$$

Осуществляя замену $t = a + s(x-a)$, получаем при $k=1, \dots, m+1$:

$$\begin{aligned} y_{1+i\theta}^{(m+1-k)}(x) &= \frac{(x-a)^{1+i\theta}}{\Gamma(1+i\theta)} \int_0^1 (1-s)^{i\theta} \left(y^{(m+1-k)}[a+s(x-a)] - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=m+1-k}^m \frac{y^{(j)}(a)}{(j-m-1+k)!} [s(x-a)]^{j-m-1+k} \right) ds. \end{aligned}$$

Т. к. $y^{(m+1-k)}(x) \in C[a, b]$, то из последнего равенства следует, что $y_{1+i\theta}^{(m+1-k)}(a) = 0$ ($k=1, \dots, m+1$), и тогда (10) принимает вид

$$\left(I_{a+}^{m+i\theta} D_{a+}^{m+i\theta} y \right)(x) = y(x) - \sum_{j=1}^m \frac{y^{(j)}(a)}{j!} (x-a)^j. \quad (11)$$

Применяя к обеим частям уравнения (9) оператор $I_{a+}^{m+i\theta}$, учитывая (11) и начальные условия (7), находим, что $y(x) \in C^m[a, b]$ является решением интегрального уравнения (9).

Пусть теперь $y(x) \in C^m[a, b]$ – решение интегрального уравнения (9). Покажем, что $y(x)$ удовлетворяет начальным условиям (7).

Дифференцируем обе части равенства (7) и, учитывая [9, лемма 3], имеем для $k = 1, \dots, m$:

$$y^{(k)}(x) = \sum_{j=k}^m \frac{b_j}{(j-k)!} (x-a)^{j-k} + \frac{1}{\Gamma(m+i\theta-k)} \int_a^x \frac{f[t, y(t)]}{(x-t)^{1-m-i\theta+k}} dt. \quad (12)$$

Осуществляя замену переменной $t = a + s(x-a)$ в интегралах (9) и (12), находим при $k = 0, \dots, m$:

$$y^{(k)}(x) = \sum_{j=k}^m \frac{b_j}{(j-k)!} (x-a)^{j-k} + \frac{(x-a)^{m+i\theta-k}}{\Gamma(m+i\theta-k)} \int_0^1 \frac{f[a + s(x-a), y(a + s(x-a))]}{(1-s)^{1-m-i\theta+k}} ds.$$

Переходя к пределу при $x \rightarrow a+0$ и учитывая непрерывность функции f , получаем равенства (7).

Применяя оператор $D_{a+}^{m+i\theta}$ к обеим частям уравнения (9), учитывая начальные условия (7) и [9, лемма 3], получим дифференциальное уравнение (6), что и завершает доказательство теоремы.

3. Условия разрешимости задачи Коши

Теорема 2. Пусть функция $f[x, y]: [a, b] \times R \rightarrow R$ такова, что при любом $y \in R$ $f[x, y] \in C[a, b]$ и выполняются следующие условия:

$$|f[x, y]| \leq L(d + |y|) \quad (x \in [a, b], y \in R), \quad (13)$$

где $L > 0, d > 0$ – некоторые постоянные,

$$AL < 1, A = \frac{(b-a)^m}{m \cdot |\Gamma(m+i\theta)|}. \quad (14)$$

Тогда задача Коши (6) – (7) имеет по крайней мере одно решение в пространстве $C^{m+i\theta, m}[a, b]$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность уравнений

$$y_0(t, b_0, \dots, b_m) = \sum_{j=0}^m \frac{b_j}{j!} (t-a)^j, \\ y_n(x) = y_0(x, b_0, \dots, b_m) + \frac{1}{\Gamma(m+i\theta)} \int_a^x (x-t)^{m+i\theta-1} f\left[t, y_n\left(t - \frac{b-a}{n}\right)\right] dt, \quad (15)$$

причем

$$y_n(x) = y_0(x, b_0, \dots, b_m) \quad \text{при} \quad -\frac{b-a}{n} \leq x \leq a \quad (n \in N). \quad (16)$$

Очевидно, что при каждом $n \in N$ уравнение (11) имеет единственное решение $y_n(x) \in C[a, b]$. Это решение называется n -м приближением Тонелли уравнения (9). Покажем, что при сделанных предположениях последовательность приближений Тонелли $y_n(x)$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна в пространстве $C[a, b]$.

Обозначим

$$h = \sup_{-(b-a) \leq x \leq (b-a)} \|y_0(x, b_0, \dots, b_m)\|_C \quad (17)$$

и зафиксируем $n \in N$. Если $a \leq x \leq \frac{b-a}{n}$, то, используя (17), свойства оператора дробного интегрирования Римана – Лиувилля (1) в пространстве $C[a, b]$ ([9]) и условие (13), имеем:

$$\|y_n(x)\|_C \leq h + A \left\| f \left(x, y_n \left(x - \frac{b-a}{n} \right) \right) \right\|_C \leq h + AL \left(d + \left\| y_n \left(x - \frac{b-a}{n} \right) \right\|_C \right)$$

и, следовательно, в силу (17)

$$\|y_n(x)\|_C \leq dAL + h(1 + AL). \quad (18)$$

Далее, если $\frac{b-a}{m} \leq x \leq \frac{2(b-a)}{m}$, то, используя (17) и (18), получим:

$$\|y_n(x)\|_C \leq h + AL \left(d + \left\| y_n \left(x - \frac{b-a}{n} \right) \right\|_C \right) \leq d(AL + A^2L^2) + h(1 + AL + A^2L^2)$$

Аналогичным образом оценим приближения Тонелли $y_n(x)$ на каждом промежутке $i \frac{b-a}{n} \leq x \leq (i+1) \frac{b-a}{n}$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$):

$$\|y_n(x)\|_C \leq d(AL + (AL)^2 + \dots + (AL)^i) + h(1 + AL + \dots + (AL)^i)$$

Следовательно, при всех $a \leq x \leq b$

$$\|y_n(x)\|_C \leq d(AL + (AL)^2 + \dots + (AL)^n + \dots) + h(1 + AL + \dots + (AL)^n + \dots)$$

Согласно условию (10), ряды в правой части предыдущего равенства сходятся, и

$$\|y_n(x)\|_C \leq \frac{dAL + h}{1 - AL}, \quad \forall x \in [a, b]. \quad (19)$$

Из неравенства (19) следует равномерная ограниченность приближений Тонелли $y_n(x)$ в пространстве $C[a, b]$.

Покажем теперь, что эта последовательность равностепенно непрерывна в пространстве $C[a, b]$. Пусть $\Delta x > 0$; $x + \Delta x \in [a, b]$. Используя (15) и условие (13), имеем:

$$\begin{aligned} & \|y_n(x + \Delta x) - y_n(x)\|_C \leq \\ & \leq \frac{1}{|\Gamma(m+i\theta)|} \left\| \int_a^x [(x + \Delta x - t)^{m+i\theta-1} - (x - t)^{m+i\theta-1}] f \left[t, y_n \left(t - \frac{b-a}{n} \right) \right] dt \right\|_C + \\ & + \frac{1}{|\Gamma(m+i\theta)|} \left\| \int_x^{x+\Delta x} (x + \Delta x - t)^{m+i\theta-1} f \left[t, y_n \left(t - \frac{b-a}{n} \right) \right] dt \right\|_C \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{|\Gamma(m+i\theta)|} \left\| \left[f \left[t, y_n \left(t - \frac{b-a}{n} \right) \right] \right] \right\|_C \times \\ &\times \left[\int_a^x |(x+\Delta x-t)^{m+i\theta-1} - (x-t)^{m+i\theta-1}| dt + \int_x^{x+\Delta x} |(x+\Delta x-t)^{m+i\theta-1}| dt \right] \leq \\ &\leq \frac{1}{|\Gamma(m+i\theta)|} \left(d + \left\| y_n \left(t + \frac{b-a}{n} \right) \right\|_C \right) \times \\ &\times \left[\int_a^x |(x+\Delta x-t)^{m+i\theta-1} - (x-t)^{m+i\theta-1}| dt + \int_x^{x+\Delta x} |(x+\Delta x-t)^{m+i\theta-1}| dt \right]. \end{aligned}$$

Используя формулу Лагранжа, имеем:

$$\left| (x+\Delta x-t)^{m+i\theta-1} - (x-t)^{m+i\theta-1} \right| \leq |m+i\theta-1| (x-t+\xi\Delta x)^{m-2} \Delta x, \quad 0 < \xi < 1. \quad (20)$$

Т. к. $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, то из неравенства $x-t+\xi\Delta x \leq x-t+\Delta x$ следует, что

$$(x-t+\xi\Delta x)^{m-2} \leq (x-t+\Delta x)^{m-2},$$

и из (20) получаем неравенство:

$$\left| (x+\Delta x-t)^{m+i\theta-1} - (x-t)^{m+i\theta-1} \right| \leq |m+i\theta-1| (x-t+\Delta x)^{m-2} \Delta x.$$

Тогда

$$\begin{aligned} &\|y_n(x+\Delta x) - y_n(x)\|_C \leq \\ &\leq \frac{L}{\Gamma(m+i\theta)} \left(d + \|y_n(x)\|_C \right) \left(|m+i\theta-1| \Delta x \frac{(b-a+\Delta x)^{m-1} - (\Delta x)^{m-1}}{m-1} + \frac{(\Delta x)^m}{m} \right). \quad (21) \end{aligned}$$

Т. к. последовательность приближений Тонелли $y_n(x)$ равномерно ограничена в пространстве $C[a, b]$, учитывая (20) и (21), получаем равностепенную непрерывность в $C[a, b]$.

По теореме Арцела – Асколи [10, с. 167] для всех $x \in [a, b]$ последовательность $y_n(x)$ предкомпактна в $C[a, b]$. Поэтому из последовательности $y_n(x)$ можно выбрать подпоследовательность $y_{n_k}(x)$, сходящуюся к $y_*(x) \in C[a, b]$. При этом последовательность $y_{n_k}(x - (n_k)^{-1}(b-a))$ также сходится к $y_*(x) \in C[a, b]$.

Рассмотрим интегральный оператор

$$Ay(x) = \frac{1}{\Gamma(m+i\theta)} \int_a^x (x-t)^{m+i\theta-1} f[t, y(t)] dt$$

и покажем его непрерывность как оператора из пространства $C[a, b]$ в пространство $C[a, b]$. В самом деле, если последовательность функций $y_n(x) \in C[a, b]$ сходится к функции $y(x) \in C[a, b]$, то в силу непрерывности при каждом $x \in [a, b]$ функции

$f[x, y(x)]$, последовательность функций $f[x, y_n(x)]$ при всех $x \in [a, b]$ сходится к функции $f[x, y(x)]$. С другой стороны, в силу справедливости неравенства

$$|f[x, y_n(x)]| \leq L(d + |y_n|)$$

и ограниченности последовательности $y_n(x)$ в $C[a, b]$, следует:

$$\|f[x, y_n(x)]\|_C \leq LK, n \in N,$$

где $K > 0$ – некоторая постоянная. Поэтому возможен предельный переход под знаком интеграла в равенствах

$$Ay_n(x) = \frac{1}{\Gamma(m+i\theta)} \int_a^x (x-t)^{m+i\theta-1} f[t, y_n(t)] dt,$$

при каждом $x \in [a, b]$: $Ay(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} Ay_n(x)$. В частности, возможен предельный переход в равенствах

$$y_n(x) = y_0(x, b_0, \dots, b_m) + \frac{1}{\Gamma(m+i\theta)} \int_a^x (x-t)^{m+i\theta-1} f\left[t, y_n\left(t - \frac{b-a}{n}\right)\right] dt, n \in N,$$

откуда вытекает, что

$$y_*(x) = y_0(x, b_0, \dots, b_m) + \frac{1}{\Gamma(m+i\theta)} \int_a^x (x-t)^{m+i\theta-1} f[t, y_*(t)] dt.$$

Последнее равенство означает, что функция $y_*(x)$ удовлетворяет уравнению (9).

Подставляя $y_*(x)$ в уравнение (9) и последовательно дифференцируя полученное тождество m раз, используя свойства дробных производных и интегралов Римана – Лиувилля в пространстве $C[a, b]$ ([9]), заключаем, что $y_*(x)$ является решением задачи Коши (6)–(7) в пространстве $C^m[a, b]$, при этом ${}^c D_{a+}^{m+i\theta} y_* \in C[a, b]$, что и завершает доказательство теоремы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самко, С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. – Минск : Наука и техника, 1987. – 687 с.
2. Caputo, M. Linear model of dissipation whose Q is almost frequency independent / M. Caputo // Geophys. J. Astronom. Soc. – 1967. – Vol. 13. – P. 529–539.
3. Caputo, M. Elasticita e Dissipation. Bologna / M. Caputo. – Zanichelli, 1969.
4. Caputo, M. Linear models of dissipation in an elastic solids / M. Caputo, F. Mainardi // Riv. Nuovo Cimento. – 1971. – Vol. 1. – P. 161–196.
5. Mainardi, F. Fractional calculus: some basic problems in continuum and statistical mechanics. Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics / F. Mainardi. – Viena : Springer. – 1997. – P. 291–348.

6. Gorenflo, R. Fractional calculus: integral and differential equation of fractional order. *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics* / R. Gorenflo, F. Mainard // Viena : Springer, 1997. – P. 223–276.

7. El-Sayed, A. M. A. Fractional differential equations / A. M. A. El-Sayed // *Kyungpook Math. J.* – 1988. – Vol. 28, nr. 2. – P. 122.

8. Марзан, С. А. Нелинейное дифференциальное уравнение дробного порядка с дробной производной Капуто в пространстве непрерывных функций / С. А. Марзан // *Тр. Ин-та математики.* – 2004. – Т. 12, № 2. – С. 99–103.

9. Марзан, С. А. Основные свойства дробных интегралов и производных Римана – Луивилля в весовом пространстве непрерывных функций / С. А. Марзан, И. В. Мороз // *Математическое моделирование и новые образовательные технологии в математике : сб. ст. респ. науч.-практ. конф., Брест, 24–25 апр. 2018 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; под ред. А. И. Басика.* – Брест : БрГУ, 2018.

10. Антоневиц, А. Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения / А. Б. Антоневиц, Я. В. Радыно. – Минск : БГУ, 2003. – 430 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 13.04.2020

Marzan S. A. Solvability of the Cauchy Problem for a Nonlinear Differential Equation with a Complex Order Caputo Derivative

The Cauchy problem for a nonlinear differential equation with a complex order Caputo derivative is investigated. Using the conditions of equivalence of the problem to the Volterra integral equation of the second kind, conditions for the existence of its solution in the space of continuously differentiable functions are obtained. Using the Tonelli approximation method, a sequence of functions is constructed that converges to the solution of the Cauchy problem under consideration.

УДК 519.6 + 517.983.54

О. В. Матысик

канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. прикладной математики и информатики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
e-mail: matysikoleg@mail.ru

ОСТАНОВ ПО МАЛОСТИ НЕВЯЗКИ В МЕТОДЕ ИТЕРАЦИЙ НЕЯВНОГО ТИПА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА

В гильбертовом пространстве для решения линейных операторных уравнений первого рода с положительным ограниченным и самосопряженным оператором предлагается неявный итерационный процесс. Для предложенного метода обосновано применение правила останова по невязке, что делает рассматриваемый итерационный метод эффективным и тогда, когда нет сведений об истокообразной представимости точного решения. В работе доказана сходимость итерационного метода, получена оценка погрешности метода и оценка для момента останова.

1. Постановка задачи. В гильбертовом пространстве H решается линейное операторное уравнение I рода

$$Ax = y \quad (1)$$

с положительным ограниченным самосопряженным оператором A , для которого нуль не является собственным значением. Однако предполагается, что нуль принадлежит спектру оператора A , поэтому задача (1) неустойчива и, следовательно, некорректна.

Для решения уравнения (1) предлагается неявный итерационный процесс

$$x_{n+1} = x_n + \alpha A(y - Ax_{n+1}), \quad x_0 = 0. \quad (2)$$

Предполагая существование единственного точного решения x уравнения (1) при точной правой части y , ищем его приближение $x_{n,\delta}$ при приближенной правой части y_δ , $\|y - y_\delta\| \leq \delta$. В этом случае метод (2) примет вид

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha A(y_\delta - Ax_{n+1,\delta}), \quad x_{0,\delta} = 0. \quad (3)$$

Ниже под сходимостью метода (3) понимается утверждение о том, что приближения (3) сколь угодно близко подходят к точному решению x уравнения (1) при подходящем выборе n и достаточно малых δ , т. е. $\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\inf_n \|x - x_{n,\delta}\| \right) = 0$.

Для метода (3) при условии $\alpha > 0$ доказана сходимость при точной и приближенной правой части уравнения (1), и в предположении, что точное решение уравнения истокообразно представимо, т. е. $x = A^s z$, $s > 0$, получена априорная оценка погрешности [1]. Эта оценка погрешности оптимизирована и найден априорный момент останова. В случае когда нет сведений об истокообразной представимости точного решения, метод (3) становится неэффективным, т. к. тогда невозможно получить оценку погрешности и найти априорный момент останова. Тем не менее этот метод можно сделать вполне эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова по невязке, аналогичным [2–5].

2. Правило останова по невязке. Зададим уровень останова $\varepsilon > 0$ и определим момент m останова условиями

$$\|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon, \quad (n < m), \quad \|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon = b\delta, \quad b > 1. \quad (4)$$

Предполагается, что при начальном приближении $x_{0,\delta}$ невязка достаточно велика, больше уровня останова ε , т. е. $\|Ax_{0,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon$. Ниже метод итерации (3) с правилом останова (4) является сходящимся, если $\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\inf_m \|x - x_{m,\delta}\| \right) = 0$. Покажем, что правило останова по невязке (4) применимо к методу (3).

$$\text{Рассмотрим семейство функций } g_n(\lambda) = \lambda^{-1} \left[1 - \frac{1}{(1 + \alpha\lambda^2)^n} \right] \geq 0.$$

Используя результаты [1], нетрудно показать, что при $\alpha > 0$ для $g_n(\lambda)$ выполняются следующие условия:

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq M} |g_n(\lambda)| \leq 2\sqrt{n\alpha}, \quad n > 0, \quad (5)$$

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq M} |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leq 1, \quad n > 0, \quad (6)$$

$$1 - \lambda g_n(\lambda) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad \forall \lambda \in (0, M], \quad (7)$$

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq M} \lambda^s |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leq \left(\frac{s}{4n\alpha} \right)^{s/2}, \quad n > 0, \quad 0 \leq s < \infty. \quad (8)$$

Справедлива

Лемма 1. Пусть $A = A^* \geq 0$, $\|A\| \leq M$. Тогда для любого $\omega \in H$ $(E - Ag_n(A))\omega \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.

Доказательство

Используя интегральное представление самосопряженного оператора $A = \int_0^M \lambda dE_\lambda$, где $M = \|A\|$ и E_λ – спектральная функция оператора A , получим

$$(E - Ag_n(A))\omega = \int_0^M (1 - \lambda g_n(\lambda)) dE_\lambda \omega = \int_0^{\varepsilon_0} (1 - \lambda g_n(\lambda)) dE_\lambda \omega + \int_{\varepsilon_0}^M (1 - \lambda g_n(\lambda)) dE_\lambda \omega.$$

$$\text{Т. к. } 1 - \lambda g_n(\lambda) = \frac{1}{(1 + \alpha\lambda^2)^n} \text{ и при } \alpha > 0 \frac{1}{1 + \alpha\lambda^2} \leq q(\varepsilon_0) < 1 \text{ для всех } \lambda \in (0, M],$$

то

$$\left\| \int_{\varepsilon_0}^M (1 - \lambda g_n(\lambda)) dE_\lambda \omega \right\| \leq q^n(\varepsilon_0) \left\| \int_{\varepsilon_0}^M dE_\lambda \omega \right\| \leq q^n(\varepsilon_0) \|\omega\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Из (6) имеем $\left\| \int_0^{\varepsilon_0} (1 - \lambda g_n(\lambda)) dE_\lambda \omega \right\| \leq \left\| \int_0^{\varepsilon_0} dE_\lambda \omega \right\| = \|E_{\varepsilon_0} \omega\| \rightarrow 0, \varepsilon_0 \rightarrow 0$ в силу свойств спектральной функции. Следовательно, $(E - Ag_n(A))\omega \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. Лемма 1 доказана.

Имеет место

Лемма 2. Пусть $A = A^* \geq 0, \|A\| \leq M$. Тогда для $\forall v \in \overline{R(A)}$ имеет место соотношение $n^{s/2} \|A^s (E - Ag_n(A))v\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty, 0 \leq s < \infty$.

Доказательство

Т. к. верно (8), то $n^{s/2} \|A^s (E - Ag_n(A))\| \leq n^{s/2} \sup_{0 \leq \lambda \leq M} \lambda^s |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leq n^{s/2} \gamma_s n^{-s/2} = \gamma_s$,

где $\gamma_s = \left(\frac{s}{4\alpha}\right)^{s/2}$. Воспользуемся теоремой Банаха – Штейнгауза [5, с. 151], по которой сходимость $B_n u \rightarrow B u$ при $n \rightarrow \infty$ для всех $u \in H$ имеет место тогда и только тогда, когда эта сходимость имеет место на некотором плотном в H подмножестве и $\|B_n\|, n = 1, 2, \dots$, ограничены независимой от n постоянной.

Возьмем в качестве плотного в $\overline{R(A)} = H$ множество $R(A)$. Положим $s_1 = s + 1$. Тогда для каждого $v = A\omega \in R(A)$ имеем

$$n^{s/2} \|A^s (E - Ag_n(A))v\| = n^{s/2} \|A^{s+1} (E - Ag_n(A))\omega\| \leq n^{s/2} \left(\frac{s+1}{4\alpha}\right)^{\frac{s+1}{2}} n^{-\frac{s+1}{2}} \|\omega\| = \gamma_{s_1} n^{-\frac{1}{2}} \|\omega\| \rightarrow 0,$$

при $n \rightarrow \infty$, т. к. $s_1 < \infty$. Лемма 2 доказана.

Справедлива

Лемма 3. Пусть $A = A^* \geq 0, \|A\| \leq M$. Если для некоторой последовательности $n_p < \bar{n} = \text{const}$ и $v_0 \in \overline{R(A)}$ при $p \rightarrow \infty$ имеем $\omega_p = A(E - Ag_{n_p}(A))v_0 \rightarrow 0$, то $v_p = (E - Ag_{n_p}(A))v_0 \rightarrow 0$.

Доказательство

В силу (6) последовательность v_p ограничена $\|v_p\| \leq \gamma_0 \|v_0\|, \gamma_0 = 1, p \in N$.

Поэтому в гильбертовом пространстве из этой последовательности можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность $v_p \rightarrow v, (p \in N' \subseteq N)$, тогда $Av_p \rightarrow Av, (p \in N')$. Но по условию $\omega_p = Av_p \rightarrow 0, p \rightarrow \infty$, следовательно, $Av = 0$. Поскольку нуль не является собственным значением оператора A , то $v = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \|v_p\|^2 &= (v_p, (E - Ag_{n_p}(A))v_0) = (v_p, v_0) - (v_p, Ag_{n_p}(A)v_0) = \\ &= (v_p, v_0) - (Av_p, g_{n_p}(A)v_0) = (v_p, v_0) - (\omega_p, g_{n_p}(A)v_0) \rightarrow (v, v_0), \end{aligned}$$

т. к. $\omega_p \rightarrow 0, p \rightarrow \infty, v = 0$ и по условию (5) $\|g_{n_p}(A)\| \leq 2(n_p \alpha)^{1/2} \leq 2(\bar{n} \alpha)^{1/2}$. Следовательно, $\|v_p\| \rightarrow 0$. Итак, всякая слабо сходящаяся подпоследовательность указанной

выше ограниченной последовательности v_p стремится к нулю по норме. Следовательно, и вся последовательность $v_p \rightarrow 0$, $p \rightarrow \infty$. Лемма 3 доказана.

Используем доказанные леммы при доказательстве следующей теоремы.

Теорема 1. Пусть $A = A^* \geq 0$, $\|A\| \leq M$ и пусть момент останова $m = m(\delta)$ в методе (3) выбирается по правилу (4). Тогда $x_{m,\delta} \rightarrow x$ при $\delta \rightarrow 0$.

Доказательство

По индукции легко доказать, что $x_{n,\delta} = A^{-1} \left[E - (E + \alpha A^2)^{-n} \right] y_\delta$. Следовательно,

$$x_{n,\delta} - x = g_n(A)(y_\delta - y) - (E - Ag_n(A))x. \quad (9)$$

Отсюда

$$Ax_{n,\delta} - y_\delta = -A[E - Ag_n(A)]x - [E - Ag_n(A)](y_\delta - y). \quad (10)$$

В силу лемм 1 и 2 имеем

$$\|(E - Ag_n(A))x\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (11)$$

$$\sigma_n = n^{1/2} \|A(E - Ag_n(A))x\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Кроме того, из (5) и (6) следует, что

$$\|g_n(A)(y_\delta - y)\| \leq 2(n\alpha)^{1/2} \delta, \quad (13)$$

$$\|E - Ag_n(A)\| \leq 1. \quad (14)$$

Применим правило останова (4). Тогда $\|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| \leq b\delta$, $b > 1$ и из (10) и (14) получим

$$\|A(E - Ag_m(A))x\| \leq \|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| + \|(E - Ag_m(A))(y_\delta - y)\| \leq (b+1)\delta. \quad (15)$$

Для любого $n < m$ $\|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon$, поэтому

$$\|A(E - Ag_n(A))x\| \geq \|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| - \|(E - Ag_n(A))(y - y_\delta)\| \geq (b-1)\delta.$$

Итак, для $\forall n < m$

$$\|A(E - Ag_n(A))x\| \geq (b-1)\delta. \quad (16)$$

Из (12) и (16) при $n = m-1$ получим $\frac{\sigma_{m-1}}{(m-1)^{1/2}} = \|A(E - Ag_{m-1}(A))x\| \geq (b-1)\delta$

или $(m-1)^{1/2} \delta \leq \frac{\sigma_{m-1}}{(b-1)} \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$ (т. к. из (12) $\sigma_m \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$). Если при этом $m \rightarrow \infty$

при $\delta \rightarrow 0$ то, используя (9), получим

$$\begin{aligned} \|x_{m,\delta} - x\| &\leq \|(E - Ag_m(A))x\| + \|g_m(A)(y_\delta - y)\| \leq \\ &\leq \|(E - Ag_m(A))x\| + 2(m\alpha)^{1/2} \delta \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0, \end{aligned}$$

т. к. из (11) $\|(E - Ag_m(A))x\| \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$.

Если же для некоторых $\delta_n \rightarrow 0$ последовательность $m(\delta_n)$ окажется ограниченной, то и в этом случае $x_{m(\delta_n), \delta_n} \rightarrow x$, $\delta_n \rightarrow 0$.

Действительно, из (15) имеем $\|A(E - Ag_{m(\delta_n)}(A))x\| \leq (b+1)\delta_n \rightarrow 0$, $\delta_n \rightarrow 0$.

Отсюда по лемме 3 получаем, что $(E - Ag_{m(\delta_n)}(A))x \rightarrow 0$, $\delta_n \rightarrow 0$. Поэтому

$$\|x_{m(\delta_n), \delta_n} - x\| \leq \|(E - Ag_{m(\delta_n)}(A))x\| + 2(m(\delta_n)\alpha)^{1/2}\delta_n \rightarrow 0, \quad \delta_n \rightarrow 0.$$

Теорема 1 доказана.

3. Оценка погрешности. Имеет место

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и пусть $x = A^s z$, $s > 0$. Тогда

справедливы оценки $m \leq 1 + \frac{s+1}{4\alpha} \left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta} \right]^{2/(s+1)}$,

$$\|x_{m,\delta} - x\| \leq [(b+1)\delta]^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} + 2\alpha^{1/2} \left\{ 1 + \frac{s+1}{4\alpha} \left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta} \right]^{2/(s+1)} \right\}^{1/2} \delta. \quad (17)$$

Доказательство

Т. к. $x = A^s z$, $s > 0$, то

$$\begin{aligned} \|A(E - Ag_{m-1}(A))x\| &= \|A^{s+1}(E - Ag_{m-1}(A))z\| = \\ &= \left\| \int_0^M \lambda^{s+1} (1 + \alpha\lambda^2)^{-m+1} dE_\lambda z \right\| \leq (s+1)^{(s+1)/2} [4\alpha(m-1)]^{-(s+1)/2} \|z\|. \end{aligned}$$

Воспользовавшись (16), получим $(b-1)\delta \leq (s+1)^{\frac{s+1}{2}} [4\alpha(m-1)]^{-\frac{s+1}{2}} \|z\|$, отсюда

$m \leq 1 + \frac{s+1}{4\alpha} \left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta} \right]^{\frac{2}{s+1}}$. При помощи неравенства моментов оценим

$$\begin{aligned} \|(E - Ag_m(A))x\| &\leq \|A^{s+1}(E - Ag_m(A))z\|^{s/(s+1)} \|(E - Ag_m(A))z\|^{1/(s+1)} \leq \\ &\leq \|A(E - Ag_m(A))x\|^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} \leq [(b+1)\delta]^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} \quad (\text{см. (15)}). \end{aligned}$$

Т.к. соотношение (9) справедливо для любых n , то

$$\begin{aligned} \|x_{m,\delta} - x\| &\leq \|(E - Ag_m(A))x\| + \|g_m(A)(y_\delta - y)\| \leq [(b+1)\delta]^{\frac{s}{s+1}} \|z\|^{\frac{1}{s+1}} + \\ &+ 2\alpha^{1/2} \left\{ 1 + \frac{s+1}{4\alpha} \left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta} \right]^{\frac{2}{s+1}} \right\}^{1/2} \delta. \end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.

Замечание 1. Порядок оценки (17) есть $O(\delta^{s/(s+1)})$ и, как следует из [3], он оптимален в классе задач с истокорпредставимыми решениями.

Замечание 2. Используемое в формулировке теоремы 2 предположение порядка $s > 0$ истокорпредставимости точного решения не потребуется на практике, т. к. оно не содержится в правиле останова (4). И тем не менее в теореме 2 утверждается, что будет автоматически выбрано количество итераций m , обеспечивающих оптимальный порядок погрешности. Но даже если истокорпредставимость точного решения отсутствует, останов по невязке (4), как показывает теорема 1, обеспечивает сходимость метода, т. е. его регуляризующие свойства.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Матысик, О. В. Априорный выбор параметра регуляризации в неявном итерационном методе решения линейных некорректных уравнений / О. В. Матысик // Вестн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізика. Матэматыка. – 2019. – № 1. – С. 72–78.
2. Емелин, И. В. К теории некорректных задач / И. В. Емелин, М. А. Красносельский // Докл. АН СССР. – 1979. – Т. 244, № 4. – С. 805–808.
3. Вайникко, Г. М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г. М. Вайникко, А. Ю. Веретенников. – М. : Наука, 1986. – 178 с.
4. Матысик, О. В. Итерационная регуляризация некорректных задач / О. В. Матысик. – Saarbrücken : LAP LAMBERT Acad. Publ., 2015. – 188 с.
5. Матысик, О. В. Явные и неявные итерационные процедуры решения некорректно поставленных задач / О. В. Матысик ; Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина. – Брест : БрГУ, 2014. – 213 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 20.03.2020

Matysik O. V. Stopping by the Smallness of the Mismissibility in the Method of Iterations of an Implicite Type for the Solution of Linear Operator Equations of the First Kind

In the Hilbert space for solving linear operator equations the first kind with affirmative limited and self-conjugate operator the implicit iteration process is proposed. The application of a rule residual stop for the offered method has been proved, which makes viewed iteration method quite effective even then when there are no data about source representability of exact solution. In work the convergence of the iteration method is proved, the estimation of an error of the method and estimation the moment of stop are received.

УДК 519.6+519.81

В. В. Морозов

ст. преподаватель каф. прикладной математики и информатики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
e-mail: morozoffw@mail.ru

**ИТЕРАТИВНЫЙ БАЗИС В ПОЛИНОМИАЛЬНОМ АНАЛИЗЕ
БАНАХОВЫХ УРАВНЕНИЙ**

Отсутствие в бесконечномерных банаховых пространствах счетного базиса вынуждает исследователей, изучающих нелинейные функциональные уравнения с дифференциальными и/или интегральными операторами, разрабатывать все новые и новые грандиозные сеточные схемы. Однако, следуя постулатам функционального анализа А. Н. Колмогорова и С. В. Фомина [1], Л. В. Канторовича и Г. П. Акилова [2], аппроксимацию корней банаховых уравнений надлежит осуществлять с помощью элементов всюду плотного в сепарабельном пространстве решений множества многочленов. Во избежание теоретических изъянов дискретного представления элементов непрерывных функциональных пространств (например, при доказательстве сходимости дискретного приближения к непрерывной функции по норме) для аппроксимации элементов непрерывных банаховых пространств необходим полиномиальный базис. В качестве такового в работе используется базис, являющийся одновременно базисом всюду плотного множества и итеративным базисом вычислительного процесса, позволяющий при доказательстве сходимости полиномиального приближения сколь угодно увеличивать параметр дискретизации пространств и сколь угодно уменьшать погрешность приближения их элементов.

Памяти Я. В. Радыно посвящается

Введение

Итерационным базисом в методах численного приближения элементов непрерывных функциональных пространств является базис евклидова пространства R_n , где n – параметр дискретизации функционального пространства, задающий количество точек базового множества, в которых требуется определить значение искомой функции. Далее, руководствуясь правилами дискретной аппроксимации дифференциальных и интегральных операторов, неизвестные значения функции в точках сетки связывают в систему n уравнений и, в случае нелинейности и сильной дифференцируемости оператора системы, решают ее методом Ньютона, где роль производной Фреше играет матрица частных производных Якоби. Несогласованность по норме пространства решений корня операторного уравнения и его дискретного приближения значительно усложняет доказательство сходимости процесса, которое связано с динамичным увеличением n .

Значительно ближе к постулатам функционального анализа размещается теория Галеркина решения функциональных уравнений в гильбертовых пространствах. И хотя эти методы по-прежнему не являются итерационными [3] относительно увеличения параметра дискретизации n , преимущество их неоспоримо с точки зрения аппроксимации корней по норме. Естественно, каждому исследователю для генерации фундаментальной последовательности Коши необходимо изучить динамику сходимости приближения к корню уравнения при $n \rightarrow \infty$. Однако на практике для локализации корня в окрестности приближения одной сходимости вычислительного процесса по невязке приближения даже в гильбертовых пространствах явно недостаточно. Т. е. слабая сходимость образа в пространстве отображения корня не только не обеспечивает сильную сходимость приближения к корню по норме, но и оставляет открытым вопрос о существовании корня вблизи этого приближения.

Моделирование реальных технологических процессов с помощью интегро-дифференциальных операторов основано на описании свойств пространства решений,

которому принадлежит искомый корень, и описания отображения этого пространства в пространство образов, в которое отображается пространство решений. Сепарабельность этих пространств при описании реальных процессов функциональными уравнениями с интегральными и/или дифференциальными операторами достаточно хорошо изучена в монографиях [1–4] и др. Важнейшим достижением этих исследований стало установление счетных всюду плотных множеств в функциональных банаховых пространствах. Это свойство сепарабельных пространств позволяет организовать вычислительный процесс, максимально соответствующий качественной теории функционального анализа. Вслед за определением достоверных оценок норм приближений элементов процесса появляется возможность генерировать слабые производные дифференцируемых отображений, а также оценивать их нормы.

Для решения интегральных, дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в работе используются полиномиальные методы приближения корня многочленами всюду плотного множества пространства решений. Причем применяемый для аппроксимации элементов полиномиальный базис одновременно является базисом всюду плотного множества и итеративным базисом вычислительного процесса, т. е. итерационный многочлен приближения корня степени n из P_n в случае необходимости может быть представлен в виде многочлена в реорганизованном базисе P_{n+1} . Отметим, что здесь вместо традиционного базиса множества многочленов используется лагранжевый базис, который и обеспечивает итеративность вычислительного процесса при увеличении параметра дискретизации. Логическим завершением вычислительного процесса является локализация корня функционального уравнения с заданной точностью приближения.

В данной работе излагаются два критерия локализации изолированных корней – для недифференцируемых и дифференцируемых отображений в операторном уравнении. Целью работы является определение условий сходимости итерационных методов решения функциональных уравнений, а также установление и доказательство критериев локализации корней операторных уравнений.

Решаемые задачи:

- 1) разработать алгоритм итерационного метода решения банаховых уравнений;
- 2) сформулировать и доказать критерии локализации корней банаховых уравнений.

Критерии локализации корней операторных уравнений

Отображением банаховых пространств, или банаховым отображением, будем называть отображение

$$F : U \rightarrow V,$$

где U и V являются B -пространствами.

Как известно, банахово пространство метрическое (с метрикой, порожденной нормой B -пространства), поэтому все утверждения, справедливые для метрических пространств, будут справедливы и для банаховых. Один из простейших критериев существования и единственности неподвижной точки при отображении метрического пространства в себя (и в то же время один из наиболее важных из них) носит название принцип сжимающих отображений в метрическом пространстве.

Определение. Пусть U – метрическое пространство. Отображение $F : U \rightarrow U$ называется сжимающим отображением или сжатием, если существует такое действительное число $0 < \tau < 1$, что для любых двух точек u и v из пространства U выполняется неравенство

$$\rho(F(u), F(v)) \leq \tau \rho(u, v). \quad (1)$$

Число τ называется коэффициентом сжатия.

Всякое сжимающее отображение непрерывно. Действительно, если последовательность $u_n \rightarrow u$, то из неравенства (1) вытекает, что

$$\rho(F(u_n), F(u)) \leq \tau \rho(u_n, u)$$

и в силу определения предела из условия $u_n \rightarrow u$ следует, что $F(u_n) \rightarrow F(u)$.

Определение. Точка $u \in U$ называется неподвижной точкой отображения F , если она является решением уравнения

$$F(u) = u, F : U \rightarrow U. \quad (2)$$

Теорема (принцип сжимающих отображений). Всякое сжимающее отображение, определенное в полном метрическом пространстве U , имеет одну и только одну неподвижную точку.

Доказательство. Пусть u_0 – произвольная точка из U . Положим

$$\begin{aligned} u_1 &= F(u_0), u_2 = F(u_1) = F(F(u_0)), \dots, \\ u_n &= F(u_{n-1}) = \dots = \underbrace{F(\dots(F(u_0))\dots)}_n \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Покажем, что последовательность $\{u_n, n = 0, 1, \dots\}$ приближений корня u уравнения (2) фундаментальная, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N \in \mathbb{N}$, что при всех натуральных n и m больше N справедливо неравенство $\rho(u_n, u_m) < \varepsilon$.

Для определенности будем считать, что $n \leq m$, тогда

$$\begin{aligned} \rho(u_n, u_m) &= \rho(\underbrace{F(\dots(F(u_0))\dots)}_n, \underbrace{F(\dots(F(u_0))\dots)}_m) \leq \\ &\leq \tau^n \rho(u_0, \underbrace{F(\dots(F(F(u_0)))\dots)}_{m-n}) \leq \tau^n \frac{\rho(u_0, u_1)}{1-\tau}, \tau < 1. \end{aligned}$$

Значит, последовательность приближений $\{u_n, n = 0, 1, \dots\}$ фундаментальная и в силу полноты U имеет предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u.$$

Тогда для непрерывного отображения F справедливо утверждение

$$F(u) = F(\lim_{n \rightarrow \infty} u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} = u \in U.$$

Единственность неподвижной точки следует из соотношения

$$\rho(u^1, u^2) = \rho(F(u^1), F(u^2)) \leq \tau \rho(u^1, u^2), \tau < 1.$$

Принцип сжатия дает и фактический метод приближенного решения операторного уравнения (2) – метод последовательных приближений.

Локализация корня уравнения подразумевает определение границ области пространства решений, которой принадлежит изолированный корень уравнения. Чаще всего это происходит в шаре $Q_r = \{u - u_0\} \leq r$ определенного радиуса r .

Теорема. Пусть в полном метрическом пространстве Q_r , порожденном нормой $\|\cdot\|$, оператор F удовлетворяет условию Липшица с константой $K < 1$. Тогда если

$$\|u_0 - F(u_0)\| \leq (1 - K)r,$$

то уравнение (2) имеет единственное решение $u \in Q_r$.

Доказательство. Покажем методом индукции, что все приближения

$$\{u_0, u_{n+1} = F(u_n), n = 0, 1, \dots\}$$

корня (2) находятся в области Q_r и

$$\|u_{n+1} - u_n\| \leq (1 - K) r K^n. \quad (3)$$

Предположим, что утверждение теоремы справедливо при $n \leq m - 1$, т. е. все элементы последовательности $u_n, n = 0, 1, \dots, m - 1$ находятся в области Q_r и для них выполняется соотношение (3). Докажем, что в этом случае

$$\|u_{m+1} - u_m\| \leq (1 - K) r K^m$$

и

$$\|u_{m+1} - u_0\| \leq r.$$

Первое из соотношений является следствием индуктивного предположения

$$\begin{aligned} \|u_{m+1} - u_m\| &= \|F(u_m) - F(u_{m-1})\| \leq K \|u_m - u_{m-1}\| \leq \\ &\leq K(1 - K) r K^{m-1} = (1 - K) r K^m. \end{aligned}$$

Второе вытекает из определения и свойств нормы

$$\begin{aligned} \|u_{m+1} - u_0\| &= \|(u_{m+1} - u_m) + (u_m - u_{m-1}) + \dots + (u_1 - u_0)\| \leq \\ &\leq (1 - K) r (K^m + K^{m-1} + \dots + 1) \leq r ((K^m + K^{m-1} + \dots + 1) - \\ &\quad - (K^{m+1} + K^m + \dots + K)) \leq r(1 - K^{m+1}) \leq r. \end{aligned}$$

Полнота метрического пространства Q_r обеспечивает сходимость фундаментальной последовательности $\{u_n, n = 0, 1, \dots\}$ к корню (2).

Наряду с решением уравнения вида (2) большое значение имеет разработка методов решения уравнений вида

$$F(u) = v, F : U \rightarrow V, \quad (4)$$

из которого (2) получается как частный случай при $V = U$.

В качестве пространства решений U и пространства образов V оператора F будем рассматривать банаховы пространства. В связи с этим уравнение (4) будем называть банаховым.

Определение. Пусть $A : U \rightarrow V$ – ограниченный линейный банаховый оператор.

Выражение

$$[A] = \inf_{\|u\|=1} \|A u\|$$

будем называть i -гранью оператора A , а выражение

$$[A] = \sup_{\|u\|=1} \|A u\|$$

назовем s -гранью оператора A .

В изложенном выше критерии локализации корня уравнения (2) не требуется дифференцируемость оператора F в области Q_r , однако для более точной оценки качества приближения потребуется существование не только первой производной Фреше оператора F уравнения (4), но и ограниченность второй производной F .

Идея метода Ньютона решения уравнения $F(u) = v$ (не ограничивая общности, будем считать далее, что $v = 0$) заключается в аппроксимации приращения $F(u) - F(u_0)$ его главной линейной частью $F'(u_0)(u - u_0)$ из формулы Тейлора. Тогда приближенное значение корня банахова уравнения

$$F(u) = 0, F : U \rightarrow V \quad (5)$$

можно найти, решив линейное уравнение

$$F'(u_0)(u - u_0) = -F(u_0).$$

Из «формулы конечных приращений» [5, с. 134] следует, что для достаточно гладкого в области Q_r отображения

$$\|F(u) - F(u_0) - F'(u_0)(u - u_0)\| \leq \frac{1}{2} \sup_{u \in Q_r} [F''(u)] \|u - u_0\|^2.$$

Следовательно, норма невязки $\|F(u)\|$ на найденном приближении u , для которого $-F(u_0) - F'(u_0)(u - u_0) = 0$, соизмерима с квадратом нормы приращения аргумента, что позволяет при достаточно малых приращениях организовать вблизи корня уравнения (5) сходящийся итерационный процесс

$$u_{n+1} = u_n + \Delta u_n, \text{ где } \Delta u_n = -[F'(u_n)]^{-1} F(u_n), n = 0, 1, \dots \quad (6)$$

Однако в бесконечномерном случае установление обратного оператора $[F'(u_n)]^{-1}$ на каждом шаге итерационного процесса может стать задачей достаточно трудоемкой. Поэтому иногда целесообразно использовать так называемый модифицированный метод Ньютона. Модификация состоит в том, что вместо последовательности (6) рассматривается последовательность, определяемая формулой

$$u_{n+1} = u_n - [F'(u_0)]^{-1} F(u_n), n = 0, 1, \dots \quad (7)$$

Идея модифицированного метода заключается в использовании на каждом шаге обратного оператора $[F'(u)]^{-1}$, вычисленного при одном и том же значении $u = u_0$.

Теорема. Пусть в некотором шаре Q_r банахово отображение $F : U \rightarrow V$ сильно дифференцируемо и производная $F'(u)$ удовлетворяет в нем условию Липшица с константой L , т. е.

$$\|F'(u) - F'(v)\| \leq L \|u - v\|.$$

При этом нулевое приближение u_0 выбрано так, что справедливы оценки

1. $[F'(u_0)]^{-1}$ существует и $\|[F'(u_0)]^{-1}\| \leq C$;
2. $\eta \geq \|[F'(u_0)]^{-1} F(u_0)\|$;
3. $k = CL\eta \leq 1/4$.

Тогда в шаре Q_r , где r – меньший корень уравнения

$$CLr^2 - r + \eta = 0, \quad (8)$$

уравнение (5) имеет единственное решение u^* и последовательность приближений

$$\{u_n, n = 0, 1, \dots\},$$

определяемая рекуррентным соотношением (7), сходится к этому корню.

Для доказательства утверждения рассмотрим в пространстве U отображение

$$A(u) = u - [F'(u_0)]^{-1} F(u).$$

Его сильная производная в точке u_0 равна 0 . Докажем, что отображение A переводит шар Q_r в себя.

Действительно,

$$\begin{aligned} \|A(u) - u_0\| &\leq \|u - u_0 - [F'(u_0)]^{-1} F(u)\| \leq \\ &\leq \lceil [F'(u_0)]^{-1} \rceil \|F'(u_0)(u - u_0) - F(u) + F(u_0)\| + \|[F'(u_0)]^{-1} F(u_0)\| \leq \\ &\leq C \|F'(u_0)(u - u_0) - F(u) + F(u_0)\| + \eta. \end{aligned} \quad (9)$$

Обозначим отображение, расположенное в скобках нормы, через $\Phi(u)$ и найдем его производную по переменной u :

$$\Phi'(u) = F'(u_0) - F'(u).$$

Следовательно, при $\|u - u_0\| \leq r$ имеет место неравенство

$$\lceil \Phi'(u) \rceil = \lceil F'(u_0) - F'(u) \rceil \leq Lr.$$

Т. к. $\Phi(u_0) = 0$, то по «формуле конечных приращений»

$$\|\Phi(u)\| = \|\Phi(u) - \Phi(u_0)\| \leq Lr \|u - u_0\| \leq Lr^2.$$

Тогда, продолжая цепочку неравенств (9), получаем оценку

$$\|A(u) - u_0\| \leq CLr^2 + \eta = r,$$

а это значит, что отображение A переводит шар Q_r в себя.

Покажем, что A – сжимающее отображение элементов этого шара:

$$A'(u) = I - [F'(u_0)]^{-1} F'(u) = [F'(u_0)]^{-1} (F'(u_0) - F'(u)).$$

Отсюда при $\|u - u_0\| \leq r$ справедливо соотношение

$$\lceil A'(u) \rceil \leq \lceil [F'(u_0)]^{-1} \rceil \|F'(u_0) - F'(u)\| \leq CL \|u - u_0\| \leq CLr.$$

Но r – меньший корень уравнения (8), т. е. $r = \frac{1 - \sqrt{1 - 4k}}{2k} \eta$, поэтому

$$\lceil A'(u) \rceil \leq CLr = k \frac{1 - \sqrt{1 - 4k}}{2k} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4k}}{2} = q \leq 1/2.$$

Используя неравенство (аналог теоремы о среднем для отображений)

$$\|A(u) - A(u_0)\| \leq \sup_{u \in Q_r} \lceil A'(u) \rceil \|u - u_0\|,$$

закключаем, что A – сжимающее отображение.

Следовательно, оператор A имеет в шаре Q_r одну и только одну неподвижную точку u^* , для которой

$$u^* = u^* - [F'(u_0)]^{-1} F(u^*).$$

Вместе с тем, исходя из соотношения (7)

$$u_{n+1} = A(u_n) \equiv u_n - [F'(u_0)]^{-1} F(u_n)$$

и в силу теоремы о сжимающих отображениях, последовательность приближенных решений $\{u_n, n = 0, 1, \dots\}$ сходится к u^* .

Из оценки s -границ оператора A сразу следует оценка скорости сходимости модифицированного метода Ньютона к корню уравнения (5):

$$\|u_n - u^*\| \leq \frac{q^n \eta}{1 - q}.$$

Таким образом, погрешность приближения данного метода убывает не медленнее, чем геометрическая прогрессия с шагом q .

Как видно, использование на каждом шаге итерационного процесса обратного оператора производной Фреше, вычисленного при одном и том же значении аргумента, значительно замедляет сходимость процесса к корню уравнения. Сформулируем критерий локализации корня, основанный на квадратичной сходимости ньютоновского процесса (6).

Теорема. Пусть в шаре Q_r банахово отображение $F: U \rightarrow V$ дважды непрерывно дифференцируемо и $\sup_{u \in Q} [F''(u)] \leq K$, а для нуля-приближения u_0 выполнены условия:

1. $[F'(u_0)]^{-1}$ существует и $[F'(u_0)]^{-1} \leq C$ ($[F'(u_0)] \geq C^{-1}$);
2. $\eta \geq \|[F'(u_0)]^{-1} F(u_0)\|$;
3. $k = CK\eta \leq 1/2$;
4. $r \geq \frac{1 - \sqrt{1 - 2k}}{k} \eta$.

Тогда последовательность

$$u_{n+1} = u_n + \Delta u_n, \Delta u_n = -[F'(u_n)]^{-1} F(u_n), n = 0, 1, \dots$$

сходится в шаре Q_r к решению u^* уравнения со скоростью

$$\|u^* - u_n\| \leq t^* - t_n,$$

где t_n – последовательность приближений меньшего корня t^* уравнения

$$P(t) \equiv \frac{KC}{2} t^2 - t + \eta = 0,$$

построенная по правилу

$$t_{n+1} = t_n - [P'(t_n)]^{-1} P(t_n), t_0 = 0.$$

Доказательство теоремы приведено в [5, с. 141–142]. Опишем лишь фрагмент доказательства, связанный с индуктивным переходом.

По теореме [5, с. 115] оценим i -грань оператора $F'(u_n)$:

$$\begin{aligned} [F'(u_n)] &\geq [F'(u_0)] - \sup_{u \in Q} [F''(u)] \|u_n - u_0\| \geq \\ &\geq 1/C - K\|(u_n - u_{n-1}) + \dots + (u_1 - u_0)\| = 1/C - K((t_n - t_{n-1}) + \dots + (t_1 - t_0)) \geq \\ &\geq 1/C - Kt_n (= -P'(t_n)/C) > 1/C - Kt^* = 1/C - K \frac{1 - \sqrt{1 - 2k}}{CK\eta} \eta \geq \frac{\sqrt{1 - 2k}}{C} \geq 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует существование обратного ограниченного оператора к $F'(u_n)$ и существование приближения u_{n+1} .

По теореме о среднем найдем $P(t_n)$ и оценим норму $F(u_n)$

$$P(t_n) = P(t_n) - P(t_{n-1}) - P'(t_{n-1})\Delta t_{n-1} = \int_0^1 (P'(t_{n-1} + \tau \Delta t_{n-1}) - P'(t_{n-1})) \Delta t_{n-1} d\tau =$$

$$= \int_0^1 (KC(t_{n-1} + \tau \Delta t_{n-1}) - KC(t_{n-1})) \Delta t_{n-1} d\tau = KC \int_0^1 \tau \Delta^2 t_{n-1} d\tau = \frac{1}{2} KC(t_n - t_{n-1})^2,$$

$$\|F(u_n) - F(u_{n-1}) - F'(u_{n-1})\Delta u_{n-1}\| \leq \frac{1}{2} K \|u_n - u_{n-1}\|^2 \leq \frac{1}{2} K(t_n - t_{n-1})^2 = \frac{P(t_n)}{C}.$$

Поправка к u_n находится из уравнения $F'(u_n)\Delta u_n = -F(u_n)$, тогда по определению i -границы $\lfloor F'(u_n) \rfloor \|\Delta u_n\| \leq \|F(u_n)\|$ или $\|\Delta u_n\| \leq \|F(u_n)\| \lfloor F'(u_n) \rfloor^{-1}$.

Учитывая, что $1/C - Kt_n = -P'(t_n)/C$, оценим норму приращения Δu_n

$$\|u_{n+1} - u_n\| \leq \frac{\|F(u_n)\|}{\lfloor F'(u_n) \rfloor} \leq -\frac{P(t_n)}{P'(t_n)} = t_{n+1} - t_n.$$

Отметим, что в изложенной редакции этот критерий является не улучшаемым на множестве отображений $F: R \rightarrow R$ [6, с. 244].

Итерационный базис полиномиального анализа

Ввиду отсутствия в бесконечномерных банаховых пространствах счетного базиса, алгоритм построения дискретной матрицы Габо (численного аналога производной Фреше) в точке приложения сильной производной основан на свойствах специального итерационного базиса. С увеличением порядка n дискретизации пространства увеличивается размерность этого базиса и матрицы Габо, а также увеличивается точность ее приближения к линейному оператору производной Фреше. Полиномиальная аппроксимация производной Фреше банахова отображения бесконечномерных пространств, представляющая собой матрицу неограниченной размерности, является примером реализации на практике теории сепарабельности пространств функционального анализа.

Для полиномиальной аппроксимации функциональных операторов в качестве проектора $\prod^n: U \rightarrow P^n$ элементов пространства абсолютно непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций на множество многочленов используем интерполяционный процесс Лагранжа с чебышевской сеткой. Благодаря уникальному свойству лагранжева базиса множества P^n , где коэффициенты разложения полинома являются его значениями в точках сетки, полиномиальные методы решения интегро-дифференциальных уравнений и многих других задач прикладного анализа становятся итерационными.

Итерационным базисом множества многочленов P^n на сетке Ω отрезка $[a, b]$ назовем систему функций

$$E = \{e^j(x), j = 0, \dots, n\},$$

удовлетворяющую условиям:

- 1) все функции $e^j(x), j = 0, \dots, n$ из E являются многочленами степени n ;
- 2) значение $e^j(x)$ равно 1 при $x = x_j$ и равно 0 в других точках x_i ($i \neq j$).

Коэффициенты $c_k^j, k, j = 0, \dots, n$ этих многочленов находятся из системы

$$\sum_{k=0}^n W_{ik} c_k^j = e_i^j, i, j = 0, \dots, n,$$

где $(e_i^j, i = 0, \dots, n)$ – вектор, состоящий из нулей, j^n координата которого равна 1; W_{ik} – элементы матрицы Вандермонда W на сетке Ω .

Совокупность функций E образует линейно независимую систему многочленов степени n , т. е. базис множества $P^n_{[a, b]}$. Любой многочлен ${}^n h(x) \in P^n_{[a, b]}$ можно представить (причем единственным образом) в базисе E линейной комбинацией

$${}^n\hbar(x) = \sum_{j=0}^n {}^n\hbar(x_j) e^j(x),$$

где $\Omega = \{x_j, j = 0, \dots, n\}$ – сетка отрезка $[a, b]$.

Аналогичное представление любого многочлена ${}^n\hbar(x) \in P^n_{[a, b]}$ можно получить в виде формулы Лагранжа, т. е. итеративным базисом $P^n_{[a, b]}$ являются интерполяционные коэффициенты Лагранжа.

Опишем принцип построения проектора $\overset{n}{\Pi}$ элементов функционального B -пространства $U_{[a, b]}$ со всюду плотным множеством многочленов на подмножество $P^n_{[a, b]} \subset U_{[a, b]}$. Его идея в том, что сначала доказывается существование единственного многочлена степени n наилучшего приближения $u(x)$ по норме $U_{[a, b]}$ для любого элемента $u(x)$ из B -пространства.

Затем, исходя из метрических свойств проецируемого пространства $U_{[a, b]}$, этот единственный проекционный многочлен $u^n(x)$ определяется интерполированием элемента U^{n+1} на специально подобранной сетке Ω со значениями многочлена наилучшего приближения, равными значению функции $u(x)$ в узлах сетки.

Для определения коэффициентов многочлена наилучшего приближения $u(x)$ по норме функционального B -пространства минимизируем функционал, представляющий норму их разности. Полученный многочлен используем как полиномиальную проекцию $u(x)$ из $U_{[a, b]}$ в $P^n_{[a, b]}$, полученную оператором проектирования

$$\overset{n}{\Pi} : U_{[a, b]} \rightarrow P^n_{[a, b]}.$$

Построенный таким образом проектор является линейным оператором, т. к.

$$\overset{n}{\Pi}(u(x) + v(x)) = \overset{n}{\Pi}u(x) + \overset{n}{\Pi}v(x);$$

$$\overset{n}{\Pi}(\alpha \cdot u(x)) = \alpha \overset{n}{\Pi}u(x).$$

Дифференцируемый функционал $F: U \rightarrow R$ достигает экстремум в $v(x) \in U$, если его дифференциал в этой точке равен нулю при всех приращениях $\hbar = \hbar(x)$

$$F'(v(x))\hbar = 0.$$

Если в точке $v(x)$ функционал F , определенный в банаховом пространстве U , для всех $\hbar \in U$ удовлетворяет условиям

1. $F'(v(x))\hbar = 0$,
2. $F''(v(x))(\hbar, \hbar) \geq c \|\hbar\|^2$, где $c > 0$,

то функционал F имеет в точке $v(x)$ минимум.

При существовании сильной производной отображения ее значение совпадает со слабой, поэтому функционал нормы разности многочлена ${}^n u(x)$ наилучшего приближения и самой функции $u(x)$ минимизируем с помощью его слабого дифференцирования по направлениям итеративного базиса $P^n_{[a, b]}$, которое аналогично вычислению частных производных в конечномерных пространствах.

Представление производной Фреше в виде матрицы упрощает построение и обращение оператора сильной производной.

В качестве примера найдем вектор коэффициентов $a^7 = (a_0, \dots, a_6)$ многочлена наилучшего приближения по норме Чебышева непрерывной функции

$$u(x) = \begin{cases} 0,5 - x, & \text{если } x \leq 0,5 \\ x - 0,5, & \text{если } x > 0,5 \end{cases}, x \in [0; 1].$$

Численный эксперимент с описанным алгоритмом минимизации функционала определил многочлен наилучшего приближения шестой степени заданной функции $u(x) \in U_{[a, b]}$ с наибольшим отклонением по чебышевской норме:

$$\|u(x) - {}^6u(x)\|_C \leq \delta = 2,55 \cdot 10^{-2},$$

где $u^6(x) = 0,525443233043373627969265525179599949154033 -$
 $- 3,051821714256461127743517571697162047044227 x +$
 $+ 26,679830282873060805122612663897346158726901 x^2 -$
 $- 124,941882582367426257050478986731605646134858 x^3 +$
 $+ 256,685604904019280384255961499193896379991211 x^4 -$
 $- 233,057596335402680706876866406993712268308538 x^5 +$
 $+ 77,685865445134226902292288802331237422769512 x^6.$

Теорема [7, с. 106]. Если $u(x)$ принадлежит множеству $C^a_{[a, b]}$ абсолютно непрерывных функций, то построенный на сетке Чебышева процесс интерполирования при $n \rightarrow \infty$ сходится к порождающей функции равномерно относительно x на отрезке $[a, b]$.

Преимущество чебышевской сетки объясняется не только наименьшим отклонением функций из $C^a_{[a, b]}$ от отвечающих им интерполяционных многочленов, т. е. ее аналитическими свойствами, но и геометрическими особенностями соответствующего данной сетке итерационного базиса.

Определение. Предскалярным произведением векторов u и v в линейном пространстве U назовем действительную функцию $\langle\langle u, v \rangle\rangle$, удовлетворяющую условиям:

1. $\langle\langle u, v \rangle\rangle = \langle\langle v, u \rangle\rangle$;
2. $\langle\langle \alpha u, v \rangle\rangle = \alpha \langle\langle u, v \rangle\rangle$, $0 < \alpha \in R$;
3. $\langle\langle \alpha u, u \rangle\rangle = \alpha \langle\langle u, u \rangle\rangle$, $\forall \alpha \in R$;
4. $\langle\langle u, u \rangle\rangle \geq 0$, причем $\langle\langle u, u \rangle\rangle = 0$ только при $u = 0$.

Введенное таким образом предскалярное произведение элементов полного по норме $\|u\| = \langle\langle u, u \rangle\rangle^{1/2}$ банахова пространства $C_{[a, b]}$ задает в нем геометрию, подобную геометрии гильбертовых пространств. Например, угол между элементами u и v не отличается от угла между v и u (аксиома 1). Умножение одного из векторов пары на положительное число не влияет на величину угла между ними (аксиомы 1 и 2).

Произведение сонаправленных элементов B -пространства положительно, а противоположно направленных – отрицательно (аксиомы 3 и 4). В связи с этим угол между элементами $C_{[a, b]}$ будем определять из формулы

$$\langle\langle u, v \rangle\rangle = \|u\| \|v\| \cos(u \wedge v).$$

Равенство нулю предскалярного произведения ненулевых элементов означает их взаимную перпендикулярность относительно этой операции. Для введения понятия предскалярного произведения в B -пространстве $C_{[a, b]}$ непрерывных функций определим экстремальное умножение двух функций этого пространства.

Определение. Пусть

$$s = \max_{a \leq x \leq b} (u(x)v(x))$$

и

$$i = \min_{a \leq x \leq b} (u(x)v(x)),$$

тогда экстремальным умножением $u(x)$ и $v(x)$ из $C_{[a, b]}$ назовем функционал

$$\text{extr}_{a \leq x \leq b} (u(x), v(x)) = \begin{cases} s, & \text{если } |s| \geq |i|; \\ i, & \text{если } |i| > |s|. \end{cases}$$

Теорема. Экстремальное умножение элементов $u(x)$ и $v(x)$ банахова пространства $C_{[a, b]}$ задает в нем предскалярное произведение.

Доказательство справедливости 1, 3 и 4 условий из определения очевидно. Докажем истинность второго свойства при $\alpha > 0$:

$$\langle \langle \alpha u, v \rangle \rangle = \text{extr}_{a \leq x \leq b} (\alpha u(x), v(x)) = \begin{cases} \alpha s, & \text{если } |s| \geq |i|; \\ \alpha i, & \text{если } |i| > |s|. \end{cases} = \alpha \langle \langle u, v \rangle \rangle.$$

При $s + i = 0$ равенство $\langle \langle u, v \rangle \rangle = s$ означает, что предскалярное произведение в отличие от скалярного определяется с точностью до знака, а угол $u \wedge v$ находится из формулы $s = \|u\| \|v\| \cos(u \wedge v)$. Это обстоятельство никоим образом не влияет на достижение основных целей $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle$, т. к. если $|\cos(u \wedge v)| \approx 0$, то углы $u \wedge v$ и $180^\circ - u \wedge v$ незначительно отличаются от прямого, а если $|\cos(u \wedge v)| \approx 1$, то элементы $u(x)$ и $v(x)$ почти коллинеарны.

Полная линейно независимая система функций B -пространства не всегда может быть использована в качестве предбазиса. Во многом это связано с величиной углов между парами ее элементов. Если один из углов репера близок к 0° или 180° , то разложить по предбазису функцию из единичного шара, используя данную пару элементов системы, практически невозможно, из-за чего возникает проблема выбора предбазиса даже в сепарабельных B -пространствах. Одной из неудачных полных систем пространства $C_{[a, b]}$ с этой точки зрения является степенной предбазис $1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$.

Значительно лучше различаются направления элементов итеративного предбазиса, но и в этом случае есть отличие в качестве аппроксимации функций из $C_{[a, b]}$ интерполяционными многочленами, зависящем от сетки отрезка $[a, b]$. Например, минимальное \mathcal{L} из множества значений углов между элементами итеративного предбазиса, построенного на равномерной сетке Ω^n , уже при $n = 16$ становится менее $30'$. На сетке Ω^6 Чебышева параметр $\mathcal{L} > 66^\circ 30'$, что обеспечивает равномерную сходимость процесса интерполирования абсолютно непрерывных функций.

Локализация корней функциональных уравнений

Для решения интегральных, дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений будем использовать полиномиальные методы приближения корней многочленами всюду плотного множества пространства решений. Тогда в описанном выше методе Ньютона появляется возможность аппроксимации производной Фреше оператора уравнения (5) с оценками граней, которые будут отвечать требованиям теории функционального анализа и могут применяться при локализации корней.

Рассмотрим задачу Коши с неразрешимым в явном виде относительно производной искомой функции нелинейным дифференциальным уравнением

$$\ln \frac{du(x)}{dx} - \frac{du(x)}{dx} + u(x) = x, \quad x \in [0; 1]$$

и начальным условием $u(0) = 1$.

Найти решение задачи Коши, имеющей два корня $u(x) = 1 + x$ и $u(x) = e^x$, численными методами не представляется возможным ввиду проблемы выбора текущих значений искоемых функций из двух и более вероятных предложений. Следуя теории

Здесь проще добиться сходимости полиномиального процесса аппроксимации, т. к. при решении дифференциального уравнения необходимо доказать сходимость этого процесса к корню не только для приближения $u^n(x)$ в $C_{[a, b]}$, но и по норме $C^k_{[a, b]}$.

Один из корней $u(x)$ уравнения, найденный параметрическим методом Ньютона с нуль-приближения $u_0(x) = 1 + x$, имеет симметричный относительно оси $x = 0,5$ график с $u(0) = u(1) = 1,11337968955\dots$. Полиномиальное приближение этого корня с параметром дискретизации $n = 10$ пространства решений $C_{[a, b]}$ имеет вид:

$$\begin{aligned} u^{10}(x) = & 1,1133796895526478151647782018797427632258000652573 + \\ & + 2,383953308354430311903277523526928622118375757194 x - \\ & - 1,606698623238150977737360529416687074272228602295 x^2 - \\ & - 1,38652200101279670524826696050630381968392427045 x^3 + \\ & + 0,3005480948911363559649088085704985644939546389 x^4 + \\ & + 0,3988748886242612123921586053418442251645593254 x^5 - \\ & - 0,0241285181226393334865552051498390871264623311 x^6 - \\ & - 0,0696735627211019707964804643063216203804753352 x^7 - \\ & - 0,0120929895813267623525982285020629136382780313 x^8 + \\ & + 0,0196742535077348367011455630524288791555975334 x^9 - \\ & - 0,00393485070154696734022911261048577583111944681 x^{10} \end{aligned}$$

(точность данного приближенного решения по невязке равна $\varepsilon = 3,5 \cdot 10^{-10}$).

Решим с точностью до локализации ($\delta = 10^{-6}$) корня краевую задачу для нелинейного интегро-дифференциального уравнения

$$F(u(x)) \equiv u''(x) \int_0^1 \frac{\ln|u(t)| dt}{\delta(1+t^2+u^2(x))} + \sin(u'(x)) = f(x), \quad x \in [0; 1] \quad (10)$$

с $f(x) = 1,7 + 0,7x - 0,7x^2$ и граничными условиями $u(0) = 1$, $u(1) = 2,6$.

Локализуя приближением, в δ -окрестности которого находится изолированный корень (10) $u^*(x) \in C^3_{[a, b]}$, является многочлен

$$\begin{aligned} u^{20}(x) = & 1 + 1,8771257901x - 0,2078394535x^2 - 0,1309048306x^3 + 0,0381626580x^4 + \\ & + 0,0299962918x^5 - 0,0069904404x^6 + 0,0158430316x^7 - 0,0315544899x^8 + \\ & + 0,0385340690x^9 - 0,0917285535x^{10} + 0,2452625574x^{11} - 0,5299622003x^{12} + \\ & + 0,9200025452x^{13} - 1,2542739854x^{14} + 1,3014076559x^{15} - 0,9982932186x^{16} + \\ & + 0,5467412270x^{17} - 0,2021221423x^{18} + 0,0452236510x^{19} - 0,0046301625x^{20} \end{aligned}$$

с нормой невязки $\|F(u^{20}(x))\|_C \leq \varepsilon = 5,0 \cdot 10^{-6}$.

Аналогично находится приближение корня краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения со смешанными производными

$$F(u) \equiv e^{\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y}} + \iint_X \frac{\ln \frac{\partial^2 u(t, s)}{\partial t \partial s}}{1 - \ln \frac{\partial^2 u(x, s)}{\partial x \partial s} \frac{\partial^2 u(t, y)}{\partial t \partial y}} - f(x, y) = 0,$$

где

$$f(x, y) = (1 + x + y) \ln \frac{(3 + x + y)^{3+x+y} (1 + x + y)^{1+x+y}}{(2 + x + y)^{2(2+x+y)}} + e^{-(x+y)} - 1,$$

удовлетворяющее на границе $X = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ условиям

$$u(x, 0) = x - x^2 + e^{-x}, u(x, 1) = x - x^2 + e^{-x-1},$$

$$u(0, y) = -y + y^2 + e^{-y}, u(1, y) = -y + y^2 + e^{-y-1}.$$

Локализирующее приближение корня имеет вид:

$$u^4(x, y) =$$

$$= 1 - 1,999479880628487074848812313371733749492719687998538742 y +$$

$$+ 1,495573778135430620770395894801527192724580833951567728 y^2 -$$

$$- 0,153751055776189882304232701105018944099825649101708533 y^3 +$$

$$+ 0,025536599440688657978172889836686368313775634180447381 y^4 +$$

$$+ 0,000520119371512925151187686628266250507280312001461257 x +$$

$$+ 0,942016171857974309743470650543783574261930299609281599 x y -$$

$$- 0,29675483755542264294068572043699571642991150326283016 x y^2 -$$

$$- 0,10397178074345925447525271786890056973319605711184425 x y^3 +$$

$$+ 0,09050222712168695762720907823375163660070365365484874 x y^4 -$$

$$- 0,50442622186456937922960410519847280727541916604843227 x^2 -$$

$$- 0,29675483755542264294068572043699571642991150326283016 x^2 y -$$

$$- 0,44496759774990784782411009021384109964415984003041632 x^2 y^2 +$$

$$+ 0,81430722245579305383402943246872703871267096879795563 x^2 y^3 -$$

$$- 0,38584716072621062573093004278341831950794569338463595 x^2 y^4 -$$

$$- 0,15375105577618988230423270110501894409982564910170853 x^3 -$$

$$- 0,10397178074345925447525271786890056973319605711184425 x^3 y +$$

$$+ 0,81430722245579305383402943246872703871267096879795563 x^3 y^2 -$$

$$- 1,10640044812491023651717224825252946635428142703673245 x^3 y^3 +$$

$$+ 0,49325420971030232650065845838019135384122849039216250 x^3 y^4 +$$

$$+ 0,025536599440688657978172889836686368313775634180447381 x^4 +$$

$$+ 0,09050222712168695762720907823375163660070365365484874 x^4 y -$$

$$- 0,38584716072621062573093004278341831950794569338463595 x^4 y^2 +$$

$$+ 0,49325420971030232650065845838019135384122849039216250 x^4 y^3 -$$

$$- 0,214051485614807806329293333414561186714579466867405614 x^4 y^4.$$

Заклучение

Локализация методами полиномиального анализа изолированного корня функционального уравнения (5) в определенной окрестности $Q_r = \|u - u_0\| \leq r$ приближения из всюду плотного множества пространства решений позволяет исследователям при достаточно малом r использовать его в качестве искомого корня не нарушая методологию функционального анализа.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – М. : Наука, 1989. – 624 с.
2. Канторович, Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – М. : Наука, 1977. – 742 с.
3. Красносельский, М. А. Приближенное решение операторных уравнений / М. А. Красносельский, Г. М. Вайнко, П. П. Забрейко. – М. : Наука, 1969. – 456 с.
4. Антонец, А. Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения / А. Б. Антонец, Я. В. Радыно. – Минск : БГУ, 2006. – 430 с.
5. Морозов, В. В. Прикладной анализ и программирование : пособие / В. В. Морозов. – Брест : БрГУ, 2012. – 246 с.

6. Крылов, В. И. Начала теории вычислительных методов. Интерполирование и интегрирование / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный. – Минск : Наука и техника, 1983. – 288 с.

7. Крылов, В. И. Начала теории вычислительных методов. Линейная алгебра и нелинейные уравнения / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный. – Минск : Наука и техника, 1985. – 280 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 10.04.2020

Morozov V. V. An Iterative Basis in the Polynomial Analysis Banach Equations

The absence of a counting basis in infinite-dimensional Banach spaces forces researchers studying non-linear functional equations with differential and / or integral operators to develop ever-new grandiose grid schemes. However, following the postulates of functional analysis by A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin [1], L. V. Kantorovich and G. P. Akilov [2], the approximation of the roots of Banach equations should be performed using elements of a set of polynomials that are everywhere dense in a separable space. In order to avoid theoretical flaws in the discrete representation of elements of continuous functional spaces (for example, when proving the convergence of a discrete approximation to a continuous function by the norm), a polynomial basis is necessary for approximating elements of continuous Banach spaces. As such, we use a basis that is both the basis of an everywhere dense set and the iterative basis of the computational process, which allows us to increase the discretization parameter of spaces arbitrarily and reduce the approximation error of their elements arbitrarily when proving the convergence of a polynomial approximation.

УДК 513.82

А. А. Юдов¹, М. А. Кононюк², К. П. Козакевич³, Е. В. Кисилюк⁴¹канд. физ.-мат. наук, доц.,доц. каф. алгебры, геометрии и математического моделирования
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина²учитель математики гимназии № 1 г. Бреста^{3,4}магистрант физико-математического факультета

Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

e-mail: modelmath@brsu.brest.by

**КЛАССИФИКАЦИЯ И ИССЛЕДОВАНИЕ ИНВАРИАНТНЫХ СТРУКТУР
НА ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СО СТРУКТУРНОЙ ГРУППОЙ –
ГРУППОЙ ЛИ ДВИЖЕНИЙ ПЯТИМЕРНОГО ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА**

Целью исследования является нахождение инвариантных подпространств, прямых и плоскостей для подгрупп Ли группы Ли H вращений пятимерного евклидова пространства и исследование инвариантных структур на однородных редуктивных пространствах с фундаментальной группой – группой Ли движений пятимерного евклидова пространства.

Введение

Изучение геометрии однородных пространств является одной из актуальных проблем современной геометрии. В этом направлении выполняется много исследовательских работ. В Беларуси задачами такого характера занимались Л. К. Тутаев, В. И. Ведерников, А. С. Феденко, И. В. Белько, А. А. Бурдун, В. В. Балащенко, С. Г. Кононов, А. А. Юдов и др.

В работе исследуются подгруппы Ли группы Ли движений пятимерного евклидова пространства, находятся инвариантные прямые и K -плоскости для таких подгрупп и исследуются инвариантные структуры на однородных пространствах, структурной группой которых является группа Ли движений пятимерного евклидова пространства.

Инвариантные подпространства подгрупп Ли

Рассмотрим пространство R_5 – пятимерное евклидово пространство.

Выберем в пространстве R_5 репер $\varepsilon = (0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$, причем $e_1^2 = 1, e_2^2 = e_3^2 = e_4^2 = e_5^2 = 1, (e_i, e_j) = 0, i \neq j$.

Произвольную точку M пространства R_5 в репере ε зададим координатами $M(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, которые будем записывать в виде $M(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T \equiv (X)_\varepsilon$.

На множестве реперов пространства R_5 действует группа Ли G движений, которая при заданном репере ε изоморфна группе матриц вида:

$$\bar{A} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & A \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $t = (t_1, t_2, t_3, t_4, t_5)^T$, $A - (5 \times 5)$ – матрица, причем $A^T E_5 A = E_5$, где знак T означает транспонирование, а матрица E_5 является единичной матрицей, причем элементы главной диагонали 1, а прочие элементы нули.

При движении, заданном матрицей (1), репер ε переходит в репер $\varepsilon' = (0, e_1', e_2', e_3', e_4', e_5') = (0', e')$, где $e' = eA$, $0'(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) = (T)_\varepsilon$, а точка M перехо-

дит в точку M' , имеющую в репере \mathcal{E}' такие же координаты, какие точка M имеет в репере \mathcal{E} .

Пусть $M'(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T = (X)_{\mathcal{E}'}$, $M(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, x'_5)^T = (X')_{\mathcal{E}}$. Тогда получим: $\overline{OM'} = \overline{OO'} + \overline{O'M'} = e(T) + e'(X) = e(T) = eA(X) = e((T) + A(X))$. С другой стороны, $\overline{OM'} = e(X')$. Отсюда $(X') = (T) + A(X)$, т. е.

$$(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, x'_5)^T = (t_1, t_2, t_3, t_4, t_5)^T + A(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T$$

или

$$(1, x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, x'_5)^T = \overline{A}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T. \quad (2)$$

Таким образом, в пространстве R_5 действует слева группа Ли G , которая изоморфна группе матриц вида (1), действующих на точки пространства R_5 по формуле (2). Алгебру Ли \overline{G} этой группы можно отождествить с алгеброй Ли матриц вида:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \tau & B \end{pmatrix} \right\},$$

где $\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5)^T$, а матрица B удовлетворяет условию: $B^T E_5 + E_5 B = 0$.

Группа Ли H стационарности точки O и алгебра Ли \overline{H} этой группы будут задаваться матрицами вида:

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \right\}, \quad \overline{H} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \right\}.$$

Рассмотрим в алгебре Ли \overline{G} базис:

$$\begin{aligned} i_1 &= E_{21}, i_2 = E_{31}, i_3 = E_{41}, i_4 = E_{51}, i_5 = E_{61}, i_7 = E_{23} - E_{32}, i_8 = E_{24} - E_{42}, \\ i_9 &= E_{25} - E_{52}, i_{10} = E_{26} - E_{62}, i_{12} = E_{34} - E_{43}, i_{13} = E_{35} - E_{53}, i_{14} = E_{36} - E_{63}, \\ i_{16} &= E_{45} - E_{54}, i_{17} = E_{46} - E_{64}, i_{19} = E_{56} - E_{65}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $E_{\alpha\beta}$ – (6×6) – матрицы, у которых в α -й строке, β -м столбце стоит 1, а остальные элементы нули. При этом вектора i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 задают базис алгебры Ли группы Ли параллельных переносов, а вектора $i_6, i_7, i_8, i_9, i_{10}, i_{11}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{15}$ задают базис алгебры Ли \overline{H} группы Ли H вращений пространства L_5 .

Согласно формуле

$$[A, B] = AB - BA, \quad (4)$$

где $A, B \in \overline{G}$, получим формулы для коммутаторов базисных векторов $i_7, i_8, i_9, i_{10}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{16}, i_{17}, i_{19}$:

$$\begin{aligned} i_1 &= E_{21}, i_2 = E_{31}, i_3 = E_{41}, i_4 = E_{51}, i_5 = E_{61}, i_6 = E_{23} - E_{32}, i_7 = E_{24} - E_{42}, \\ i_8 &= E_{25} - E_{52}, i_9 = E_{34} - E_{43}, i_{10} = E_{35} - E_{53}, i_{11} = E_{45} - E_{54}, i_{12} = E_{36} - E_{63}, \\ i_{13} &= E_{45} - E_{54}, i_{14} = E_{46} - E_{64}, i_{15} = E_{56} - E_{65}. \end{aligned} \quad (5)$$

Всего получено 11 подгрупп Ли $G_1 \dots G_{11}$ группы Ли вращений, которые в базисе (1.15) задаются своими алгебрами Ли $\overline{G}_1 \dots \overline{G}_{11}$ в виде:

$$\begin{aligned} \overline{G}_1 &= \{i_6\}, \overline{G}_2 = \{i_6 + \lambda i_{13}\}, \overline{G}_3 = \{i_6, i_{13}\}, \overline{G}_4 = \{i_6, i_7, i_{10}\}, \overline{G}_5 = \{i_6 + i_{13}, i_7 - i_{11}, i_8 + i_{10}\}, \\ \overline{G}_6 &= \{i_6 + 2i_{13}, \sqrt{3}i_{12} + i_7 + i_{11}, \sqrt{3}i_9 - i_8 + i_{10}\}, \overline{G}_7 = \{i_6, i_7, i_{10}, i_{15}\}, \\ \overline{G}_8 &= \{i_6, i_{13}, i_7 - i_{11}, i_8 + i_{10}\}, \overline{G}_9 = \{i_6, i_7, i_{10}, i_8 + i_9, i_{11} + i_{12}, i_{13} + i_{14}\}, \\ \overline{G}_{10} &= \{i_6, i_7, i_{10}, i_{11}, i_8\}, \overline{G}_{11} = \{i_6, i_7, i_8, i_9, i_{10}, i_{11}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{15}\} \end{aligned}$$

причем группа Ли G_{11} совпадает с группой Ли всех вращений H .

Рассматривается однопараметрическая подгруппа Ли G группы Ли вращений пятимерного евклидова пространства R_5 , соответствующая алгебре Ли с оператором i_6 :

$$\{i_6\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}. \quad (2.1)$$

Ставится задача найти все инвариантные относительно G одномерные, двумерные, трехмерные и четырехмерные векторные подпространства пространства R_5 , а также инвариантные прямые и k -плоскости.

Найдем одномерные подпространства пространства R_5 , инвариантные относительно этого оператора. Условие инвариантности подпространства с направляющим вектором $a(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ имеет вид: $ai_6 = \lambda a$.

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-a_2, a_1, 0, 0, 0) = \lambda \cdot (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5). \quad (2.2)$$

Отсюда следует система:

$$\begin{cases} -a_2 = \lambda a_1, \\ a_1 = \lambda a_2, \\ 0 = \lambda a_3, \\ 0 = \lambda a_4, \\ 0 = \lambda a_5. \end{cases} \quad (2.3)$$

Из первого и второго уравнений системы (2.3) следует: $-a_2 = \lambda^2 a_2$.

Рассмотрим два случая:

1. При $\lambda \neq 0$: $a_3 = 0$, $a_4 = 0$, $a_5 = 0$.

$-a_2 = \lambda^2 a_2 \Rightarrow a_2 = 0$, иначе $\lambda^2 = -1$, значит, и $a_1 = 0$.

Вывод: ненулевых решений нет.

2. При $\lambda = 0$: $a_1 = 0, a_2 = 0$.

Вывод: все подпространства инвариантны в виде: $\{a_3e_3 + a_4e_4 + a_5e_5\}, \forall a_3, a_4, a_5$.

Найдем двумерные подпространства, инвариантные относительно оператора i_6 .

Условие инвариантности подпространства с базисом $\{a, b\}, a(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5), b(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ имеет вид: $ai_6 = \lambda a + \mu b, bi_6 = \nu a + \delta b$.

$$\begin{pmatrix} a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \\ b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_2, a_1, 0, 0, 0 \\ -b_2, b_1, 0, 0, 0 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Система инвариантности имеет вид:

$$\begin{cases} -a_2 = \lambda a_1 + \mu b_1 & -b_2 = \nu a_1 + \delta b_1, \\ a_1 = \lambda a_2 + \mu b_2 & b_1 = \nu a_2 + \delta b_2, \\ 0 = \lambda a_3 + \mu b_3 & 0 = \nu a_3 + \delta b_3, \\ 0 = \lambda a_4 + \mu b_4 & 0 = \nu a_4 + \delta b_4, \\ 0 = \lambda a_5 + \mu b_5 & 0 = \nu a_5 + \delta b_5. \end{cases} \quad (2.5)$$

С помощью замены базиса получаем, что решение системы (2.5) можно свести к рассмотрению 10 частных случаев $1^\circ - 10^\circ$:

$$\begin{aligned} 1^\circ &: \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_3 & a_4 & a_5 \\ 0 & 1 & b_3 & b_4 & b_5 \end{pmatrix}, & 6^\circ &: \begin{pmatrix} 0 & 1 & a_3 & 0 & a_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b_5 \end{pmatrix}, \\ 2^\circ &: \begin{pmatrix} 1 & a_2 & 0 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & 1 & b_4 & b_5 \end{pmatrix}, & 7^\circ &: \begin{pmatrix} 0 & 1 & a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ 3^\circ &: \begin{pmatrix} 1 & a_2 & a_3 & 0 & a_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b_5 \end{pmatrix}, & 8^\circ &: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & a_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b_5 \end{pmatrix}, \\ 4^\circ &: \begin{pmatrix} 1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & 9^\circ &: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ 5^\circ &: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & 1 & b_4 & b_5 \end{pmatrix}, & 10^\circ &: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$1^\circ. a(1, 0, a_3, a_4, a_5), b(0, 1, b_3, b_4, b_5)$.

В этом случае система (2.5) имеет вид:

$$\begin{cases} 0 = \lambda \cdot 1 + \mu \cdot 0 & -1 = \nu \cdot 1 + \delta \cdot 0, \\ 1 = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 1 & 0 = \nu \cdot 0 + \delta \cdot 1, \\ 0 = \lambda a_3 + \mu b_3 & 0 = \nu a_3 + \delta b_3, \\ 0 = \lambda a_4 + \mu b_4 & 0 = \nu a_4 + \delta b_4, \\ 0 = \lambda a_5 + \mu b_5 & 0 = \nu a_5 + \delta b_5. \end{cases}$$

Отсюда следует: $b_3 = 0, b_4 = 0, b_5 = 0, a_3 = 0, a_4 = 0, a_5 = 0$.

Получаем инвариантное подпространство в виде: $\{e_1, e_2\}$.

2°. $a(1, a_2, 0, a_4, a_5), b(0, 0, 1, b_4, b_5)$.

$$\begin{cases} -a_2 = \lambda \cdot 1 + \mu \cdot 0 & 0 = \nu \cdot 1 + \delta \cdot 0, \\ 1 = \lambda \cdot a_2 + \mu \cdot 0 & 0 = \nu \cdot a_2 + \delta \cdot 0, \\ 0 = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 1 & 0 = \nu \cdot 0 + \delta \cdot 1, \\ 0 = \lambda a_4 + \mu b_4 & 0 = \nu a_4 + \delta b_4, \\ 0 = \lambda a_5 + \mu b_5 & 0 = \nu a_5 + \delta b_5. \end{cases}$$

Из системы получим: $-a_2 = \lambda, 1 = \lambda a_2$. Отсюда следует противоречие: $1 = -a_2^2$. Система инвариантности противоречива.

3°. $a(1, a_2, a_3, 0, a_5), b(0, 0, 0, 1, b_5)$.

$$\begin{cases} -a_2 = \lambda \cdot 1 + \mu \cdot 0 & 0 = \nu \cdot 1 + \delta \cdot 0, \\ 1 = \lambda \cdot a_2 + \mu \cdot 0 & 0 = \nu a_2 + \delta \cdot 0, \\ 0 = \lambda a_3 + \mu \cdot 0 & 0 = \nu a_3 + \delta \cdot 0, \\ 0 = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 1 & 0 = \nu \cdot 0 + \delta \cdot 1, \\ 0 = \lambda a_5 + \mu b_5 & 0 = \nu a_5 + \delta b_5. \end{cases}$$

Система инвариантности противоречива.

4°. $a(1, a_2, a_3, a_4, 0), b(0, 0, 0, 0, 1)$.

$$\begin{cases} -a_2 = \lambda \cdot 1 + \mu \cdot 0 & 0 = \nu \cdot 1 + \delta \cdot 0, \\ 1 = \lambda a_2 + \mu \cdot 0 & 0 = \nu a_2 + \delta \cdot 0, \\ 0 = \lambda a_3 + \mu \cdot 0 & 0 = \nu a_3 + \delta \cdot 0, \\ 0 = \lambda a_4 + \mu \cdot 0 & 0 = \nu a_4 + \delta \cdot 0, \\ 0 = \lambda a_5 + \mu \cdot 1 & 0 = \nu a_5 + \delta \cdot 1. \end{cases}$$

Система инвариантности противоречива, т. к. из нее следует: $a_2^2 = -1$.

5°. $a(0, 1, 0, a_4, a_5), b(0, 0, 1, b_4, b_5)$.

$$\begin{cases} -1 = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 & 0 = \nu \cdot 0 + \delta \cdot 0, \\ 0 = \lambda a_2 + \mu \cdot 0 & 0 = \nu \cdot 1 + \delta \cdot 0, \\ 0 = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 1 & 0 = \nu \cdot 0 + \delta \cdot 1, \\ 0 = \lambda a_4 + \mu b_4 & 0 = \nu a_4 + \delta b_4, \\ 0 = \lambda a_5 + \mu b_5 & 0 = \nu a_5 + \delta b_5. \end{cases}$$

В этом случае система инвариантности противоречива, т. к. из нее следует: $1 = 0$.
 6°. $a(0, 1, a_3, 0, a_5), b(0, 0, 0, 1, b_5)$.

$$\begin{cases} -1 = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 & 0 = \nu \cdot 0 + \delta \cdot 0, \\ 0 = \lambda \cdot 1 + \mu \cdot 0 & 0 = \nu \cdot 1 + \delta \cdot 0, \\ 0 = \lambda a_3 + \mu \cdot 0 & 0 = \nu a_3 + \delta \cdot 0, \\ 0 = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 1 & 0 = \nu \cdot 0 + \delta \cdot 1, \\ 0 = \lambda a_5 + \mu b_5 & 0 = \nu a_5 + \delta b_5. \end{cases}$$

Система инвариантности противоречива.

7°. $a(0, 1, a_3, a_4, 0), b(0, 0, 0, 0, 1)$.

$$\begin{cases} -1 = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 & 0 = \nu \cdot 0 + \delta \cdot 0, \\ 0 = \lambda \cdot 1 + \mu \cdot 0 & 0 = \nu \cdot 1 + \delta \cdot 0, \\ 0 = \lambda a_3 + \mu \cdot 0 & 0 = \nu a_3 + \delta \cdot 0, \\ 0 = \lambda a_4 + \mu \cdot 0 & 0 = \nu a_4 + \delta \cdot 0, \\ 0 = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 1 & 0 = \nu \cdot 0 + \delta \cdot 1. \end{cases}$$

Система инвариантности противоречива.

8°. $a(0, 0, 1, 0, a_5), b(0, 0, 0, 1, b_5)$.

$$\begin{cases} 0 = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 & 0 = \nu \cdot 0 + \delta \cdot 0, \\ 0 = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 & 0 = \nu \cdot 0 + \delta \cdot 0, \\ 0 = \lambda \cdot 1 + \mu \cdot 0 & 0 = \nu \cdot 1 + \delta \cdot 0, \\ 0 = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 1 & 0 = \nu \cdot 0 + \delta \cdot 1, \\ 0 = \lambda a_5 + \mu b_5 & 0 = \nu a_5 + \delta b_5. \end{cases}$$

Система инвариантности принимает вид:

$$\lambda = 0, \mu = 0, \lambda a_5 + \mu b_5 = 0, \nu = 0, \delta = 0, \nu a_5 + \delta b_5 = 0.$$

Инвариантные пространства принимают вид: $\{e_3 + a_5 e_5, e_4 + b_5 e_5\}$.

9°. $a(0, 0, 1, a_4, 0), b(0, 0, 0, 0, 1)$.

$$\begin{cases} 0 = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 & 0 = \nu \cdot 0 + \delta \cdot 0, \\ 0 = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 & 0 = \nu \cdot 0 + \delta \cdot 0, \\ 0 = \lambda \cdot 1 + \mu \cdot 0 & 0 = \nu \cdot 1 + \delta \cdot 0, \\ 0 = \lambda a_4 + \mu \cdot 0 & 0 = \nu a_4 + \delta \cdot 0, \\ 0 = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 1 & 0 = \nu \cdot 0 + \delta \cdot 1. \end{cases}$$

Система инвариантности принимает вид:

$$\lambda = 0, \mu = 0, \lambda a_4 = 0, \nu = 0, \delta = 0, \nu a_4 = 0.$$

Получаем инвариантные подпространства в виде: $\{e_3 + a_4 e_4, e_5\}$.

$10^\circ. a(0, 0, 0, 1, 0), b(0, 0, 0, 0, 1)$.

$$\begin{cases} 0 = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 & 0 = \nu \cdot 0 + \delta \cdot 0, \\ 0 = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 & 0 = \nu \cdot 0 + \delta \cdot 0, \\ 0 = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 & 0 = \nu \cdot 0 + \delta \cdot 0, \\ 0 = \lambda \cdot 1 + \mu \cdot 0 & 0 = \nu \cdot 1 + \delta \cdot 0, \\ 0 = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 1 & 0 = \nu \cdot 0 + \delta \cdot 1. \end{cases}$$

Система инвариантности не противоречива. Получаем инвариантное подпространство: $\{e_4, e_5\}$.

Результаты исследования инвариантных подпространств относительно оператора i_6 сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 2.1. Относительно оператора i_6 инвариантны только следующее одномерное подпространство пространства $R_5: \{a_3 e_3 + a_4 e_4 + a_5 e_5\}, \forall a_3, a_4, a_5$ и только следующие двумерные подпространства: $\{e_1, e_2\}, \{e_3 + a_5 e_5, e_4 + b_5 e_5\}, \{e_3 + a_4 e_4, e_5\}, \{e_4, e_5\}$.

Используя теорему 2.1, найдем подпространства инвариантные относительно всех операторов из групп G_2, \dots, G_{10} .

Непосредственным вычислением доказываются следующие теоремы.

Теорема 2.2. Относительно оператора $i_6 + \lambda i_{13}, \lambda \neq 0$ инвариантны только следующее одномерное подпространство пространства $R_5 \{e_5\}$ и только следующие двумерные подпространства: $\{e_1, e_2\}, \{e_3, e_4\}$.

Теорема 2.3. Из подпространств, перечисленных в теореме 2.1, относительно оператора i_{13} инвариантны только следующее одномерное подпространство: $\{e_5\}$ и только следующие двумерные подпространства: $\{e_1, e_2\}, \{e_3, e_4\}$.

Теорема 2.4. Из подпространств, перечисленных в теореме 2.1 относительно оператора i_7 инвариантны только одномерное подпространство: $\{a_4 e_4 + a_5 e_5\} \forall a_4, a_5$ и только двумерное подпространство: $\{e_4, e_5\}$.

Теорема 2.5. Из подпространств, перечисленных в теореме 2.4, относительно оператора i_{10} инвариантны только следующее одномерное подпространство: $\{a_4 e_4 + a_5 e_5\} \forall a_4, a_5$ и только следующее двумерное подпространство: $\{e_4, e_5\}$.

Теорема 2.6. Относительно оператора $i_6 + i_{13}$ инвариантны только следующее одномерное подпространство $\{e_5\}$ и только следующие двумерные подпространства: $\{e_1 + a_3 e_3 + a_4 e_4, e_2 - a_4 e_3 + a_3 e_4\}, \{e_1, e_2\}, \{e_3, e_4\}, \{e_1 + a_3 e_3 + a_4 e_4, e_2 + a_4 e_3 - a_3 e_4\}$.

Теорема 2.7. Из подпространств, перечисленных в теореме 2.6, относительно оператора $i_7 - i_{11}$ инвариантно только следующее одномерное пространство $\{e_5\}$, двумерных подпространств нет.

Теорема 2.8. Из подпространств, перечисленных в теореме 2.7, относительно оператора $i_8 + i_{10}$ инвариантно только следующее одномерное пространство $\{e_5\}$, двумерных подпространств нет.

Теорема 2.9. Относительно оператора $i_6 + 2i_{13}$ одномерных и двумерных подпространств нет.

Теорема 2.10. Из подпространств, перечисленных в теоремах 2.1, 2.4, 2.5, относительно оператора i_{15} нет инвариантных одномерных подпространств, существует только следующее двумерное подпространство $\{e_4, e_5\}$.

Теорема 2.11. Из подпространств, перечисленных в теоремах 2.1, 2.3, относительно оператора $i_7 - i_{11}$ и $i_8 + i_{10}$ инвариантно только следующее одномерное пространство $\{e_5\}$, двумерных подпространств нет.

Теорема 2.12. Из подпространств, перечисленных в теоремах 2.1, 2.3, относительно операторов $i_8 + i_9, i_{11} + i_{12}$ и $i_{13} + i_{14}$ нет инвариантных одномерных подпространств, существует только следующее двумерное подпространство $\{e_4, e_5\}$.

Теорема 2.13. Из подпространств, перечисленных в теоремах 2.1, 2.4, 2.5, относительно операторов i_{11} и i_8 нет инвариантных двумерных подпространств, существует только следующее одномерное подпространство $\{e_5\}$.

На основании доказанных теорем получаем следующую теорему, в которой перечисляются все инвариантные одномерные и двумерные подпространства для подгрупп Ли $G_1 \dots G_{11}$.

Теорема 2.14. Относительно подгрупп Ли $G_1 \dots G_{11}$ инвариантны только следующие одномерные и двумерные подпространства пространства R_5 :

$$1^\circ. \text{ Для } G_1 \text{ одномерные и двумерные: } \{a_3 e_3 + a_4 e_4 + a_5 e_5\}, \\ \{e_1, e_2\}, \{e_3 + a_5 e_5, e_4 + b_5 e_5\}, \{e_3 + a_4 e_4, e_5\}, \{e_4, e_5\}.$$

Доказательство следует по теореме 2.1.

Трехмерные инвариантные подпространства находим как ортогональные дополнения к найденным инвариантным двумерным подпространствам: $\{e_1, e_2\}^\perp = \{e_3, e_4, e_5\}, \{e_3 + a_4 e_4, e_5\}^\perp = \{e_1, e_2, a_4 e_3 - e_4\}, \\ \{e_4, e_5\}^\perp = \{e_1, e_2, e_3\}, \{e_3 + a_5 e_5, e_4 + b_5 e_5\}^\perp = \{e_1, e_2, -a_5 e_3 - b_5 e_4 + e_5\}.$

Четырехмерные инвариантные подпространства находим как ортогональные дополнения к найденным инвариантным одномерным подпространствам:

$$\{a_3e_3 + a_4e_4 + a_5e_5\}^\perp = \{e_1, e_2, a_5e_3 - a_3e_5, a_5e_4 - a_4e_5\}.$$

2°. Для $G_2 : \{e_5\}, \{e_1, e_2\}, \{e_3, e_4\}$, при $\lambda \neq 0$,

$$\{e_1 + a_3e_3 + a_4e_4, e_2 - a_4e_3 + a_3e_4\}, \{e_1, e_2\}, \{e_3, e_4\}, \text{ при } \lambda = 1,$$

$$\{e_1 + a_3e_3 + a_4e_4, e_2 + a_4e_3 + a_3e_4\}, \{e_1, e_2\}, \{e_3, e_4\}, \text{ при } \lambda = -1.$$

Доказательство следует по теореме 2.2.

Трехмерные инвариантные подпространства находим как ортогональные дополнения к найденным инвариантным двумерным подпространствам:

$$\{e_1, e_2\}^\perp = \{e_3, e_4, e_5\}, \{e_3, e_4\}^\perp = \{e_1, e_2, e_5\}.$$

Четырехмерные инвариантные подпространства находим как ортогональные дополнения к найденным инвариантным одномерным подпространствам:

$$\{e_5\}^\perp = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}.$$

3°. Для $G_3 : \{e_5\}, \{e_1, e_2\}, \{e_3, e_4\}$. Доказательство следует по теоремам 2.1, 2.3.

Трехмерные инвариантные подпространства находим как ортогональные дополнения к найденным инвариантным двумерным подпространствам:

$$\{e_1, e_2\}^\perp = \{e_3, e_4, e_5\}, \{e_3, e_4\}^\perp = \{e_1, e_2, e_5\}.$$

Четырехмерные инвариантные подпространства находим как ортогональные дополнения к найденным инвариантным одномерным подпространствам:

$$\{e_5\}^\perp = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}.$$

4°. Для $G_4 : \{a_4e_4 + a_5e_5\}, \forall a_4, a_5, \{e_4, e_5\}$. Доказательство следует по теоремам 2.1, 2.4, 2.5.

Трехмерные инвариантные подпространства находим как ортогональные дополнения к найденным инвариантным двумерным подпространствам: $\{e_4, e_5\}^\perp = \{e_1, e_2, e_3\}$.

Четырехмерные инвариантные подпространства находим как ортогональные дополнения к найденным инвариантным одномерным подпространствам:

$$\{a_4e_4 + a_5e_5\}^\perp = \{e_1, e_2, e_3, -a_5e_4 + a_4e_5\}.$$

5°. Для $G_5 : \{e_5\}$. Доказательство следует по теоремам 2.6, 2.7, 2.8.

Четырехмерные инвариантные подпространства находим как ортогональные дополнения к найденным инвариантным одномерным подпространствам:

$$\{e_5\}^\perp = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}.$$

6°. Для G_6 нет инвариантных подпространств.

7°. Для $G_7 : \{e_4, e_5\}$. Доказательство следует по теоремам 2.1, 2.4, 2.5, 2.10.

Трехмерные инвариантные подпространства находим как ортогональные дополнения к найденным инвариантным двумерным подпространствам: $\{e_4, e_5\}^\perp = \{e_1, e_2, e_3\}$.

8°. Для $G_8 : \{e_5\}$. Доказательство следует по теоремам 2.1, 2.3, 2.11.

Четырехмерные инвариантные подпространства находим как ортогональные дополнения к найденным инвариантным одномерным подпространствам:

$$\{e_5\}^\perp = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}.$$

9°. Для $G_9 : \{e_4, e_5\}$. Доказательство следует по теоремам 2.1, 2.3, 2.12.

Трехмерные инвариантные подпространства находим как ортогональные дополнения к найденным инвариантным двумерным подпространствам: $\{e_4, e_5\}^\perp = \{e_1, e_2, e_3\}$.

10°. Для $G_{10} : \{e_5\}$. Доказательство следует по теоремам 2.1, 2.4, 2.5, 2.13.

Четырехмерные инвариантные подпространства находим как ортогональные дополнения к найденным инвариантным одномерным подпространствам: $\{e_5\}^\perp = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.

Замечание 2.1. Все инвариантные четырехмерные подпространства пространства R_5 относительно группы Ли G_i получаются как ортогональные дополнения к найденным инвариантным одномерным подпространствам, а инвариантные трехмерные подпространства находятся как ортогональные дополнения к инвариантным двумерным. Таким образом, теорема 2.14 классифицирует все инвариантные подпространства пространства R_5 относительно всех подгрупп Ли вращений группы Ли движений пространства R_5 .

Замечание 2.2. Каждому инвариантному подпространству $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ соответствует инвариантная k -плоскость: $[0, \alpha_1, \dots, \alpha_k]$ и обратно. Таким образом, теорема 2.14 дает классификацию всех инвариантных прямых и k -плоскостей пространства R_5 относительно подгрупп Ли группы Ли вращений пространства R_5 .

Образы стационарности подгрупп Ли группы Ли движений пространства R_5

Используя найденные инвариантные подпространства относительно подгрупп Ли $G_1 \dots G_{11}$, находим далее образы стационарности для этих подгрупп.

Определение 2.1. Образом стационарности подгруппы K группы G называется совокупность D фигур пространства R_5 и ему соответствующего векторного пространства 1E_5 таких, что группе K принадлежат те и только те преобразования, при которых каждая из фигур совокупности D инвариантна.

Определение 2.2. Упорядоченная совокупность фигур пространства R_5 называется флагом, если все фигуры этой совокупности являются k -плоскостями ($k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) пространства R_5 , причем каждая предыдущая плоскость содержится в последующей.

Рассмотрим группу $G_1 = \{i_6\}$, где

$$\{i_6\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Рассмотрим произвольный элемент из алгебры вращений:

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ -\alpha & 0 & \omega & \varepsilon & \phi \\ -\beta & -\omega & 0 & \psi & \rho \\ -\gamma & -\varepsilon & -\psi & 0 & \eta \\ -\delta & -\phi & -\rho & -\eta & 0 \end{pmatrix}.$$

Относительно группы G_1 инвариантны только следующее одномерное подпространство пространства $R_5: \{a_3e_3 + a_4e_4 + a_5e_5\}, \forall a_3, a_4, a_5$ и только следующие двумерные подпространства: $\{e_1, e_2\}, \{e_3 + a_5e_5, e_4 + b_5e_5\}, \{e_3 + a_4e_4, e_5\}, \{e_4, e_5\}$.

Зафиксируем вектор $\overline{e_3}$. Рассмотрим вектор $(0, 0, 1, 0, 0)$ и потребуем, чтобы он был инвариантен. При этом получим следующий результат:

$$(0, 0, 1, 0, 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ -\alpha & 0 & \omega & \varepsilon & \phi \\ -\beta & -\omega & 0 & \psi & \rho \\ -\gamma & -\varepsilon & -\psi & 0 & \eta \\ -\delta & -\phi & -\rho & -\eta & 0 \end{pmatrix} = (-\beta, -\omega, 0, \psi, \rho) = \lambda \cdot \overline{e_3} = (0, 0, \lambda, 0, 0).$$

Из этого следует, что $\beta = 0, \omega = 0, \psi = 0, \rho = 0$.

Зафиксируем вектор $\overline{e_4}$. Рассмотрим вектор $(0, 0, 0, 1, 0)$ и потребуем, чтобы он был инвариантен. При этом получим следующий результат:

$$(0, 0, 0, 1, 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ -\alpha & 0 & \omega & \varepsilon & \phi \\ -\beta & -\omega & 0 & \psi & \rho \\ -\gamma & -\varepsilon & -\psi & 0 & \eta \\ -\delta & -\phi & -\rho & -\eta & 0 \end{pmatrix} = (-\gamma, -\varepsilon, -\psi, 0, \eta) = \mu \cdot \overline{e_4} = (0, 0, 0, \mu, 0).$$

Из этого следует, что $\gamma = 0, \varepsilon = 0, \psi = 0, \eta = 0$.

Зафиксируем вектор $\overline{e_5}$. Рассмотрим вектор $(0, 0, 0, 0, 1)$ и потребуем, чтобы он был инвариантен. При этом получим следующий результат:

$$(0, 0, 0, 0, 1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ -\alpha & 0 & \omega & \varepsilon & \phi \\ -\beta & -\omega & 0 & \psi & \rho \\ -\gamma & -\varepsilon & -\psi & 0 & \eta \\ -\delta & -\phi & -\rho & -\eta & 0 \end{pmatrix} = (-\delta, -\phi, -\rho, -\eta, 0) = \nu \cdot \overline{e_5} = (0, 0, 0, 0, \nu).$$

Из этого следует, что $\delta = 0, \phi = 0, \rho = 0, \eta = 0$.

Полученные результаты сформулируем в виде теоремы.

Теорема 2.15. Среди подгрупп $G_1 \dots G_{11}$ флаговые образы стационарности имеют только следующие подгруппы:

1° Для G_1 образом стационарности является флаг: точка, точно неподвижная трехмерная плоскость $[R_0, R_3^\circ]$, где \circ означает точечную неподвижность соответствующей плоскости.

2° Для G_2 образом стационарности является флаг $[R_0, R_1, R_2]$, причем $R_1 \perp R_2$.

3° Для G_3 образом стационарности является прямая и две ортогональные ей попарно 2-плоскости.

4° Для G_4 образом стационарности является флаг $[R_0, R_2^0]$.

5° Для G_7 образом стационарности является флаг $[R_0, R_2]$.

6° Для G_{11} образом стационарности является флаг $[R_0, R_1]$.

Подгруппы Ли $G_5, G_6, G_8, G_9, G_{10}$ не имеют флаговых образов стационарности.

Используя геометрические характеристики подгрупп Ли, мы получаем цепочки по включению подгрупп Ли группы Ли вращений пространства R_5 :

$G_{11} \supset G_{10} \supset G_8 \supset G_5, G_{11} \supset G_9 \supset G_4 \supset G_1, G_{11} \supset G_8 \supset G_3 \supset G_2, G_{11} \supset G_8 \supset G_3 \supset G_1,$
 $G_{11} \supset G_7 \supset G_4 \supset G_1, G_{11} \supset G_6; G_{11} \supset G_3 \supset G_2, G_{10} \supset G_8 \supset G_5, G_{10} \supset G_4 \supset G_1,$
 $G_{10} \supset G_3 \supset G_2, G_{10} \supset G_3 \supset G_1, G_9 \supset G_4 \supset G_1, G_8 \supset G_5, G_7 \supset G_4 \supset G_1, G_4 \supset G_1, G_3 \supset G_2,$
 $G_3 \supset G_1.$

Эти результаты можно представить в виде следующей схемы:

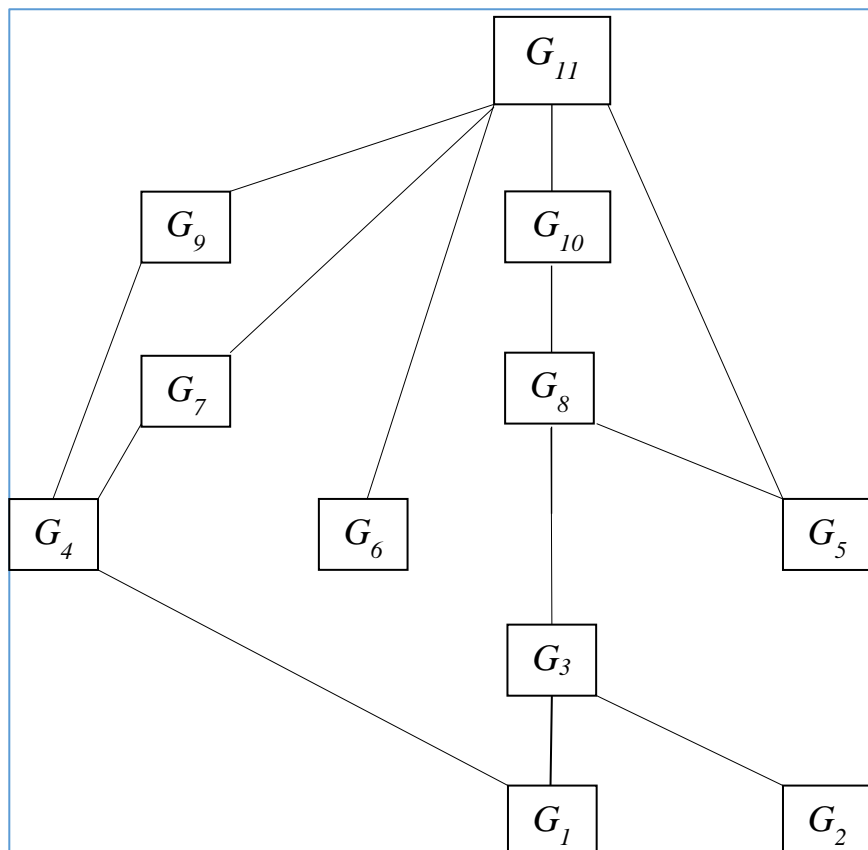


Схема. – Цепочки по включению подгрупп Ли группы Ли вращений пространства R_5

Пусть G – группа Ли и H_1, H_2 – ее подгруппы Ли, причем $H_1 \subset H_2$.

Определение 2.3. Каноническим морфизмом однородного пространства G/H_1 в однородное пространство G/H_2 называется морфизм f вида:

$$f: G/H_1 \rightarrow G/H_2: aH_1 \rightarrow aH_2, \forall a \in G.$$

Таким образом, полученная выше классификация цепочек подгрупп Ли группы вращений пространства R_5 приводит к классификации всех канонических морфизмов однородных пространств со структурной группой H – группой всех вращений пространства R_5 .

Рассмотрим однородное пространство $H/G_{10}, G_{10} = \{i_6, i_7, i_{10}, i_{11}, i_8, i_{13}\}$, $a = \{i_6\}$, $\overline{H} = \{i_6, \dots, i_{15}\}$.

Теорема 3.7. Однородное пространство H/G_{10} является редуکتивным, причем редуکتивным дополнением для этого пространства является подпространство: $m = \{i_9, i_{12}, i_{14}, i_{15}\}$.

Тензоры кривизны и кручения канонической связности полученных редуکتивных пространств [4]

Тензоры кривизны и кручения канонической связности будем вычислять на редуکتивных однородных пространствах с фундаментальной группой – группой Ли движений пространства R_5 .

Свойства тензора кривизны и кручения канонической связности характеризуются следующей теоремой.

Теорема 4.1 [Номидзу, Кобаяси]. Пусть P есть G – инвариантная структура на редуکتивном однородном пространстве G/H с разложением $\overline{G} = \overline{H} + m$. Для тензора кручения T и тензора кривизны R канонической связности в P мы имеем:

- (1) $T(X, Y)_0 = -[X, Y]_m$ для $X, Y \in m$,
- (2) $(R(X, Y)Z)_0 = -[[X, Y]_{\overline{H}}, Z]$ для $X, Y, Z \in m$,
- (3) $\nabla T = 0$,
- (4) $\nabla R = 0$.

Тензоры кривизны и кручения играют важную роль при исследовании свойств данной связности, поскольку они определяют связность с помощью структурных формул Э. Картана. Воспользуемся теоремой 4.1 и получим формулы для тензоров кривизны и кручения соответствующей канонической связности в исследуемых редуکتивных однородных пространствах.

Рассмотрим редуکتивное однородное пространство H/G_{10} , которое имеет редуکتивное разложение $\overline{H} = \overline{G}_{10} + m$, где $m = \{i_9, i_{12}, i_{14}, i_{15}\}$. Выберем в редуکتивном дополнении m базис: $e_1 = i_9, e_2 = i_{12}, e_3 = i_{14}, e_4 = i_{15}$.

Тогда согласно теореме 4.1 тензоры кручения получим по формуле $T(X, Y)_0 = -[X, Y]_m$ для $X, Y \in m$, а тензоры кривизны получим по формуле $(R(X, Y)Z)_0 = -[[X, Y]_{\overline{H}}, Z]$ для $X, Y, Z \in m$. Таким образом, координату T_{jk}^i тен-

зора кручення получим как i -ю координату разложения вектора $[e_j, e_k]_m$ по базису $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ редуцированного дополнения m . Координату $R^i_{jk,l}$ тензора кривизны получим как i -ю координату разложения вектора $[[e_j, e_k] \overline{G}_i, e_l]$ по базису B редуцированного дополнения m .

Проводя вычисления, получаем следующую теорему.

Теорема 4.2. Каноническая связность редуцированного однородного пространства H/G_{10} с редуцированным дополнением $m = \{i_9, i_{12}, i_{14}, i_{15}\}$ имеет нулевое кручение (каноническая связность этого пространства без кручения) и только следующие координаты тензора кривизны (при этом следует учитывать, что тензор кривизны кососимметричен по первым двум нижним индексам):

$$\begin{aligned} R^2_{12,1} = -1, R^l_{12,1} = 0, \text{ при } l \neq 2, & \quad R^1_{12,2} = 1, R^l_{12,2} = 0, \text{ при } l \neq 1, & \quad R^l_{12,3} = -1, R^l_{12,4} = 0, \text{ при } \forall l, \\ R^3_{13,1} = -1, R^l_{13,1} = 0, \text{ при } l \neq 3, & \quad R^l_{13,2} = R^l_{13,4} = 0, \text{ при } \forall l, & \quad R^1_{13,3} = 1, R^l_{13,3} = 0, \text{ при } l \neq 1, \\ R^4_{14,1} = -1, R^l_{14,1} = 0, \text{ при } l \neq 4, & \quad R^l_{14,2} = R^l_{14,3} = 0, \text{ для } \forall l, & \quad R^1_{14,4} = 1, R^l_{14,4} = 0, \text{ при } l \neq 1, \\ R^l_{23,1} = R^l_{23,4} = 0, \text{ для } \forall l, & \quad R^3_{23,2} = 1, R^l_{23,2} = 0, \text{ при } l \neq 3, & \quad R^2_{23,3} = 1, R^l_{23,3} = 0, \text{ при } l \neq 2, \\ R^l_{24,1} = R^l_{23,3} = 0, \text{ для } \forall l, & \quad R^4_{24,2} = -1, R^l_{24,2} = 0, \text{ при } l \neq 4, & \quad R^2_{24,4} = 1, R^l_{24,4} = 0, \text{ при } l \neq 2, \\ R^l_{34,1} = R^l_{34,2} = 0, \text{ для } \forall l, & \quad R^4_{34,3} = -1, R^l_{34,3} = 0, \text{ при } l \neq 4, & \quad R^3_{34,4} = 1, R^l_{34,4} = 0, \text{ при } l \neq 3. \end{aligned}$$

Имеет место теорема.

Теорема 4.3 [П. К. Рашевский]. Линейная связность без кручения полностью определяется заданием геодезических линий и канонических параметров на них.

Из теоремы 4.2 следует:

Теорема 4.3. Каноническая связность в редуцированном однородном пространстве G/G_{10} полностью характеризуется своими геодезическими линиями.

Имеет место следующее определение.

Определение 4.1 [Ш. Кобаяси]. Линейная связность Γ на дифференцируемом многообразии M называется локально симметрической в $x \in M$, если существует инволютивное преобразование открытой окрестности U точки x , имеющее x неподвижной изолированной точкой. Линейная связность называется локально симметрической, если она локально симметрическая в каждой точке $x \in M$.

Имеет место теорема.

Теорема 4.4 [Ш. Кобаяси]. Линейная связность Γ на M локально симметрическая тогда и только тогда, когда $T = 0, \nabla R = 0$.

На основании теорем 4.1, 4.3 и 4.4 получаем следующую теорему.

Теорема 4.5. Каноническая связность на однородном пространстве H/G_{10} является локально симметрической.

Заключение

Исследование редуцированных однородных пространств является актуальной задачей, поскольку эта теория находит применение в различных разделах геометрии и алгебры, а также теоретической физики. Особое место в этой теории занимают исследования однородных пространств со структурными группами – группами Ли движений евклидовых и псевдоевклидовых пространств.

Результаты, полученные в работе, могут быть использованы для решения аналогичных задач в теории однородных пространств, а также для проверки различных гипотез и теорем в теории таких же пространств.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Копп, В. Г. О подгруппах вращений пятимерных и шестимерных евклидовых и лоренцовых пространств / В. Г. Копп // Учен. зап. Казан. ун-та. – 1966. – Т. 126, кн. 1. – С 13–22.
2. Хелгасон, С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства / С. Хелгасон. – М. : Мир, 1964. – 538 с.
3. Юдов, А. А. Классификация одномерных подмногообразий пространства Минковского, имеющих касательную мнимоевклидова и евклидова типа / А. А. Юдов, Н. С. Ковалик // Вестн. Брест. ун-та. Сер. 4, Физика. Математика. – 2013. – № 1. – С. 106–115.
4. Юдов, А. А. Классификация и исследование редуктивных однородных пространств со структурной группой – группой Ли движений пятимерного евклидова пространства / А. А. Юдов, М. А. Кононюк // Вестн. Брест. ун-та. Сер. 4, Физика. Математика. – 2018. – № 2. – С. 94–106.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 26.05.2020

Yudov A. A., Kononyuk M. A., Kazakevich K.P., Kisilyuk E. V. Classification and Study of Invariant Structures on Homogeneous Spaces with a Structural Group - the Lie Group of Motions of a Five-Dimensional Euclidean Space

The aim of the study is to find invariant subspaces, lines and planes for Lie subgroups of the Lie group H of rotations of a five-dimensional Euclidean space and to study invariant structures on homogeneous reductive spaces with a fundamental group – the Lie group of motions of a five-dimensional Euclidean space.

Да ведама аўтараў

Рэдкалегія часопіса разглядае рукапісы толькі тых артыкулаў, якія адпавядаюць навуковаму профілю выдання, нідзе не апублікаваныя і не перададзеныя ў іншыя рэдакцыі.

Матэрыялы прадстаўляюцца на беларускай, рускай ці англійскай мове ў двух экзэмплярах аб'ёмам ад 0,35 да 0,5 друкаванага аркуша, у электронным варыянце – у фармаце Microsoft Word for Windows (*.doc; *.rtf) і павінны быць аформлены ў адпаведнасці з наступнымі патрабаваннямі:

- папера фармата А4 (21×29,7 см);
- палі: зверху – 2,8 см, справа, знізу, злева – 2,5 см;
- шрыфт – гарнітура Times New Roman;
- кегль – 12 pt.;
- міжрадкавы інтэрвал – адзінарны;
- двукоссе парнае «...»;
- абзац: водступ першага радка 1,25 см;
- выраўноўванне тэксту па шырыні.

Максімальныя лінейныя памеры табліц і малюнкаў не павінны перавышаць 15×23 або 23×15 см. Усе графічныя аб'екты, якія ўваходзяць у склад аднаго малюнка, павінны быць згрупаваны паміж сабой. Фатаграфіі ў друк не прымаюцца. Размернасць усіх велічынь, якія выкарыстоўваюцца ў тэксце, павінна адпавядаць Міжнароднай сістэме адзінак вымярэння (СВ). Пажадана пазбягаць скарачэнняў слоў, акрамя агульнапрынятых. Спіс літаратуры павінен быць аформлены паводле Узораў афармлення бібліяграфічнага апісання ў спісе крыніц, якія прыводзяцца ў дысертацыі і аўтарэфератах, зацверджаных загадам Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь ад 25.06.2014 № 159 у рэдакцыі загада Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь ад 08.09.2016 № 206. Спасылкі на крыніцы ў артыкуле нумаруюцца адпаведна парадку цытавання. Парадкавыя нумары спасылак падаюцца ў квадратных дужках (напрыклад, [1, с. 32], [2, с. 52–54]). Не дапускаецца выкарыстанне канцавых зносаў.

Матэрыял уключае наступныя элементы па парадку:

- індэкс УДК (выраўноўванне па левым краі);
- ініцыялы і прозвішча аўтара (аўтараў) (выдзяляюцца паўтлустым шрыфтам і курсівам; выраўноўванне па цэнтры);
- звесткі пра аўтара (навуковая ступень, званне, пасада);
- назва артыкула (друкуецца вялікімі літарамі без пераносаў; выраўноўванне па цэнтры);
- анатацыя ў аб'ёме ад 100 да 150 слоў на мове артыкула (курсіў, кегль – 10 pt.);
- звесткі аб навуковым кіраўніку (для аспірантаў і саіскальнікаў) указваюцца на першай старонцы артыкула ўнізе;
- асноўны тэкст, структураваны ў адпаведнасці з патрабаваннямі ВАКа да навуковых артыкулаў, якія друкуюцца ў выданнях, уключаных у Пералік навуковых выданняў Рэспублікі Беларусь для апублікавання вынікаў дысертацыйных даследаванняў (Уводзіны з пастаўленымі мэтай і задачамі; Асноўная частка, тэкст якой структуруецца падзагалоўкамі (назва раздзела «Асноўная частка» не друкуецца); Заключэнне, у якім сцісла сфармуляваны асноўныя вынікі даследавання, указана іх навізна);
- спіс выкарыстанай літаратуры;
- рэзюмэ на англійскай мове (курсіў; да 10 радкоў, кегль – 10 pt.): назва артыкула, прозвішча і ініцыялы аўтара/аўтараў, тэзісны пераказ зместу артыкула; у выпадку калі аўтар падае матэрыял на англійскай мове, рэзюмэ – на рускай ці беларускай.

Да рукапісу артыкула абавязкова дадаюцца:

- звесткі пра аўтара на беларускай мове (прозвішча, імя, імя па бацьку поўнаасцю, вучоная ступень і званне, месца працы (вучобы) і пасада, паштовы і электронны адрасы для перапіскі і кантактныя тэлефоны);
- выписка з пратакола пасяджэння кафедры, навуковай лабараторыі ці ўстановы адукацыі, дзе працуе/вучыцца аўтар, завераная пячаткаю, з рэкамендацыяй артыкула да друку;
- рэцэнзія знешняга ў адносінах да аўтара профільнага спецыяліста з вучонай ступенню, завераная пячаткаю;
- экспертнае заключэнне (для аспірантаў і дактарантаў).

Рукапісы, афармленыя не ў адпаведнасці з выкладзенымі правіламі, рэдкалегіяй не разглядаюцца.

Аўтары нясуць адказнасць за змест прадстаўленага матэрыялу.

Карэктары *А. Г. Хадыева, Л. М. Калілец*

Камп'ютарнае макетаванне *С. М. Мініч, Г. Ю. Пархац*

Падпісана ў друк 23.06.2020. Фармат 60×84/8. Папера афсетная.

Гарнітура Таймс. Рызаграфія. Ум. друк. арк. 12,79. Ул.-выд. арк. 8,62.

Тыраж 100 экз. Заказ № 182.

Выдавец і паліграфічнае выкананне: УА «Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт імя А. С. Пушкіна».

Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы,

распаўсюджвальніка друкаваных выданняў

№ 1/55 ад 14.10.2013.

ЛП № 02330/454 ад 30.12.2013.

224016, г. Брэст, вул. Міцкевіча, 28.