



# Веснік

Брэсцкага ўніверсітэта

*Галоўны рэдактар:*

А.М. Сендзер

*Намеснік галоўнага рэдактара:*

А.Я. Будзько

*Міжнародны савет*

В.А. Главан (Малдова)

В.Г. Самойленка (Украіна)

В.В. Дзікусар (Расія)

*Рэдакцыйная калегія:*

М.М. Сендзер

(адказны рэдактар)

М.І. Ляўчук

В.С. Манахаў

І.П. Мартынаў

У.А. Плецюхоў

А.Ф. Равінскі

Я.В. Радына

В.М. Радзькоў

У.С. Секяржыцкі

М.М. Труш

А.В. Чычурын

Пасведчанне аб рэгістрацыі

ў Міністэрстве інфармацыі

Рэспублікі Беларусь

№ 1338 ад 28 красавіка 2010 г.

Адрас рэдакцыі:

224665, г. Брэст,

бульвар Касманаўтаў, 21

тэл.: 21-72-07

e-mail: vesnik@brsu.brest.by

Часопіс «Веснік Брэсцкага

ўніверсітэта» выдаецца

з снежня 1997 года

**Серыя 4**

**ФІЗІКА**

**МАТЭМАТЫКА**

**НАВУКОВА-ТЭАРЭТЫЧНЫ ЧАСОПІС**

Выходзіць два разы ў год

Заснавальнік – Установа адукацыі  
«Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт імя А.С. Пушкіна»

**№ 2 / 2016**

У адпаведнасці з загадам Вышэйшай атэстацыйнай камісіі  
Рэспублікі Беларусь № 84 ад 31.03.2016 г. часопіс  
«Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4. Фізіка. Матэматыка»  
ўключаны ў Пералік навуковых выданняў Рэспублікі Беларусь  
для апублікавання вынікаў дысертацыйных даследаванняў  
па фізіка-матэматычных навуках (Фізіка)

# ЗМЕСТ

## ФІЗІКА

<b>Выблыі Ю.П., Леонавіч А.А.</b> Скалярна-тензорная тэорыя гравітацыі в прастранстве Мінковскага .....	5
<b>Костко В.С.</b> Эксітонныя ўзроўні і іх рэгістрацыя з дапамогай спектрофотометра.....	9
<b>Ліпо В.А., Овчінніков Е.В., Секержыцкі С.С., Сіткевіч А.Л.</b> Максимальныя значэння коэфіцыентаў упаковки шароў з рознымі памерамі .....	14
<b>Овсіюк Е.М., Веко О.В., Войнова Я.А., Кісель В.В., Редьков В.М.</b> Об отражении частиц спина $\frac{1}{2}$ «геометрической средой» пространства Лобачевского, учет внешнего электрического поля .....	21
<b>Секержыцкі В.С., Зданевіч Ю.А.</b> О пионизации тяжелых атомных ядер.....	32
<b>Фікс А.И., Левчук М.И., Львов А.И.</b> Определение полного сечения фотопоглощения на нейтроне из протонных и дейтронных данных в области энергий от 700 до 1 500 МэВ II. Решение уравнения Фредгольма и анализ экспериментальных данных .....	37

## МАТЭМАТЫКА

<b>Сендер А.Н., Будько А.Е., Сендер Н.Н.</b> О научной и научно-педагогической деятельности члена-корреспондента Национальной академии наук Беларуси доктора физико-математических наук, профессора Я.В. Радыно (к 70-летию со дня рождения) .....	43
<b>Кірыльчук Т.С., Трофімук А.А.</b> Конечные группы с заданными свойствами некоторых подгрупп .....	45
<b>Мадорский В.М.</b> О нелокальных вариантах метода хорд и Стеффенсена .....	52
<b>Мартынов И.П., Пецевіч В.М., Пронько В.А.</b> Аналитические свойства решений двух классов дифференциальных уравнений четвертого порядка .....	64
<b>Матысік О.В., Сідак С.В.</b> Сходимость в гильбертовом пространстве неявного итерационного процесса решения некорректных уравнений первого рода .....	71
<b>Прышляк А.О., С্কочко Д.Н.</b> Атомы с одной, двумя и тремя критическими точками для функций Морса на поверхностях с краем .....	77
<b>Ракович Е.М., Юдов А.А.</b> Классификация подгрупп Ли группы Ли движений четырёхмерного псевдоевклидова пространства нулевой сигнатуры.....	87



# *Vesnik*

*of Brest University*

***Editor-in-chief:***

**A.M. Sender**

***Deputy Editor-in-chief:***

**A.Ya. Budzko**

***International Board:***

**V.A. Glavan (Moldova)**

**V.G. Samoilenka (Ukraine)**

**V.V. Dzikussar (Russia)**

***Editorial Board:***

**M.M. Sender**

**(managing editor)**

**M.I. Lyauchuk**

**V.S. Manakhau**

**I.P. Martynau**

**V.A. Pletsukhou**

**A.F. Ravinski**

**Ya.V. Radyna**

**V.M. Radzkou**

**V.S. Sekyazhytski**

**M.M. Trush**

**A.V. Chychurn**

Registration Certificate  
by Ministry of Information  
of the Republic of Belarus  
№ 1338 from April 28, 2010

**Editorial Office:**

224665, Brest,

Boulevard Cosmonauts, 21

tel.: 21-72-07

e-mail: vesnik@brsu.brest.by

Published since December 1997

## **Series 4**

## **PHYSICS**

## **MATHEMATICS**

SCIENTIFIC-THEORETICAL JOURNAL

**Issued two times a year**

**Founder – Educational institution  
«Brest state university named after A.S. Pushkin»**

***№ 2 / 2016***

According to the order of Supreme Certification Commission  
of the Republic of Belarus № 84 from March 31, 2016, the journal  
«Vesnik of Brest University. Series 4. Physics. Mathematics»  
was included to the List of scientific editions of the Republic of Belarus  
for publication of the results of scientific research  
in physics-mathematical sciences (Physics)

# INDEX

## PHYSICS

<b>Vyblyi Yu.P., Leonovich A.A.</b> Scalar-Tensor Theory of Gravity in Minkowski Space.....	5
<b>Kostko V.S.</b> Exciton Levels and their Registration with the Help of Spectrophotometer.....	9
<b>Liopo V.A., Auchynnikaŭ Y.V., Sekerzhitsky S.S., Sitkevich A.L.</b> The Maximum Value Packing of Spheres with Different Sizes.....	14
<b>Ovsiyuk E.M., Veko O.V., Voynova Y.A., Kisel V.V., Red'kov V.M.</b> On Reflecting Spin 1/2 Particles by the «Geometric Medium» of the Lobachevsky Space, Taking into Account the External Electric Field .....	21
<b>Sekerzhitsky V.S., Zdanevich Ju.A.</b> About Pionization of Heavy Atomic Nucleis .....	32
<b>Fix A.I., Levchuk M.I., L'vov A.I.</b> Extraction of the Total Photoabsorption Cross Section on the Neutron from the Proton and Deuteron Data at Energies Between 700 and 1 500 Mev II. Solution of the Fredholm Equation and an Analysis of Experimental Data .....	37

## MATHEMATICS

<b>Sender A.N., Budko A.E., Sender N.N.</b> On the Scientific and Scientific-Pedagogical Activity of Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Belarus Doctor of Physical and Mathematical Sciences Professor Y.V. Radyno (to 70th Anniversary).....	43
<b>Kirilchuk T.S., Trofimuk A.A.</b> Finite Groups with Given Properties of Some Subgroups.....	45
<b>Madorskiy V.M.</b> On Nonlocal Variant of the Method of Chords and Steffens .....	52
<b>Martynov I.P., Pecevich V.M., Pronko V.A.</b> Analytical Properties of Solutions of Two Classes of Fourth-Order Differential Equations .....	64
<b>Matysik O.V., Sidak S.V.</b> Convergence the Non-evident Iteration Process of the Decision of the Ill-Posed Equations of first kind in the Hilbert Space.....	71
<b>Prishlyak A.O., Scochco D.N.</b> Atoms with One, Two and Three Critical Points for Morse Functions on Surfaces with Boundary .....	77
<b>Rakovich A.M., Yudov A.A.</b> Classification of Subgroups Lie Whether the Groups of Lie Motions of Four-Dimensional Pseudo-Euclidean Space of Signature Zero .....	87

УДК 539.1.01

**Ю.П. Выблый<sup>1</sup>, А.А. Леонович<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>канд. физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Института физики НАН Беларуси

<sup>2</sup>канд. физ.-мат. наук., доц. каф. физики

Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники

## СКАЛЯРНО-ТЕНЗОРНАЯ ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕ МИНКОВСКОГО

*Рассмотрено обобщение безмассовой тензорной теории гравитации в пространстве Минковского на случай скалярно-тензорного взаимодействия. Показано, что взаимодействие гравитационного и нелинейного скалярного полей может привести к возникновению эффективной массы гравитона. Статическое сферически-симметричное скалярное поле рассмотрено в ньютоновском приближении.*

Как сейчас хорошо известно, основную часть материи во Вселенной составляют темная материя, обнаруженная, в частности, в спиральных галактиках, и темная энергия, которая обуславливает наблюдаемое ускорение космологического расширения [1–3]. Одним из возможных подходов к теоретическому описанию этих наблюдений является введение в рассмотрение действительного скалярного поля. В связи с этим возродился интерес к скалярно-тензорной теории гравитации Бранса – Дикке и ее обобщениям [4]. В этом подходе скалярное поле может описывать как темную энергию, так и, в случае взаимодействия с обычной материей, темную материю [4].

В настоящей работе рассмотрено минимально возможное скалярно-тензорное обобщение тензорной теории гравитации в пространстве Минковского – релятивистской теории гравитации (РТГ) [5]. В ней гравитация описывается нелинейным тензорным полем в плоском пространстве, при этом в теории возникает эффективная риманова метрика, обусловленная требованием калибровочной инвариантности относительно группы вариаций Ли динамических переменных, входящих в лагранжиан. Уравнениями безмассового гравитационного поля являются уравнения Эйнштейна для этой эффективной метрики. Для устранения калибровочного произвола в полевых уравнениях и тем самым однозначного выбора системы координат в пространстве Минковского необходимо нарушить калибровочную инвариантность. В РТГ это достигается путем введения массы гравитона, что явным образом нарушает калибровочную инвариантность теории. Уравнения Эйнштейна в силу тождеств Бианки являются недоопределенной системой и должны быть дополнены добавочными уравнениями ограничения тензорного поля по спиновым состояниям  $D_i \tilde{g}^{ik} = 0$ , где  $D_i$  – ковариантная производная в пространстве Минковского. Эти условия играют важную роль в РТГ, исключая калибровочный произвол эйнштейновских уравнений, и в декартовых координатах совпадают с условиями гармоничности Фока. В частности, космологическая метрика Фридмана – Робертсона – Уолкера, удовлетворяющая этим уравнениям, должна быть пространственно плоской в соответствии с современными наблюдательными данными.

Требование калибровочной инвариантности допускает обобщение эффективной метрики в виде

$$\tilde{f}^{ik} = f(\phi) \tilde{g}^{ik}, \quad (1)$$

где  $f(\phi)$  – некоторая функция скалярного поля  $\phi$ ,  $\tilde{g}^{ik} = \sqrt{(-\gamma)}(\gamma^{ik} + q\psi^{ik})$  – эффективная метрика в РТГ, образованная метрикой Минковского  $\gamma^{ik}$  в произвольной системе

координат и тензорным гравитационным потенциалом  $\psi^{ik}$ ;  $g = \det g_{ik}$ ,  $\gamma = \det \gamma_{ik}$ ,  $q$  – константа гравитационного взаимодействия.

В пространстве Минковского наиболее общий лагранжиан, приводящий к линейным уравнениям скалярного поля можно записать в виде

$$L_0^\phi = \left( \frac{1}{2} \phi_{,i} \phi_{,k} \gamma^{ik} - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + a\phi - b \right) \sqrt{-\gamma}. \quad (2)$$

где  $m$ ,  $a$ ,  $b$  – константы. Калибровочно-инвариантный лагранжиан взаимодействующих скалярного и тензорного полей может быть получен заменой в (2) метрики Минковского на метрику  $f^{ik}$  и добавлением лагранжиана РТГ для поля  $\psi^{ik}$

$$L = L^G + L^\phi = \left[ -\frac{1}{16\pi q^2} (R - \text{div}) + \frac{1}{2} f \phi_{,i} \phi_{,k} g^{ik} - \frac{1}{2} f^2 m^2 \phi^2 + a f^2 \phi - b f^2 \right] \sqrt{-g}, \quad (3)$$

где  $R$  – скалярная кривизна для метрики  $g_{ik}$ , скорость света здесь полагаем равной единице. В присутствии материи к (3) нужно добавить лагранжиан материи  $L^M(Q_A, f^{ik})$ ,  $Q_A$  – динамические переменные материи. Лагранжиан скалярного поля имеет потенциал  $V$

$$V(\phi) = -\frac{c}{\phi} + \frac{d}{\phi^2}, \quad (4)$$

где  $c = a/4k^2$ ,  $d = b/4k^2$ . В предположении минимальности взаимодействия тензорного и скалярного полей с материей уравнение скалярного поля запишется в виде

$$\frac{\delta L^\phi}{\delta \phi} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} \frac{f_{, \phi}}{f} T^M, \quad (5)$$

где  $T^M = T_{ik}^M g^{ik}$  – след тензора энергии-импульса материи в пространстве с метрикой  $g^{ik}$ . Выберем функцию  $f$  в виде

$$f(\phi) = (2k\phi)^{-1}, \quad (6)$$

где  $k$  – новая константа скалярного взаимодействия и где предполагается, что поле  $\phi$  всегда положительно. Из лагранжиана (3) следуют уравнения для тензорного и скалярного поля

$$G_{ik} = 8\pi q^2 [T_{ik}^M(Q_A, \phi, g^{mn}) + T_{ik}^\phi(\phi, g^{mn})], \quad (7)$$

$$g^{ik} D_i D_k \phi - \frac{D_i \phi D^i \phi}{2\phi} - \frac{\partial V / \partial \phi}{\phi} = -k T^M(Q_A, \phi, g^{mn}). \quad (8)$$

Таким образом, при выборе функции  $f(\phi)$  в виде (6) источником нелинейного скалярного поля является след тензора энергии-импульса материи. Вследствие этого скалярное поле не будет взаимодействовать с электромагнитным, что позволяет рассматривать его как кандидата на роль темной материи.

Скалярный потенциал (4) имеет минимум  $V(\phi_0)$ , равный  $3c^2/4d$  при  $\phi_0 = 2d/c$ . Будем полагать, метрика  $f^{ik}$  совпадает с метрикой  $g^{ik}$  в вакуумном состоянии с минимумом потенциала, тогда  $\phi_0 = 1/2k$ , при этом полевые уравнения, соответствующие ла-

гранжиану (3), являются уравнениями Эйнштейна с  $\Lambda$ -членом. В зависимости от знака коэффициента  $d$  он может быть положительным и, следовательно, описывать в вакуумном состоянии скалярного поля ускоренное космологическое расширение либо отрицательным. В этом случае уравнения Эйнштейна описывают массивное гравитационное поле с массой гравитона, равной  $qc\sqrt{12\pi/d}$ , источником которого наряду с тензором энергии-импульса материи является тензор энергии-импульса вакуумного состояния скалярного поля.

Полевые уравнения (7) – (8) могут быть использованы для получения космологических решений, в которых скалярное поле играет роль темной энергии, поскольку потенциал (4) может обеспечить отрицательное давление в эффективном уравнении состояния скалярного поля.

В отличие от уравнений Эйнштейна с  $\Lambda$ -членом ( $\Lambda$ CDM-модель [6]), из которых следует, что космологическое расширение будет всегда носить ускоренный характер, в данном подходе при стремлении скалярного поля к отрицательному минимуму потенциала ускорение сменится замедлением. Аналогичный вариант скалярно-тензорной теории, в котором источником скалярного поля является след тензоров энергии-импульса как материи, так и самого скалярного поля, был рассмотрен в [7].

Рассмотрим слабое сферически-симметричное статическое гравитационное поле. Положим  $\phi = \phi_0 + \varphi$  и будем пренебрегать в данном случае потенциалом  $V(\phi)$ . В ньютоновском приближении свободные уравнения для тензорного и скалярного полей становятся независимыми и уравнение скалярного поля принимает вид:

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\varphi}{dr} - \frac{k}{(1+2k\varphi)} \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 = 0. \quad (9)$$

Решением уравнения (9) является функция

$$\varphi = \frac{1}{2k} \left[ \left( B - \frac{A}{r} \right)^2 - 1 \right], \quad (10)$$

где  $A$  и  $B$  – постоянные интегрирования. Из условия исчезновения скалярного поля на бесконечности следует, что  $B = 1$ , а константа  $A$  должна определяться из сшивки с соответствующим внутренним решением. Движение пробной частицы должно определяться действием

$$S^M = -mc \int ds, \quad (11)$$

где  $ds^2 = f_{ik} dx^i dx^k$ . Соответствующие уравнения движения принимают форму

$$\frac{Du^i}{ds} = - \frac{k}{1+2k\varphi} (u^i u^k - g^{ik}) \varphi_{,k}, \quad (12)$$

где  $u^i = dx^i/ds$  – 4-скорость, а символ  $D$  означает здесь ковариантный дифференциал в пространстве с метрикой  $g_{ik}$ . В ньютоновском приближении, когда сохраняется только компонента  $g_{00}$ , поле  $\varphi$  мало и трехмерными скоростями можно пренебречь, получим

$$\frac{d^2r}{dt^2} = - \frac{GM}{r^2} - kc_0^2 \frac{d\varphi}{dr} = a^N + a^\varphi, \quad (13)$$

где  $G$  – ньютоновская гравитационная постоянная,  $c_0$  – скорость света. Используя (12), найдем

$$a^\varphi = c_0^2 \left( -\frac{A}{r^2} + \frac{A^2}{r^3} \right). \quad (14)$$

Ускорение  $a^\varphi$  обращается в ноль при  $r = A$ , имеет минимальную отрицательную величину  $r_0 = \frac{3}{2}A$  и должно играть роль на малых расстояниях от источника гравитационного поля.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Klapdor-Kleingrothaus, H. V. Teilchenastrophysik / H. V. Klapdor-Kleingrothaus, K. Zuber, B.G. Teubner. – Stuttgart, 1997. – 364 p.
2. Peeble, P. J. E. Cosmological constant and dark energy / P. J. E. Peeble, B. Rathra // Rev. Mod. Phys. – 2003. – Vol. 75. – P. 559–606.
3. Copeland, E. J. Dynamics of dark energy / E. J. Copeland [et al.] // J. Mod. Phys. D. – 2006. – Vol. 15. – P. 1753–1956.
4. Matos, T. Spherical scalar field halo in a galaxy / T. Matos [et al.] // Phys. Rev. D. – 2000. – Vol. 62. – P. 061301.
5. Logunov, A. A. The Theory of Gravity / A. A. Logunov. – Nova Scifnce Publ. – New York, 1998. – 319 p.
6. Горбунов, Д. С. Введение в теорию ранней Вселенной / Д. С. Горбунов, В. А. Рубаков. – М. : ЛЕНАНД, 2016. – 616 с.
7. Dudko, I. Scalar field with the source in the form of the stress – energy tensor as the dark energy model / I. Dudko, Yu. Vybyli // Gravitation and Cosmology. – 2016. – Vol. 22, № 4. – P. 368–373.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 17.10.2016

#### **Vybyli Yu.P., Leonovich A.A. Scalar-Tensor Theory of Gravity in Minkowski Space**

*The generalization of relativistic theory of gravity for the case of scalar-tensor interaction is considered. The possibility of introducing the effective graviton mass for interacting gravitational and nonlinear scalar fields is shown. In the Newtonian approximation the static spherically-symmetrical scalar field is considered.*

УДК 535.34

**В.С. Костко**

*канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. общей и теоретической физики  
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина*

**ЭКСИТОННЫЕ УРОВНИ И ИХ РЕГИСТРАЦИЯ  
С ПОМОЩЬЮ СПЕКТРОФОТОМЕТРА**

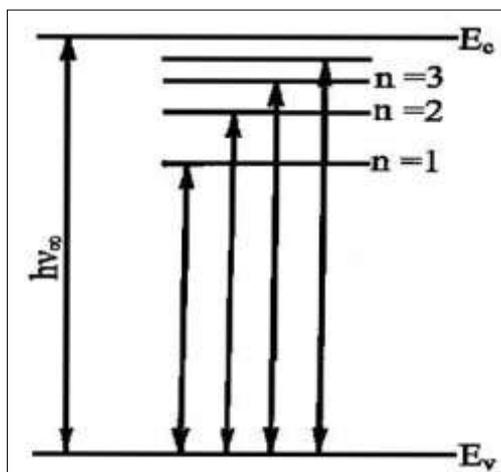
*На примере экситонных уровней обосновывается необходимость проведения их спектроскопических исследований при низких температурах. С этой целью предлагается относительно простой азотный криостат к спектрофотометрам типа СФ-4, СФ-16. Приводится спектр поглощения тонких пленок  $PbI_2$  и  $SnI_2$  при температуре 77 К, полученный с помощью описанного криостата и спектрофотометра VSU-2р. Установлено, что край собственного поглощения  $SnI_2$  обусловлен прямыми разрешенными переходами электронов в экситонные состояния с главным квантовым числом  $n = 1$ .*

Экситонами называют возбужденные состояния электронной системы кристалла, состоящие из электрона и дырки, связанных между собой и совместно перемещающихся по кристаллу. Экситонные уровни имеют тонкую структуру и расположены в запрещенной зоне недалеко от дна зоны проводимости. Если в процессе поглощения света электрон покидает валентную зону, но не переходит в зону проводимости, а имеет энергию, соответствующую тому или иному уровню в запрещенной зоне, то он может блуждать по кристаллу, увлекая за собой связанную с ним дырку валентной зоны. Очевидно, этот случай особый, поскольку электрон не закрепляется на том или ином уровне в запрещенной зоне. Кроме того, движения такого электрона не создают электрического тока, поскольку вместе с электроном перемещается и дырка [1].

Экситон может разрушиться в результате теплового «довозбуждения», т.е. термической диссоциации, при которой создаются свободный электрон в зоне проводимости и свободная дырка в валентной зоне. Может также произойти исчезновение экситона с испусканием фононов и фотона, электрон при этом возвратится в валентную зону.

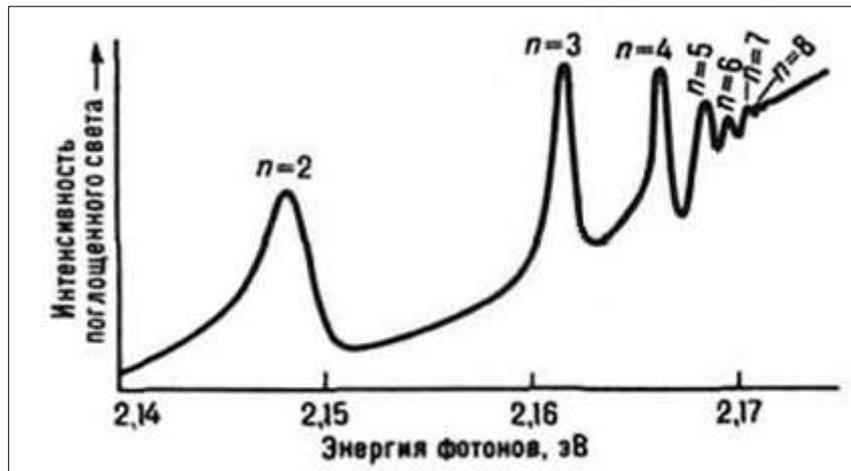
Если размеры экситона велики по сравнению с постоянной решетки, то взаимодействие электрона и дырки можно представлять как кулоновское взаимодействие двух точечных зарядов. Следовательно, экситон можно рассматривать как водородоподобную систему.

Уровни энергии экситона приведены на рисунке 1. Здесь  $h\nu_\infty = \Delta E_0$  соответствует случаю, когда экситон исчезает в результате разрыва связи электрон – дырка и образования двух свободных носителей заряда [2].



**Рисунок 1. – Уровни энергии экситона в запрещенной зоне**

Экситоны отчетливо проявляются в спектрах оптического поглощения полупроводников в виде узких линий, сдвинутых от края поглощения в сторону меньших энергий фотона (экситонный резонанс). Экспериментально водородоподобная структура энергетического спектра экситона Ванье – Мотта (исключая уровень  $n = 1$ ), впервые наблюдавшаяся Е.Ф. Гроссом в 1952 г. при исследовании спектра поглощения закиси меди  $\text{Cu}_2\text{O}$  (рисунок 2), получена в дальнейшем для целого ряда полупроводников.



Пики соответствуют энергетическим уровням экситонов

Рисунок 2. – Спектр поглощения кристаллической закиси меди

Линейчатые спектры поглощения, соответствующие экситонам, обнаружены в  $\text{Cu}_2\text{O}$ ,  $\text{CdSe}$ ,  $\text{ZnS}$ ,  $\text{HgI}_2$ ,  $\text{PbI}_2$ ,  $\text{SnI}_2$  и других полупроводниках.

Экситоны имеют конечное время жизни: электрон и дырка, составляющие экситон, могут рекомбинировать с излучением фотона. Экситон также может рекомбинировать безызлучательно при столкновении с дефектами кристаллической решетки.

Колебания кристаллической решетки и различные дефекты кристаллической структуры приводят к уширению линий экситонного поглощения, а в некоторых случаях – даже к слиянию экситонного спектра со спектром поглощения. При более высоких температурах экситоны термически диссоциируют на свободные электроны и дырки. Опыт показывает, что для основного спектра полупроводниковых материалов энергия диссоциации свободных экситонов существенно меньше, чем тепловая энергия. В связи с этим высока вероятность термической диссоциации экситона.

Из всего сказанного можно сделать вывод о том, что регистрация экситонного поглощения (уровней) возможна лишь при низких температурах.

Необходимость регистрации и детального исследования экситонных линий в полупроводниках побудила автора сконструировать и изготовить криостат к выпускаемому серийно спектрофотометру VSU-2р фирмы «Carl Zeiss» (отечественные аналоги – СФ-4, СФ-16).

Криостат – устройство (прибор) для проведения низкотемпературных физических исследований. Рабочий объем криостата поддерживается при низкой температуре за счёт постороннего источника холода. Обычно в качестве такого источника используют жидкие газы с низкими температурами конденсации (кислород, азот, водород, гелий). Такие жидкости называют криоагентами.

В любом криостате необходима теплоизоляция рабочего объема от окружающей среды. Естественно, чем ниже температура рабочего объема, тем выше требования

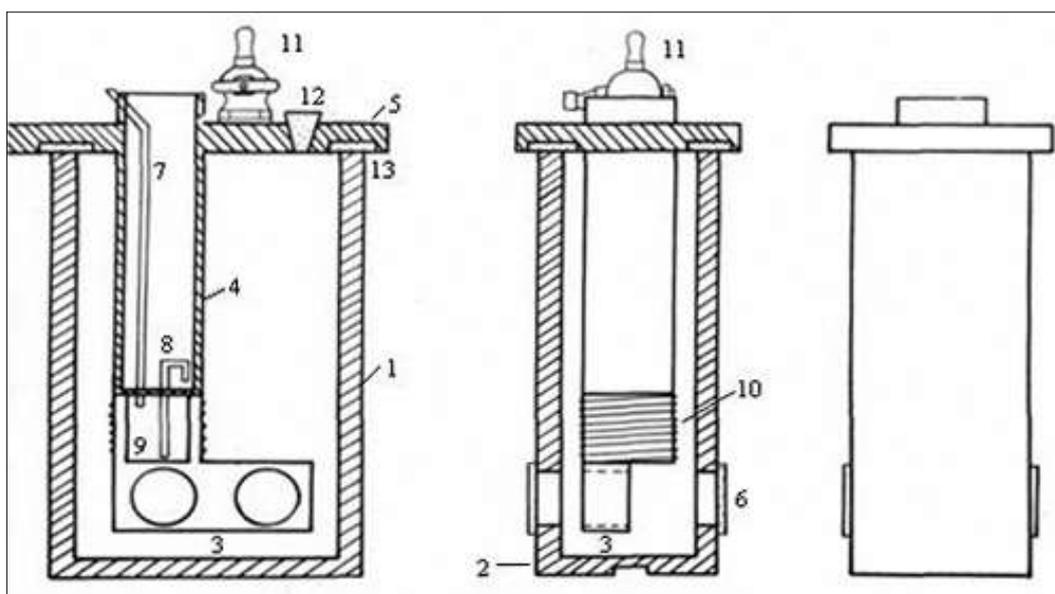
к теплоизоляции. В криостатах, заполняемых жидким азотом или кислородом, как правило, используется высоковакуумная теплоизоляция.

Температуру рабочего объема в криостате регулируют, изменяя давление паров над заполняющим криостат криоагентом или подогревая пары криоагента.

Экспериментальные исследования оптических свойств веществ в большинстве случаев целесообразно проводить в широком интервале температур и длин волн. Поэтому образец помещают в вакуумную камеру для предотвращения конденсации на его поверхности паров воды (при охлаждении) или разрушении поверхности в результате испарения или окисления (при нагревании). В зависимости от необходимой температуры и области длин волн конструкции криостатов могут быть разнообразными.

Предлагается достаточно простой криостат к спектрофотометру VSU-2р в видимой области длин волн при температурах от 77 К (точка кипения жидкого азота при атмосферном давлении) до комнатной.

Корпус криостата 1 сварен из Г-образного стального профиля размерами 6×12 см и длиной 20 см (рисунок 3). Предпочтительным является использование готовой пустотелой трубы прямоугольного сечения, что требует гораздо меньших затрат и гарантирует от образования вакуумной течи в месте сварного шва. Корпус приварен в нижней части к прямоугольной пластине 2. В нижней части пластины 2 фрезеруется паз для посадки (фиксации) криостата в кюветной камере спектрофотометра. Держатель образцов 3 соединен с мельхиоровой трубкой 4 диаметром 30 мм, представляющей собой емкость для жидкого азота (кислорода), заливаемую через верхнюю горловину трубки. В верхней части мельхиоровая трубка пропущена через крышку криостата 5. В крышке фрезеруется по периметру углубление 13 для листовой вакуумной резины, обеспечивающей герметизацию внутри криостата.



**Рисунок 3. – Конструкция криостата к спектрофотометру VSU-2р**

Для прохождения пучка лучей в нижней части корпуса криостата 1 и держателя образцов 3 имеются два сквозных окна, которые закрыты с наружной стороны кварцевыми стеклами 6. Образец крепится на медном массивном держателе 3, верхняя часть которого выполнена в форме стакана 9, в котором находится жидкий азот. Окна (кварцевые стекла) к корпусу криостата удобнее приклеивать замазкой из воска с канифолью (50% на 50%) на спирту, ее в жидком виде наносят по периметру стекла.

Нейзильберовая трубочка 7 предназначена для отвода паров. Когда она открыта, жидкий азот из большой трубы через трубку 8 проникает в медный стакан 9, составляющий единое целое с держателем образцов 3. В этом случае образец практически находится при температуре азота (в действительности эта температура несколько выше азотной из-за температурного градиента по держателю образца).

Если закрыть трубку 7, то пары азота вытолкнут жидкий азот по трубке 8. Изменяя ток в спирали нагревателя 10, намотанной на стакан 9, можно менять температуру держателя образца, следовательно, и самого образца.

Уравнение теплового баланса в данном случае будет иметь следующий вид:

$$Q_1 + Q_2 = \gamma \beta (T_1 - T_0),$$

где  $Q_1$  – количество теплоты, подводимое спиралью;  $Q_2$  – количество теплоты, поступающее извне из-за неидеальной теплоизоляции;  $\gamma$  – коэффициент теплопроводности мельхиоровой трубки 4;  $T_0$  – температура верхнего конца трубки (температура жидкого азота);  $T_1$  – температура нижнего конца трубки 4 (температура держателя образца 3).

Поскольку  $Q_2$ ,  $\gamma$ ,  $\beta$ ,  $T_0$  – постоянны, то для изменения  $T_1$  (перехода к другой температуре) необходимо изменить подводимое спиралью количество теплоты  $Q_1$ .

В крышку криостата вмонтирован вакуумный кран 11. Вакуумным насосом с помощью вакуумного шланга через кран 1 создается разрежение внутри криостата. Через резиновые пробки-заглушки 12 выведены наружу концы термометра сопротивления (термопары) и нагревателя 10. В стандартной крышке кюветного отделения спектрофотометра вырезается отверстие для беспрепятственного перемещения криостата при проведении измерений. Образовавшиеся технологические щели покрываются черной светонепроницаемой тканью.

Исследуемый образец специальными зажимами крепится на левом окне держателя образцов 3. Правое окно покрывается чистым кварцевым стеклом аналогичной толщины. Жидкий азот (кислород), залитый через большую горловину, охлаждает исследуемый образец, температура которого контролируется термометром сопротивления. Криостат устанавливается на кюветный стол спектрофотометра. Путем переключения органов управления, как и при обычных измерениях на воздухе, определяются значения оптической плотности  $D$  или коэффициента пропускания  $T$  при низких температурах.

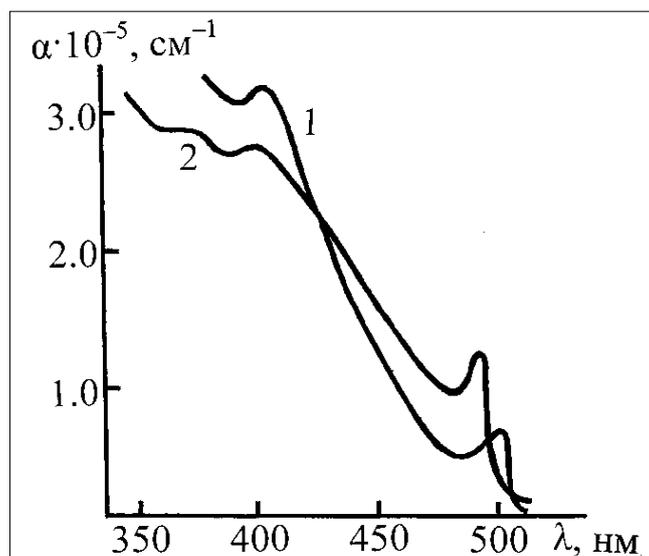


Рисунок 4. – Спектры поглощения тонких пленок  $\text{SnI}_2$  (1) и  $\text{PbI}_2$  (2) при  $T=77$  К

На рисунке 4 (кривая 1) представлен спектр поглощения пленки  $\text{SnI}_2$  толщиной 130 нм при температуре 77 К, полученный с помощью описанного криостата и спектрофотометра VSU-2р. Характерной особенностью спектра является наличие в этой спектральной области двух мощных линий поглощения, расположенных при 502 и 408 нм, значение коэффициентов поглощения в максимумах которых достигает порядка  $10^5 \text{ см}^{-1}$ . Спектр поглощения пленки  $\text{SnI}_2$  по своей структуре очень похож на спектр поглощения пленки  $\text{PbI}_2$ , полученной при тех же условиях (кривая 2).

Измерения показали, что температурное поведение спектров поглощения пленок обоих веществ качественно совпадают. Установлено, что край собственного поглощения обусловлен прямыми разрешенными переходами электронов в экситонные состояния с главным квантовым числом  $n = 1$ .

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Смит, Р. Полупроводники : учеб. пособие / Р. Смит. – М. : Изд-во иностр. лит., 1967. – 467 с.
2. Орешкин, П. Т. Физика полупроводников и диэлектриков : учеб. пособие / П. Т. Орешкин. – М. : Высш. шк., 1977. – 448 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 31.10.2016

#### ***Kostko V.S. Exciton Levels and their Registration with the Help of Spectrophotometer***

*On the example of exciton levels the need for spectroscopic studies at low temperatures is substantiated. To this aim, a relatively simple nitrogen cryostat for spectrophotometer type SF-4, SF-16 is offered. The absorption spectrum of thin films of  $\text{PbI}_2$  and  $\text{SnI}_2$  at a temperature of 77 K, obtained using the described cryostat and spectrophotometer VSU-2P is given. It is established that the edge of own absorption of  $\text{SnI}_2$  is due to direct allowed transitions of electrons in the exciton state with the main quantum number  $n = 1$ .*

УДК 538.9

**В.А. Лионо<sup>1</sup>, Е.В. Овчинников<sup>2</sup>, С.С. Секержицкий<sup>3</sup>, А.Л. Ситкевич<sup>4</sup>**<sup>1</sup>д-р физ.-мат. наук, проф., проф. каф. теоретической физики и теплотехники

Гродненского государственного университета имени Я. Купалы

<sup>2</sup>канд. техн. наук, доц., доц. каф. логистики

Гродненского государственного университета имени Я. Купалы

<sup>3</sup>канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. общей и теоретической физики

Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

<sup>4</sup>аспирант каф. теоретической физики и теплотехники

Гродненского государственного университета имени Я. Купалы

**МАКСИМАЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ  
УПАКОВКИ ШАРОВ С РАЗЛИЧНЫМИ РАЗМЕРАМИ**

*В статье изучены плотнейшие упаковки шаров различных размеров, что актуально при моделировании наполненных систем с заранее заданными свойствами. Последовательно рассмотрены плотнейшие моноупаковки с учетом расположения в них как центров частиц, так и пустот двух типов. Это позволило, используя основные принципы симметрии некоторых видов кристаллических решеток, получить конкретные результаты по определению коэффициентов компактности данных систем.*

**Введение**

В настоящее время одними из основных материалов различного назначения являются композиты. Композитные вещества характеризуются различным составом, свойствами и технологическими характеристиками. У всех композитных материалов имеются одинаковые особенности, заключающиеся в следующем.

Все композиты по своему фазовому составу включают в себя непрерывное однородное вещество, называемое основой (матрицей или связующим). Это вещество обладает определенными свойствами с требуемыми численными значениями параметров. Для изменения значений этих параметров, а зачастую и приданию материалу новых свойств, в матрицу вносят частицы другого вещества, которое изменяет, модифицирует характеристики вещества основы. Эти частицы-модификаторы выполняют самые различные функции: увеличивают твердость, гибкость, прочность, износостойкость, электропроводность, теплопроводность, цвет и так далее.

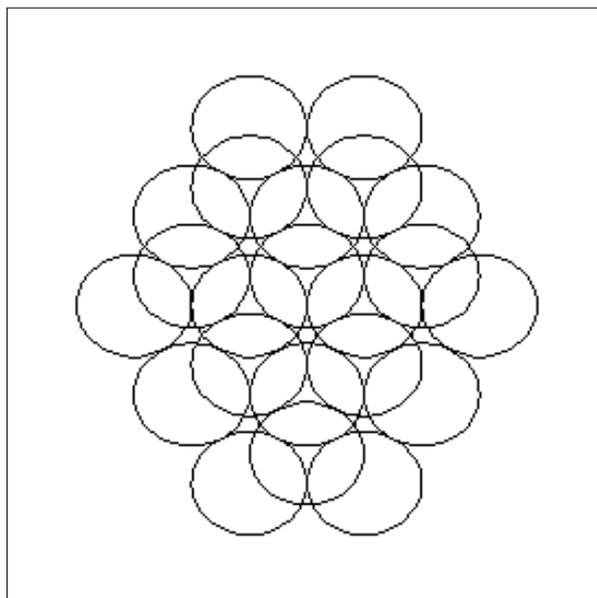
Отношение суммарного объема всех частиц наполнителя  $V_H$  к объему композита  $V_K$ ,  $K = \frac{V_H}{V_K}$  называется коэффициентом компактности, или коэффициентом напол-

нения. Как правило, значение  $K$  лежит в интервале от нескольких до десятков процентов [1]. Вещество матрицы является основной составляющей композиционного материала. Но в ряде случаев роль наполнителя становится определяющей, а вещество матрицы формирует единый каркас, соединяющий частицы наполнителя в единое целое. К веществам такого типа относятся различные абразивные материалы, продукты порошковой металлургии, топливные элементы различного назначения и др. [2].

Если частицы наполнителя-модификатора имеют небольшие размеры (менее  $10^{-4}$  м) и их объемные аналоги обладают изотропными свойствами, то с достаточной степенью приближения можно считать, что они имеют форму сфер. В этом случае оправдано использование моделей шаровых упаковок частиц.

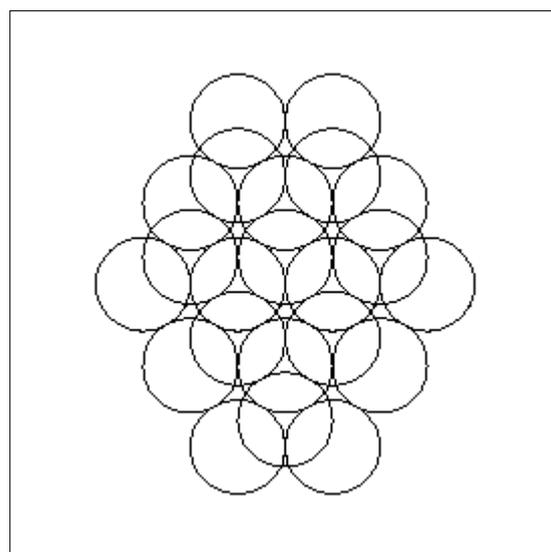
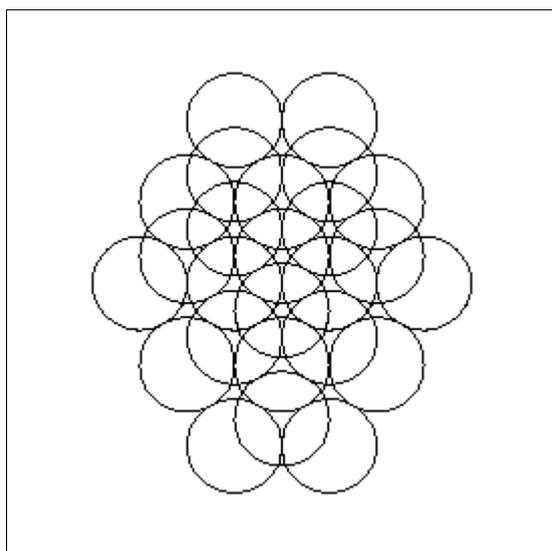
**Элементы теории плотнейших шаровых упаковок**

Плоская плотнейшая упаковка шаров построена из линейных шаровых решеток с периодом  $d$  (диаметр шара). Эти линейные решетки прилегают друг к другу по схеме, приведенной на рисунке 1.



**Рисунок 1. – Плотнейшая шаровая упаковка из двух слоев.**

Шары слоя  $B$  над слоем  $A$  находятся в лунках из трех шаров слоя  $A$ . Третий слой шаров располагается в лунках из трех шаров слоя  $B$ . Но шары третьего слоя могут размещаться двумя способами: в лунках  $B$  над шарами слоя  $A$  или в лунках слоя  $B$  над лунками слоя  $A$ . Упаковка шаров первого типа называется гексагональной плотнейшей упаковкой (ГПУ). Вторая формирует кубическую плотнейшую упаковку с гранцентрированной ячейкой (ГЦК) (рисунок 2).



а)

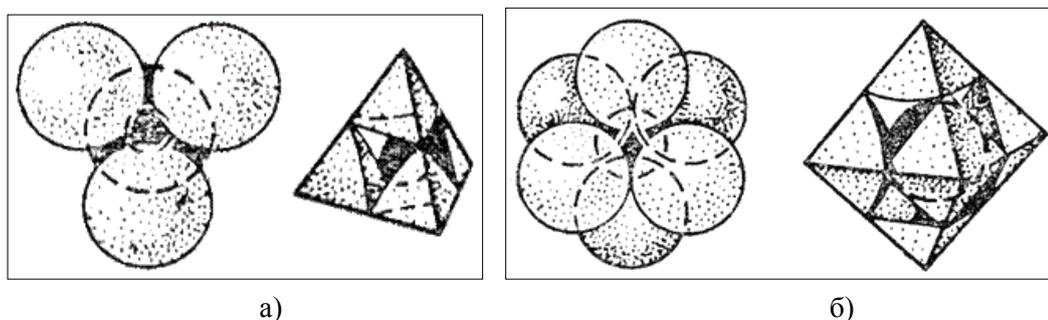
б)

а) – ГЦК, б) – ГПУ

**Рисунок 2. – Плотнейшие шаровые упаковки**

В плотнейших упаковках суммарный объем шаров меньше объемов, в которых находятся эти шаровые упаковки.

Между шарами имеются пустоты двух типов. Над тремя шарами одного слоя находится один шар другого, и над тремя шарами одного слоя размещаются три шара другого слоя. В первом случае создается тетраэдрическая, а во втором – октаэдрическая пустота (рисунок 3).



а) – тетраэдрическая, б) – октаэдрическая

**Рисунок 3. – Пустоты в шаровых упаковках**

В эти пустоты могут входить шары меньшего радиуса, которые не разрушат плотнейшую упаковку более крупных шаров. Если радиус шаров, формирующих плотнейшую упаковку, равен  $R$ , то максимальные размеры шаров, размещаемых в тетраэдрической и октаэдрической пустотах ( $R_T$  и  $R_O$  соответственно) равны:

$$R_T = R \left( \sqrt{\frac{3}{2}} - 1 \right) \approx 0,225R, \quad (1)$$

$$R_O = R (\sqrt{2} - 1) \approx 0,414R. \quad (2)$$

Координационные числа тетраэдрического и октаэдрического полиэдра соответственно равны  $K_T = 4$ ,  $K_O = 6$ .

#### **Число пустот и их размещение в плотнейших шаровых упаковках**

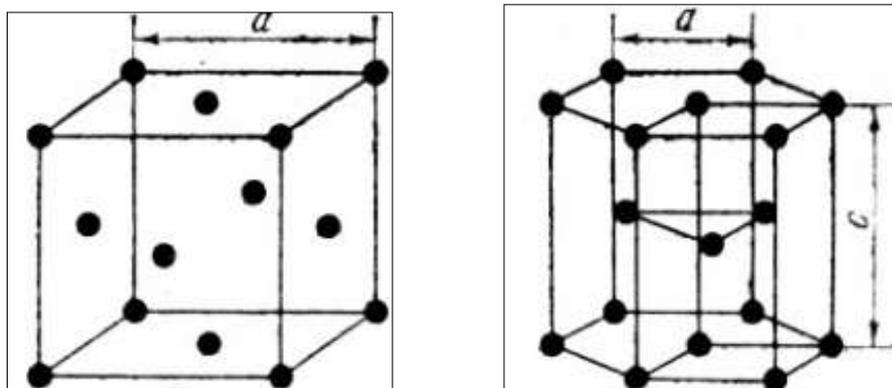
Плотнейшие упаковки шаров в кристаллах реализуются в двух типах: ГЦК и ГПУ. Ячейки этих кристаллов приведены на рисунке 4.

Координаты атомов в кристаллографической системе (в репере Бравэ) [3] следующие: ГЦК –  $\left[ 0,0,0; \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right); \left( \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right); \left( 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right]$ , ГПУ –  $\left[ 0,0,0; \left( \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right) \right]$ .

На одну ячейку ГЦК-кристалла приходится 4 атома, для ГПУ – 2 атома. В ГПУ-системе  $C = \frac{2\sqrt{6}}{3}a$ ,  $a = 2R$ . В ГЦК  $a = 2\sqrt{2}R$ .

Отсюда следует, что коэффициент упаковки для ГЦК-решетки и ГПУ-системы равен:

$$K = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} \approx 74,0\%. \quad (3)$$



а) б)  
 а) – гранецентрированной кубической (ГЦК),  
 б) – гексагональной плотнейшей упаковки (ГПУ)

**Рисунок 4. – Ячейки кристаллов**

Для определения числа пустот в плотнейшей шаровой упаковке рассмотрим терему.

**Теорема.** В бесконечно большой, т.е. без учета граничных условий, плотнейшей шаровой упаковке, включающей  $N$  атомов, число тетраэдрических пустот равно  $2N$ , а октаэдрических –  $N$ .

**Доказательство.** Коэффициент компактности плотнейшей шаровой упаковки равен  $K = \frac{\pi}{3\sqrt{2}}$ . Объемы тетраэдров и октаэдров, в вершинах которых находятся центры атомов, соответственно равны

$$V_T = \frac{2}{3}\sqrt{2}R^3$$

$$V_O = \frac{8}{3}\sqrt{2}R^3. \tag{4}$$

Вершины тетраэдров и октаэдров совпадают, и эти полиэдры заполняют весь объем шаровой системы без пропусков.

В системе  $N$  шаров имеется  $T$  тетраэдров и  $O$  октаэдров. Отношение объема занятого шарами, к объему, равному сумме объемов всех тетраэдров и октаэдров, определяется коэффициентами компактности. Следовательно,

$$\frac{N \frac{4}{3}\pi R^3}{T \frac{2\sqrt{2}}{3}R^3 + O \frac{8\sqrt{2}}{3}R^3} = \frac{\pi\sqrt{2}N}{T + 4O} = \frac{\pi\sqrt{2}}{6}. \tag{5}$$

Отсюда получаем:

$$T + 4O = 6N. \tag{6}$$

Это условие справедливо для любой плотнейшей упаковки шаров, в том числе и для упаковок смешанного типа: ...*ABACBCA*... В такой упаковке одинаковые слои не могут контактировать друг с другом.

В ячейке  $F$ -типа в соответствии с ее базисом Бравэ имеются четыре гомологичные точки. Следовательно, в кристаллах с этой ячейкой Бравэ значения  $T$  и  $O$  (в усло-

вии (5)) должны быть кратны 4. Так как  $T, A$  положительные числа, то решением (5) являются  $O = N, T = 2N$ .

Теорема доказана.

### Координаты центров октаэдров и тетраэдров в ГЦК и ГПУ ячейках

Так как отношения  $\frac{T}{N}$  и  $\frac{A}{N}$  одинаковы для всех плотнейших шаровых упаковок, то в ячейке ГЦК находится 8 тетраэдрических и 4 октаэдрических пустот. В ячейке ГПУ тетраэдрических 4, октаэдрических – 2.

Координаты тетраэдрических пустот в репере Бравэ ГЦК решетки:  $\left[ \left( \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right); \left( \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4} \right); \left( \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right); \left( \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4} \right); \left( \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right); \left( \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4} \right); \left( \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right); \left( \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4} \right) \right]$ . Первые четыре точки и вторые четыре точки связаны репером Бравэ ГЦК-ячейки.

Центры октаэдрических пустот тоже связаны репером Бравэ и имеют координаты:  $\left[ \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right); \left( 0, 0, \frac{1}{2} \right); \left( 0, \frac{1}{2}, 0 \right); \left( \frac{1}{2}, 0, 0 \right) \right]$ . Так как в ГПУ-ячейке имеется два атома с координатами  $\left[ 0, 0, 0; \left( \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2} \right) \right]$ , то в ней должно быть четыре тетраэдрических и две октаэдрических пустоты. Координаты тетраэдрических пустот (в репере ГПУ-ячейки) следующие:  $\left[ \left( 0, 0, \frac{3}{8} \right); \left( 0, 0, \frac{5}{8} \right); \left( \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{8} \right); \left( \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{7}{8} \right) \right]$ . Координаты октаэдрических пустот в ГПУ-ячейке имеют значения:  $\left[ \left( \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \right); \left( \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4} \right) \right]$ .

### Коэффициенты компактности при различных размерах шаров

Объемы ячеек ГПУ и ГЦК систем равны  $V_{ГЦК} = 2V_{ГПУ} = 16\sqrt{2}R^3$ . Максимальный коэффициент компактности для плотнейшей шаровой упаковки равен 74% (3). Но в тетраэдрических и октаэдрических пустотах можно разместить шары с радиусами  $R_T$  и  $R_O$ . Если заполнены все октаэдрические пустоты, то объем, занятый шарами, увеличивается на величину  $4N\pi R_O^3$ , где  $R_O = 0,414R$  – радиус основных (крупных) шаров,  $N$  – число атомов в ячейке.

Рассмотрим увеличение коэффициента компактности  $K_O$  по сравнению с упаковкой шаров одинакового размера на базе ГПУ-ячейки  $N = 2$ :

$$\Delta K_O = \frac{2 \cdot \frac{4}{3} \cdot 0,414R^3}{8\sqrt{2}R^3} \approx 5,3\% . \quad (7)$$

При заполнении только тетраэдрических пустот изменение коэффициента компактности равно:

$$\Delta K_O = \frac{4 \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 0,225R^3}{8\sqrt{2}R^3} \approx 1,7\% . \quad (8)$$

Следовательно, при заполнении всех пустот в плотнейшей шаровой упаковке шарами соответствующих размеров максимальный коэффициент компактности равен

$$K_{MAX} = 4,0 + 5,3 + 1,7 = 81,0\% . \quad (9)$$

В пустоты между тетраэдрическим шаром и треугольником из шаров основной структуры могут войти 4 шара с радиусом  $0,156R$ . В октаэдрах могут войти 6 шаров с радиусом  $0,260R$ . Это приведет к увеличению коэффициента компактности  $K_{MAX}$  на величину  $\Delta K_{MAX} \approx 10\%$ . Следовательно, при указанном заполнении пустот в плотнейшей шаровой упаковке максимальный коэффициент компактности приблизительно равен 90%.

Можно в пустоты вместо тетраэдрического шара включить 4 шара, образующих внутренний тетраэдр, а в его центр переместить шар с меньшим радиусом. В октаэдрические пустоты можно включить шесть шаров, образующих октаэдр с меньшим шаром. Но и в этом случае коэффициент компактности не будет превышать 90%.

Если шары не уложены в соответствии с условиями плотнейшей упаковки, то коэффициент компактности не превышает 64% [1]. Добавление в эту систему шаров с одинаковыми радиусами может увеличить коэффициент компактности не более чем на 6%.

Добиться более высокого значения коэффициента компактности можно с использованием гидростатического сжатия при условии, что шары обладают пластической деформацией.

При упаковке моноразмерных шаров при их пластической деформации возникает упаковка полиэдров Вороного [3]. Если в эту упаковку включены шары с различными пластичностями, то при сжатии возникает упаковка полиэдров Делоне [4]. Для придания механической прочности этой системе необходимо, чтобы шары после их деформации создавали прочные связи по поверхностям контакта. В противном случае необходимо наличие гомогенной фазы, которая бы играла роль склеивающей фракции.

Для частиц несферической формы, например, для стержней или пластинок, коэффициент компактности может превышать значение коэффициента для шаровых упаковок. Наибольшее значение коэффициента компактности соответствует плотнейшей упаковке текстуры из пластинчатых частиц.

### Заключение

При создании композиционных материалов, как правило, концентрация основы, т.е. связующего, значительно превышает концентрацию частиц наполнителя. Но существуют такие системы, у которых одна фаза представляет собой континуальное вещество, которое играет роль связующего. Другая фаза – совокупность частиц. Если эти частицы несут основные функциональные нагрузки, то создается вещество с максимальной концентрацией этой дискретной составляющей.

Если частицы имеют форму шара, то для моноразмерной фракции максимальное значение коэффициента упаковки равно 74%. Внесение в упаковку шаров радиуса  $R$ ,

соответствующих размерам тетраэдрических  $R_T = \left( \sqrt{\frac{3}{2}} - 1 \right) R$  и октаэдрических

$R_O = \sqrt{2} - 1 R$  пустот, увеличивает коэффициент упаковки до значений 90%. Для ГЦК и ГПУ систем приведены кристаллографические координаты центров структурных тетраэдров и октаэдров. В условиях идеальных плотнейших упаковок добавка шаров с меньшими размерами, которые могут войти в пустоты между шарами основной упа-

ковки  $\mathcal{R}_T$  и шарами, заполняющими тетраэдры  $\mathcal{R}_T$  и октаэдры  $\mathcal{R}_O$ , увеличивает коэффициент компактности примерно на 6,4% [5].

В реальных условиях получить плотнейшую упаковку в больших объемах невозможно. В этом случае  $K_{MAX} \approx 64\%$  для моноразмерных шаров. С учетом тетраэдрических и октаэдрических заполнений можно достичь  $K_{MAX} \approx 70\%$ .

Для текстур с частицами пластинчатой формы коэффициент наполнения  $K_{MAX}$  достигает 95 ÷ 98%.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лиопо, В. А. Модельные представления о механизме модифицирования полимеров слоистыми силикатами / В. А. Лиопо [и др.] // Докл. Акад. наук Беларуси. – 2005. – Т. 49, № 6. – С. 101–105.
2. Секержицкий, С. С. Математическое моделирование гетерогенных структур наполненных систем : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 05.13.16 / С. С. Секержицкий. – Минск, 1995. – 89 с.
3. Вайнштейн, Б. К. Современная кристаллография : в 4 т. / Б. К. Вайнштейн. - М. : Наука, 1979. – Т. 1 : Симметрия кристаллов. Методы структурной кристаллографии. – 383 с.
4. Галиулин, Р. В. Кристаллографическая карта мира / Р. В. Галиулин // Успехи физ. наук. – 2002. – Т. 172, № 2. – С. 229–233.
5. Конвей, Дж. Упаковки, шары, решетки и группы : в 2 т. / Дж. Конвей, Н. Слоэн. – М. : Мир, 1990. – 794 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 06.09.2016

#### ***Liopo V.A., Auchynnikau Y.V., Sekerzhitsky S.S., Sitkevich A.L. The Maximum Value Packing of Spheres with Different Sizes***

*The article studied the densest packing of spheres of different sizes, which is important in modeling of filled systems with predetermined properties. Densest packing successively considered, in view of their location as the particle centers and two types of cavities. This allowed using the basic principles of symmetry of certain types of crystal lattices, to obtain concrete results to determine the compactness of the coefficients of these systems.*

УДК 539.12

**Е.М. Овсиюк<sup>1</sup>, О.В. Веко<sup>2</sup>, Я.А. Войнова<sup>3</sup>, В.В. Кисель<sup>4</sup>, В.М. Редьков<sup>5</sup>**

<sup>1</sup>канд. физ.-мат. наук, доц. каф. общей физики и методики преподавания физики

Мозырского государственного университета имени И.П. Шамякина

<sup>2</sup>учитель физики гимназии г. Калинковичи

<sup>3</sup>учитель физики Качищанской средней школы Ельского района

<sup>4</sup>канд. физ.-мат. наук, доц. каф. физики

Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники

<sup>5</sup>д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник лаборатории теоретической физики

Института физики имени Б.И. Степанова НАН Беларуси

**ОБ ОТРАЖЕНИИ ЧАСТИЦ СПИНА  $\frac{1}{2}$  «ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ СРЕДОЙ»  
ПРОСТРАНСТВА ЛОБАЧЕВСКОГО,  
УЧЕТ ВНЕШНЕГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ**

Ранее было показано, что геометрия пространства Лобачевского может рассматриваться в электродинамическом контексте как основа для моделирования эффективной среды, действующей как распределенное в пространстве и ориентированное перпендикулярно оси  $z$  идеальное зеркало. В настоящей работе аналог этого эффекта исследован для поля со спином  $\frac{1}{2}$ . В явном виде построены решения уравнения Дирака, описывающие ситуацию, когда поле отражается от (геометрического) эффективного потенциального барьера, не проникая за него. Глубина проникновения в такую «среду» определяется характеристиками квантовых состояний фермиона и радиусом кривизны пространства Лобачевского; для решений с  $k_1 = 0, k_2 = 0$  эффективный отражающий барьер исчезает. Проведен учет внешнего ориентированного вдоль оси  $z$  электрического поля. Задача приводится к дифференциальному уравнению второго порядка с четырьмя особыми точками, причем одна особая точка на бесконечности – нерегулярная ранга 3. При устранении электрического поля выведенное уравнение упрощается до вырожденного уравнения Гойна, при этом появляется возможность построить его решения в терминах вырожденных гипергеометрических функций.

**Введение**

Неевклидова геометрия пространства Лобачевского может рассматриваться как основа для моделирования эффективной среды в электродинамическом контексте [1]. В частности, геометрия Лобачевского при использовании квазидекартовых координат эффективно описывает вполне определенную материальную среду; эффективные материальные уравнения имеют вид

$$D^i = \varepsilon_0 \varepsilon^{ik} E_k, \quad B_i = \mu_0 \mu^{ik} H^k, \quad \varepsilon^{ik}(x) = \mu^{ik}(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2z} \end{vmatrix}; \quad (1)$$

среда неоднородна вдоль оси  $z$ . Уравнения Максвелла в этих координатах пространства Лобачевского можно привести к задаче исследования одного дифференциального уравнения [2; 3], которое можно сопоставить с одномерным уравнением Шредингера

$$\left( \frac{d^2}{dz^2} + \varepsilon - U(z) \right) \varphi(z) = 0 \quad (2)$$

с потенциальной функцией  $U(z) = (a^2 + b^2)e^{2z}$ , описывающей эффективную силу отталкивания налево  $F_z = -2(a^2 + b^2)e^{2z}$ . В контексте квантовой механики такое уравнение описывает движение частицы в потенциальном поле, плавно растущем до бесконечно-

сти при устремлении координаты  $z$  к бесконечности; частица отражается от этого барьера, не проникая за него.

Аналогичная ситуация реализуется и в электродинамике. Таким образом, геометрия Лобачевского действует эффективно как распределенное в пространстве, ориентированное перпендикулярно оси  $z$  идеальное зеркало.

Этот анализ был обобщен [4] на случай нерелятивистской шредингеровской частицы в пространстве Лобачевского; закономерности отражения такой частицы в поле эффективной (геометрической) среды похожи на те, которые имеют место для электромагнитного поля. Некоторое неполное исследование такой задачи было сделано в [5–7] для релятивистского уравнения Дирака: формальные решения уравнения в пространстве Лобачевского были построены в терминах вырожденных гипергеометрических функций, хотя явно описать эффект отражения дираковских частиц такой средой не удалось. В настоящей работе этот эффект отражения спинорных частиц доказан. Кроме того, ранее была решена задача о поведении шредингеровской частицы в пространстве Лобачевского с учетом внешнего электрического поля [8; 9]. В настоящей работе проведено обобщение этого исследования для случая частицы со спином  $\frac{1}{2}$ . В частности, удается привести задачу к сложному обыкновенному дифференциальному уравнению с четырьмя особыми точками, причем одна особенность иррегулярная ранга 3. При устранении внешнего электрического поля выведенное уравнение упрощается до вырожденного уравнения Гойна с учетом результатов [5–7] появляется возможность построить решения этого уравнения в терминах вырожденных гипергеометрических функций.

### 1. Разделение переменных

Рассмотрим дираковскую частицу в электрическом поле на фоне пространства Лобачевского на основе квазидекартовых координат

$$dS^2 = dt^2 - e^{-2z}(dx^2 + dy^2) - dz^2, \quad \sqrt{-g} = e^{-2z}, \quad z \in (-\infty, +\infty). \quad (3)$$

Найдем описание электрического поля как решения уравнений Максвелла в этом пространстве:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \sqrt{-g} F^{\alpha\beta} = 0, \quad A_\alpha = (A(z), 0, 0, 0), \quad F^{30} = -\frac{dA}{dz};$$

получаем уравнение с простым решением

$$\frac{1}{e^{-2z}} \frac{d}{dz} e^{-2z} \frac{dA}{dz} = 0 \Rightarrow \frac{dA}{dz} = e^{2z} c_1, \quad A = \frac{c_1}{2} e^{2z} + c_2.$$

Из требования, чтобы в пределе малых значений  $z$  получалось известное представление однородного электрического поля, находим следующее представление:

$$A(z) = \frac{E}{2}(e^{2z} - 1), \quad F_{30} = Ee^{2z}. \quad (4)$$

Будем исходить из общековариантной формы уравнения Дирака [10]

$$\left[ \gamma^a \left( e_{(a)}^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \sqrt{-g} e_{(a)}^\alpha \right) + ieA_{(a)} \right) - m \right] \Psi(x) = 0; \quad (5)$$

используем тетраду  $e_{(a)}^\beta = \text{diag}(1, e^z, e^z, 1)$ ; уравнение (5) принимает вид ( $x, y, z$  – безразмерные)

$$\left[ i\gamma^0 \left( \frac{\partial}{\partial t} + ieA(z) \right) + i\gamma^1 e^z \frac{\partial}{\partial x} + i\gamma^2 e^z \frac{\partial}{\partial y} + i\gamma^3 \left( \frac{\partial}{\partial z} - 1 \right) - M \right] \Psi = 0. \quad (6)$$

С оператором из (6) коммутируют следующие три:  $i\partial_t$ ,  $-i\partial_x$ ,  $-i\partial_y$ ; решения ищем в виде

$$\Psi^{\varepsilon, k_1, k_2} = e^{-i\varepsilon t} e^{ik_1 x} e^{ik_2 y} \begin{pmatrix} f_1(z) \\ f_2(z) \\ f_3(z) \\ f_4(z) \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Используя матрицы Дирака в спинорном базисе, находим 4 уравнения для функций  $f_i(z)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  (используем обозначения:  $k_1 = a$ ,  $k_2 = b$ ; также пусть  $f_i = e^z F_i$ ):

$$D_- F_3 = MF_1 - e^z(a-ib)F_4, \quad D_- F_2 = e^z(a+ib)F_1 + MF_4; \quad (8)$$

$$D_+ F_4 = MF_2 - e^z(a+ib)F_3, \quad D_+ F_1 = e^z(a-ib)F_2 + MF_3, \quad (9)$$

где  $D_- = -i \frac{d}{dz} + \varepsilon - eA(z)$ ,  $D_+ = i \frac{d}{dz} + \varepsilon - eA(z)$ .

Решения систем (8) и (9) выглядят так:

$$F_1 = \frac{1}{\varphi} [MD_- F_3 + e^z(a-ib)D_- F_2], \quad F_4 = \frac{1}{\varphi} [MD_- F_2 - e^z(a+ib)D_- F_3], \quad (10)$$

$$F_2 = \frac{1}{\varphi} [MD_+ F_4 + e^z(a+ib)D_+ F_1], \quad F_3 = \frac{1}{\varphi} [MD_+ F_1 - e^z(a-ib)D_+ F_4], \quad (11)$$

где  $\varphi = M^2 + e^{2z}(a^2 + b^2)$ . Далее получаем

$$D_+ \left[ \frac{MD_- F_2}{M^2 + e^{2z}(a^2 + b^2)} - \frac{e^z(a+ib)D_- F_3}{M^2 + e^{2z}(a^2 + b^2)} \right] = MF_2 - e^z(a+ib)F_3,$$

$$D_+ \left[ \frac{e^z(k_1 - ib)D_- F_2}{M^2 + e^{2z}(a^2 + b^2)} + \frac{MD_- F_3}{M^2 + e^{2z}(a^2 + b^2)} \right] = e^z(a-ib)F_2 + MF_3.$$

Отсюда следует система зацепляющихся уравнений второго порядка:

$$\left\{ \varphi \frac{d^2}{dz^2} - e^{2z}(a^2 + b^2) \frac{d}{dz} + \varphi[(eA - \varepsilon)^2 - ieA'] + ie^{2z}(a^2 + b^2)(eA - \varepsilon) - \varphi^2 \right\} F_3 =$$

$$= Me^z \left( -\frac{d}{dz} + i(eA - \varepsilon) \right) (a - ib)F_2,$$

$$\left\{ \varphi \frac{d^2}{dz^2} - e^{2z}(a^2 + b^2) \frac{d}{dz} + \varphi[(eA - \varepsilon)^2 - ieA'] + ie^{2z}(a^2 + b^2)(eA - \varepsilon) - \varphi^2 \right\} F_2 =$$

$$= Me^z \left( \frac{d}{dz} - i(eA - \varepsilon) \right) (a + ib)F_3.$$

## 2. Построение решений

Обозначив оператор второго порядка слева как  $\Delta$ , уравнения можно представить так:

$$\Delta F_2 = +Me^z \left( \frac{d}{dz} - i(eA - \varepsilon) \right) (a + ib) F_3, \quad \Delta F_3 = -Me^z \left( \frac{d}{dz} - i(eA - \varepsilon) \right) (a - ib) F_2.$$

Перейдем к матричной форме

$$\Delta \begin{pmatrix} F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = Me^z \begin{pmatrix} \frac{d}{dz} - i(eA - \varepsilon) & 0 \\ 0 & \frac{d}{dz} - i(eA - \varepsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a + ib & \\ & a - ib \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Оператор справа можно диагонализировать:

$$\begin{aligned} G &= SF, \quad S \Delta S^{-1} G = A_0 (S A S^{-1}) G = A_0 A' G, \\ SA &= A' S \Rightarrow \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}, \\ P^{-1} A P &= J, \quad \begin{pmatrix} A_1 & a - ib \\ a + ib & -A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{12} \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} A_2 & a - ib \\ a + ib & -A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{21} \\ s_{22} \end{pmatrix} = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Отсюда следует собственные значения для  $A_1, A_2$  и ограничения на элементы матрицы  $s_{ij}$ :

$$\begin{aligned} A_1 &= +i\sqrt{(a+ib)(a-ib)}, \quad (a+ib)s_{11} = +i\sqrt{(a+ib)(a-ib)} s_{12}, \\ A_2 &= -i\sqrt{(a+ib)(a-ib)}, \quad (a+ib)s_{21} = -i\sqrt{(a+ib)(a-ib)} s_{22}. \end{aligned}$$

Выберем решение:

$$S = \begin{pmatrix} \sqrt{a-ib} & -i\sqrt{a+ib} \\ -i\sqrt{a-ib} & \sqrt{a+ib} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} G_2 \\ G_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{a-ib} & -i\sqrt{a+ib} \\ -i\sqrt{a-ib} & \sqrt{a+ib} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

В результате получим два отдельных уравнения второго порядка:

$$\Delta G_2 = Me^z \left( \frac{d}{dz} - i(eA - \varepsilon) \right) \left( i\sqrt{a^2 + b^2} \right) G_2, \quad (15)$$

$$\Delta G_3 = Me^z \left( \frac{d}{dz} - i(eA - \varepsilon) \right) \left( -i\sqrt{a^2 + b^2} \right) G_3, \quad (16)$$

в явном виде они записываются так:

$$\begin{aligned} &\left\{ \left[ M^2 + e^{2z}(a^2 + b^2) \right] \frac{d^2}{dz^2} - e^{2z}(a^2 + b^2) \frac{d}{dz} + \left[ M^2 + e^{2z}(a^2 + b^2) \right] [(eA - \varepsilon)^2 - ieA'] + \right. \\ &\quad \left. + ie^{2z}(a^2 + b^2)(eA - \varepsilon) - \left[ M^2 + e^{2z}(a^2 + b^2) \right]^2 - \right. \\ &\quad \left. - \left( i\sqrt{a^2 + b^2} \right) Me^z \left( \frac{d}{dz} - i(eA - \varepsilon) \right) \right\} G_2 = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} &\left\{ \left[ M^2 + e^{2z}(a^2 + b^2) \right] \frac{d^2}{dz^2} - e^{2z}(a^2 + b^2) \frac{d}{dz} + \left[ M^2 + e^{2z}(a^2 + b^2) \right] [(eA - \varepsilon)^2 - ieA'] + \right. \\ &\quad \left. + ie^{2z}(a^2 + b^2)(eA - \varepsilon) - \left[ M^2 + e^{2z}(a^2 + b^2) \right]^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left( i\sqrt{a^2 + b^2} \right) Me^z \left( \frac{d}{dz} - i(eA - \varepsilon) \right) \right\} G_3 = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Различия между уравнениями незначительные, поэтому достаточно исследовать одно из них. В уравнении для  $G_3$  учтем явный вид функции  $A(z)$ , а затем перейдем к переменной  $Z = e^z$ :

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 F_3}{dZ^2} + \left[ \frac{1}{Z} + \frac{iM\sqrt{a^2+b^2} - Z(a^2+b^2)}{Z^2(a^2+b^2) + M^2} \right] \frac{dF_3}{dZ} + \\ & + \left[ \frac{1}{4} E^2 e^2 Z^2 - \frac{1}{2} Ee \frac{Ee+i}{-Ee\varepsilon - (a^2+b^2)} - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{MZ} \frac{Ee+2\varepsilon}{Ee+2\varepsilon} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} \frac{Ee+2\varepsilon^2 - 4M^2}{Z^2} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{a^2+b^2}Z - iM [EM^2e + (a^2+b^2)Ee+2\varepsilon]}{[Z^2(a^2+b^2) + M^2]M} \right] G_3 = 0. \end{aligned}$$

Введем сокращающие обозначения и делаем замену переменных (чтобы две сингулярные точки поместить в  $\pm i$ ):

$$K = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{k_1^2+k_2^2}, \quad eE \Rightarrow f, \quad Z = \frac{M}{K}x, \quad \frac{M^2}{K^2} \equiv \sigma, \quad (19)$$

тогда получим

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dx^2} G_3 + \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x+i} \right) \frac{d}{dx} G_3 + \left\{ \frac{\sigma^2 f^2}{4} x^2 + \frac{\sigma f(f+i)}{2} - \sigma f \varepsilon - M^2 - \right. \\ & \left. - \frac{f+2\varepsilon}{2} \frac{1}{x} + \frac{(f+2\varepsilon)^2 - 4M^2}{4} \frac{1}{x^2} + \frac{\sigma f + f + 2\varepsilon}{2} \frac{1}{x+i} \right\} G_3 = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Чтобы получить результат для функции  $G_2$ , нужно в (17) провести формальную замену  $K \Rightarrow -K$ , а затем перейти к переменной  $x$ :

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dx^2} G_2 + \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x-i} \right) \frac{d}{dx} G_2 + \left\{ \frac{\sigma^2 f^2}{4} x^2 + \frac{\sigma f(f+i)}{2} - \sigma f \varepsilon - M^2 + \right. \\ & \left. + \frac{f+2\varepsilon}{2} \frac{1}{x} + \frac{(f+2\varepsilon)^2 - 4M^2}{4} \frac{1}{x^2} - \frac{\sigma f + f - 2\varepsilon}{2} \frac{1}{x-i} \right\} G_2 = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

У двух уравнений (20), (21) имеем по 4 особых точки:  $0, -i, +i, \infty$ ; причем конечные точки  $0, \pm i$  – регулярные, бесконечная  $x = \infty$  – нерегулярная. Действительно, делаем замену переменной  $X = x^{-1}$ , тогда в окрестности точки  $X = 0$  уравнение выглядит так:

$$X \rightarrow 0, \quad \left( \frac{d^2}{dX^2} + \frac{3}{X} \frac{d}{dX} + \frac{\sigma^2 f^2}{4} \frac{1}{X^6} \right) F_2 = 0,$$

т. е. ранг точки  $x = \infty$  равен 3:  $\text{Rang}(x = \infty) = \text{Max} \left\{ 1, \frac{6}{2} \right\} = 3$ . Анализ ранга сингулярности в точке  $x = \infty$  для уравнения (21) ничем не отличается от выполненного. Помня

об определении переменной  $x$ , отмечаем, что две особые точки  $-i$ ,  $+i$  лежат вне физической области изменения переменной  $x \in (0, +\infty)$ .

Электрическое поле в области  $z \rightarrow -\infty$  ведет себя так:  $A(z) \sim (e^{2z} - 1) \sim \text{const}$ ; это значит, что в этой области эффект наличия электрического поля должен исчезать. В этой связи рассмотрим случай отсутствия электрического поля во всем пространстве. Этот специальный случай может служить дополнительным контролем корректности вычислений; он представляет и самостоятельный интерес.

Уравнение (21) при  $f = eE = 0$  примет существенно более простой вид

$$\left\{ \frac{d^2}{dx^2} + \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x+i} \right) \frac{d}{dx} - M^2 - \frac{\varepsilon}{x} + (\varepsilon^2 - M^2) \frac{1}{x^2} + \frac{\varepsilon}{x+i} \right\} F_3 = 0. \quad (22)$$

Это уравнение имеет три особые точки  $0$ ,  $-i$ ,  $\infty$ ; точка  $x = \infty$  – иррегулярная ранга 2. Действительно, в переменной  $X = x^{-1}$  уравнение в окрестности точки  $X = 0$  имеет вид

$$\left( \frac{d^2}{dX^2} + \frac{2}{X} \frac{d}{dX} - \frac{M^2}{X^4} + \frac{\varepsilon^2 - M^2}{X^2} \right) F_3 = 0;$$

таким образом, речь идет о вырожденном уравнении Гойна [12]. Отмечаем, что в случае нулевой массы  $M^2 = 0$  точка  $x = \infty$  является регулярной особенностью и тогда уравнение сводится к гипергеометрическому типу.

### 3. Случай отсутствия электрического поля

Решения свободного уравнения Дирака в квазидекартовых координатах пространства Лобачевского можно построить [5–7] и в гипергеометрических функциях. Исходим из уравнений после разделения переменных

$$\begin{aligned} -i\varepsilon F_3 - iae^z F_4 - be^z F_4 - \frac{d}{dz} f_3 + iM F_1 &= 0, & -i\varepsilon F_4 - iae^z F_3 + be^z F_3 + \frac{d}{dz} F_4 + iM F_2 &= 0, \\ -i\varepsilon F_1 + iae^z F_2 + be^z F_2 + \frac{d}{dz} f_1 + iM F_3 &= 0, & -i\varepsilon F_2 + iae^z F_1 - be^z F_1 - \frac{d}{dz} F_2 + iM F_4 &= 0. \end{aligned}$$

Учтем, что существует оператор, коммутирующий с оператором волнового уравнения:

$$\Sigma = \frac{1}{2} \left( e^z \gamma^2 \gamma^3 \frac{\partial}{\partial x} + e^z \gamma^3 \gamma^1 \frac{\partial}{\partial y} + \gamma^1 \gamma^2 \frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (23)$$

Из уравнения  $\Sigma \Psi = p \Psi$  получим

$$\begin{aligned} ae^z F_2 - ibe^z F_2 - i \frac{d}{dz} F_1 &= p F_1, & ae^z F_1 + ibe^z F_1 + i \frac{d}{dz} F_2 &= p F_2, \\ ae^z F_4 - ibe^z F_4 - i \frac{d}{dz} F_3 &= p F_3, & ae^z F_3 + ibe^z F_3 + i \frac{d}{dz} F_4 &= p F_4. \end{aligned}$$

Две системы дифференциальных уравнений нужно рассматривать совместно, отсюда следует линейные уравнения  $f_i$ :

$$\begin{aligned} -i\varepsilon F_3 - ip F_3 + iM f_1 &= 0, & -i\varepsilon F_4 - ip F_4 + iM F_2 &= 0, \\ -i\varepsilon F_1 + ip F_1 + iM F_3 &= 0, & -i\varepsilon F_2 + ip f_2 + iM F_4 &= 0. \end{aligned}$$

Из условия равенства нулю определителя системы находим два значения для  $p$  и соответствующие ограничения на функции  $F_i$ :

$$p = \pm \sqrt{\varepsilon^2 - M^2}, \quad F_3 = \frac{\varepsilon - p}{M} F_1, \quad F_4 = \frac{\varepsilon + p}{M} F_2. \quad (24)$$

Учитывая (24), вместо четырех уравнений получаем только два:

$$\left( \frac{d}{dz} - ip \right) F_1 + ie^z (a - ib) F_2 = 0, \quad \left( \frac{d}{dz} + ip \right) F_2 - ie^z (a + ib) F_1 = 0.$$

Перейдем к переменной  $Z = e^z$ ,  $Z \in (0, +\infty)$ :

$$\left( \frac{d}{dZ} - \frac{ip}{Z} \right) F_1 + i(a - ib) F_2 = 0, \quad \left( \frac{d}{dZ} + \frac{ip}{Z} \right) F_2 - i(a + ib) F_1 = 0. \quad (25)$$

Отсюда следуют уравнения второго порядка

$$\left( \frac{d^2}{dZ^2} + \frac{p^2 + ip}{Z^2} - (a^2 + b^2) \right) F_1 = 0, \quad \left( \frac{d^2}{dZ^2} + \frac{p^2 - ip}{Z^2} - (a^2 + b^2) \right) F_2 = 0. \quad (26)$$

Это уравнения с одной регулярной особенностью в  $Z = 0$  и нерегулярной особенностью ранга 2 в точке  $Z = \infty$  (при  $a^2 + b^2 \neq 0$ ); т.е. имеем дело с вырожденным гипергеометрическим уравнением. Можно заметить, что формально уравнения связаны операцией комплексного сопряжения, поэтому достаточно исследовать только одно из них.

Для функции  $F_1(Z)$  используем подстановку  $F_1(Z) = Z^A e^{BZ} \bar{F}_1(Z)$ ; в результате получаем

$$\bar{F}_1'' + \left( \frac{2A}{Z} + 2B \right) \bar{F}_1' + \frac{2AB}{Z} \bar{F}_1 + \left( \frac{A(A-1)}{Z^2} + \frac{p^2 + ip}{Z^2} \right) \bar{F}_1 + [B^2 - (a^2 + b^2)] \bar{F}_1 = 0.$$

Фиксируем  $A, B$ :  $A = +ip, 1 - ip, B = \pm \sqrt{a^2 + b^2}$ ; уравнение для  $\bar{F}_1$  упрощается

$$Z \bar{F}_1'' + 2A + 2BZ \bar{F}_1' + 2AB \bar{F}_1 = 0.$$

Не теряя в общности, выбираем значения  $A = +ip, B = -\sqrt{a^2 + b^2}$ . Перейдя к переменной  $y$ :  $2BZ = -y, y = +2\sqrt{a^2 + b^2} e^z$ , получим уравнение

$$y \frac{d^2}{dy^2} \bar{F}_1 + (2A - y) \frac{d}{dy} \bar{F}_1 - A \bar{F}_1 = 0,$$

которое можно отождествить с вырожденным гипергеометрическим уравнением

$$\Phi'' + (\gamma - y)\Phi' - \alpha\Phi = 0, \quad \alpha = A = ip, \quad \gamma = 2A = 2ip.$$

В качестве двух линейно независимых решений можно выбрать следующие [11]:

$$\begin{aligned} \bar{F}_1^{(1)}(y) &= \Phi(\alpha, \gamma; y) = \Phi(ip, 2ip; y), \\ \bar{F}_1^{(2)}(y) &= y^{1-\gamma} \Phi(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma; y) = y^{1-2ip} \Phi(1 - ip, 2 - 2ip; y), \end{aligned} \quad (27)$$

что приводит к соответствующим выражениям для полной функции  $F_1(Z) = Z^A e^{BZ} \bar{F}_1$ :

$$F_1^{(1)} = y^{ip} e^{-y/2} \Phi(ip, 2ip; y), \quad F_1^{(2)} = y^{1-ip} e^{-y/2} \Phi(1-ip, 2-2ip; y). \quad (28)$$

Воспользовавшись отмеченной выше симметрией, можно получить линейно независимые решения уравнения и для функции  $F_2$ :

$$F_2^{(1)} = y^{-ip} e^{-y/2} \Phi(-ip, -2ip; y), \quad F_2^{(2)} = y^{1+ip} e^{-y/2} \Phi(1+ip, 2+2ip; y). \quad (29)$$

Специально отметим, что вопрос о характере связывания отдельных решений из

$$\{F_1^{(1)}, F_1^{(2)}; F_2^{(1)}, F_2^{(2)}\}$$

в пары (с учетом уравнений первого порядка (25)) и вычислении соответствующих относительных коэффициентов требует отдельного анализа ([7]). Но фактически достаточно исследовать функции  $F_1$ , сопутствующие им функции  $F_2$  можно затем находить дополнительными вычислениями на основе (25).

Ниже потребуются два разных набора линейно независимых решений:

$$Y^{(1)} = \Phi(A, 2A, y), \quad Y^{(2)} = y^{1-2A} \Phi(1-A, 2-2A, y); \quad (30)$$

$$Y^{(5)} = \Psi(A, 2A, y), \quad Y^{(7)} = e^y \Psi(A, 2A, -y). \quad (31)$$

Эти пары решений связаны линейными соотношениями Куммера [11]:

$$Y^{(5)} = \frac{\Gamma(1-2A)}{\Gamma(1-A)} Y^{(1)} + \frac{\Gamma(2A-1)}{\Gamma(A)} Y^{(2)}, \quad Y^{(7)} = \frac{\Gamma(1-2A)}{\Gamma(1-A)} Y^{(1)} - \frac{\Gamma(2A-1)}{\Gamma(A)} Y^{(2)},$$

которые после умножения на  $y^A e^{-y/2}$  принимают вид

$$F_1^{(5)} = \frac{\Gamma(1-2A)}{\Gamma(1-A)} F_1^{(1)} + \frac{\Gamma(2A-1)}{\Gamma(A)} F_1^{(2)}, \quad F_1^{(7)} = \frac{\Gamma(1-2A)}{\Gamma(1-A)} F_1^{(1)} - \frac{\Gamma(2A-1)}{\Gamma(A)} F_1^{(2)}. \quad (32)$$

Обращаем внимание, что решения  $F_1^{(1)}, F_1^{(2)}$  описывают при  $z \rightarrow -\infty, (y \rightarrow 0)$  волны с асимптотическим поведением

$$F_1^{(1)} \sim y^A e^{-y/2} = \left(2\sqrt{a^2 + b^2}\right)^{+ip} e^{+ipz}, \quad F_1^{(2)} \sim y^{1-A} e^{-y/2} = \left(2\sqrt{a^2 + b^2}\right)^{1-ip} e^{(1-ip)z}. \quad (33)$$

Следовательно, функции  $F_1^{(5)}$  и  $F_1^{(7)}$  при отрицательных  $z \rightarrow -\infty$  ведут себя как суперпозиция двух «плоских» волн:

$$F_1^{(5)} = \frac{\Gamma(1-2A)}{\Gamma(1-A)} \left(2\sqrt{a^2 + b^2}\right)^{+ip} e^{+ipz} + \frac{\Gamma(2A-1)}{\Gamma(A)} \left(2\sqrt{a^2 + b^2}\right)^{1-ip} e^{(1-ip)z},$$

$$F_1^{(7)} = \frac{\Gamma(1-2A)}{\Gamma(1-A)} \left(2\sqrt{a^2 + b^2}\right)^{+ip} e^{+ipz} - \frac{\Gamma(2A-1)}{\Gamma(A)} \left(2\sqrt{a^2 + b^2}\right)^{1-ip} e^{(1-ip)z}. \quad (34)$$

Отмечаем, что вторые слагаемые справа в этих равенствах пренебрежимо малы по сравнению с первыми ввиду присутствия затухающего фактора  $e^z \rightarrow 0$ . Это означает, что фактически имеем следующие асимптотики при  $z \rightarrow -\infty$ :

$$F_1^{+(5)} = \frac{\Gamma(1-2A)}{\Gamma(1-A)} \left(2\sqrt{a^2 + b^2}\right)^{+ip} e^{+ipz}, \quad F_1^{+(7)} = \frac{\Gamma(1-2A)}{\Gamma(1-A)} \left(2\sqrt{a^2 + b^2}\right)^{+ip} e^{+ipz}. \quad (35)$$

В силу очевидной симметрии соответствующие решения в случае противоположной поляризации получаются формальной заменой:  $p \Rightarrow -p$ ,  $A = ip \Rightarrow -A$ , для этого типа волн имеем следующие асимптотики при ( $z \rightarrow -\infty$ ):

$$F_1^{-(5)} = \frac{\Gamma(1+2A)}{\Gamma(1+A)} \left(2\sqrt{a^2+b^2}\right)^{-ip} e^{-ipz}, \quad F_1^{-(7)} = \frac{\Gamma(1+2A)}{\Gamma(1+A)} \left(2\sqrt{a^2+b^2}\right)^{-ip} e^{-ipz}. \quad (36)$$

Найдем поведение  $Y_5$  в области больших  $y \rightarrow +\infty$ . Применяя известное [11] асимптотическое соотношение  $Y_5 = \Psi(A, 2A, y) \sim y^{-A}$ , получим

$$z \rightarrow +\infty, \quad F_1^{+(5)} = y^A e^{-y/2} Y_5 \sim e^{-y/2} \sim \exp\left(-\sqrt{a^2+b^2} e^z\right) \rightarrow 0. \quad (37)$$

Аналогично находим поведение  $Y_7$  в области больших  $y \rightarrow +\infty$ . Применяя известное асимптотическое соотношение  $Y_7 = e^y \Psi(A, 2A, -y) \sim e^y y^{-A}$ , получим

$$z \rightarrow +\infty, \quad F_1^{+(7)} = y^A e^{-y/2} Y_7 \sim e^{+y/2} \sim \exp\left(+\sqrt{a^2+b^2} e^z\right) \rightarrow \infty. \quad (38)$$

Волны с  $p = -\sqrt{a^2+b^2}$  имеют то же самое асимптотическое поведение в области  $y \rightarrow +\infty$ .

Введем новые решения с помощью специальных комбинаций из  $F_1^{+(5)}$  и  $F_1^{-(5)}$ :

$$\psi_1^{\pm(5)} = \left(2\sqrt{a^2+b^2}\right)^{-ip} F_1^{+(5)} \pm \left(2\sqrt{a^2+b^2}\right)^{+ip} F_1^{-(5)}; \quad (39)$$

асимптотическое поведение этих решений при  $z \rightarrow \pm\infty$  следующее:

$$\psi_1^{(5)}(z \rightarrow -\infty) \sim \frac{\Gamma(1-2A)}{\Gamma(1-A)} e^{+ipz} \pm \frac{\Gamma(1+2A)}{\Gamma(1+A)} e^{-ipz}, \quad \psi_1^{\pm(5)}(z \rightarrow +\infty) \sim 0. \quad (40)$$

Для этих решений можно определить коэффициент отражения как квадрат модуля отношения амплитуд в суперпозиции плоских волн

$$\psi_1^{\pm(5)} \sim M_- e^{-ipz} \pm M_+ e^{+ipz}, \quad R = \left| \frac{M_-}{M_+} \right|^2 = \left| \frac{\Gamma(1+2A) \Gamma(1-A)}{\Gamma(1-2A) \Gamma(1+A)} \right|^2 = 1; \quad (41)$$

учли равенства  $A = +ip$ ,  $A^* = -A$ .

Таким образом, решения  $\psi_1^{\pm(5)}$  описывают ситуации, когда волны падают слева, отражаются с вероятностью 1 от эффективного «барьера», возникающего из-за неевклидовости геометрии пространства; далеко справа за «барьером» решение спадает до нуля.

Прямая интерпретация в терминах «барьер – отражение» затруднена в силу того, что дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют функции, содержат комплексные члены:

$$\left( \frac{d^2}{dZ^2} + \frac{p^2 + ip}{Z^2} - (a^2 + b^2) \right) F_1^+ = 0, \quad \left( \frac{d^2}{dZ^2} + \frac{p^2 - ip}{Z^2} - (a^2 + b^2) \right) F_1^- = 0. \quad (42)$$

Структура этих уравнений предполагает возможность выполнения условия  $F_1^- = (F_1^+)^*$ . Считая это выполненным, можно получить вещественные уравнения для новых функций (39)  $R^\pm = c F_1^+ \pm c^* (F_1^+)^*$ :

$$\left( \frac{d^2}{dZ^2} + \frac{p^2}{Z^2} - (a^2 + b^2) \right) R^+ + \frac{ip}{Z^2} R^- = 0, \quad \left( \frac{d^2}{dZ^2} + \frac{p^2}{Z^2} - (a^2 + b^2) \right) R^- + \frac{ip}{Z^2} R^+ = 0. \quad (43)$$

Эти уравнения в координате  $z = \ln Z$  выглядят так (выделяем простые множители:  $R^+ = e^{z/2} f^+$ ,  $R^- = e^{z/2} f^-$ ):

$$\left( \frac{d^2}{dz^2} + p^2 - \frac{1}{4} - (a^2 + b^2)e^{2z} \right) f^+ + ipf^- = 0, \quad \left( \frac{d^2}{dz^2} + p^2 - \frac{1}{4} - (a^2 + b^2)e^{2z} \right) f^- + ipf^+ = 0.$$

Легко найти критическую точку, после которой функции должны резко спадать до нуля:

$$p^2 - 1/4 = (k_1^2 + k_2^2) e^{2z_0} \Rightarrow z_0 = \ln \sqrt{\frac{p^2 - 1/4}{a^2 + b^2}}. \quad (44)$$

В окрестности точки  $z_0$  уравнения упрощаются до уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d^2}{dz^2} f^+ + ipf^- = 0, \quad \frac{d^2}{dz^2} f^- + ipf^+ = 0. \quad (45)$$

Ее решение может иметь только экспоненциальный вид:  $f^+ = Me^{v(z-z_0)}$ ,  $f^- = Ne^{v(z-z_0)}$ ; при этом уравнения (45) дают алгебраическую систему с четырьмя решениями:

$$\begin{vmatrix} v^2 & ip \\ ip & v^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} M \\ N \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow v = -\frac{1 \pm i}{\sqrt{2}} \sqrt{p}, + \frac{1 \pm i}{\sqrt{2}} \sqrt{p}. \quad (46)$$

Нужным затухающим справа от точки  $z_0$  решениям отвечают две первые возможности для  $v$  с отрицательной вещественной частью. В обычных единицах точка  $z_0$  описывается соотношением

$$z_0 = \rho \ln \sqrt{\frac{(E^2 - M^2 c^4) / c^2 \hbar^2 - 1/4 \rho^2}{(K_1^2 + K_2^2)}}; \quad (47)$$

здесь волновые числа  $K_1, K_2$  имеют обычную размерность обратного метра;  $\rho$  – радиус кривизны пространства Лобачевского. Отмечаем, что при устремлении к нулю величин  $K_1, K_2$  глубина проникновения поля в область положительных  $z$  неограниченно увеличивается; это находится в согласии с явным видом уравнений при  $a^2 + b^2 = 0$ : в них исчезает эффективный потенциал отталкивания.

### Заклучение

Воспользовавшись приведенным анализом, можно решения  $G_2, G_3$  вырожденного уравнения Гойна выразить через функции  $F_1, F_2$ , строящиеся в вырожденных гипергеометрических функциях:

$$G_2 = \sqrt{a-ib} F_2 - i\sqrt{a+ib} \frac{\varepsilon - p}{M} F_1, \quad G_3 = -i\sqrt{a-ib} F_2 + \sqrt{a+ib} \frac{\varepsilon - p}{M} F_1. \quad (48)$$

Понятно, что учет внешнего электрического поля приводит к более сложной математической задаче, но эффект отражения по-прежнему будет присутствовать – теперь по двум причинам: из-за электростатического поля и неевклидовости пространства.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Maxwell equations in Riemannian space-time, geometry effect on material equations in media / V. M. Red'kov [et al.] // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. – 2009. – Vol. 12, № 3. – P. 232–250.
2. Овсиюк, Е. М. О решениях уравнений Максвелла в квазидекартовых координатах в пространстве Лобачевского / Е. М. Овсиюк, В. М. Редьков // *Вес. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук*. – 2009. – № 4. – С. 99–105.
3. Новые задачи квантовой механики и уравнение Гойна / Е. М. Овсиюк [и др.] // *Науч.-техн. ведомости СПбГПУ. Физ.-мат. науки*. – 2012. – № 1(141). – С. 137–145.
4. Овсиюк, Е. М. О моделировании потенциального барьера в теории Шредингера геометрией пространства Лобачевского / Е. М. Овсиюк, О. В. Веко // *Вестн. Брѣсц. ун-та. Сер. 4, Фізика. Матэматыка*. – 2011. – № 2. – С. 30–36.
5. Овсиюк, Е. М. Решения типа плоских волн для частицы со спином  $\frac{1}{2}$  в пространстве Лобачевского / Е. М. Овсиюк, О. В. Веко // *Вес. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук*. – 2012. – № 4. – С. 80–83.
6. Ovsyuk, E. M. On simulating a medium with special reflecting properties by Lobachevsky geometry / E. M. Ovsyuk, O. V. Veko, V. M. Red'kov // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. – 2013. – Vol. 16, № 4. – P. 331–344.
7. Овсиюк, Е. М. О моделировании среды со свойствами идеального зеркала по отношению к свету и частицам со спином  $\frac{1}{2}$  / Е. М. Овсиюк, О. В. Веко, В. М. Редьков // *Вес. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук*. – 2015. – № 1. – С. 76–85.
8. Овсиюк, Е. М. О решении уравнения Шредингера для частицы в электрическом поле в пространствах постоянной кривизны / Е. М. Овсиюк, О. В. Веко // *Докл. НАН Беларуси*. – 2013. – Т. 57, № 3. – С. 43–47.
9. Ovsyuk, E. On behavior of quantum particles in an electric field in spaces of constant curvature, hyperbolic and spherical models / E. Ovsyuk, O. Veko, // *Украин. физ. журн*. – 2013. – Т. 58, № 12. – С. 1065–1072.
10. Редьков, В. М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В. М. Редьков. – Минск : Белорус. наука, 2009. – 496 с.
11. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтмен, А. Эрдеи. – М. : Наука, 1973. – Т. 1 : Гипергеометрическая функция, функции Лежандра. – 298 с.
12. Slavyanov, S. Yu. Special functions. A unified theory based on singularities / S. Yu. Slavyanov, W. Lay. – Oxford, 2000.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 29.03.2016

***Ovsyuk E.M., Veko O.V., Voynova Y.A., Kisel V.V., Red'kov V.M. On Reflecting Spin  $\frac{1}{2}$  Particles by the «Geometric Medium» of the Lobachevsky Space, Taking into Account the External Electric Field***

*Previously it was shown that in electrodynamic context the Lobachevsky geometry can simulate an effective medium acting as an ideal mirror, oriented perpendicularly to the axes  $z$ . In the present paper, an analogue of that effect is investigated for spin  $\frac{1}{2}$  field. In explicit form, solutions of the Dirac equation are constructed which describe waves in space reflected from effective potential barrier without penetrating it. The depth of penetration into the medium is determined by characteristics of the quantum states and by the curvature radius of the Lobachevsky space; for waves with  $k_1 = 0$ ,  $k_2 = 0$  the effective reflecting barrier vanishes. When taking into account an external electric field, we reduce the problem to a second order differential equation with four singular points; the singularity at infinity is irregular and of the rank 3. In absence of the electric field, the derived equation become simpler, being the confluent Heun equation, its solutions can be presented in terms of confluent hypergeometric functions.*

***Аўтары прызнатальны сапраднікам лабараторыі тэарэтычнай фізікі Інстытута фізікі НАН Беларусі за полезнае абсуджэнне рэзультатаў работы.***

УДК 524.354.6-33

**В.С. Секержицкий<sup>1</sup>, Ю.А. Зданевич<sup>2</sup>**<sup>1</sup>канд. физ.-мат. наук, доц., зав. каф. общей и теоретической физики

Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

<sup>2</sup>магистрант физико-математического факультета

Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

**О ПИОНИЗАЦИИ ТЯЖЕЛЫХ АТОМНЫХ ЯДЕР**

*Проведена оценка эффективного числа отрицательных пионов в тяжелых атомных ядрах. В сильном магнитном поле число пионов в ядре с заданными значениями массового и зарядового чисел больше, чем в отсутствие поля.*

Известно, что ядерные взаимодействия между нуклонами в атомных ядрах осуществляются, в основном, путем обмена  $\pi$ -мезонами. Это представление получило дальнейшее развитие после установления кварковой структуры нуклонов и пионов. Помимо самого факта существования атомных ядер, обмен мезонами может иметь и другие проявления в ядрах, а именно: мезон в процессе обмена некоторое (порядка  $10^{-24}$  с) время может находиться в «свободном состоянии» как самостоятельная частица. Поэтому не исключено, что в каждый данный момент времени эффективное число пионов в ядрах может быть заметной величиной [1]. Возможно, что в ядрах имеется некоторое число пионов необменного характера, но обменные и необменные пионы в своих внешних проявлениях вряд ли различимы. Существование  $\pi^0$ -мезонов, а также равного числа  $\pi^+$ -мезонов и  $\pi^-$ -мезонов не должно сказываться на внешнем виде формулы Бете – Вайцеккера для энергии связи ядра: учет их наличия сводится к перенормировке значений численных коэффициентов в этой формуле по сравнению с тем случаем, когда в ядре имеются только нуклоны. Это фактически учтено при подгонке формулы Бете – Вайцеккера к экспериментальным значениям масс ядер. Отличия возникают при неравном числе положительных и отрицательных пионов.

Как отмечалось в [1], эти отличия невозможно устранить путем уточнения коэффициентов в формуле Бете – Вайцеккера, сохраняя при этом охват всей области от средних до самых тяжелых атомных ядер. Но систематическое отклонение формулы Бете – Вайцеккера от экспериментальных данных можно ликвидировать, допустив наличие небольшого числа отрицательных пионов в тяжелых ядрах. В ядре возможен избыток именно  $\pi^-$ -мезонов, потому что в изобарах со сравнительно большим числом протонов кулоновская энергия приводит к повышению энергии ядра. Стандартный вид формулы Бете – Вайцеккера для энергии связи ядра должен быть изменен путем вычитания числа пионов из числа протонов в слагаемых, связанных с кулоновской энергией и энергией асимметрии ядра, а также введением дополнительных слагаемых, связанных с числом пионов. Предлагаемая модификация данной формулы практически устраняет имеющее место расхождение с экспериментальными данными для тяжелых ( $A > 200$ ) ядер.

Итак, согласно существующим представлениям [1; 2], в тяжелых ядрах возможно существование отрицательно заряженных пионов в качестве самостоятельного компонента. Проведем оценку массового  $A$  и зарядового  $Z$  чисел ядра, соответствующих порогу появления пионов. Используем полуэмпирическую формулу Бете – Вайцеккера, модифицированную для данной задачи в соответствии с [1; 2]. Масса ядра

$$Mc^2 = N_n m_n c^2 + N_p m_p c^2 + W. \quad (1)$$

где

$$W = -c_0 A + c_1 A^{2/3} + c_2 \frac{N_p - N_\pi}{A^{1/3}} + \frac{c_3}{A} (N_n - N_p - N_\pi)^2 + c_3' \frac{N_\pi^2}{A} + \frac{c_4}{A^3} (N_n - N_p - N_\pi)^4 + c_\pi N_\pi, \quad (2)$$

$m_n c^2$  и  $m_p c^2$  – энергии покоя нейтрона и протона,  $W$  – энергия связи ядра,  $N_n, N_p, N_\pi$  – числа нейтронов, протонов и пионов в ядре;  $c_0 = 15,75$  МэВ,  $c_1 = 17,8$  МэВ,  $c_2 = 0,71$  МэВ,  $c_3 = 23,7$  МэВ,  $c_3' \approx 17,7$  МэВ,  $c_\pi \approx 11,9$  МэВ [1]; коэффициент  $c_4$  различен в разных источниках:  $c_4 = 0$  [3],  $c_4 \approx 0,88$  МэВ [4],  $c_4 \approx 7,7$  МэВ [2],  $c_4 \approx -3,5$  МэВ [1].

Химические потенциалы компонентов ядра связаны соотношением:

$$\mu_p + \mu_\pi = \mu_n. \quad (3)$$

При этом  $\mu_j = \frac{\partial M c^2}{\partial N_j}$ , т.е.

$$\mu_n = m_n c^2 + \frac{2c_3}{A} (N_n - N_p - N_\pi) + \frac{4c_4}{A^3} (N_n - N_p - N_\pi)^3, \quad (4)$$

$$\mu_p = m_p c^2 + 2c_2 \frac{N_p - N_\pi}{A^{1/3}} - 2 \frac{c_3}{A} (N_n - N_p - N_\pi) - \frac{4c_4}{A^3} (N_n - N_p - N_\pi)^3, \quad (5)$$

$$\mu_\pi = -2c_2 \frac{N_p - N_\pi}{A^{1/3}} + 2 \frac{c_3}{A} (N_n - N_p - N_\pi) + \frac{4c_4}{A^3} (N_n - N_p - N_\pi)^3 + 2c_3' \frac{N_\pi}{A} + c_\pi. \quad (6)$$

Подставляя в (3) выражения для химических потенциалов, с учетом того, что  $N_n + N_p = A$ ,  $Z = N_p$ , получаем в простейшем случае (при  $c_4 = 0$ ):

$$N_\pi = \frac{c_\pi' A}{2 c_3 - c_3'} - \frac{c_3}{c_3 - c_3'} (A - 2Z), \quad (7)$$

где  $c_\pi' = c_\pi + m_p c^2 - m_n c^2$  ( $c_\pi' = 10,606$  МэВ). Заметим, что формула (7) существенно отличается от соответствующего выражения [1, с. 38]:

$$N_\pi = \frac{c_3}{c_3 + c_3'} (A - 2Z) - \frac{c_\pi' A}{2 c_3 + c_3'}. \quad (8)$$

Ошибка в формуле (8) связана с потерей знака в [1, с. 38] при вычислении химического потенциала пионов.

У порога рождения пионов  $N_\pi = 0$  и

$$\frac{Z}{A} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{c_\pi'}{2c_3} \right) \approx 0,39. \quad (9)$$

Таким образом, в обычных «земных» условиях существование пионного конденсата возможно в тяжелых ядрах с  $A > 230$ .

Результаты расчетов эффективного числа пионов в тяжелых ядрах с учетом поправки к энергии асимметрии в формуле Бете – Вайцеккера для различных значений

коэффициента  $c_4$  представлены в таблицах 1–4. Влияние значения  $c_4$  на результаты вычислений довольно существенное.

Таблица 1. – Эффективное число  $\pi^-$ -мезонов в ядрах с  $A > 200$  при  $c_4 = 0$

	Z	$N_\pi$	$N_\pi$ [1]	A	Z	$N_\pi$	$N_\pi$ [1]	A	Z	$N_\pi$	$N_\pi$ [1]
54	102	26	2	242	98	32	1	230	93	29	1
	101	19	4		97	24	3		92	21	2
	100	11	4		96	16	3		91	13	3
	99	3	5		95	8	4		90	5	4
48	100	29	2	236	96	34	1	224	91	32	1
	99	21	3		95	26	2		90	24	2
	98	13	3		94	18	2		89	16	3
	97	5	4		93	11	3		87	0	4

Таблица 2. – Эффективное число  $\pi^-$ -мезонов в ядрах с  $A > 200$  при  $c_4 = 0,88$  МэВ

A	Z	$N_\pi$	A	Z	$N_\pi$	A	Z	$N_\pi$
254	102	25	242	98	29	230	93	27
	101	17		97	22		92	19
	100	10		96	15		91	12
	99	2		94	0		89	0
248	100	27	236	96	32	224	91	29
	99	20		95	24		90	22
	97	4		94	17		89	14
	96	0		92	2		87	0

Таблица 3. – Эффективное число  $\pi^-$ -мезонов в ядрах с  $A > 200$  при  $c_4 = 7,7$  МэВ

A	Z	$N_\pi$	A	Z	$N_\pi$	A	Z	$N_\pi$
254	102	15	242	98	19	230	93	17
	101	9		97	13		92	12
	100	3		96	7		91	6
	99	0		95	1		90	0
248	100	17	236	96	21	224	91	19
	99	11		95	15		90	14
	98	5		94	9		89	8
	97	0		93	3		87	0

Таблица 4. – Эффективное число  $\pi^-$ -мезонов в ядрах с  $A > 200$  при  $c_4 = -3,5$  МэВ

A	Z	$N_\pi$	A	Z	$N_\pi$	A	Z	$N_\pi$
254	102	40	242	98	49	230	93	45
	101	28		97	36		92	32
	100	17		96	24		91	20
	99	8		95	14		90	10
248	100	44	236	96	55	224	91	50
	99	32		95	40		90	36
	98	21		94	28		89	24
	97	11		93	17		87	4

Видно, что ядра-изобары содержат тем больше пионов, чем больше число протонов. Данный вывод, сделанный нами на основании результатов численных расчетов, прямо противоположен результату [1], полученному из-за элементарной ошибки при ма-

тематических преобразованиях. В таблице 1 для сравнения представлены результаты, полученные нами, и результаты, приведенные в таблице 1 в [1, с. 40]: расхождения не только количественные, но и качественные.

В присутствии сильного магнитного поля с индукцией  $B$  выражение для энергии связи ядра (2) претерпевает изменения:

$$W = -c_0 A + c_1 A^{2/3} + c_2 \frac{N_p - N_\pi^2}{A^{1/3}} + \frac{c_3}{A} (N_n - N_p - N_\pi)^2 + c'_3 \frac{N_\pi^2}{A} + \frac{c_4}{A^3} (N_n - N_p - N_\pi)^4 + c_\pi N_\pi + N_\pi \mu_\pi B + c_5 B^2 N_p A^{2/3}. \quad (10)$$

Дополнительное слагаемое модифицированной формулы Бете – Вайцзеккера  $\mu_\pi B$  представляет собой кинетическую энергию пионов в квантующем магнитном поле (в приближении крайнего вырождения все заряженные бозоны находятся на нулевом уровне Ландау);  $\mu_\pi = e\hbar / 2m_\pi c = 2,1 \cdot 10^{-17}$  МэВ/Гс – магнетон, соответствующий пиону с массой  $m_\pi$ ,  $c_5 = 6,9 \cdot 10^{-38}$  МэВ/Гс<sup>2</sup> [5].

Несложно убедиться, что в простейшем случае (при  $c_4 = 0$ ) в сильном магнитном поле с индукцией  $B$  у порога рождения пионов

$$\frac{Z}{A} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{c'_\pi + \mu_\pi B}{2c_3} \right). \quad (11)$$

Таким образом, сильное магнитное поле уменьшает пороговое значение отношения  $Z/A$ , т.е. пионы появляются в более тяжелых ядрах, чем в отсутствие поля. Заметим, что в (11) не учтена поправка  $c_5 B^2 N_p A^{2/3}$  [5] к энергии связи ядра, сравнимая с другими слагаемыми (10) при  $B > 10^{18}$  Гс. В столь сильных магнитных полях тяжелые ядра имеют тенденцию к делению [5], а говорить о существовании пионов в осколках деления не приходится.

Для расчёта числа пионов при влиянии магнитного поля воспользуемся формулой

$$N_\pi = \frac{A c'_\pi + \mu B}{2 c_3 - c'_3} - \frac{c_3 A - 2Z}{c_3 - c'_3}. \quad (12)$$

Таблица 5. – Влияние магнитного поля на число пионов

A	Z	$N_\pi$		A	Z	$N_\pi$	
		$B = 0$ Гс	$B = 10^{16}$ Гс			$B = 0$ Гс	$B = 10^{16}$ Гс
254	102	26	31	236	96	34	39
	101	19	24		95	26	31
	100	11	16		94	18	23
	99	3	8		93	11	15
248	100	29	34	230	93	29	34
	99	21	26		92	21	26
	98	13	18		91	13	18
	97	5	10		90	5	10
242	98	32	36	224	91	32	36
	97	24	29		90	24	29
	96	16	21		89	16	20
	95	8	13		87	0	4

Зависимости числа пионов от числа протонов при  $B \neq 0$  и  $B = 0$  аналогичны: ядра-изобары содержат тем больше пионов, чем больше число протонов. В то же время в магнитном поле число пионов при заданных  $A$  и  $Z$  больше.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Саакян, Г. С. Физика нейтронных звезд / Г. С. Саакян. – Дубна : Изд-во Объ-ед. ин-та ядер. исследований, 1995. – 347 с.
2. Саакян, Г. С. Явление пионизации вырожденного вещества / Г. С. Саакян, Л. Ш. Григорян // Астрофизика. – 1977. – Т. 13, вып. 2. – С. 295–311.
3. Саакян, Г. С. Равновесные конфигурации вырожденных газовых масс / Г. С. Саакян. – М. : Наука, 1972. – 344 с.
4. Варганиян, Ю. Л. Нейтронобогатые ядра в Ферми-газе / Ю. Л. Варганиян, Н. К. Овакимова // Астроном. журн. – 1972. – Т. 49, вып. 2. – С. 306–315.
5. Леинсон, Л. Б. О делении ядер в сильном магнитном поле / Л. Б. Леинсон, В. Н. Ораевский // Ядер. физ. – 1978. – Т. 27, вып. 6. – С. 1457–1463.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 12.09.2016

#### ***Sekerzhitsky V.S., Zdanevich Ju.A. About Pionization of Heavy Atomic Nucleis***

*Valuation of effective quantity negative piones in heavy atomic nucleis is demonstrate. In strong magnetic field quantity of piones in nuclear from task senses pf mass and store quantities is greater, than absence of field.*

УДК 539.122, 539.125, 539.128.2

**А.И. Фикс<sup>1</sup>, М.И. Левчук<sup>2</sup>, А.И. Львов<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>д-р физ.-мат. наук, проф. Томского политехнического университета (Россия)

<sup>2</sup>д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Института физики  
Национальной академии наук Республики Беларусь

<sup>3</sup>канд. физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник,  
зав. отделом физики высоких энергий Физического института  
Российской академии наук

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛНОГО СЕЧЕНИЯ ФОТОПОГЛОЩЕНИЯ  
НА НЕЙТРОНЕ ИЗ ПРОТОННЫХ И ДЕЙТРОННЫХ ДАННЫХ  
В ОБЛАСТИ ЭНЕРГИЙ ОТ 700 ДО 1 500 МЭВ П. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ  
ФРЕДГОЛЬМА И АНАЛИЗ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ\***

*Развит метод решения интегрального уравнения Фредгольма для нахождения суммы полного сечения фотопоглощения на свободных нуклонах. На основе физически обоснованного предположения о том, что такие сечения могут быть аппроксимированы суммой нескольких брейт-вигнеровских резонансов с добавлением гладкого фона, профитированы имеющиеся экспериментальные данные. Получены соотношения для оценки неопределенностей в сечениях, извлекаемых из этих фитов. В рамках развитого метода проанализированы имеющиеся данные по полным сечениям фотопоглощения на протоне и дейтроне, полученные на установке GRAAL и в Daresbury, и получены соответствующие сечения на нейтроне.*

**Введение**

Хорошо известно, что из-за отсутствия плотной стабильной нейтронной мишени информация о свойствах нейтрона и различных процессах с его участием извлекается в основном из данных на дейтроне с привлечением, если требуется, данных на свободных протонах. В работе [1] нами был исследован вопрос извлечения полного сечения фотопоглощения на нейтроне из соответствующих протонных и дейтронных сечений. Было показано, что общее соотношение между полными сечениями фотопоглощения на дейтроне и свободных нуклонах  $\sigma_d(\omega)$ ,  $\sigma_p(\omega)$  и  $\sigma_n(\omega)$  при энергии фотона  $\omega$  имеет вид интегрального уравнения типа Фредгольма относительно суммы сечений  $\sigma_p(\omega) + \sigma_n(\omega)$

$$\sigma_d(\omega) = F[\sigma_p(\omega) + \sigma_n(\omega)] + \Delta\sigma_{pn}(\omega). \quad (1)$$

Здесь  $F$  есть оператор, который размывает нуклонные сечения в соответствии с Ферми-движением нуклонов в дейтроне, и имеет следующий вид

$$F\sigma_N(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(p_z) \frac{\omega^{\text{eff}}}{\omega} \sigma_N(\omega^{\text{eff}}) dp_z, \quad (2)$$

где

$$\omega^{\text{eff}} = \omega \left(1 - \frac{p_z}{M}\right) \quad (3)$$

есть эффективная (сдвинутая из-за эффекта Доплера) энергия фотона для движущегося нуклона с массой  $M$ , когда его продольная компонента (вдоль направления фотонного пучка) равна  $p_z$ , а функция  $W(p_z)$  является распределением этой компоненты импульса

\*Работа поддержана в рамках Государственного задания ВУЗам «Наука» (3.1113.2017), грантом Ф14–035 Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований и программой «Физика элементарных частиц и фундаментальная ядерная физика» Российской академии наук.

нуклонов в дейтроне

$$W(p_z) = \int |\psi(p)|^2 \frac{d^2 p_\perp}{(2\pi)^3}, \quad (4)$$

нормированная как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W(p_z) dp_z = 1. \quad (5)$$

Аналитическое выражение для  $W(p_z)$  в случае хюльтеновской дейтронной волновой функции [2] приведено в работе [1].

Наконец, слагаемое  $\Delta\sigma_{pn}(\omega)$  в соотношении (1) учитывает различные эффекты, которые нарушают аддитивность сечений фотопоглощения на отдельных нуклонах. Оно также было вычислено в работе [1].

Таким образом, наша задача состоит в решении интегрального уравнения (1) и нахождении суммы свободных сечений  $\sigma(\omega) = \sigma_p(\omega) + \sigma_n(\omega)$ , которая в работе [3] называется «неразмазанным дейтронным сечением».

### Устранение «размазки»

Известно, что решение для функции  $\sigma(\omega)$  не может быть однозначно найдено без дальнейших предположений о свойствах этой функции.

В частности, невозможно восстановить быстрые флуктуации в  $\sigma(\omega)$  на энергетическом масштабе  $\Delta\omega^{\text{eff}} = \omega \langle p_z^2 \rangle^{1/2} / M$ . Например, для хюльтеновской волновой функции  $\langle p_z^2 \rangle^{1/2} = 53,9$  МэВ/с, так что  $\Delta\omega^{\text{eff}} = 0,57\omega$ .

Далее мы делаем физически обоснованное предположение о том, что сечения  $\sigma_p(\omega)$  и  $\sigma_n(\omega)$  могут быть аппроксимированы суммой нескольких брейт-вигнеровских резонансов (имеющих фиксированные массы и ширины, но неизвестные амплитуды, вообще говоря, разные для протона и нейтрона) плюс гладкий фон. Таким образом, имеем

$$\sigma(\omega) = \sum_i Z_i f_i(\omega), \quad (6)$$

где функции  $f_i(\omega)$  составляют базис разложения с неизвестными коэффициентами  $Z_i$ . Следуя работам [3; 4], мы используем функции  $f_i(\omega)$  для брейт-вигнеровских резонансов в разложении (6) в виде

$$f_i(\omega) = \left(\frac{k_r}{k}\right)^2 \frac{W_r^2 \Gamma_\gamma}{(W^2 - W_r^2)^2 + W_r^2 \Gamma^2}, \quad (7)$$

где

$$\Gamma = \Gamma_r \left(\frac{q}{q_r}\right)^{2l+1} \left(\frac{q_r^2 + X^2}{q^2 + X^2}\right)^l, \quad \Gamma_\gamma = \Gamma_r \left(\frac{k}{k_r}\right)^{2j_\gamma} \left(\frac{k_r^2 + X^2}{k^2 + X^2}\right)^{j_\gamma}. \quad (8)$$

Здесь  $W = \sqrt{M^2 + 2M\omega}$  – полная энергия в системе центра масс;  $k$  and  $q$  – импульсы фотона и рожденного пиона в с.ц.м. при энергии  $W$ , а индекс  $r$  относится к резонансному значению энергии;  $j_\gamma$  и  $l$  – угловые моменты фотона и пиона [4,5]; параметр  $X$  брался равным 350 МэВ для всех включаемых в рассмотрение резонансов.

Так как в нашем анализе мы ограничиваемся областью энергий  $\omega$  от 700 до 1 500 MeV, то оказывается, что хороший фит данных из Daresbury [3; 6] и GRAAL [7] можно получить, включая в (6) только два резонанса, а именно  $D_{13}(1520)$  и  $F_{15}(1680)$ .

Для масс и ширин этих резонансов мы использовали центральные значения из компиляции PDG2014 [8], а именно  $W_r = 1515$  МэВ и  $\Gamma_r = 115$  МэВ для  $D_{13}(1520)$  резонанса и  $W_r = 1685$  МэВ и  $\Gamma_r = 130$  МэВ для  $F_{15}(1680)$  резонанса.

Что касается фонового вклада, то мы снова следуем работам [3; 6] и используем функции  $f_i(\omega)$  в форме  $W^n$  с целым  $n$ . Оказывается, что для фита достаточно оставить только три слагаемых с  $n = 0, 1$  и  $2$ .

Таким образом, мы фитируем дейтронные данные с помощью соотношений (1) и (6) с пятью параметрами  $Z_i$  и находим «неразмазанное» дейтронное сечение  $\sigma(\omega) = \sigma_p(\omega) + \sigma_n(\omega)$ . Ошибка в найденном сечении может быть определена через флуктуации в сечении  $\sigma(\omega)$

$$\delta\sigma(\omega) = \sum_i \delta Z_i f_i(\omega). \quad (9)$$

Тогда

$$\delta\sigma^2(\omega) = \sum_{ij} \delta Z_i \delta Z_j f_i(\omega) f_j(\omega) \quad (10)$$

и, наконец,

$$\langle \delta\sigma^2(\omega) \rangle = \sum_{ij} C_{ij} f_i(\omega) f_j(\omega), \quad (11)$$

где

$$C_{ij} = \langle \delta Z_i \delta Z_j \rangle \quad (12)$$

есть стандартная ковариационная матрица ошибок, найденных при фите  $Z_i$ .

Полученное таким образом «неразмазанное» дейтронное сечение  $\sigma(\omega)$  является гладкой функцией энергии, в которой флуктуации при переходе от точки к точке могут быть потеряны. Ошибки, которые даются соотношением (11), тоже представляют собой гладкую функцию энергии. В следующем разделе они будут показаны на рисунках в виде полосы вокруг центральной кривой.

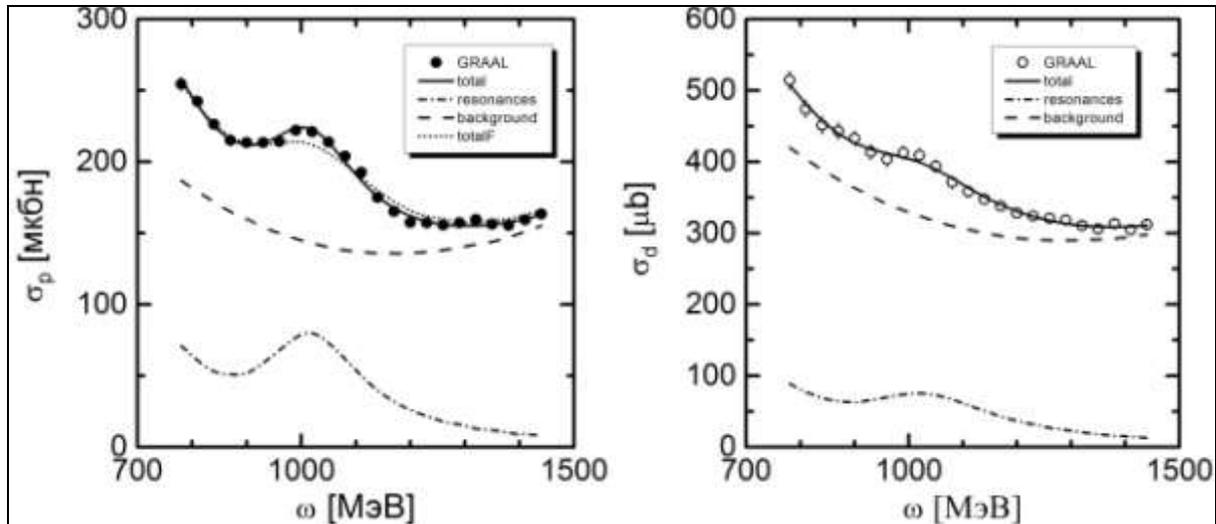
Если параметризовать (фитировать) данные на свободном протоне  $\sigma_p(\omega)$  в том же самом виде (6) с полосой ошибок также даваемой соотношением (11), то тогда прямо получаем нейтронное сечение  $\sigma_n(\omega)$  как разницу  $\sigma(\omega) - \sigma_p(\omega)$ . Полоса ошибок в  $\sigma_n(\omega)$  есть сумма соответствующих полос в  $\sigma(\omega)$  и  $\sigma_p(\omega)$ , сложенных в квадратуре.

## Результаты

В качестве применения описанной процедуры рассмотрим данные по полному сечению фотопоглощения на протоне и дейтроне, полученные на установке GRAAL [7] и в Daresbury [3; 6]. Поскольку они не вполне согласуются друг с другом, то ниже мы обсудим отдельно результаты, полученные из анализа этих данных. Отметим, что имеется еще один эксперимент [9] по измерению полного сечения фотопоглощения на протоне, дейтроне и гелии, выполненный в Майнце. Полученные данные, однако, перекрывают область энергий от 200 до 800 МэВ. По этой причине они не будут учитываться в нашем анализе.

На левой части рисунка 1 показаны результаты фитов данных эксперимента GRAAL [7] для протона. Можно видеть, что фит по формуле (6) обеспечивает очень хорошее описание данных. Отдельно показаны также резонансные и фоновые вклады. Отчетливо виден хвост пика  $D_{13}(1520)$  резонанса и пик при энергии фотона 1060 МэВ, обусловленный  $F_{15}(1680)$  резонансом.

Для иллюстрации мы также приводим на этой части рисунка 1 результат размазки полного сечения с помощью оператора  $\hat{F}$  (2). Соответствующая кривая обозначена как «totalF». Она демонстрирует хорошо известный результат, состоящий в том, что размазка уменьшает сечение в пиках и увеличивает его в минимумах.

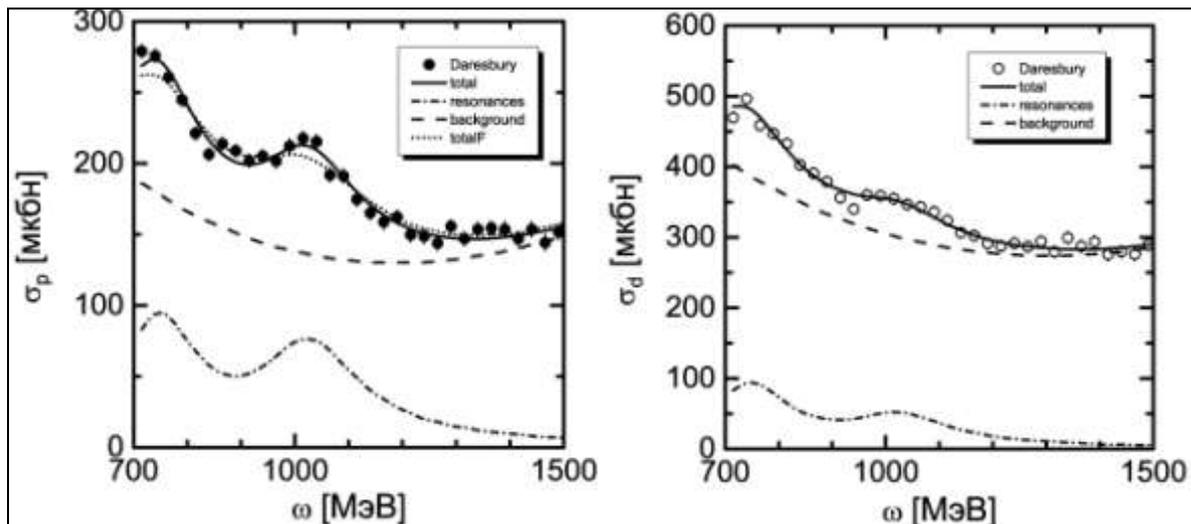


Фиты данных показаны на сплошных кривых. Штрихованная и штрих-пунктирная кривые – вклады от фона и резонансов соответственно. Результат размазки в случае протона показан на пунктирной кривой. Данные GRAAL эксперимента [7]

Рисунок 1. – Полное сечение фотопоглощения на протоне (слева) и дейтроне (справа)

Результаты фитов в случае дейтрона показаны на правой части рисунка 1. Видно, что, как и в случае протона, фит с использованием формулы (6) с пятью параметрами позволяет хорошо описать данные в рассматриваемой области энергий.

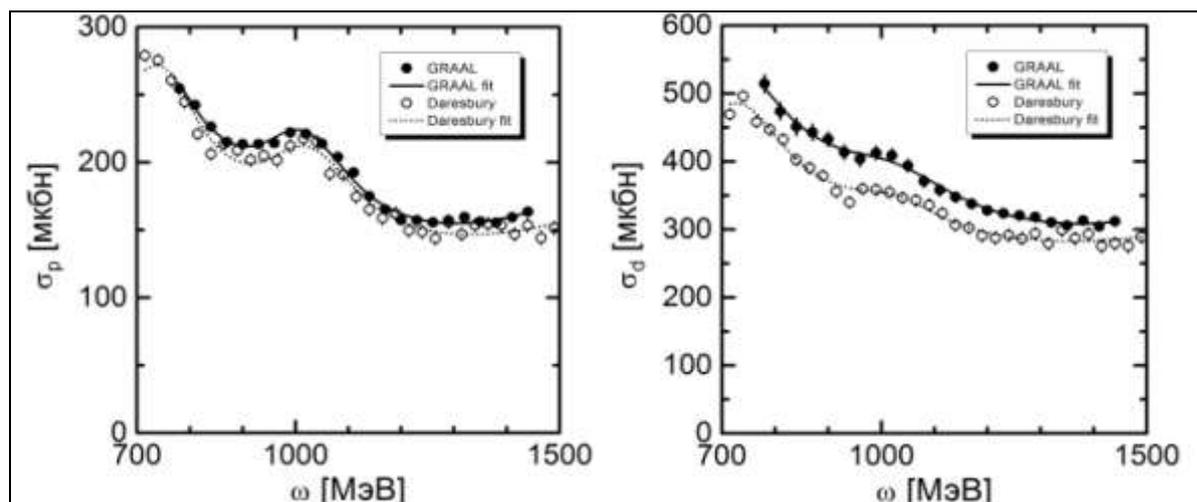
Аналогичные фиты данных Daresbury эксперимента [3; 6] показаны на рисунке 2. Также можно видеть хороший фит данных для протона и нейтрона.



Смысл кривых, как и на рисунке 1. Данные Daresbury эксперимента [3; 6]

Рисунок 2. – Полное сечение фотопоглощения на протоне (слева) и дейтроне (справа)

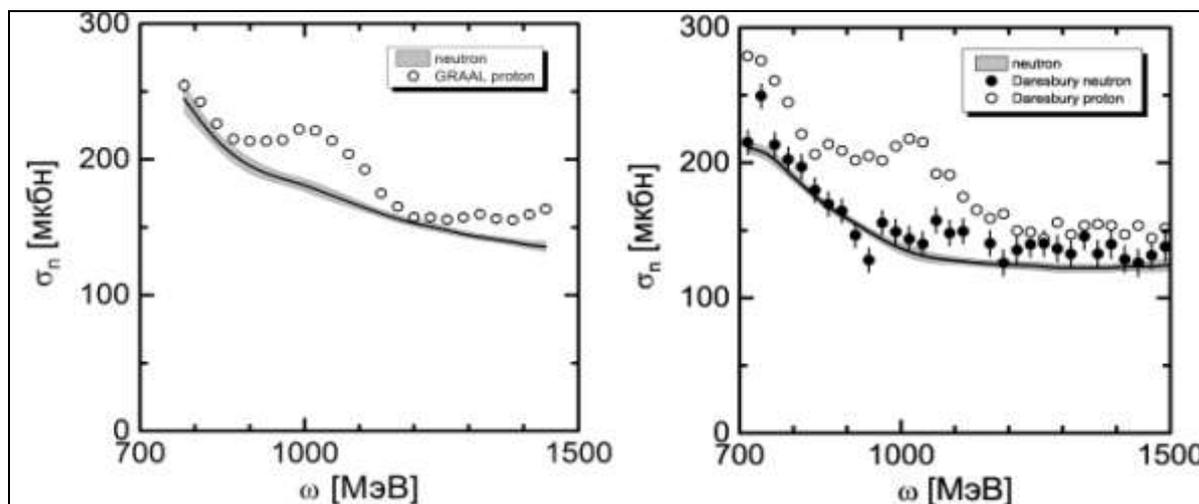
Сравнение данных GRAAL и Daresbury для протона и дейтрона приведено на рисунке 3. Для протона имеется вполне удовлетворительное двух измерений. В случае дейтрона данные GRAAL заметно превышают по величине сечения из Daresbury.



Показаны данные GRAAL [7] и Daresbury экспериментов [3; 6]. Гладкие фиты данных GRAAL и Daresbury представлены на сплошных и пунктирных кривых соответственно

**Рисунок 3. – Полное сечение фотопоглощения на протоне (слева) и дейтроне (справа)**

Нейтронные сечения, извлеченные из данных GRAAL и Daresbury, показаны на рисунке 4 в виде центральных линий и с ошибками в виде полос вокруг этих кривых. Можно видеть, что нейтронные сечения, извлеченные из данных GRAAL, превышают сечения, извлеченных из данных Daresbury. Это является следствием отмеченного выше превышения дейтронных сечений из GRAAL над данными из Daresbury.



Извлеченные нейтронные сечения  $\sigma_n(\omega)$  с их ошибками показаны в виде центральной кривой и заполненных областей вокруг них соответственно в случае GRAAL [7] (слева) и Daresbury экспериментов [3; 6] (справа). Показаны также оригинальные значения  $\sigma_n(\omega)$  ( $\bullet$ ) из работы [3]. Для сравнения приведены протонные сечения  $\sigma_p(\omega)$  ( $\circ$ )

**Рисунок 4. – Полное сечение фотопоглощения на нейтроне**

Следует отметить, что ширины заполненных областей меньше по сравнению с размером показанных ошибок экспериментальных данных. Данное обстоятельство связано с тем, что эти ширины, как было показано выше, фактически являются значениями ошибок, усредненными по интервалу энергий  $\Delta\omega = \pm 60$  МэВ, в который укладываются 5–6 экспериментальных точек из работ [3; 7].

### Заклучение

Таким образом, в данной работе развит метод решения интегрального уравнения Фредгольма, полученного в работе [1], для нахождения суммы полного сечения фотопоглощения на свободных нуклонах. Предполагалось, что эти сечения могут быть аппроксимированы суммой нескольких брейт-вигнеровских резонансов, имеющих фиксированные массы, но неизвестные амплитуды, вообще говоря, разные для протона и нейтрона и плюс гладкий фон. Были получены соотношения для оценки неопределенностей в сечениях, извлекаемых из фитов экспериментальных данных. В рамках развитого метода проанализированы имеющиеся данные по полным сечениям фотопоглощения на протоне и дейтроне, полученные на установке GRAAL и в Daresbury, и извлечены полные сечения фотопоглощения на нейтроне. Расхождение найденных сечений в случае экспериментов в GRAAL и Daresbury обусловлено несогласованием соответствующих сечений на дейтроне. Очень важным следующим шагом в развитии предложенного метода является анализ данных в области энергий первого резонанса ( $E_\gamma \leq 500$  МэВ). Есть большие основания предполагать, что в данной области имеется большое расхождение между теоретическими предсказаниями для полного сечения фотопоглощения на дейтроне и имеющимися экспериментальными значениями. Эта область будет рассмотрена в следующей работе.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фикс, А. И. Определение полного сечения фотопоглощения на нейтроне из протонных и дейтронных данных в области энергий от 700 до 1 500 МэВ I. Ферми-размазка и неаддитивные поправки / А. И. Фикс, М. И. Левчук, А. И. Львов // Весн. Брєсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2014. – № 2. – С. 39–47.
2. Хюльтен, Л. Проблема взаимодействия двух нуклонов / Л. Хюльтен, М. Сугавара // Строение атомного ядра ; под ред. А. С. Давыдова. – М., 1959. – С. 7–165.
3. The total deuteron hadronic cross section in the energy range 0.265–4.215 GeV / T. A. Armstrong [et al.] // Nucl. Phys. – 1972. – Vol. B41, № 4. – P. 445–473.
4. Walker, R. L. Phenomenological analysis of single-pion photoproduction / R. L. Walker // Phys. Rev. – 1965. – Vol. 182, № 5. – P. 1729–1748.
5. Metcalf, W. J. A phenomenological analysis of pion photoproduction / W. J. Metcalf, R. L. Walker // Nucl. Phys. – 1974. – Vol. B76, № 2. – P. 253–1289.
6. Total hadronic cross section of  $\gamma$  rays in hydrogen in the energy range 0.265–4.215 GeV / T. A. Armstrong [et al.] // Phys. Rev. – 1972. – Vol. D5, № 7. – P. 1640–1652.
7. Total cross section for photoabsorption on light nuclei in the energy range 600–1 500 MeV / N. V. Rudnev [et al.] // Phys. Atom Nucl. – 2010. – Vol. 73, № 8. – P. 1469–1473.
8. The Review of Particle Physics / K. A. Olive [et al.] // Chin. Phys. – 2014. – Vol. C 38. – 1526 p.
9. Total photoabsorption cross sections for  $^1\text{H}$ ,  $^2\text{H}$ , and  $^3\text{He}$  from 200 to 800 MeV / M. MacCormick [et al.] // Phys. Rev. – 1996. – Vol. C 53, № 1. – P. 41–49.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 07.10.2016

**Fix A.I., Levchuk M.I., L'vov A.I. Extraction of the Total Photoabsorption Cross Section on the Neutron from the Proton and Deuteron Data at Energies Between 700 and 1500 MeV II. Solution of the Fredholm Equation and an Analysis of Experimental Data**

*A method to solve the Fredholm integral equation for finding the sum of total photoabsorption cross section on free nucleons which was proposed in our previous paper is developed. Using physically founded assumption that such cross sections can be approximated by the sum a few Breit-Wigner resonances plus smooth background we fit available experimental data. Also, we obtain errors in cross sections extracted in these fits. In the framework of the developed method we analyze experimental data from GRAAL and Daresbury on total photoabsorption cross section for the proton and deuteron and obtain corresponding cross sections on the neutron.*

---

## МАТЭМАТЫКА

---

### О НАУЧНОЙ И НАУЧНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ЧЛЕНА-КОРРЕСПОНДЕНТА НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ ДОКТОРА ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК, ПРОФЕССОРА ЯКОВА ВАЛЕНТИНОВИЧА РАДЫНО (К 70-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ)



1 декабря 2016 г. исполнилось 70 лет заведующему кафедрой функционального анализа Белорусского государственного университета, члену-корреспонденту НАН Беларуси, доктору физико-математических наук, профессору Якову Валентиновичу Радыно, известному в научных кругах стран ближнего и дальнего зарубежья ученому в областях функционального анализа, дифференциально-операторных уравнений, уравнений с частными производными, математической физики; обобщенных функций; неархимедова, радиального и адельного анализа; алгебры обобщенных функций; спектральной теории и др.

Я.В. Радыно родился в д. Брильки Воложинского района Минской области. По окончании в 1969 г. математического факультета Белорусского государственного университета был распределен в БГУ на должность стажера-исследователя. В сентябре 1972 г. защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук «К теории линейных уравнений в топологических векторных пространствах» и был принят ассистентом на кафедру уравнений математической физики. В 1973–1974 гг. проходил научную стажировку в Лозаннском университете (Швейцария). В августе 1975 г. Яков Валентинович возглавил кафедру функционального анализа БГУ, которой заведует и по сей день. В феврале 1987 г. в Математическом институте имени В.А. Стеклова АН СССР Я.В. Радыно защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук «Экспоненциальные векторы и дифференциальные уравнения». В апреле 2004 г. он был избран членом-корреспондентом НАН Беларуси.

Я.В. Радыно ввел понятие вектора экспоненциального типа и на его основе построил функциональное исчисление, которое применяется при исследовании дифференциальных и дифференциально-операторных уравнений, построил (совместно с А.Б. Антоневицем) теорию нелинейных обобщенных функций (мнемофункций), разработал теорию обобщенных функций на группе аделей с применением в математической и квантовой физике.

С 1975 г. на кафедре функционального анализа БГУ под руководством Я.В. Радыно и А.Б. Антоневича работает широко известный семинар по функциональному анализу и его приложениям.

В 1978 г. за цикл работ «Линейные дифференциальные уравнения в локально-выпуклых пространствах» Я.В. Радыно была присуждена премия Ленинского комсомола Белоруссии, а цикл работ «Операторные методы в дифференциальных уравнениях» (совместно с В.И. Корзюком и Н.И. Юрчуком) удостоен Государственной премии Республики Беларусь в области науки (1996 г.).

С 1979 по 1991 гг. (до распада СССР) при кафедре функционального анализа БГУ работала отраслевая Научно-исследовательская лаборатория автоматизации, проектирования и контроля цифровых вычислительных устройств, занимавшаяся математическими задачами оборонного значения, научным руководителем которой являлся Я.В. Радыно. В 1997–1998 гг. профессор Я.В. Радыно руководил двумя творческими коллективами, один из которых (совместно с НИИ ядерных проблем БГУ) решил в рамках Чернобыльской программы задачу обнаружения слабого сигнала на фоне шума, другой (совместно с Высшим инженерным зенитным ракетным училищем, ныне – Военная академия Республики Беларусь) решил задачу увеличения живучести некоторых объектов. Под руководством Я.В. Радыно защищены 15 кандидатских диссертаций.

Яков Валентинович – признанный в Беларуси и за ее пределами специалист по функциональному анализу и его приложениям. Его приглашают университеты Австрии, Алжира, Болгарии, Канады, Польши, Словакии, Франции, Швейцарии, Швеции для чтения лекций и проведения научных семинаров.

Я.В. Радыно ведет большую педагогическую работу. Читает лекционный курс «Функциональный анализ и интегральные уравнения» для студентов механико-математического факультета БГУ, а также ряд других основных и специальных курсов. Он автор более 150 научных работ, свыше десятка книг, в том числе монографии «Линейные уравнения и борнология» (1982 г.), учебника с грифами Минвуза СССР и Министерства образования Республики Беларусь «Функциональный анализ и интегральные уравнения» (1984 и 2003 гг.; совместно с А.Б. Антоневицем), учебного пособия «Функциональный анализ и интегральные уравнения. Лабораторный практикум» (2003; совместно с А.Б. Антоневицем), сборника задач и упражнений по функциональному анализу (1978 г.; совместно с А.Б. Антоневицем и П.Н. Князевым), курса лекций о спектральной теореме (2002), соавтор и научный редактор «Русско-белорусского математического словаря» (1993), а также соавтор и научный консультант «Математической энциклопедии» (2001).

Много внимания Я.В. Радыно уделяет работе с талантливой молодежью. В течение 20 лет (1975–1995 гг.) он являлся председателем жюри Минской городской математической олимпиады школьников.

Я.В. Радыно – заместитель председателя Белорусского математического общества (БМО), руководитель научного семинара БМО «Математические исследования», председатель Специализированного Совета по присуждению ученых степеней.

За успехи в научно-педагогической работе Я.В. Радыно награжден почетными грамотами ЦК ВЛКСМ, ЦК ЛКСМБ, Минвуза СССР, Минвуза БССР, Министерства просвещения БССР, грамотами БГУ. Его труд отмечен также знаком «Отличник народного просвещения БССР».

Я.В. Радыно неоднократно приезжал для чтения лекций в Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина. На возглавляемой им кафедре функционального анализа несколько преподавателей нашего университета прошли обучение в магистратуре и аспирантуре, подготовили кандидатские диссертации и успешно их защитили. В 2012 г. Яков Валентинович был избран Почетным доктором Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина.

Сердечно поздравляем Якова Валентиновича Радыно с 70-летием и желаем ему крепкого здоровья, творческой энергии, счастья и благополучия.

*Сендер А.Н., профессор, ректор БрГУ имени А.С. Пушкина*

*Будько А.Е., доцент, проректор по научной работе БрГУ имени А.С. Пушкина*

*Сендер Н.Н., доцент, заведующий кафедрой математического анализа, дифференциальных уравнений и их приложений БрГУ имени А.С. Пушкина*

УДК 512.542

**Т.С. Кирильчук<sup>1</sup>, А.А. Трофимук<sup>2</sup>**<sup>1</sup>магистрант каф. алгебры, геометрии и математического моделирования  
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина<sup>2</sup>канд. физ.-мат. наук, доц. каф. алгебры, геометрии и математического моделирования  
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина**КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ЗАДАНЫМИ СВОЙСТВАМИ  
НЕКОТОРЫХ ПОДГРУПП**

Получены оценки производной длины и нильпотентной длины разрешимой группы  $G$ , у которой индексы максимальных подгрупп, не содержащих подгруппу Фиттинга, равны  $p$ ,  $p^2$  или  $125$ . В частности, установлено, что нильпотентная длина группы  $G$  не превышает 4, а производная длина фактор-группы  $G/\Phi(G)$  не превышает 5. Кроме того, получены оценки производной и нильпотентной длины разрешимой группы, у которой  $r_n(F)$  не превышает 2. В частности, установлено, что нильпотентная длина такой группы не превышает 4, а производная длина – не превышает 6. Также получены оценки производной и нильпотентной длины разрешимой группы, у которой  $r_n(F)$  не превышает 3. Доказано, что нильпотентная длина такой группы не превышает 4, а производная длина фактор-группы  $G/\Phi(G)$  не превышает 6.

**Введение**

Все рассматриваемые группы в данной работе предполагаются конечными.

В работе [1] была установлена зависимость производной длины группы от силовских подгрупп из подгруппы Фиттинга. Вполне естественным является дальнейшее рассмотрение строения разрешимых групп в зависимости от взаимодействия их подгрупп с подгруппой Фиттинга.

Строение разрешимых групп, индексы максимальных подгрупп которых равны простым числам, квадратам простых чисел или кубам простых чисел, получено в работах В.С. Монахова, М.В. Селькина и Е.Е. Грибовской [2]. Строение разрешимых групп, у которых индексы максимальных подгрупп равны простым числам, квадратам простых чисел либо 8, либо 27, было изучено в работах [3–5].

Из работ [2; 6] видно, что происходит увеличение верхней границы оценки инвариантов (производной длины, нильпотентной длины), если рассматривать индексы максимальных подгрупп не свободными от кубов, а свободными от четвертых степеней. Из основных результатов работ [3–7] следует, что оценки инвариантов сохраняются, если рассматривать кубы малых простых чисел  $p=2$  и  $p=3$ .

В теореме 1.1 показано, что оценки сохраняются также и для случая  $p=5$ , но при этом достаточно рассматривать индексы максимальных подгрупп, не содержащих подгруппу Фиттинга.

Доказана следующая

**Теорема 1.1.** Пусть  $G$  – разрешимая группа. Если индексы максимальных подгрупп, не содержащих подгруппу Фиттинга, равны простым числам, квадратам простых чисел или 125, то производная длина фактор-группы  $G/\Phi(G)$  не превышает 5, а нильпотентная длина группы  $G$  не превышает 4.

**Пример 1.** Пусть  $E_{5^3}$  – элементарная абелева группа порядка 125. При помощи компьютерной системы GAP построено полупрямое произведение  $G = E_{5^3} \underline{H}$ , где  $H = Z_4 \times ([Z_4 \times Z_4]S_3)$ . Здесь  $S_3$  – симметрическая группа степени 3, а  $Z_n$  – циклическая группа порядка  $n$ . Группа  $G$  имеет порядок 48000 и индексы максимальных

подгрупп, не содержащих подгруппу Фиттинга, равны простым числам, квадратам простых чисел или 125. Кроме того, нильпотентная длина группы  $G$  равна 4. Данный пример показывает, что оценка нильпотентной длины, полученная в теореме 1.1, является точной.

В.С. Монахов [8] ввел понятие нормального ранга  $p$ -группы  $P$  следующим образом:

$$r_n(P) = \max_{X \triangleleft P} \log_p |X/\Phi(X)|.$$

Здесь  $\Phi(X)$  – подгруппа Фраттини группы  $X$ , а запись  $X \triangleleft P$  означает, что  $X$  – нормальная подгруппа группы  $P$ .

В этой же работе были исследованы разрешимые группы с силовскими подгруппами  $P$  нормального ранга  $r_n(P) \leq 2$  и  $r_n(P) \leq 3$ .

Для формулировки основного результата введем следующее обозначение:

$$r_n(F) = \max_{p \in \pi(F)} r_n(F_p).$$

Здесь  $F$  – подгруппа Фиттинга группы  $G$ ,  $F_p$  – силовская  $p$ -подгруппа группы  $F$  для  $p \in \pi(F)$ .

Поэтому возникает вполне естественная задача: получить оценки производной и нильпотентной длины разрешимой группы, у которой  $r_n(F)$  не превышает 2 или  $r_n(F)$  не превышает 3.

Доказана следующая

**Теорема 1.2.** Пусть  $G$  – разрешимая группа. Тогда справедливы следующие утверждения:

I) если  $r_n(F) \leq 3$ , то нильпотентная длина группы  $G$  не превышает 4, а производная длина фактор-группы  $G/\Phi(G)$  не превышает 6.

II) если  $r_n(F) \leq 2$ , то нильпотентная длина группы  $G$  не превышает 4, а производная длина группы  $G$  не превышает 6. В частности, если:

1) группа  $G$   $A_4$ -свободна, то нильпотентная длина группы  $G$  не превышает 3, а производная длина группы  $G$  не превышает 4;

2) группа  $G$  имеет нечетный порядок, то  $G$  метанильпотентна, а производная длина группы  $G$  не превышает 3.

**Пример 2.** Пусть  $S$  – экстраспециальная группа порядка 27. Вычисления в системе GAP показали, что ее группой автоморфизмов является группа  $\mathbb{A}_{3,2} \bar{GL}(2,3)$ . Полупрямое произведение  $G = \mathbb{A} \bar{GL}(2,3)$  является группой порядка  $1296 = 2^4 \cdot 3^4$  с подгруппой Фиттинга  $F = S$  порядка 27 и  $r_n(F) = 2$ . Производная длина  $G$  равна 6, а нильпотентная длина равна 4. Данный пример показывает, что оценки производной и нильпотентной длины, полученные в теореме 1.2. в общем случае, являются точными.

**Пример 3.** Пусть  $A$  – экстраспециальная группа порядка 125. В системе GAP построено полупрямое произведение  $G = \mathbb{A} \bar{S}_3$  порядка  $750 = 5^3 \cdot 3 \cdot 2$  с подгруппой Фиттинга  $F$ , совпадающей с  $A$  и  $r_n(F) = 2$ . Здесь  $S_3$  – симметрическая группа степени 3. Производная длина  $G$  равна 4, а нильпотентная длина равна 3. Данный пример показывает, что оценки производной и нильпотентной длины, полученные в теореме 1.2 в случае  $A_4$ -свободности группы, являются точными.

**Пример 4.** Зафиксируем простые числа  $p=5$  и  $q=3$ . Тогда показатель числа 5 по модулю 3 равен 2, и существует группа Шмидта  $G = P \bar{Q}$  такая, что  $P$  неабелева порядка  $5^3$ , а  $Q$  – циклическая подгруппа порядка 3. Причем подгруппа Фиттинга  $F$  совпадает с  $P$  и  $r_n(F)=2$ . Так как  $P$  неабелева, то  $Z(P)=P'=\Phi(P)$ . Из свойств групп Шмидта следует, что  $G'=P$ . Таким образом,  $((G')')'=(P')'=Z(P)'=1$  и  $d(G)=3$ . Очевидно, что  $n(G)=2$ . Данный пример показывает, что оценки производной и нильпотентной длины, полученные в теореме 1.2. для групп нечетного порядка, являются точными.

**1. Основные определения и вспомогательные результаты**

В настоящей работе применяют термины с соответствующими обозначениями, принятые в монографиях [9; 10]. Прописными готическими буквами обозначаются классы групп, т.е. всякое множество групп, содержащее вместе с каждой своей группой и все группы, изоморфные ей.

Пусть  $\mathfrak{F}$  – некоторая формация групп и  $G$  – группа. Тогда  $G^{\mathfrak{F}}$  –  $\mathfrak{F}$ -корадикал группы  $G$ , т.е. пересечение всех тех нормальных подгрупп  $N$  из  $G$ , для которых  $G/N \in \mathfrak{F}$ . Произведение  $\mathfrak{F}\mathfrak{G} = \{G \in \mathfrak{B} \mid G^{\mathfrak{G}} \in \mathfrak{F}\}$  формаций  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{G}$  состоит из всех групп  $G$ , для которых  $\mathfrak{G}$ -корадикал принадлежит формации  $\mathfrak{F}$ . Как обычно,  $\mathfrak{F}^2 = \mathfrak{F}\mathfrak{F}$ . Формация  $\mathfrak{F}$  называется насыщенной, если из условия  $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$  следует, что  $G \in \mathfrak{F}$ . Формации всех нильпотентных и абелевых групп обозначаются через  $\mathfrak{N}$  и  $\mathfrak{A}$  соответственно.

**Лемма 1.1.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – формация. Тогда  $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$  – насыщенная формация.

*Доказательство.* Согласно [10, с. 36], произведение  $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$  является локальной формацией. Поскольку насыщенная формация и локальная формация – эквивалентные понятия, то  $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$  – насыщенная формация.

**Лемма 1.2.** ([11], лемма 12). Пусть  $H$  – неприводимая разрешимая подгруппа группы  $GL(n, p)$ . Тогда:

- 1) если  $n=2$ , то  $H \in \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{A}^4$ ;
- 2) если  $n=3$ , то  $H \in \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{A}^4$ .

Кроме того, если  $n \in \{2,3\}$ ,  $p > 3$  и  $O_p(H)=1$ , то  $H$  –  $p'$ -группа.

**Лемма 1.3.** Если  $H$  – разрешимая неприводимая подгруппа группы  $GL(3,5)$ , то  $H \cong Z_2 \times D$ ,  $H \cong Z_4 \times D$ ,  $H \cong D$  или  $H \cong D_1$ , где  $D \in \{A_4, S_4, [Z_4 \times Z_4]Z_3, [Z_{31}]Z_3, [[Z_4 \times Z_4]Z_3]Z_2\}$  и  $D_1 \in \{Z_{31}, Z_{62}, Z_{124}, [A_4]Z_4, [[Z_4 \times Z_4]Z_3]Z_4\}$ . В частности, производная длина  $H$  не превышает 3, а если  $H$   $A_4$ -свободна, то  $H \cong D_1$ , где  $D_1 \in \{Z_{31}, Z_{62}, Z_{124}, [Z_{31}]Z_3, Z_2 \times [Z_{31}]Z_3, Z_4 \times [Z_{31}]Z_3\}$  и производная длина  $H$  не превышает 2.

Здесь  $S_n$  – симметрическая группа степени  $n$ .

*Доказательство.* Утверждение легко получить, используя систему компьютерной алгебры GAP.

**Лемма 1.4.** ([11], лемма 7). Пусть  $G$  – разрешимая группа и  $k$  – натуральное число. Тогда и только тогда  $G/\Phi(G) \in \mathfrak{A}^k$ , когда  $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^{k-1}$ .

**Лемма 1.5.** ([11], лемма 13). Если  $H$  – разрешимая  $A_4$ -свободная подгруппа группы  $GL(2, p)$ , то  $H$  метабелева.

**Лемма 1.6.** ([13], лемма 2.4). Пусть  $P$  –  $p$ -группа и  $r_n(P) \leq 2$ . Тогда производная длина группы  $P$  не превышает 2. В частности, если  $p = 2$ , то  $P$  бициклическая.

**Лемма 1.7.** ([14], лемма VI.8.1]). Пусть  $H$  – неприводимая подгруппа нечетного порядка группы  $GL(2, p)$ . Тогда  $H$  циклическая.

## 2. Доказательство теоремы 1.1.

Вначале докажем, что  $G \in \mathfrak{F} = \mathfrak{N}^4 \cap \mathfrak{N}\mathfrak{U}^4$ . Воспользуемся индукцией по порядку  $G$ . Предположим, что  $\Phi(G) \neq 1$  и  $M/\Phi(G)$  – максимальная подгруппа группы  $G/\Phi(G)$ . Тогда  $M$  – максимальная подгруппа группы  $G$  и по условию теоремы  $M$  либо содержит подгруппу Фиттинга  $F(G)$ , либо ее индекс  $|G:M|$  есть простое число, квадрат простого или 125. В первом случае, так как  $F(G/\Phi(G)) = F(G)/\Phi(G)$ , то фактор-группа  $M/\Phi(G)$  содержит подгруппу Фиттинга  $F(G/\Phi(G))$  группы  $G/\Phi(G)$ , а так как  $|G:M| = |G/\Phi(G):M/\Phi(G)|$ , то во втором случае индекс максимальной подгруппы  $M/\Phi(G)$  в группе  $G/\Phi(G)$  есть простое число, квадрат простого или 125. Таким образом, фактор-группа  $G/\Phi(G)$  удовлетворяет условию теоремы и  $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ . Так как по лемме 1.1. формация  $\mathfrak{F}$  насыщена, то  $G \in \mathfrak{F}$ . Поэтому в дальнейшем будем считать, что  $\Phi(G) = 1$ .

По теореме III.4.5 [14] подгруппа Фиттинга  $F = F(G)$  является прямым произведением минимальных нормальных подгрупп  $F_i$  группы  $G$ , где  $1 \leq i \leq k$ . Поэтому по теореме I.4.5 [14] для каждого  $F_i$  фактор-группа  $G/C_G(F_i)$  изоморфна неприводимой подгруппе группы автоморфизмов  $\text{Aut}(F_i)$ . По лемме I.9.6 [14] фактор-группа  $G/\bigcap_{i=1}^k C_G(F_i)$  изоморфна подгруппе прямого произведения групп  $G/C_G(F_i)$ ,  $1 \leq i \leq k$ . Так как в разрешимой группе с единичной подгруппой Фраттини подгруппа Фиттинга совпадает со своим централизатором, то  $\bigcap_{i=1}^k C_G(F_i) = C_G(F) = F$  и  $G/\bigcap_{i=1}^k C_G(F_i) = G/F$ .

Пусть  $F_i$  – элементарная абелева  $p_i$ -подгруппа. Ясно, что для каждого  $i$  существует максимальная подгруппа  $M_i$  в группе  $G$  такая, что  $G = [F_i]M_i$ . Так как  $M_i$  не содержит  $F_i$ , то  $M_i$  не содержит  $F$ . Поэтому порядок  $|F_i|$  равен  $p_i$ , либо  $p_i^2$ , либо 125, где  $p_i$  – простое число. Поэтому возможны следующие варианты:  $\text{Aut}(F_i)$  изоморфна циклической группе порядка  $p_i - 1$ ;  $\text{Aut}(F_i)$  изоморфна группе  $GL(2, p_i)$ ;  $\text{Aut}(F_i)$  изоморфна группе  $GL(3, 5)$ .

В первом случае фактор-группа  $G/C_G(F_i)$  циклическая. Поэтому  $G/C_G(F_i) \in \mathfrak{U} \subset \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{U}^4$ .

Во втором случае фактор-группа  $G/C_G(F_i)$  изоморфна неприводимой подгруппе полной линейной группы  $GL(2, p_i)$  и по лемме 1.2 фактор-группа  $G/C_G(F_i) \in \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{U}^4$ .

В третьем случае фактор-группа  $G/C_G(F_i)$  изоморфна неприводимой подгруппе полной линейной группы  $GL(3, 5)$  и из леммы 1.3 следует, что  $G/C_G(F_i) \in \mathfrak{U}^3 \subset \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{U}^4$ . Так как  $\mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{U}^4$  – формация, то  $G/F \in \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{U}^4$ . Поэтому  $G \in \mathfrak{F}$ .

Итак, мы доказали, что  $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{U}^4$ . По лемме 1.4  $G/\Phi(G) \in \mathfrak{U}^5$  и производная длина фактор-группы  $G/\Phi(G)$  не превышает 5. Так как  $G \in \mathfrak{N}^4$ , то нильпотентная длина  $G$  не превышает 4.

Теорема доказана.

**Следствие 1.1.** Пусть  $G$  – разрешимая группа, у которой индексы максимальных подгрупп равны простым числам, квадратам простых чисел или 125. Тогда производная длина фактор группы  $G/\Phi(G)$  не превышает 5, а нильпотентная длина группы  $G$  не превышает 4.

### 3. Доказательство теоремы 1.2.

I) Покажем, что  $G \in \mathfrak{F} = \mathfrak{N}^4 \cap \mathfrak{N}\mathfrak{U}^5$ . Воспользуемся индукцией по порядку  $G$ . Предположим, что  $\Phi(G) \neq 1$ . Тогда  $F(G/\Phi(G)) = F(G)/\Phi(G)$ . Пусть  $F_p$  – силовская  $p$ -подгруппа в  $F(G)$ , тогда  $F_p\Phi(G)/\Phi(G)$  – силовская  $p$ -подгруппа в  $F(G/\Phi(G))$ . Так как  $F_p\Phi(G)/\Phi(G) \cong F_p/F_p \cap \Phi(G)$ , то  $r_n(F_p\Phi(G)/\Phi(G)) \leq r_n(F_p) \leq 3$  и  $r_n(F(G/\Phi(G))) \leq r_n(F) \leq 3$ . Поэтому  $G/\Phi(G)$  удовлетворяет условиям теоремы. Так как формация  $\mathfrak{F}$  насыщена, то  $G \in \mathfrak{F}$ . Поэтому в дальнейшем будем считать, что  $\Phi(G) = 1$ .

По теоремам III.4.5, I.4.5 и лемме I.9.6 [14] подгруппа Фиттинга  $F = F(G)$  является прямым произведением минимальных нормальных подгрупп  $N_i$  группы  $G$ , где  $1 \leq i \leq k$  и справедливы следующие утверждения

$$\bigcap_{i=1}^k C_G(N_i) = C_G(F) = F \text{ и } G/\bigcap_{i=1}^k C_G(N_i) = G/F.$$

Так как  $N_i$  – элементарная абелева  $p_i$ -подгруппа порядка  $p_i^k$ , то  $N_i \leq F_{p_i}$  и  $k \leq 3$ , поскольку  $\Phi(N_i) = 1$  и  $r_n(P) \leq 3$  для любой силовской подгруппы  $P$  из  $F(G)$ . Поэтому возможны следующие варианты:

- 1)  $\text{Aut}(N_i)$  изоморфна циклической группе порядка  $p_i - 1$ ;
- 2)  $\text{Aut}(N_i)$  изоморфна подгруппе группы  $GL(2, p_i)$ ;
- 3)  $\text{Aut}(N_i)$  изоморфна подгруппе группы  $GL(3, p_i)$ .

В первом случае фактор-группа  $G/C_G(N_i)$  циклическая. Поэтому  $G/C_G(N_i) \in \mathfrak{U} \subset \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{U}^5$ .

Во втором случае фактор-группа  $G/C_G(N_i)$  изоморфна неприводимой подгруппе полной линейной группы  $GL(2, p_i)$  и фактор-группа  $G/C_G(N_i) \in \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{U}^4 \subset \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{U}^5$  по лемме 1.2.

В третьем случае фактор-группа  $G/C_G(N_i)$  изоморфна неприводимой подгруппе полной линейной группы  $GL(3, p_i)$  и фактор-группа  $G/C_G(N_i) \in \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{U}^5$  по лемме 1.2.

Так как  $\mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{U}^5$  – формация, то  $G/F \in \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{U}^5$ . Поэтому  $G \in \mathfrak{F}$ . Так как  $G \in \mathfrak{N}^4$ , то нильпотентная длина  $G$  не превышает 4. Так как  $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{U}^5$ , то производная длина фактор-группы  $G/\Phi(G)$  не превышает 6 по лемме 1.4.

II) Пусть  $r_n(F) \leq 2$ . Покажем, что  $G \in \mathfrak{F} = \mathfrak{N}^4 \cap \mathfrak{N}\mathfrak{U}^4$ . Повторяя большую часть доказательства п. I теоремы, получим, что если  $N_i$  – элементарная абелева  $p_i$ -под-

группа порядка  $p_i^k$ , то  $N_i \leq F_{p_i}$  и  $k \leq 2$ , поскольку  $\Phi(N_i) = 1$  и  $r_n(P) \leq 2$  для любой силовской подгруппы  $P$  из  $F(G)$ . Поэтому возможны следующие варианты:

- 1)  $\text{Aut}(N_i)$  изоморфна циклической группе порядка  $p_i - 1$ ;
- 2)  $\text{Aut}(N_i)$  изоморфна подгруппе группы  $GL(2, p_i)$ .

В первом случае фактор-группа  $G/C_G(N_i)$  циклическая. Поэтому  $G/C_G(N_i) \in \mathcal{U} \subseteq \mathcal{N}^3 \cap \mathcal{U}^4$ .

Во втором случае фактор-группа  $G/C_G(N_i)$  изоморфна неприводимой подгруппе полной линейной группы  $GL(2, p_i)$  и фактор-группа  $G/C_G(N_i) \in \mathcal{N}^3 \cap \mathcal{U}^4$  по лемме 1.2. Так как  $\mathcal{N}^3 \cap \mathcal{U}^5$  – формация, то  $G/F \in \mathcal{N}^3 \cap \mathcal{U}^4$ . Поэтому  $G \in \mathcal{F}$ .

Итак, мы доказали, что  $G/F \in \mathcal{U}^4$ . Из леммы 1.6 следует, что  $F \in \mathcal{U}^2$ , поэтому производная длина  $G$  не превышает 6. Так как  $G \in \mathcal{N}^4$ , то нильпотентная длина  $G$  не превышает 4.

Пусть группа  $G$  является  $A_4$ -свободной, то, повторяя доказательство основной части теоремы и используя лемму 1.5, получим, что  $G/F \in \mathcal{U}^2$ . Тогда  $G \in \mathcal{N}^3$  и нильпотентная длина группы  $G$  не превышает 3, а так как по лемме 1.6  $F \in \mathcal{U}^2$ , то производная длина группы  $G$  не превышает 4.

Пусть группа  $G$  имеет нечетный порядок, то, используя лемму 1.7, получим, что  $G/F \in \mathcal{U}$ . Тогда  $G \in \mathcal{N}^2$  и нильпотентная длина группы  $G$  не превышает 2, а производная длина группы  $G$  не превышает 3 по лемме 1.6.

Теорема доказана.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Трофимук, А. А. Производная длина конечных групп с ограничениями на силовские подгруппы / А. А. Трофимук // Матем. заметки. – 2010. – Т. 87, № 2. – С. 287–293.
2. Монахов, В. С. О разрешимых нормальных подгруппах конечных групп / В. С. Монахов, М. В. Селькин, Е. Е. Грибовская // Украин. матем. журн. – 2002. – Т. 54, № 7. – С. 940–950.
3. Грибовская, Е. Е. Конечные разрешимые группы с индексами максимальных подгрупп, равными  $p$ ,  $p^2$  или 8 / Е. Е. Грибовская // Вес. НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2001. – № 4. – С. 11–14.
4. Грибовская, Е. Е. О разрешимых нормальных подгруппах конечных групп с индексами максимальных подгрупп  $p$ ,  $p^2$  или 8 / Е. Е. Грибовская // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2001. – Т. 21, № 3. – С. 98–103.
5. Трофимук, А. А. Конечные группы с ограничениями на индексы максимальных подгрупп / А. А. Трофимук // Весн. Брєсц. ун-та. Сер. прыродазн. навук. – 2009. – № 2(33). – С. 25–31.
6. Монахов, В. С. О максимальных и силовских подгруппах конечных разрешимых групп / В. С. Монахов, Е. Е. Грибовская // Матем. заметки. – 2001. – Т. 70, № 4. – С. 603–612.
7. Трофимук, А. А. О конечных разрешимых группах с небольшими индексами максимальных подгрупп / А. А. Трофимук, И. Н. Фенчук // Весн. Брєсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2013. – № 1. – С. 99–105.

8. Монахов, В. С. О разрешимых конечных группах с силовскими подгруппами малого ранга / В. С. Монахов // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2002. – Т. 46, № 2. – С. 25–28.
9. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. – Минск : Выш. шк., 2006. – 207 с.
10. Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 272 с.
11. Монахов, В. С. О конечных разрешимых группах фиксированного ранга / В. С. Монахов, А. А. Трофимук // Сиб. матем. журн. – Т. 52, № 5. – 2011. – С. 1123–1137.
12. Монахов, В. С. О разрешимых конечных группах с силовскими подгруппами малого ранга / В. С. Монахов // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2002. – Т. 46, № 2. – С. 25–28.
13. Trofimuk, A. A. Solvable groups with restrictions on Sylow subgroups of the Fitting subgroup / A. A. Trofimuk // Asian-European Journal of Mathematics. – 2016. – Vol. 9, № 2. – 1650037 (6 p.).
14. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin – Heidelberg – New York : Springer, 1967.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 24.10.2016

**Kirilchuk T.S., Trofimuk A.A. Finite Groups with Given Properties of Some Subgroups**

*The estimates of the derived length and nilpotent length of a finite solvable group  $G$  in which indices of maximal subgroups that not contain the Fitting subgroup, is equal to  $p$ ,  $p^2$ , or  $125$ , are obtained. In particular, the nilpotent length of  $G$  is at most 4 and the derived length of  $G/\Phi(G)$  is at most 5. In addition, the estimates of the derived length and the nilpotent length of soluble group in which  $r_n(F)$  does not exceed 2 are obtained. In particular, the nilpotent length of such groups does not exceed 4 and the derived length does not exceed 6. Also, the estimations of the derived length and the nilpotent length of a finite soluble group in which  $r_n(F)$  does not exceed 3 are obtained. In particular, the nilpotent length of such groups does not exceed 4 and the derived length of  $G/\Phi(G)$  does not exceed 6.*

УДК 517+518.948

**В.М. Мадорский**

канд. физ.-мат. наук,

доц. каф. прикладной математики и технологий программирования  
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина**О НЕЛОКАЛЬНЫХ ВАРИАНТАХ МЕТОДА ХОРД И СТЕФФЕНСЕНА**

Рассматриваются ряд квазиньютоновских полулокальных методов решений нелинейных операторных уравнений с помощью нерегуляризованных и частично регуляризованных методов хорд и Стеффенсона. Доказывается сверхлинейная сходимость рассматриваемых итерационных процессов с «плохого» начального приближения.

Рассматривается нелинейное уравнение:

$$f(x) = 0, f \in (D \subset X \rightarrow X), X - B\text{-пространство.} \quad (1)$$

Для решения нелинейного уравнения (1) А.С. Сергеевым [1] был предложен операторный вариант метода хорд, локально сходящийся со сверхлинейной скоростью.

Итерационная процедура имела следующий вид:

$$x_{n+1} = x_n - f'(x_n)^{-1} f(x_n) \equiv x_n - \Delta x_n, n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Достоинство метода (2) состоит в том, что метод применим в том случае, если оператор  $f$  лишь непрерывен в области  $D$  и первые и вторые разделенные разности оператора  $f$  равномерно ограничены в  $D$ . К числу важных недостатков метода (2) является необходимость иметь в своем распоряжении достаточно хорошие начальные приближения  $x_0$  и  $x_1$ , а также знание оценок ряда глобальных констант, нахождение которых часто представляет задачу, сравнимую по трудности с решением задачи (1).

Положим, что в интересующей нас области  $D \subset X$  для каждого  $x_1, x_2, x_3$  выполняется условие:

$$\|f(x_1, x_2) - f(x_2, x_3)\| \leq L \|x_1 - x_3\|. \quad (3)$$

Рассматривается итерационный процесс (2).

Относительно сходимости процесса (2) справедлива

**Теорема 1.** Пусть в области  $D$  выполняются условие (3) и элементы  $x_0, x_1$  таковы, что

$$BL \|f'(x_1)\| + B \leq l < \frac{q}{3}, \|x_1 - x_0\| \leq \|f'(x_1)\|, q \in (0; 1], \|f'(x_0, x_1)\| \leq B \quad (4)$$

и справедливо соотношение  $\|f(x_1)\| \left(1 + B \frac{1-l}{1-2l}\right) \leq \frac{q - Bl \|f(x_1)\|}{2Bl}$ .

Тогда итерационный процесс (1.2) с квадратичной скоростью сходится к единственному в  $\Omega_\delta = \left(x_1, \frac{q - BL \|f'(x_1)\|}{2BL}\right)$  решению  $x^*$  уравнения (1).

**Доказательство.**

Выведем вначале некоторые соотношения:

$$\begin{aligned} \|E - f'(x_0, x_1)^{-1} f'(x_1, x_2)\| &\leq \|f'(x_0, x_1)^{-1}\| \|f'(x_0, x_1) - f'(x_1, x_2)\| \leq BL \|x_2 - x_0\| \leq \\ &\leq BL (\|x_2 - x_1\| + \|x_1 - x_0\|) \leq BL \|f'(x_1)\| (1 + B) = l. \end{aligned} \quad (5)$$

Пусть  $l < 1$ . Так как  $l < 1$ , то в силу теоремы Банаха существует оператор, обратный оператору  $f(x_0, x_1) - f(x_1, x_2)$  и  $\|f(x_0, x_1) - f(x_1, x_2)\| \leq 1 - l$ . Далее,

имеем соотношение  $\|f(x_1, x_2)\| \leq \frac{\|f(x_0, x_1)\|}{1 - l}$ . Используя аналог интерполяционной формулы Ньютона для операторов и условия теоремы, получаем оценку

$$\begin{aligned} \|f(x_2) - f(x_1)\| &= \|f(x_1) - \Delta x_1\| \leq \|f(x_1) - f(x_1, x_0)\| + L\|x_2 - x_1\| \|x_2 - x_0\| \\ &\leq \|f(x_1) - f(x_1, x_0)\| + \|f(x_1, x_0) - f(x_1, x_0)\| + \\ &+ L\|f(x_1, x_0) - f(x_1)\| \|x_2 - x_1\| + \|x_2 - x_0\| \leq LB\|f(x_1)\|^2 + B \end{aligned} \quad (6)$$

Покажем, что при переходе от точки  $x_1$  к точке  $x_2$ , соотношение (5) не меняется. Имеем

$$\begin{aligned} \|f(x_1, x_2)\| L\|f(x_2)\| + \|f(x_1, x_2)\| &\leq BL\|f(x_1)\| \frac{1 - l + B}{1 - l} \\ &< BL\|f(x_1)\| \frac{1 + B}{1 - l} \frac{l^2}{1 - l} \end{aligned}$$

И если потребовать, чтобы выполнялось соотношение  $\frac{l^2}{1 - l} \leq l$ , а это нера-

венство будет выполняться при  $l < \frac{q}{3}$ , то получим, что соотношение (5) при переходе от точки  $x_1$  к точке  $x_2$  не нарушается.

Из соотношения (6) следует квадратичная сходимость последовательности  $x_n$ , определённой процессом (2), к  $x^*$  – решению уравнения (1).

Докажем единственность полученного решения в сфере  $\Omega_\delta$ . Пусть в  $\Omega_\delta$  существует еще одно решение  $x^{**}$ . Имеем:

$$\begin{aligned} \|x^* - x^{**}\| &= \|x^* - f(x_1, x_0) - f(x^*, x_0) - x^{**} + f(x_1, x_0) - f(x^{**}, x_0)\| \leq \|f(x_1, x_0) - \\ &\|f(x_1, x_0) - f(x^*, x_0) - f(x^*, x_0) + f(x^{**}, x_0)\| \leq \|f(x_1, x_0) - \\ &\|f(x_1, x_0) - f(x^*, x_0) - f(x^*, x_0)\| \|x^* - x^{**}\| = \|f(x_1, x_0) - \\ &\|f(x_1, x_0) - f(x_0, x^*) + f(x_0, x^*) - f(x^*, x^{**})\| \|x^* - x^{**}\| \leq \|f(x_1, x_0) - \\ &L\|x_1 - x^*\| + \|x_1 - x^{**}\| + \|f(x_1)\| \|x^* - x^{**}\| \leq BLr + \|f(x_1)\| \|x^* - x^{**}\| \end{aligned}$$

Если  $BLr + \|f(x_1)\| = q$  то решений будет не более одного. Нетрудно найти

радиус области единственности. Он равен  $r = \frac{q - BL\|f(x_1)\|}{2BL}$ .

Найдём радиус сферы существования решения. Для этого рассмотрим ряд соотношений, которые следуют из приведённых выше неравенств:

$$\|x_2 - x_1\| \leq B\|f\| \left[ 1 + \frac{1}{1-l} \right], \quad \|x_3 - x_1\| \leq \|x_3 - x_2\| + \|x_2 - x_1\| \leq B\|f\| \left[ 1 + \frac{1}{1-l} + \left( \frac{1}{1-l} \right)^2 \right].$$

Индуктивные рассуждения позволяют получить оценку

$$\|x_{n+1} - x_1\| \leq B\|f\| \left[ 1 + \frac{1}{1-l} + \dots + \left( \frac{1}{1-l} \right)^{n-1} \right] < B\|f\| \frac{1-l}{1-2l},$$

из которой следует, что радиус существования решения  $r_3 = \|f\| \left[ 1 + B \frac{1-l}{1-2l} \right]$ .

Чтобы решение в  $\Omega_\delta$  существовало и было единственным, достаточно выполнения соотношений  $\|f\| \left[ 1 + B \frac{1-l}{1-2l} \right] \leq \frac{q - BL\|f\|}{2BL}$  и  $l < \frac{q}{3}$

**Теорема доказана.**

Предложенные ниже нелокальные варианты метода хорд «работают» при «плохих» начальных приближениях и некоторые из вариантов продолжаемы даже в том случае, если на каких-либо элементах  $x_n, x_{n-1}$  оператор  $f$  обращается в нуль.

Кроме того, условие (3) часто представляется достаточно обременительным: в ряде важных задач условие симметричности (3) не выполняется, в связи с чем это условие заменяется другим [2]:

$$f(x_1, x_2, x_3)(x_2 - x_3) = f(x_1, x_2) - f(x_1, x_3).$$

Следствием из последнего соотношения является равенство (аналог интерполяционной формулы для операторов)

$$f(x) = f(x_0) + f(x_0, y)(x - x_0) + f(x_0, x, y)(x - x_0)(x - y), \quad (7)$$

которое положено в основу наших дальнейших рассуждений.

Введение демпфирующего множителя позволяет построить следующий полулокальный итерационный процесс:

**Шаг 1.** Решается линейное уравнение относительно поправки  $\Delta x_n$

$$f(x_n, x_{n-1}) \Delta x_n = -f(x_n), \quad n = 1, 2, \dots \quad (8)$$

**Шаг 2.** Очередное приближение находится по правилу

$$x_{n+1} = x_n + \sqrt{\beta_n} \Delta x_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (9)$$

**Шаг 3.** Если  $\|f(x_{n+1})\| \leq \varepsilon$  и(или)  $\|\Delta x_n\| \leq \varepsilon$  ( $\varepsilon$  – параметр останова) – конец подсчетов, иначе

**Шаг 4.** Если  $\|f(x_{n+1})\| < \|f(x_n)\|$ , то  $\beta_{n+1} := 1$ , иначе

$$\beta_{n+1} = \min \left( 1, \frac{\|f(x_n)\|^2}{\|f(x_{n+1})\|^2} \beta_n \right); \beta_1 \in 10^{-3}, 10^{-1}; n = 1, 2, \dots \quad (10)$$

и переход на шаг 1.

**Теорема 2.** Пусть в области  $D = \bar{S}, r$ ,  $r \geq \frac{B\|f\|}{1-q_1} + \|x_1 - x_0\|$  существует

$x^*$  – решение уравнения (1) и выполняются следующие условия:

- a)  $\|f(x_n, y_{n-1})\| \leq B; \quad x, y \in D.$
- b)  $\|f(x, y, z)\| \leq K; \quad x, y, z \in D.$
- c)  $\varepsilon_1 = 2\beta_1 KB^2 \|f(x_1)\| < 1.$

Тогда итерационный процесс (8) – (10) со сверхлинейной скоростью (локально с квадратичной) сходится к  $x^* \in D$ . Оценки погрешности  $n$ -го приближения имеет вид:

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{B\|f(x_1)\|}{1 - q_1} q_1^{n-1}; \quad q_1 = 1 - \beta_1 \varepsilon_1.$$

**Доказательство.**

Используя аналог интерполяционной формулы Ньютона для операторов (7) и условия теоремы, имеем оценку

$$\begin{aligned} \|f(x_{n+1})\| &= \|f(x_n + \sqrt{\beta_n} \Delta x_n)\| = \|f(x_n - \sqrt{\beta_n} [f(x_n, x_{n-1})]^{-1} f(x_n))\| \leq \\ &\leq 1 - \sqrt{\beta_n} \|f(x_n)\| + \|f(x_n, x_{n-1}, x_{n+1})\| \sqrt{\beta_n} \|[f(x_n, x_{n-1})]^{-1} f(x_n)\| \|x_{n+1} - x_{n-1}\| \leq \quad (11) \\ &\leq 1 - \sqrt{\beta_n} \|f(x_n)\| + BK\sqrt{\beta_n} \|f(x_n)\| \|x_{n+1} - x_n\| + \|x_n - x_{n-1}\|. \end{aligned}$$

В силу (10)  $\forall n$ , для которого  $\beta_n \neq 1$  справедлива цепочка равенств

$$\beta_{n+1} \|f(x_{n+1})\|^2 = \beta_n \|f(x_n)\|^2 = \beta_{n-1} \|f(x_{n-1})\|^2 = \dots = \beta_0 \|f(x_0)\|^2, \quad (12)$$

перепишем соотношение (11) в виде

$$\begin{aligned} \|f(x_{n+1})\| &\leq 1 - \sqrt{\beta_n} \|f(x_n)\| + BK\sqrt{\beta_n} \|f(x_n)\| (\sqrt{\beta_n} \|\Delta x_n\| + \sqrt{\beta_{n-1}} \|\Delta x_{n-1}\|) = \\ &= 1 - \sqrt{\beta_n} \|f(x_n)\| + 2K\beta_n \|f(x_n)\|^2 B^2 = \quad (13) \\ &= 1 - \sqrt{\beta_n} (1 - 2KB^2 \sqrt{\beta_n} \|f(x_n)\|) \|f(x_n)\| = q_n \|f(x_n)\|; \\ q_n &= 1 - \sqrt{\beta_n} \varepsilon_n; \quad \varepsilon_n = 2\sqrt{\beta_n} KB^2 \|f(x_n)\|; \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Пусть  $\beta_1$  таково, что  $\varepsilon_1 < 1$ , тогда в силу (13)  $\|f(x_2)\| \leq q_1 \|f(x_1)\|$ ; в этом случае в силу (10)  $\beta_2 > \beta_1 \cdot q_n = 1 - \sqrt{\beta_n} (1 - \varepsilon_n) < q_1$ .

Рассмотрим  $\varepsilon_2 = 2\sqrt{\beta_2} KB^2 \|f(x_2)\|$ , которое в силу (12) равно  $\varepsilon_1$ , и так как  $\beta_2 > \beta_1$ , то  $q_n = 1 - \sqrt{\beta_n} \varepsilon_n \leq q_1$ .

Таким образом, последовательность итерационных параметров  $\beta_n$  монотонно возрастает, а последовательность элементов  $q_n$  – монотонно убывает с ростом  $n$ .

Индуктивные рассуждения позволяют получить оценку  $\|f(x_{n+1})\| \leq \prod_{i=1}^n q_i \|f(x_1)\|$ , из которой следует слабая сходимость элементов  $x_n$ , генерируемых алгоритмом (8) – (10), к  $x^*$ .

Справедливо и более сильное утверждение: так как из (11) и условий теоремы имеем, что  $\|x_{n+1} - x_n\| \leq \beta_n B \|f(x_n)\| \leq \beta_n B \prod_{i=1}^{n-1} q_i \|f(x_1)\|$ , то

$$\begin{aligned} \|x_{n+p} - x_n\| &\leq \sum_{l=n}^{n+p-1} \|x_{l+1} - x_l\| \leq B \sum_{l=n}^{n+p-1} \beta_l \prod_{j=1}^{l-1} q_j \|f(x_l)\| < \\ &< B \|f(x_1)\| (q_1^{n-1} + q_1^n + \dots + q_1^{n+p-2}) < \frac{B \|f(x_1)\|}{1 - q_1} q_1^{n-1}. \end{aligned} \quad (14)$$

Из (14) следует фундаментальность последовательности  $x_n$  и в силу полноты пространства  $X$  существование предельного элемента, который, как нетрудно убедиться, является решением уравнения (1). Оценка погрешности  $n$ -го приближения получается переходом к пределу в (14) при  $p \rightarrow \infty$ . Имеем  $\|x_n - x^*\| \leq \frac{B \|f(x_1)\|}{1 - q_1} q_1^{n-1}$ .

Радиус сферы  $\bar{S}(x_0, r)$  определяем стандартным образом.

$$\|x_2 - x_1\| \leq B \|f(x_1)\| \|x_3 - x_2\| + \|x_2 - x_1\| \leq B \|f(x_2)\| \|x_3 - x_2\| + B \|f(x_1)\| \|x_2 - x_1\| \leq B \|f(x_1)\| \|x_2 - x_1\| (1 + q_1)$$

Индуктивно получают оценки

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq B \|f(x_1)\| (1 + q_1 + \dots + q_1^{n-1}) < \frac{B \|f(x_1)\|}{1 - q_1}.$$

Переход к пределу в последнем неравенстве при  $n \rightarrow \infty$  позволяет утверждать, что все последовательные приближения не выходят за пределы сферы  $\bar{S}(x_0, r)$ .

**Теорема доказана.**

**Замечание.** Локальная квадратичная скорость сходимости процесса (8) – (10) следует из (13) при  $\beta_n = 1$ . А.С. Сергеевым [1] доказана лишь локальная сверхлинейная скорость сходимости процесса (2).

В теореме 2 требовалось существование а priori существование  $x^*$  – решения уравнения (1) и принадлежность его замыканию сферы  $\bar{S}(x_0, r)$ . Предлагаемая ниже теорема позволяет снять это требование.

**Теорема 3.** Пусть оператор  $f$  удовлетворяет в  $D$  тем же условиям, что и в теореме 2, исключая требование существования  $x^* \in D$ , существует такое число  $k \in \mathbb{N}$ , что выполняются соотношения

$$1 \geq \beta_{n+1} = \frac{\|f(x_n)\|^2}{\|f(x_{n+1})\|^2} \beta_n, n = \overline{1, k-1}, \beta_{k+i} = 1; i = 1, 2, \dots, \beta_1 \geq q_1^k. \quad (15)$$

Тогда уравнение (1) имеет решение  $x^* \in D$ , к которому сходятся итерации (8) – (10), (15), начиная с  $x_0, x_1 \in D$ .

При этом справедлива оценка погрешности  $n$ -го приближения

$$\|x^* - x_n\| \leq B q_1^{2^{n-k} - 1 + k} \|f(x_1)\|.$$

**Доказательство.**

Так как выполняются условия теоремы 2, то справедлива оценка (13),  $q_i = 1 - \beta_i - \varepsilon_i \leq 1, i = \overline{1, k-1}$ , а в силу условия (15)

$$\|f(x_{n+1})\| \leq 2KB^2 \|f(x_n)\|^2, n = k + i, i = 0, 1, 2, \dots$$

И при этом величина  $\|f \mathfrak{A}_n\|$  такова, что  $2KB^2\|f \mathfrak{A}_n\| < 1$ . Таким образом, локальная квадратичная сходимость наступает на элементе  $x_0^* = x_n$ , для которого справедливо соотношение

$$q_1^* = 2KB^2\|f \mathfrak{A}_n\| < 1.$$

Стандартным рассуждением доказывается фундаментальность последовательности элементов  $x_n^*$ , сохранение условия (15) при переходе от точки  $x_0^*$  к точке  $x_1^* = x_{k+1}$  и справедливость оценки

$$\|f \mathfrak{A}_n\| \leq q_1^{*2^{n-1}} \|f \mathfrak{A}_1\|, n \geq k.$$

Так что в сфере  $D$  существует предельный элемент  $x^*$  и справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_1\| &\leq \sum_{l=1}^{k-1} \|x_{l+1} - x_l\| + \sum_{l=k}^n \|x_{l+1} - x_l\| \leq \\ &\leq \frac{B\|f \mathfrak{A}_1\|}{1 - q_1} + \sum_{l=k}^n q_1^{*2^{n-1-l}} \|f \mathfrak{A}_1\| + \|x_1 - x_0\| \leq \frac{B\|f \mathfrak{A}_1\|}{1 - q_1} + \|x_1 - x_0\|. \end{aligned} \tag{16}$$

Переходя к пределу в (16) при  $n \rightarrow \infty$ , имеем, что  $x^*$  – решение уравнения (1). Оценка погрешности  $n$ -го приближения следует из (16) и соотношения

$$\|x^* - x_n\| \leq B\|f \mathfrak{A}_n^* - f \mathfrak{A}_n\| = B\|f \mathfrak{A}_n\| < B q_1^{*2^{n-1+k}} \|f \mathfrak{A}_1\|.$$

**Теорема доказана.**

Теоремы аналогичные теоремам 2 и 3 можно доказать относительно процесса, аналогичному процессу (8) – (10), где  $\beta_{n+1}$  выбирается следующими способами:

**1. Одношаговые методы неполного прогноза.**

1-й способ –  $\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\|f(x_0)\|\gamma_n}{\beta_n\|f(x_{n+1})\|}\right), \gamma_{n+1} = \gamma_n \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}, \gamma_0 = \beta_0^2.$  (17)

Очередное приближение находится по формуле  $x_{n+1} = x_n + \beta_n \Delta x_n$ .

2-й способ –  $\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\|f(x_n)\|^2 \gamma_n}{\|f(x_{n+1})\|^2 \beta_n}\right), \gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n \|f(x_n)\|^2 \beta_{n+1}}{\|f(x_{n+1})\|^2 \beta_n}, \gamma_0 = \beta_0^2.$  (18)

Очередное приближение находится по формуле  $x_{n+1} = x_n + \sqrt{\beta_n} \Delta x_n$ .

Пусть на каком-нибудь шаге итерационного процесса оператор  $f \mathfrak{A}_n, x_{n-1}$  обращается в нуль, в этом случае в итерационном процессе поправку  $\Delta x_n$  находим, решая уравнение на шаге 1.

$$\beta_n \|f \mathfrak{A}_n\| E + f \mathfrak{A}_n, x_{n-1} \Delta x_n = -f \mathfrak{A}_n. \tag{19}$$

На шаге 2 вносим поправки в вектор  $x_n$ ,

$$x_{n+1} = x_n + \sqrt{\beta_n} \Delta x_n. \tag{20}$$

На шаге 3 проверяем условие окончания процесса.

На шаге 4 изменяем шаговую длину по формуле (18) и переходим на шаг 1.

Откуда оценка для  $\|\Delta x_n\|$  имеет вид:

$$\|\Delta x_n\| = \left\| \beta_n \|f \mathfrak{A}_n\| E + f \mathfrak{A}_n, x_{n-1} \right\|^{-1} \|f \mathfrak{A}_n\| \leq B \|f \mathfrak{A}_n\|$$

$$\left\| \beta_n \|f(x_n)\| \|E + f(x_n, x_{n-1})\| \right\| \leq B. \quad (21)$$

**Теорема 4.** Пусть в области  $D$  существует  $x^*$  – решение уравнения (1). Тогда при нахождении шаговой длины по формулам (18), условия б) теоремы 2 и соотношения

$$\varepsilon_1 = \beta_1 B \|f(x_1)\| \|E + 2BK\| < 1, \quad (22)$$

итерационный процесс (19), (20), (18) со сверхлинейной скоростью сходится к  $x^*$  и справедливы оценки погрешности  $n$ -го приближения:

$$\|x_n - x^*\| \leq B \frac{\|f(x_1)\|}{1 - q_1} q_1^{n-1}, \quad q_1 = 1 - \beta_1 \|E + 2BK\| - \varepsilon_1. \quad (23)$$

**Доказательство.**

Представим уравнение (19) в «явном» виде

$$f(x_n, x_{n-1}) \Delta x_n = -f(x_n) - \delta \beta_1 \|f(x_n)\| \Delta x_n.$$

В силу условий теоремы и аналога формулы Ньютона для операторов имеем оценку

$$\begin{aligned} \|f(x_{n+1})\| &= \|f(x_n) + \beta_n \Delta x_n\| \leq \\ &\leq \|f(x_n) - \beta_n f(x_n) - \delta \beta_n^2 \|f(x_n)\| \Delta x_n\| + \beta_n K \|\Delta x_n\| \|x_n + \beta_n \Delta x_n - x_{n-1}\| \leq \\ &\leq \|E - \sqrt{\beta_n}\| \|f(x_n)\| + \delta \beta_n^2 B \|f(x_n)\|^2 + \beta_n K B \|f(x_n)\| \|E + 2BK\| \|\Delta x_n\| + \beta_{n-1} \|\Delta x_{n-1}\| \leq \\ &\leq \|E - \beta_n\| \|f(x_n)\| + \delta \beta_n^2 B \|f(x_n)\|^2 + \beta_n K B^2 \|f(x_n)\| \|E + 2BK\| \|f(x_n)\| + \beta_{n-1} \|f(x_{n-1})\|. \end{aligned}$$

Из (18) следует, что  $\beta_n \|f(x_n)\| = \beta_{n-1} \|f(x_{n-1})\|$ , в силу чего оценка для  $\|f(x_{n+1})\|$  принимает вид:

$$\begin{aligned} \|f(x_{n+1})\| &\leq \|E - \beta_n\| \|f(x_n)\| + \delta \beta_n^2 B \|f(x_n)\|^2 + 2\beta_n^2 B^2 K \|f(x_n)\|^2 = \\ &= \|E - \beta_n\| \|E - \beta_n B\| \|f(x_n)\| \|E + 2BK\| \|f(x_n)\|. \end{aligned} \quad (24)$$

Так как в силу (22)  $\varepsilon_1 = \beta_1 B \|f(x_1)\| \|E + 2BK\| < 1$ , то

$$\|f(x_2)\| = \|E - \beta_1\| \|E - \varepsilon_1\| \|f(x_1)\| = q_1 \|f(x_1)\|, \quad q_1 < 1.$$

Поскольку  $\|f(x_2)\| < \|f(x_1)\|$ , тогда  $\beta_2 > \beta_1$ .

С учетом последних соотношений имеем, что

$$\varepsilon_2 = \beta_2 B \|f(x_2)\| \|E + 2BK\| = \beta_1 B \|f(x_1)\| \|E + 2BK\| = \varepsilon_1,$$

$$\|f(x_3)\| \leq \|E - \beta_2\| \|E - \varepsilon_2\| \|f(x_2)\| = q_2 \|f(x_2)\| \leq q_2 q_1 \|f(x_1)\|, \quad q_2 < q_1, \beta_2 > \beta_1.$$

Индуктивные рассуждения позволяют получить оценку

$$\|f(x_{n+1})\| \leq \prod_{i=1}^n q_i \|f(x_i)\|. \quad (25)$$

При этом последовательность элементов  $q_i$  монотонно убывает, а последовательность итерационных параметров  $\beta_n$  монотонно возрастает.

Переходя к пределу в (25) при  $n \rightarrow \infty$ , убеждаемся в том, что последовательность элементов  $x_n$ , генерируемая формулами (19), (20), (18), сходится по функцио-

налу к  $x^*$ . Стандартными рассуждениями нетрудно показать сильную (по норме) сходимость последовательности элементов  $x_n$  к  $x^*$  и справедливость оценки (23).

Сверхлинейность процесса следует из (24) при  $\beta_n \rightarrow 1$ .

**Теорема доказана.**

Относительно оператора  $f$  обычно полагают, что  $f \in C_D^{(2)}$  и в  $D$  существует ограниченный обратный оператор  $f'(x)^{-1}$ . В ряде важных практических задач оператор  $f$  лишь непрерывен в  $D$  и  $\forall x_1, x_2, x_3 \in D$  выполняются условия

$$\begin{aligned} \|f(x_1, x_2)^{-1}\| &\leq B; B > 0, \\ \|f(x_1, x_2, x_3)\| &\leq K, \text{ где } K > 0, \\ \|E - f(x_1, x_2)\| &\leq M; M > 0. \end{aligned} \tag{26}$$

Здесь  $f(x_1, x_2)$  – разностное отношение первого порядка оператора  $f$  [2]. Ниже будем рассматривать уравнения с негладкими операторами.

**Нерегуляризованные полулокальные алгоритмы. Алгоритмы типа Стефферсона.**

Пусть оператор  $f(x) \in C_D$  и такой, что выполняются условия (26). Рассмотрим итерационный процесс

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \beta_n f(x_n, y_n)^{-1} f(x_n) = x_n - \beta_n \Delta x_n, \\ y_n &= x_n - \beta_n f(x_n); n = 0, 1, \dots, \beta_n \in (0, 1]. \end{aligned} \tag{27}$$

Используя аналог интерполяционной формулы Ньютона для операторов [2] и соотношение (27), имеем оценку

$$\begin{aligned} \|f(x_{n+1})\| &= \|f(x_n) + f(x_n, y_n)(x_{n+1} - x_n) + f(x_n, y_n, x_{n+1})(x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} - y_n)\| \leq \\ &\leq (1 - \beta_n) \|f(x_n)\| + K \|x_{n+1} - x_n\| \|x_{n+1} - y_n\| \leq \\ &\leq (1 - \beta_n) \|f(x_n)\| + K \beta_n^2 \|\Delta x_n\| B M \|f(x_n)\| \leq \\ &\|1 - \beta_n\| \|1 - \beta_n\| K B^2 M \|f(x_n)\| \|f(x_n)\| < \|1 - \beta_n\| (1 - \varepsilon_n) \|f(x_n)\| = q_n \|f(x_n)\|, \\ \varepsilon_n &= \beta_n K B^2 (1 + M) \|f(x_n)\|; q = 1 - \beta_n (1 - \varepsilon_n). \end{aligned} \tag{28}$$

Соотношение (28) является базовым при рассмотрении семейства итерационных процессов, которые получаются при различных способах введения итерационных параметров  $\beta_n$  (способах регулировки шага). Если, следуя идеям работы [3], определить итерационные параметры  $\beta_n$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \beta_{n+1} &= \min \left( 1, \frac{\|f(x_n)\| \gamma_n}{\beta_n \|f(x_{n+1})\|} \right); \beta_0 \in (10^{-4}, 10^{-1}); n = 0, \dots, \\ \gamma_{n+1} &= \frac{\gamma_n \|f(x_n)\| \beta_{n+1}}{\|f(x_{n+1})\| \beta_n}, \gamma_0 = \beta_0^2, \end{aligned} \tag{29}$$

то, взяв  $\beta_0$  таким, чтобы выполнялось соотношение  $\varepsilon_0 = \beta_0 KB^2(1+M)\|f(x_0)\| < 1$ , из (28), (29) имеем, что  $q_0 < 1$ ;  $\|f(x_1)\| \leq q_0\|f(x_0)\|$  и  $\beta_1 > \beta_0$ . Индуктивные рассуждения позволяют утверждать, что итерационные параметры образуют монотонно возрастающую последовательность, нормы последовательности элементов  $\|f(x_n)\|$  монотонно убывают к нулю, все  $q_i < 1$ , и если в области  $D = \bar{S}\left(x_0, \frac{\|\Delta x_0\|}{1-q_0}\right)$  решение  $x^*$  –

уравнения (1) существует, то итерационный процесс (27), (29) сходится к  $x^*$ . Нетрудно проверить, что процесс (27), (29) с  $\beta_n = 1$  имеет квадратичную скорость сходимости. Действительно, из (28) при  $\beta_n = 1$  имеем, что  $\|f(x_{n+1})\| \leq KB^2(1+M)\|f(x_n)\|^2$  или  $q_{n+1} \leq q_n^2$ . Из последнего неравенства следует, что достаточным условием квадратичной сходимости процесса (27) с  $\beta_n = 1$  является условие

$$KB^2(1+M)\|f(x_n)\| = q_n < 1.$$

В процессе реализации алгоритма (27), (29) это условие при некотором номере  $k$  начинает выполняться. Тогда, как следует из (29),  $\beta_i$  для  $i > k$  будут равными единице. Таким образом, нами доказана

**Теорема 5.** Пусть в области  $D = \bar{S}\left(x_0, \frac{\|\Delta x_0\|}{1-q_0}\right)$  существует решение  $x^*$  и оператор  $f$  удовлетворяет условиям (26). Тогда, если  $\varepsilon_0 < 1$ , итерационный процесс (27), (29)

со сверхлинейной (локально квадратичной) скоростью сходится к  $x^*$ .

**Замечание 1.** Итерационный процесс лишь символически записывается в виде (27). В действительности реализуется следующая пошаговая процедура, при этом  $\beta_n$  находится по некоторому правилу.

Шаг 1. Решается линейная система

$$f(x_n, y_n)\Delta x_n = -f(x_n); y_n = x_n - \beta_n f(x_n); n = 0, \dots$$

Шаг 2.  $x_{n+1} = x_n + \beta_n \Delta x_n$ .

Шаг 3. Если  $\|f(x_{n+1})\| < \varepsilon$  и (или)  $\|\Delta x_n\| = \|x_{n+1} - x_n\| < \varepsilon$  ( $\varepsilon$  – параметр останова,  $\varepsilon \ll 1$ ), то конец расчётов, иначе переход на шаг 4.

Шаг 4. Если  $\|f(x_{n+1})\| < \|f(x_n)\|$ , то  $\beta_{n+1} := 1$ , иначе  $\beta_{n+1}$  находим по правилу (29) и переход на шаг 1.

**Замечание 2.** При использовании процесса знание оценок глобальных констант  $K, B, M$  не требуется, важен лишь факт их существования.

**Замечание 3.** В работе [4] доказана локальная квадратичная сходимость процесса (27) с  $\beta_n = 1$  для случая, когда оператор разделённой разности первого порядка симметричен, т.е. выполняется условие  $f(x, y-x) = f(y, x-y)$ . Это требование, как показано в [2], является чрезвычайно обременительным, и ему не удовлетворяют операторы разделённой разности первого порядка во всех важных для практики случаях.

Выше доказана локальная квадратичная сходимость процесса (27) с  $\beta_n = 1$  без использования симметричности оператора разделённой разности первого порядка.

Требование существования ограниченного оператора  $f(x_1, x_2)^{-1}$  во всей области  $D$  является также достаточно обременительным условием. Попробуем снять это условие, для чего, следуя идеям работы [3], введём соотношения, связывающие нормы операторов  $f(x_0, y_0)^{-1}$  и  $f(x_1, y_1)^{-1}$ :

$$\begin{aligned} \|E - f(x_0, y_0)^{-1} f(x_1, y_1)\| &= \|f(x_0, y_0)^{-1}(f(x_0, y_0) - f(x_1, y_1))\| \leq \\ &\leq \|f(x_0, y_0)^{-1}\| \|f(x_0, y_0) - f(y_0, x_1) + f(y_0, x_1) - f(x_1, y_0)\| \leq \\ &\leq B_0 K (\|\Delta x_0\| + \|\Delta y_0\|) < B_0 K (1 + M) \|\Delta x_0\| = l_0 \end{aligned}$$

Здесь  $B_0 = \|f(x_0, y_0)^{-1}\|$ ;  $\|\Delta y_0\| = \|y_1 - y_0\|$ .

Если  $l_0 < 1$ , то в силу теоремы Банаха существует оператор, обратный оператору  $f(x_0, y_0)^{-1} f(x_1, y_1)$  и справедлива оценка  $\|f(x_1, y_1)^{-1}\| \leq B_0 (1 - l_0)^{-1}$ . Используя аналог интерполяционной формулы Ньютона для операторов и формулу (27) при  $\beta_n = 1$ , получим оценку

$$\|f(x_1)\| = \|f(x_0 - f(x_1, y_1)^{-1} f(x_0))\| \leq KM \|\Delta x_0\|^2 < \frac{l_0}{B_0} \|\Delta x_0\|. \quad (30)$$

Тогда определим  $l_0$  так, чтобы при переходе от точки  $x_0$  к точке  $x_1$  выполнялось соотношение  $l_1 \leq l_0$ , где

$$l_1 = B_1 K (1 + M) \|\Delta x_1\| \leq \frac{B_0 K (1 + M) l_0 \|\Delta x_0\|}{(1 - l_0)^2} \leq \frac{l_0^2}{(1 - l_0)^2}.$$

Неравенство  $\frac{l_0^2}{(1 - l_0)^2} \leq l_0$  справедливо при  $l_0 \leq \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ . Нетрудно получить

радиус области существования решения уравнения (1) в сфере  $S(x_0, r_{\exists})$ . Учитывая (30), получаем оценку для сходящегося процесса (27) с  $\beta_n = 1$

$$\begin{aligned} r_{\exists} &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \|\Delta x_i\| \leq \|\Delta x_0\| + B_1 \|f(x_1)\| + B_2 \|f(x_2)\| + \dots \leq \\ &\leq \|\Delta x_0\| + \frac{l_0}{1 - l_0} \|\Delta x_0\| + \frac{l_0^2}{(1 - l_0)^2} \|\Delta x_0\| + \dots \leq \frac{1 - l_0}{1 - 2l_0} \|\Delta x_0\|. \end{aligned} \quad (31)$$

Наряду с оценкой (31) может быть получена оценка

$$\begin{aligned} r_{\exists} &= \sum_{i=0}^{\infty} \|\Delta x_i\| \leq \|\Delta x_0\| + \|\Delta x_1\| + \frac{B_1}{1 - l_1} \frac{l_1}{B_1} \|\Delta x_1\| + \\ &+ \frac{l_1^2}{(1 - l_1)^2} \|\Delta x_1\| + \dots \leq \|\Delta x_0\| + \frac{1 - l_0}{1 - 2l_0} \|\Delta x_1\|. \end{aligned} \quad (32)$$

Найдём условие, при выполнении которого решений в области  $S(x_0, r)$  не более одного. Положим, что в  $S(x_0, r)$  существуют два решения:  $x^*$  и  $x^{**}$ . Тогда, если имеют место соотношения (26), получим оценку

$$\begin{aligned}
\|x^* - x^{**}\| &= \left\| x^* - x^{**} - f(x_0, y_0)^{-1} (f(x^*) - f(x^{**})) \right\| \leq \\
&\leq \left\| f(x_0, y_0)^{-1} \right\| \left\| f(x_0, y_0) - f(x^*, x^{**})(x^* - x^{**}) \right\| \leq \\
&\leq B_0 (\|f(x_0, y_0) - f(y_0, x^*)\| + \|f(y_0, x^*) - f(x^*, x^{**})\|) \leq \\
&\leq B_0 K (\|x_0 - x^*\| + \|y_0 - x^{**}\|) \leq B_0 K (1 + M) \delta \|x^* - x^{**}\|.
\end{aligned} \tag{33}$$

Здесь  $\delta = r$ . Если в (33) потребовать, чтобы  $B_0 K (1 + M) \delta = q < 1$  или  $\delta = \frac{q}{B_0 K (1 + M)}$ , то в сфере  $S(x_0, \delta)$  будет не более одного решения.

В условиях сходящегося процесса (27) с  $\beta_n = 1$  рассмотрим неравенство

$$\frac{1 - l_0}{1 - 2l_0} \|\Delta x_0\| \leq \frac{q}{B_0 K (1 + M)} = \frac{q \|\Delta x_0\|}{l_0}, \tag{34}$$

которое равносильно утверждению  $r_{\exists} \leq r$ . Из (34) следует оценка

$$l_0 \leq \frac{1 + 2q - \sqrt{1 + 4q^2}}{2} = F(q) < \frac{3 - \sqrt{5}}{2}. \tag{35}$$

Если в качестве  $r_{\exists}$  взять правую часть соотношения (32) и потребовать выполнение условия

$$\|\Delta x_0\| + \frac{1 - l_0}{1 - 2l_0} \|\Delta x_1\| \leq \frac{q}{B_0 K (1 + M)} = \frac{q \|\Delta x_0\|}{l_0}, \tag{36}$$

то неравенство (36) также равносильно утверждению  $r_{\exists} \leq r$ . Из оценки (36) имеем соотношение, связывающее нормы поправок на соседних шагах:

$$\left\| \frac{\Delta x_1}{\Delta x_0} \right\| \leq \left( \frac{q}{l_0} - 1 \right) \frac{1 - 2l_0}{1 - l_0} = G(l_0). \tag{37}$$

Так как  $G'_0(l_0) < 0$ , то  $G(F(q)) \leq G(l_0)$ . Тогда из выполнения соотношения

$$\left\| \frac{\Delta x_1}{\Delta x_0} \right\| \leq \left( \frac{q}{F(q)} - 1 \right) \frac{1 - 2F(q)}{1 - F(q)} \tag{38}$$

будет следовать неравенство (37). Таким образом, из сходимости процесса и утверждения  $r_{\exists} \leq r$  следует (38). С другой стороны, если выполняется соотношение (38), то  $r_{\exists} \leq r$ . В самом деле, соотношение (38) эквивалентно

$$\|\Delta x_0\| + \frac{1 - F(q)}{1 - 2F(q)} \|\Delta x_1\| \leq \frac{q \|\Delta x_0\|}{F(q)}. \tag{39}$$

Но в условиях сходящегося процесса величина  $\frac{q \|\Delta x_0\|}{F(q)}$  – минимальный радиус единственности, поэтому из (39) и сходимости процесса следует, что  $l_0 \leq F(q)$ , а это условие того, что  $r_{\exists} \leq r$ .

Таким образом, может быть сформулирована

**Теорема 6.** Пусть оператор  $f$  удовлетворяет в  $D$  условиям (26). Тогда итерационный процесс (27) с  $\beta_n = 1$  при выполнении соотношения (38) с квадратичной скоростью сходится к единственному в  $S\left(x_0, \frac{q\|\Delta x_0\|}{F(q)}\right) \subset D$  решению уравнения (1).

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сергеев, А. С. О методе хорд / А. С. Сергеев // Сиб. матем. журн. – 1961. – Т. 11, № 2. – С. 282–289.
2. Ульм, С. Ю. Об обобщенных разделенных разностях / С. Ю. Ульм // Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1967. – Т. 16, № 1. – С. 13–25.
3. Мадорский, В. М. Квазиньютоновские процессы для решения нелинейных уравнений / В. М. Мадорский. – Брест : БрГУ, 2005. – 186 с.
4. Бартиш, М. Я. О некоторых итерационных методах решения функциональных уравнений / М. Я. Бартиш // Сиб. матем. журн. – 1969. – Т. 10, № 3. – С. 488–493.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 06.10.2016

#### ***Madorskiy V.M. On Nonlocal Variant of the Method of Chords and Steffens***

*We consider a number of quasi-Newton methods semilocal solutions of nonlinear operator equations by nonregularized and partially regularized methods of chords and Stephenson. Proved superlinear convergence of the iterative process with the «bad» initial approximation.*

УДК 517.925

**И.П. Мартынов<sup>1</sup>, В.М. Пецевич<sup>2</sup>, В.А. Пронько<sup>3</sup>**<sup>1</sup>д-р физ.-мат. наук, проф.,проф. каф. математического анализа, дифференциальных уравнений и алгебры  
Гродненского государственного университета имени Я. Купалы<sup>2</sup>канд. физ.-мат. наук, доц.,доц. каф. математического анализа, дифференциальных уравнений и алгебры  
Гродненского государственного университета имени Я. Купалы<sup>3</sup>канд. физ.-мат. наук, доц.,доц. каф. математического анализа, дифференциальных уравнений и алгебры  
Гродненского государственного университета имени Я. Купалы**АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ДВУХ КЛАССОВ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА**

Объектом исследования являются два класса автономных полиномиальных и рациональных дифференциальных уравнений четвертого порядка, решения которых имеют в проколотой окрестности точки комплексной плоскости только один вид полярных разложений. Цель исследования – установить аналитические свойства решений рассматриваемых уравнений. Показано, что разложения в ряды решений этих уравнений содержат логарифмы. Наличие логарифмических точек ветвления было обнаружено с помощью метода резонансов и метода малого параметра.

**Введение**

Известны полиномиальные дифференциальные уравнения Шази [1] третьего и четвертого порядка, решения которых не имеют ни алгебраических точек ветвления, ни полюсов. Причем в [1] не указан характер особенностей решений таких уравнений. Свойства их решений получены в [2–4]. В работе [5] возникло 8 полиномиальных дифференциальных уравнений четвертого порядка, допускающих только один вид полярных разложений, хотя правые части этих уравнений имеют третью размерность относительно искомой функции и ее производных первого и второго порядков. Было сделано замечание, согласно которому полученные уравнения имеют решения с логарифмическими точками ветвления. По мнению Cosgrove [6], это утверждение недостаточно обосновано. В данной работе, кроме обоснования указанного утверждения, исследован также класс рациональных автономных дифференциальных уравнений четвертого порядка, правые части которых имеют третью размерность и при этом допускают только один вид разложения решений в ряды.

Если автономное дифференциальное уравнение

$$y^{IV} = f(y''', y'', y', y), \quad (1)$$

где  $f$  – рациональная функция своих аргументов имеет решение

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (z - z_0)^{r-s}, \quad (2)$$

то этому решению будем сопоставлять набор  $s; \alpha_0; -1, r_1, r_2, r_3$ , где  $r = r_m$  – резонансы,  $\alpha_{r_m}$  – резонансные коэффициенты  $m = 1, 2, 3$ . При этом резонансу  $r = -1$  отвечает произвольность точки  $z_0$ , и если уравнение (1) имеет только мероморфные решения, то, согласно [5], [7],  $r_1, r_2, r_3$  – целые числа, а коэффициенты  $\alpha_{r_m}$  – произвольные параметры. Поэтому прежде всего следует находить необходимые условия отсутствия подвижных критических точек, т.е. условия, при которых  $r_1, r_2, r_3$  – целые различные числа, не равные  $-1$ , а затем проверять произвольность параметров  $\alpha_{r_m}$ .

**Постановка задачи**

Рассмотрим дифференциальные уравнения

$$y^{IV} = ay''' + 12 - 3a y'y'' + by y'' - 2y'^2, \quad (3)$$

$$y^{IV} = a \frac{y'y'''}{y} + 1 - a \frac{y''^2}{y} + byy''' + a - 3b - 10 y'y'' + a + 3b + 2 y y'' - 2y'^2, \quad (4)$$

где  $a, b$  – комплексные постоянные, причем в (3)  $b \neq 0$ , а в (4) имеем  $a + 3b + 2 \neq 0$ . Если искать их решения в виде (2), то найдем, что  $s = 1$ ,  $\alpha_0 = -1$  для (3) и  $\alpha_0 = 1$  для (4). Резонансы  $r$  будут удовлетворять соответственно алгебраическим уравнениям

$$r + 1 r^3 - 11 - a r^2 + 34 - 4a - b r - 24 = 0, \quad (5)$$

$$r + 1 r^3 - 11 - a + b r^2 + 30 - 3a + b r - 20 + 2a = 0. \quad (6)$$

Анализируя уравнения (5) и (6), найдем значения коэффициентов  $a, b$ , при которых эти уравнения имеют целые и различные корни. Заметим, что для коэффициентов уравнений (5) и (6) имеют место соответственно закономерности

а)  $r_1 + r_2 + r_3 = 11 - a, r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1 = 34 - 4a - b, r_1r_2r_3 = 24;$

б)  $r_1 + r_2 + r_3 = 11 - a + b, r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1 = 30 - 3a + b, r_1r_2r_3 = 20 - 2a.$

Результаты анализа для уравнений (3) и (4) приведем в таблицах 1 и 2 соответственно.

Таблица 1

№	$(a, b)$	$r_1, r_2, r_3$
1	(-4, 12)	(1, 2, 12)
2	(-1, 3)	(1, 3, 8)
3	(14, -12)	(3, -2, -4)
4	(17, -30)	(2, -2, -6)
5	(24, -72)	(1, -2, -12)
6	(16, -28)	(2, -3, -4)
7	(20, -60)	(1, -4, -6)
8	(21, -63)	(1, -3, -8)

Таблица 2

№	$(a, b)$	$r_1, r_2, r_3$
1	(1, 0)	(1, 3, 6)
2	(1, 2)	(1, 2, 9)
3	(2, 2)	(1, 2, 8)
4	(3, 2)	(1, 2, 7)
5	(4, 1)	(1, 3, 4)
6	(4, 2)	(1, 2, 6)
7	(1, -18)	(1, -3, -6)
8	(2, -18)	(1, -2, -8)
9	(4, -14)	(1, -2, -6)
10	(1, -20)	(1, -2, -9)
11	(3, -16)	(1, -2, -7)
12	(4, -13)	(1, -3, -4)

**Замечание 1.** Уравнение

$$y^{IV} = a \frac{y'y'''}{y} + 1 - a \frac{y''^2}{y}$$

является упрощенным для (4). Мероморфность решений этого уравнения возможна лишь при  $a \in \{1, 2, 3, 4\}$ .

**Замечание 2.** При наличии отрицательных резонансов в случаях 3–5 таблицы 1 и в случаях 7–9 таблицы 2 имеем  $r_3 = k r_2, k \in \mathbb{N}$ . В случаях 6–8 таблицы 1 и в случаях 10–12 таблицы 2 нет такого  $k \in \mathbb{N}$ , чтобы было  $r_3 = k r_2$ .

### Проверка произвольности соответствующих коэффициентов в случае положительных резонансов

Рассмотрим случаи 1, 2 таблицы 1. В случае 1 для отсутствия подвижных критических точек необходимо, чтобы  $\alpha_0 = -1$ , а коэффициенты  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_{12}$  и число  $z_0$  были произвольными постоянными. В случае 2 необходимо:  $\alpha_0 = 1$ ;  $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_8$  и  $z_0$  произвольные постоянные. Однако, подставляя (2) в (3), получим

$$a + 4 \alpha_2 = a \alpha_1^2, \quad a + 1 \alpha_3 = a \alpha_1 \alpha_2.$$

Если  $a = -4$ , то  $\alpha_2$  остается произвольным, а  $\alpha_1 = 0$ ; при  $a = -1$  получим:  $0 \cdot \alpha_3 = -\alpha_1 \alpha_2$ ,  $\alpha_2 = -\frac{1}{3} \alpha_1^2$ . Значит,  $\alpha_3 = 0$ .

Поэтому вместо рядов Лорана (2) необходимо применить разложения соответственно

$$y = -z - z_0^{-1} + \alpha_1 + \alpha_2 + \gamma_1 \ln |z - z_0| \cdot |z - z_0| + \dots, \quad (7)$$

$$y = z - z_0^{-1} + \beta_1 + \beta_2 |z - z_0| + \beta_3 + \gamma_2 \ln |z - z_0| \cdot |z - z_0|^2 + \dots, \quad (8)$$

где  $\gamma_1 = \frac{1}{4} \alpha_1^2$ ,  $\gamma_2 = \frac{3}{5} \beta_1 \beta_2 = -\frac{1}{5} \beta_1^3$ ,  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_3$  остаются произвольными постоянными. Аналогично найдем, что в случаях 2, 3, 4, 6 таблицы 2 будем иметь

$$y = z - z_0^{-1} + \alpha_1 + \alpha_2 + \gamma_3 \ln |z - z_0| \cdot |z - z_0| + \dots, \quad (9)$$

где  $3 a - 8 \gamma_3 = 4 a + 5 \alpha_1^2$ ,  $a = 1, 2, 3, 4$ . В случаях 1, 5 таблицы 2 получаем

$$y = z - z_0^{-1} + \alpha_1 + \alpha_2 |z - z_0| + \alpha_3 + \gamma_4 \ln |z - z_0| \cdot |z - z_0|^2 + \dots, \quad (10)$$

где  $z_0, \alpha_1, \alpha_3$  – произвольные постоянные,  $\alpha_2 = \frac{3b+2}{4-3b} \cdot \alpha_1^2$ ,  $\gamma_4 = \frac{6 \cdot 18b^2 + 10b + 7}{3b-4} \cdot \alpha_1^3$ .

Таким образом, формальные разложения (7) – (10) решений уравнений (3), (4) содержат логарифмы. Чтобы показать, что разложения (7) – (10) действительно представляют решения уравнений (3), (4) в соответствующих случаях, применим прием сведения уравнений (3), (4) к системе уравнений Брио и Буке, показанный в [5].

Обозначим:

$$\begin{aligned} t = z - z_0, \quad y = t^{-1} \varepsilon + u_1, \quad y' = t^{-2} (-\varepsilon + u_2), \\ y'' = t^{-3} (2\varepsilon + u_3), \quad y''' = t^{-4} (-6\varepsilon + u_4), \quad \varepsilon^2 = 1. \end{aligned} \quad (11)$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} tu_1' &= u_1 + u_2, \\ tu_2' &= 2u_2 + u_3, \\ tu_3' &= 3u_3 + u_4, \\ tu_4' &= c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 + c_4 u_4 + f(u_1, u_2, u_3, u_4), \end{aligned} \quad (12)$$

где  $f$  – нелинейная функция своих аргументов,  $c_1 = 6a + 2b$ ,  $c_2 = 6a + 4b - 24$ ,  $c_3 = b - 3a + 12$ ,  $c_4 = 4 - a$  для уравнения (3);  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 6b - 12$ ,  $c_3 = 6b - 4a + 16$ ,  $c_4 = b - a + 4$  для уравнения (4). Определяющее уравнение для (12) имеет вид:

$$\begin{vmatrix} 1-r & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-r & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3-r & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4-r \end{vmatrix} = 0. \quad (13)$$

Уравнение (13) совпадает с (5) и (6), если соответственно взять  $\varepsilon = -1$ ,  $\varepsilon = 1$ . Согласно [8], по положительным резонансам  $r_1, r_2, r_3$  (случаи 1, 2 таблицы 1; случаи 1–6 таблицы 2) можно построить решение системы (12) в виде рядов

$$u_n = \sum_{p,q} C_{p,q}^{(n)} t^p - \ln t^q, \quad (14)$$

где  $p = m + m_1 r_1 + m_2 r_2 + m_3 r_3$ ,  $q = m_1 \gamma_1 + m_2 \gamma_2 + m_3 \gamma_3$ ;  $m, m_1, m_2, m_3$  – неотрицательные целые числа, причем  $m + m_1 + m_2 + m_3 > 0$ ; числа  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ , согласно [8], связаны с резонансами  $r_1, r_2, r_3$  определенным образом. Ряды (14) сходятся при  $0 < |t| < \delta$ ; они содержат три произвольных постоянных коэффициента, отвечающих резонансам  $r_1, r_2, r_3$ . Значит, верна

**Лемма 1.** Ряды (7) – (10) сходятся при  $0 < |z - z_0| < \delta$ ,  $\delta$  – достаточно малое положительное число.

**Проверка произвольности соответственных коэффициентов в случае наличия отрицательных резонансов, когда  $r_3 = k r_2$ ,  $k$  – натуральное число**

Так как система (12) автономна, то, полагая  $t = \tau^{-1}$ ,  $u_k t = v_k \tau$ , получим

$$\begin{aligned} \tau \dot{v}_1 &= -v_1 - v_2, \quad \tau \dot{v}_2 = -2v_2 - 2v_3, \quad \tau \dot{v}_3 = -3v_2 - v_4, \\ \tau \dot{v}_4 &= -c_1 v_1 - c_2 v_2 - c_3 v_3 - c_4 v_4 - f(v_1, v_2, v_3, v_4), \end{aligned} \quad (15)$$

где  $\dot{v}_k = \frac{dv_k}{d\tau}$ ,  $k = \overline{1, 4}$ .

Легко проверить, что определяющее уравнение для системы (15) будет иметь корни, противоположные по знаку корням уравнения (13). Так что для уравнений в случаях 3–5 таблицы 1 и в случаях 7–9 таблицы 2 можем построить ряды, отвечающие отрицательным резонансам  $-1, r_2, r_3$ . О том, что эти ряды должны содержать логарифмические члены, убеждаемся также следующим образом. В случаях, когда  $r_2 = -2$ , будем искать решение в виде рядов Лорана

$$y = \varepsilon t^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_k}{t^{2k+1}}, \quad t = z - z_0. \quad (16)$$

Будем иметь:

1)  $\varepsilon = -1$ ,  $a = 14$ . Получим произвольное  $h_1$ . Однако второе резонансное условие дает произвольность  $h_2$  и  $16h_1^2 = 0$ .

2)  $\varepsilon = -1$ ,  $a = 17$ . Получим произвольное  $h_1$ . Однако второе резонансное условие показывает произвольность  $h_3$  и  $19h_1 h_2 + 3h_1^3 = 0$ , причем  $h_2 = 44h_1^2$ . Значит,  $h_1 = 0$ .

3)  $\varepsilon = -1$ ,  $a = 24$ . Первое резонансное условие приводит к тому, что  $h_1$  произвольно. Однако из второго резонансного условия следует произвольность  $h_6$  и  $h_1 = 0$ .

4)  $\varepsilon = -1$ ,  $a = 2$ ,  $b = -18$ . Первое резонансное условие выполнено:  $h_1$  произвольно. Однако из второго резонансного условия следует, что  $h_4$  произвольно, но при этом  $6h_2 = 13h_1^2$ ,  $35h_3 = 414h_1^3$  и  $106h_1 h_3 + 438h_2^2 + 254h_1^2 h_2 - 75h_1^4 = 0$ , откуда следует  $h_1 = 0$ .

5)  $\varepsilon = -1$ ,  $a = 4$ ,  $b = -14$ . Первое резонансное условие дает произвольность  $h_1$ . Второе резонансное условие показывает произвольность  $h_3$  и  $h_1 = 0$ . Это следует из того, что  $h_2 = 3h_1^2$  и  $25h_1 h_2 - 111h_1^3 = 0$ .

В случае  $\varepsilon = 1$ ,  $a = 1$ ,  $b = -18$ ,  $r_2 = -3$  будем искать решение уравнения (4) в виде

$$y = \frac{1}{t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_k}{t^{3k+1}}, \quad t = z - z_0. \quad (17)$$

Подставляя (17) в (4), получим сначала произвольность  $h_1$  (выполнено первое резонансное условие). Из второго резонансного условия следует произвольность  $h_2$  и  $48h_1^2 = 0$ . Таким образом, ряды (16) и (17) следует заменить на другие, которые должны содержать логарифмические члены.

Значит, имеет место

**Лемма 2.** Общие решения уравнений (3) и (4) в случаях 3–5 таблицы 1 и 7–9 таблицы 2 имеют подвижные логарифмические точки ветвления.

### Наличие логарифмических особенностей в решениях уравнений в случае отрицательных резонансов, при которых $r_3 \neq k r_2$ , $k$ – натуральное число

Рассмотрим теперь случаи 6–8 таблицы 1 и случаи 10–12 из таблицы 2. Так как все члены уравнений (3) и (4) имеют один и тот же вес, равный 5, то будем искать решения этих уравнений в виде рядов

$$y = \varepsilon t^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k \lambda^k, \quad t = z - z_0, \quad (18)$$

где  $\varepsilon^2 = 1$ ,  $\lambda$  – малый параметр.

Подставляя (18) при  $\varepsilon = -1$  в уравнение (3) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $\lambda$ , для нахождения функций  $\omega_k$  получим линейные уравнения

$$\omega_k^{IV} = -\frac{a}{t} \omega_k''' + \frac{12-3a+b}{t^2} \omega_k'' + \frac{6a+4b-24}{t^3} \omega_k' + \frac{6a+2b}{t^4} \omega_k + F_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (19)$$

при этом

$$F_0 = 0,$$

$$F_1 = a\omega_1\omega_1''' + 12-3a \omega_1'\omega_1'' - \frac{2b}{t} \omega_1\omega_1'' - \omega_1'^2 - \frac{4b}{t^2} \omega_1\omega_1' - \frac{2b}{t^3} \omega_1^2,$$

$$F_2 = a \omega_2\omega_1''' + \omega_1\omega_2''' + 12-3a \omega_1'\omega_2'' + \omega_2'\omega_1'' + b \omega_1^2\omega_1'' - 2\omega_1\omega_1'^2 - \frac{2b}{t} \omega_2\omega_1'' - 2\omega_1'\omega_2' + \omega_1'\omega_2'' - \frac{4b}{t^2} \omega_2\omega_1' + \omega_1\omega_2' - \frac{4c}{t^3} \omega_1\omega_2.$$

1) Пусть  $a = 16$ . Возьмем решение однородного (при  $k = 1$ ) уравнения (19) в виде  $\omega_1 = \beta t + \gamma t^{-4}$  (здесь и далее  $\beta, \gamma$  – произвольные постоянные). Тогда получим  $F_1 = \Phi_1 t - 1296\beta\gamma t^{-6}$ , где функция  $\Phi_1 t$  не содержит слагаемого с  $t^{-6}$ . Общее решение  $\omega_2 = A_1 t + A_2 t^{-2} + A_3 t^{-4} + A_4 t^{-5}$  уравнения (19) будем искать методом вариации произвольных постоянных, считая  $A_k = A_k t$ ,  $k = \overline{1, 4}$ .

Будем иметь:

$$\begin{cases} A_1't + A_2't^{-2} + A_3't^{-4} + A_4't^{-5} = 0, \\ A_1' - 2A_2't^{-3} - 4A_3't^{-5} - 5A_4't^{-6} = 0, \\ 6A_2't^{-4} + 20A_3't^{-6} + 30A_4't^{-7} = 0, \\ -24A_2't^{-5} - 120A_3't^{-7} - 210A_4't^{-8} = F_1, \end{cases}$$

откуда получим

$$A'_1 = \frac{1}{90}t^2 F_1, A'_2 = \frac{1}{18}t^5 F_1, A'_3 = \frac{1}{10}t^7 F_1, A'_4 = \frac{1}{18}t^8 F_1.$$

Поэтому найдем  $A'_2 = \varphi_1 t - 72\beta\gamma t^{-1}$ , где функция  $\varphi_1 t$  не содержит слагаемого с  $t^{-1}$ . Значит, функция  $A_2 t$  содержит  $\ln t$ .

2) При  $a = 20$  возьмем  $\omega_1 = \beta + \gamma t^{-7}$ . Тогда

$$F_1 = 8016\gamma^2 t^{-17} - 4800\beta\gamma t^{-10} + 120\beta^2 t^{-3}, F_2 = \Phi_2 t - 584000\beta^2 \gamma t^{-9},$$

где функция  $\Phi_2 t$  не содержит слагаемого с  $t^{-9}$ . Если  $\omega_3 = A_1 + A_2 t^{-2} + A_3 t^{-5} + A_4 t^{-7}$ ,

$A_k = A_k t, k = \overline{1,4}$ , то  $A'_3 = \frac{1}{30}t^8 F_2$ , т.е.  $A'_3 = \varphi_3 t - \frac{58400}{3}\beta^2 \gamma t^{-1}$ , где функция  $\varphi_3 t$  не содержит слагаемого с  $t^{-1}$ . Значит, функция  $A_3 t$  выражается через  $\ln t$ .

3) Пусть  $a = 21$ . Возьмем  $\omega_1 = \beta + \gamma t^{-4}$ . Тогда  $F_1 = \Phi_1 t - 756\beta\gamma t^{-7} + 126\beta^2 t^{-3}$ ,  $\omega_2 = -\frac{197}{35}\gamma^2 t^{-7} - 42\beta\gamma t^{-3} + \frac{21}{25}\beta^2 t$ ,  $F_2 = \Phi_2 t + \frac{222264}{25}\beta^2 \gamma t^{-6}$ , где функция  $\Phi_2 t$  не содержит слагаемого с  $t^{-6}$ . Если  $\omega_3 = A_1 + A_2 t^{-2} + A_3 t^{-4} + A_4 t^{-9}$ , то  $A'_2 = \varphi_2 t - \frac{7938}{25}\beta^2 \gamma t^{-1}$ , где функция  $\varphi_2 t$  не содержит слагаемого с  $t^{-1}$ . Значит, функция  $A_2 t$  содержит  $\ln t$ .

Подставляя (18) при  $\varepsilon = 1$  в уравнение (4) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $\lambda$ , для нахождения функций  $\omega_k$  получим следующие линейные уравнения

$$\omega_k^{IV} = \frac{b-a}{t} \omega_k''' + \frac{16-4a+6b}{t^2} \omega_k'' + \frac{6b-12}{t^3} \omega_k' + F_{k-1}, k = 1, 2, \dots, \quad (20)$$

при этом

$$F_0 = 0,$$

$$F_1 = -\omega_1 \omega_1^{IV} + a \omega_1' \omega_1''' + 1 - a \omega_1''^2 + 2b \omega_1 \omega_1''' + a - 3b - 10 \omega_1' \omega_1'' t^{-1} + \\ + 2a + 12b + 16 \omega_1 \omega_1'' + 6b - 2a + 20 \omega_1'^2 t^{-2} + 10a + 18b - 4 \omega_1 \omega_1' t^{-3} + 4a + 6b + 8 \omega_1^2 t^{-4}.$$

В случаях  $a = 1, b = -12$  и  $a = 3, b = -16$  возьмем  $\omega_1 = \beta + \gamma t^{-3}$ . Тогда  $F_1 = \Phi_1 t + 2(a - 9b - 70)\beta\gamma t^{-7}$ , где функция  $\Phi_1 t$  не содержит слагаемого с  $t^{-7}$ . Если  $\omega_2 = A_1 + A_2 t^{-2} + A_3 t^{-3} + A_4 t^{-\sigma}$ , где  $\sigma = 10$  при  $a = 1$ ,  $\sigma = 8$  при  $a = 3$ , то получим  $A'_3 = \frac{1}{3(\sigma-3)}t^6 \cdot F_1$ , т.е.  $A'_3 = \varphi_1 t + \frac{2(a-9b-70)}{3(\sigma-3)}\beta\gamma t^{-1}$ , где функция  $\varphi_1 t$  не содержит слагаемого с  $t^{-1}$ . Поэтому  $A_3 t$  содержит  $\ln t$ .

В случае  $a = 4, b = -13$  возьмем  $\omega_1 = \beta + \gamma t^{-5}$ . Тогда  $F_1 = \Phi_1 t + 702\beta\gamma t^{-9}$ , где функция  $\Phi_1 t$  не содержит слагаемого с  $t^{-9}$ . Если  $\omega_2 = A_1 + A_2 t^{-2} + A_3 t^{-4} + A_4 t^{-5}$ , то получим  $A'_4 = \varphi_1 t - \frac{2106}{5}\beta\gamma t^{-1}$ , где функция  $\varphi_1 t$  не содержит слагаемого с  $t^{-1}$ , т.е. функция  $A_4 t$  выражается через  $\ln t$ .

Сходимость ряда (18) при достаточно малом  $\lambda$  обеспечивается теоремой Пуанкаре [9, с. 153].

Поэтому имеет место

**Лемма 3.** Общие решения уравнений (3) и (4) в случаях 6–8 таблицы 1 и 10–12 таблицы 2 имеют подвижные логарифмические точки ветвления.

Из лемм 1–3 следует, что верна

**Теорема.** Общие решения уравнений (3) и (4) имеют подвижные логарифмические точки ветвления.

### Заклучение

Показано, что два класса дифференциальных уравнений четвертого порядка (полиномиальных и рациональных), правые части которых имеют третью размерность относительно функции и ее производных, но допускающих только один вид полярных разложений их решений, имеют общие решения с логарифмическими точками ветвления.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chazy, J. Sur les équations différentielles du troisième ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes / J. Chazy // These, Paris (1910), Acta Math. – 1911. – Vol. 34. – P. 317–385.
2. Cosgrove, C. M. Painlevé classification of the second order. I. Hyperbolic equations in two independent variables / C. M. Cosgrove // Stud. Appl. Math. – 1993. – Vol. 89. – P. 1–61.
3. Соболевский, С. Л. Подвижные особые точки решений обыкновенных дифференциальных уравнений / С. Л. Соболевский. – Минск : БГУ, 2006. – 119 с.
4. Мартынов, И. П. Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений и систем : пособие / И. П. Мартынов, Н. С. Березкина, В. А. Пронько. – Гродно : ГрГУ, 2009. – 395 с.
5. Мартынов, И. П. О дифференциальных уравнениях с неподвижными критическими особыми точками / И. П. Мартынов // Дифференц. уравнения. – 1973. – Т. 9, № 10. – С. 1780–1791.
6. Cosgrove, C. M. Parabolic and higher dimensional equations / C. M. Cosgrove // Stud. Appl. Math. – 1993. – Vol. 89. – P. 95–151.
7. Ablowitz, M. J. A connection between nonlinear evolution and ordinary differential equations of P-type. I. / M. J. Ablowitz, A. Ramani, H. Segur // J. Math. Phys. – 1980. – Vol. 21, № 4. – P. 715–721.
8. Horn, J. Über die Reihenentwicklung der Integrale eines Systems von Differentialgleichungen in der Umgegend gewisser singularer Stellen. I. / J. Horn // J. für Math. – 1896. – Vol. 116. – P. 265–306.
9. Голубев, В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений / В. В. Голубев. – М. : ГИТТЛ, 1950. – 436 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 26.09.2016

### **Martynov I.P., Pecevich V.M., Pronko V.A. Analytical Properties of Solutions of Two Classes of Fourth-Order Differential Equations**

*The object of the study are two classes of independent polynomial and rational fourth-order differential equations whose solutions are in a punctured neighborhood of the complex plane of only one species in polar expansions. The purpose of research – to establish the analytic properties of the considered equations. It is shown that the expansion of the ranks of the solutions of these equations contain logarithms. Availability logarithmic branch points were found by the method of resonances and small-parameter method.*

УДК 519.6 + 517.983.54

**О.В. Матысик<sup>1</sup>, С.В. Сидак<sup>2</sup>**<sup>1</sup>канд. физ.-мат. наук, доц., зав. каф. прикладной математики и информатики  
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина<sup>2</sup>преподаватель каф. информатики и прикладной математики  
Брестского государственного технического университета,  
магистрант Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина**СХОДИМОСТЬ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ  
НЕЯВНОГО ИТЕРАЦИОННОГО ПРОЦЕССА  
РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА**

Для решения линейных уравнений с положительным ограниченным самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве предлагается новый неявный итерационный метод. Доказана сходимость метода в исходной норме гильбертова пространства. Получены априорные оценки погрешности метода при точной и приближенной правой части операторного уравнения, погрешность в счете. Найденные для предложенного метода оценки погрешности оптимизированы. Проведено сравнение оценок погрешности рассматриваемого итерационного метода и явного метода простой итерации.

**1. Постановка задачи**

В гильбертовом пространстве  $H$  решается операторное уравнение I рода

$$Ax = y \quad (1)$$

с положительным ограниченным самосопряженным оператором  $A$ , для которого нуль не является собственным значением. Однако предполагается, что нуль принадлежит спектру оператора  $A$ , поэтому задача (1) неустойчива и, следовательно, некорректна. Для решения задачи предлагается неявный итерационный метод

$$\mathbb{E} + \alpha A^2 \bar{x}_{n+1} = \mathbb{E} - \alpha A^2 \bar{x}_n + 2\alpha Ay, \quad x_0 = 0. \quad (2)$$

Предполагая существование единственного точного решения  $x$  уравнения (1) при точной правой части  $y$ , ищем его приближение  $x_{n,\delta}$  при приближенной правой части  $y_\delta$ ,  $\|y - y_\delta\| \leq \delta$ . В этом случае метод (2) примет вид

$$\mathbb{E} + \alpha A^2 \bar{x}_{n+1,\delta} = \mathbb{E} - \alpha A^2 \bar{x}_{n,\delta} + 2\alpha Ay_\delta, \quad x_{0,\delta} = 0. \quad (3)$$

Ниже под сходимостью метода (3) понимается утверждение о том, что приближения (3) сколь угодно близко подходят к точному решению  $x$  уравнения (1) при подходящем выборе  $n$  и достаточно малых  $\delta$ , т.е. если  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \left( \inf_n \|x - x_{n,\delta}\| \right) = 0$ .

**2. Сходимость метода при точной правой части уравнения**

**Теорема 1.** Итерационный метод (2) при условии  $\alpha > 0$  сходится в исходной норме гильбертова пространства.

Доказательство

По индукции нетрудно показать, что

$$x_n = A^{-1} \left[ E - \mathbb{E} - \alpha A^2 \bar{\quad}^n \quad \mathbb{E} + \alpha A^2 \bar{\quad}^{-n} \right] y.$$

Используя интегральное представление самосопряженного оператора  $A = \int_0^M \lambda dE_\lambda$

( $M = \|A\|$ ,  $E_\lambda$  – спектральная функция), имеем

$$\begin{aligned} x - x_n &= A^{-1} \left[ \left( 1 - \alpha A^2 \right)^{-n} - \left( 1 - \alpha A^2 \right)^{-n} \right] y = \int_0^M \lambda^{-1} \left( \frac{1 - \alpha \lambda^2}{1 + \alpha \lambda^2} \right)^n dE_\lambda y = \\ &= \int_0^\varepsilon \lambda^{-1} \left( \frac{1 - \alpha \lambda^2}{1 + \alpha \lambda^2} \right)^n dE_\lambda y + \int_\varepsilon^M \lambda^{-1} \left( \frac{1 - \alpha \lambda^2}{1 + \alpha \lambda^2} \right)^n dE_\lambda y. \end{aligned}$$

Потребуем, чтобы при  $\lambda \in [0, M]$  выполнялось  $\alpha > 0$ . (4)

Тогда  $\left| \frac{1 - \alpha \lambda^2}{1 + \alpha \lambda^2} \right| \leq q < 1$  и, следовательно,  $\left\| \int_\varepsilon^M \lambda^{-1} \left( \frac{1 - \alpha \lambda^2}{1 + \alpha \lambda^2} \right)^n dE_\lambda y \right\| \leq q^n \left\| \int_\varepsilon^M \lambda^{-1} dE_\lambda y \right\| =$   
 $= q^n \left\| \int_\varepsilon^M dE_\lambda x \right\| \leq q^n \|x\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$

$\left\| \int_0^\varepsilon \lambda^{-1} \left( \frac{1 - \alpha \lambda^2}{1 + \alpha \lambda^2} \right)^n dE_\lambda y \right\| \leq \left\| \int_0^\varepsilon dE_\lambda x \right\| = \|E_\varepsilon x\| \rightarrow 0$ , так как при  $\varepsilon \rightarrow 0$   $E_\varepsilon$  сильно стремится

к нулю в силу свойств спектральной функции. Таким образом, доказано, что при условии (4) метод (2) сходится. Теорема 1 доказана.

### 3. Оценка скорости сходимости

Скорость убывания к нулю  $\|x - x_n\|$  неизвестна и может быть сколь угодно малой. Для ее оценки предположим, что точное решение уравнения (1) истокообразно представимо, т.е.  $x = A^s z$ ,  $s > 0$ . Тогда  $x - x_n = \int_0^M \lambda^s \left( \frac{1 - \alpha \lambda^2}{1 + \alpha \lambda^2} \right)^n dE_\lambda z$ .

Используя результаты из [1], получим оценку для подынтегральной функции:

$$\left| f(\lambda) \left[ \lambda^s \left( \frac{1 - \alpha \lambda^2}{1 + \alpha \lambda^2} \right)^n \right] \right| \leq \left| \lambda^s \left[ 1 - \alpha \lambda^2 \right]^n \right| \leq s^{\frac{s}{2}} \alpha n \alpha e^{-\frac{s}{2}}.$$

Отсюда  $\|x - x_n\| \leq s^{s/2} \alpha n \alpha e^{-s/2} \|z\|$ .

Но может оказаться, что локальный максимум внутри  $[0, M]$  не будет являться глобальным, поэтому будем учитывать значение функции  $f(\lambda)$  на правом конце отрезка, т.е. в точке  $\lambda = M$  (на левом конце отрезка  $f(0) = 0$ ). Тогда справедливо

$$\|x - x_n\| \leq \max \left\{ s^{s/2} \alpha n \alpha e^{-s/2}, M^s \left( \frac{1 - \alpha M^2}{1 + \alpha M^2} \right)^n \right\} \|z\|.$$

### 4. Сходимость при приближенной правой части уравнения

Покажем, что при условии (4) метод (3) можно сделать сходящимся, если нужным образом выбрать число итераций  $n$  в зависимости от уровня погрешности  $\delta$  приближенной правой части уравнения (1).

Рассмотрим разность  $x - x_{n,\delta} = \|x - x_n\| + \|x_n - x_{n,\delta}\|$ . По доказанному,  $x - x_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ . Убедимся, что  $x_n - x_{n,\delta}$  можно сделать сходящимся к нулю. Воспользовавшись интегральным представлением самосопряженного оператора, имеем

$$x_n - x_{n,\delta} = A^{-1} \left[ \|x - \alpha A^2\| \|x\| + \alpha A^2\|y - y_\delta\| \right] = \int_0^M \lambda^{-1} \left[ 1 - \left( \frac{1 - \alpha \lambda^2}{1 + \alpha \lambda^2} \right)^n \right] dE_\lambda \|y - y_\delta\|.$$

Оценим сверху подынтегральную функцию  $g_n(\lambda) = \lambda^{-1} \left[ 1 - \left( \frac{1 - \alpha \lambda^2}{1 + \alpha \lambda^2} \right)^n \right] \geq 0$  при условии (4).

При  $n = 1$   $g_1(\lambda) = \frac{2\alpha\lambda}{1 + \alpha\lambda^2}$ . Ее производная равна  $g_1'(\lambda) = \frac{2\alpha(1 - \alpha\lambda^2)}{(1 + \alpha\lambda^2)^2}$ , следовательно,  $\lambda^* = \left( \frac{1}{\alpha} \right)^{1/2}$  – стационарная точка для функции  $g_1(\lambda)$ . Поскольку  $g_1''(\lambda^*) \leq 0$ , то  $\lambda^*$  – точка максимума функции  $g_1(\lambda)$  и  $\max_{[0, M]} g_1(\lambda) = g_1(\lambda^*) \leq 2\alpha^{1/2}$ .

Покажем по индукции, что при  $n \in N$

$$g_n(\lambda) \leq |g_n(\lambda)| \leq 4n^{1/2} \alpha^{1/2}. \tag{5}$$

При  $n = 1$  неравенство (5) проверено выше. В дальнейшем будем считать  $n \geq 2$ . Предположим, что (5) верно при  $n = m$ , т.е.  $g_m(\lambda) \leq 4m^{1/2} \alpha^{1/2}$  и рассмотрим

$$\begin{aligned} g_{m+1}(\lambda) &= \lambda^{-1} \left[ 1 - \frac{1 - \alpha \lambda^2}{1 + \alpha \lambda^2} \right]^{m+1} = \lambda^{-1} \left[ 1 - \frac{1 - \alpha \lambda^2}{1 + \alpha \lambda^2} \right]^m + \lambda^{-1} \left[ 1 - \frac{1 - \alpha \lambda^2}{1 + \alpha \lambda^2} \right]^m - \\ &- \lambda^{-1} \left[ 1 - \frac{1 - \alpha \lambda^2}{1 + \alpha \lambda^2} \right]^m \leq 4m^{1/2} \alpha^{1/2} + \left( \frac{1 - \alpha \lambda^2}{1 + \alpha \lambda^2} \right)^m \cdot \frac{2\alpha\lambda}{1 + \alpha \lambda^2}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$g_{m+1}(\lambda) \leq 4m^{1/2} \alpha^{1/2} + \left| \frac{1 - \alpha \lambda^2}{1 + \alpha \lambda^2} \right|^m \cdot \frac{2\alpha\lambda}{1 + \alpha \lambda^2} \leq 4m^{1/2} \alpha^{1/2} + \left| 2\alpha\lambda \frac{1 - \alpha \lambda^2}{1 + \alpha \lambda^2} \right|.$$

Покажем, что

$$2m^{1/2} \alpha^{1/2} + \left| \alpha\lambda \frac{1 - \alpha \lambda^2}{1 + \alpha \lambda^2} \right| \leq 2(m+1)^{1/2} \alpha^{1/2}, \tag{6}$$

что равносильно неравенству  $\left| \alpha^{1/2} \frac{1 - \alpha \lambda^2}{1 + \alpha \lambda^2} \lambda \right| \leq \sqrt{m+1} - \sqrt{m}$ . Имеем

$$\sqrt{m+1} = \sqrt{m \left( 1 + \frac{1}{m} \right)} = \sqrt{m} \left\{ 1 + \frac{1}{2m} + \frac{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - 1 \right)}{2!m^2} + \frac{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - 1 \right) \left( \frac{1}{2} - 2 \right)}{3!m^3} + \dots \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - 1 \right) \left( \frac{1}{2} - 2 \right) \left( \frac{1}{2} - 3 \right)}{4! m^4} + \dots + \frac{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - 1 \right) \dots \left[ \frac{1}{2} - \mathfrak{p} - 2 \right]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot \mathfrak{p} - 1 \cdot m^{2p-1}} + \\
& \left. + \frac{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - 1 \right) \dots \left[ \frac{1}{2} - \mathfrak{p} - 2 \right] \cdot \left[ \frac{1}{2} - \mathfrak{p} - 1 \right]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot \mathfrak{p} - 1 \cdot 2p \cdot m^{2p}} + \dots \right\}.
\end{aligned}$$

Покажем, что каждый положительный член ряда больше модуля следующего за ним отрицательного члена, т.е.

$$\frac{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - 1 \right) \dots \left[ \frac{1}{2} - \mathfrak{p} - 2 \right]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot \mathfrak{p} - 1 \cdot m^{2p-1}} > \left| \frac{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - 1 \right) \dots \left[ \frac{1}{2} - \mathfrak{p} - 2 \right] \cdot \left[ \frac{1}{2} - \mathfrak{p} - 1 \right]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot \mathfrak{p} - 1 \cdot 2p \cdot m^{2p}} \right|,$$

что равносильно  $1 > \frac{\left[ \frac{1}{2} - \mathfrak{p} - 1 \right]}{2pm}$  или  $\frac{2p-1-\frac{1}{2}}{2pm} < 1$ , а это уже очевидно при  $m \geq 1$ . Следовательно,

$$\sqrt{m+1} > \sqrt{m} \left( 1 + \frac{1}{2m} - \frac{1}{8m^2} \right).$$

Вернемся к доказательству неравенства (6). Поскольку (раздел 3)  $\left| \mathfrak{A} - \alpha \lambda^2 \right| \leq \mathfrak{A} m \alpha e^{-1/2}$ , то вместо (6) докажем более сильное неравенство

$$\mathfrak{A} m \alpha e^{-1/2} \alpha^{1/2} \leq 2m^{1/2} \left( \frac{1}{2m} - \frac{1}{8m^2} \right). \quad (7)$$

Преобразуем его:  $\left( \frac{1}{2} \right)^{1/2} m^{-1/2} e^{-1/2} \leq 2m^{1/2} \frac{1}{2m} \left( 1 - \frac{1}{4m} \right)$ .

Поскольку  $\left( \frac{1}{2} \right)^{1/2} m^{-1/2} e^{-1/2} \leq m^{-1/2} e^{-1/2}$ , то докажем более сильное неравенство  $m^{-1/2} e^{-1/2} \leq m^{-1/2} \left( 1 - \frac{1}{4m} \right)$ , что то же самое  $1 \leq e^{1/2} \left( 1 - \frac{1}{4m} \right)$ ,  $m \geq 2$ .

Неравенство (7) выполняется, и тем более справедливо неравенство (6). Таким образом, для  $n \geq 1$  справедлива оценка (5), т.е.  $g_n \leq 4n^{1/2} \alpha^{1/2}$ ,  $n \geq 1$ . Отсюда  $\|x_n - x_{n,\delta}\| \leq 4n^{1/2} \alpha^{1/2} \delta$ ,  $n \geq 1$ .

Поскольку  $\|x - x_{n,\delta}\| \leq \|x - x_n\| + \|x_n - x_{n,\delta}\| \leq \|x - x_n\| + 4n^{1/2} \alpha^{1/2} \delta$  и  $\|x - x_n\| \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ , то для сходимости метода (3) достаточно выбрать  $n$  зависящим от  $\delta$  так, чтобы  $n^{1/2} \delta \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ ,  $\delta \rightarrow 0$ . Итак, доказана

**Теорема 2.** При условии (4) итерационный метод (3) сходится, если число итераций  $n$  выбирать из условия  $n^{1/2} \delta \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ ,  $\delta \rightarrow 0$ .

**5. Оценка погрешности метода и ее оптимизация**

Запишем теперь общую оценку погрешности метода (3)

$$\begin{aligned} \|x - x_{n,\delta}\| &\leq \|x - x_n\| + \|x_n - x_{n,\delta}\| \leq \\ &\leq \max \left\{ s^{s/2} \alpha n \epsilon^{-s/2}, M^s \left( \frac{1 - \alpha M^2}{1 + \alpha M^2} \right)^n \right\} \|z\| + 4n^{1/2} \alpha^{1/2} \delta, n \geq 1. \end{aligned}$$

Так как для достаточно больших  $n$   $M^s \left( \frac{1 - \alpha M^2}{1 + \alpha M^2} \right)^n \leq s^{s/2} \alpha n \epsilon^{-s/2}$ , то для этих  $n$  справедлива оценка

$$\|x - x_{n,\delta}\| \leq s^{s/2} \alpha n \epsilon^{-s/2} \|z\| + 4n^{1/2} \alpha^{1/2} \delta, n \geq 1. \tag{8}$$

Следовательно, справедлива

*Теорема 3. Если решение  $x$  уравнения (1) истокообразно представимо, то при условии (4) для метода (3) справедлива оценка погрешности (8).*

Для минимизации оценки погрешности вычислим правую часть оценки (8) в точке, в которой производная от нее равна нулю: в результате получим априорный момент останова

$$n_{\text{опт}} = 2^{-2/(s+1)} \left( \frac{s}{2} \right)^{(s+2)/(s+1)} \alpha^{-1} e^{-s/(s+1)} \|z\|^{2/(s+1)} \delta^{-2/(s+1)}. \tag{9}$$

Подставив  $n_{\text{опт}}$  в оценку (8), имеем

$$\|x - x_{n,\delta}\|_{\text{опт}} \leq (1 + s) \cdot 2^{s/(s+1)} \left( \frac{s}{2} \right)^{s(1-2)/(2(s+1))} e^{-s/(2(s+1))} \delta^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)}. \tag{10}$$

*Замечание 1. Оценка погрешности (10) имеет порядок  $O(\delta^{s/(s+1)})$ , и, как следует из [2], он является оптимальным в классе задач с истокопредставимыми решениями  $x = A^s z$ ,  $s > 0$ .*

*Замечание 2. Оптимальная оценка (10) не зависит от  $\alpha$ , но от параметра  $\alpha$  зависит  $n_{\text{опт}}$ , поэтому для уменьшения объема вычислительной работы следует брать  $\alpha$ , удовлетворяющим условию (4), и так, чтобы  $n_{\text{опт}} = 1$ . Для этого достаточно*

*выбрать  $\alpha_{\text{опт}} = 2^{-2/(s+1)} \left( \frac{s}{2} \right)^{(s+2)/(s+1)} e^{-s/(s+1)} \|z\|^{2/(s+1)} \delta^{-2/(s+1)}$ .*

Сравнение метода (3) с широко известным явным методом итераций [2–6]

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha \delta (I - Ax_{n,\delta}) - x_{0,\delta} = 0 \tag{11}$$

показывает, что порядки их оптимальных оценок одинаковы. Достоинство явных методов в том, что явные методы не требуют обращения оператора, а требуют только вычисления значений оператора на последовательных приближениях. В этом смысле явный метод (11) предпочтительнее неявного метода (3). Однако неявный метод (3) обладает следующим важным достоинством. В явном методе (11) на шаг  $\alpha$  накладывается

ограничение сверху – неравенство  $0 < \alpha \leq \frac{5}{4\|A\|}$ , что может привести на практике к не-

обходимости большого числа вычислений. В неявном методе (3) ограниченный сверху на  $\alpha > 0$  нет. Это позволяет считать  $\alpha > 0$  произвольно большим (независимо от  $\|A\|$ ). В связи с чем оптимальную оценку для метода (3) можно получить уже на первом шаге итераций.

### 6. Погрешность в счете

Рассмотрим погрешность метода при счете с округлениями. Пусть  $x_{n,\delta}$  – точное значение, получаемое по формуле (3), а  $z_n$  – значение с учетом вычислительной погрешности, т.е.

$$z_{n+1} = (E + \alpha A^2)^{-1} \left\{ (E - \alpha A^2)^{-1} z_n + 2\alpha A y_\delta + \alpha \gamma_n \right\}, \quad z_0 = 0. \quad (12)$$

Здесь  $\gamma_n$  – погрешность вычислений. Обозначим  $\varepsilon_n = z_n - x_{n,\delta}$  и вычтем из (12) равенство (3). Имеем  $\varepsilon_{n+1} = (E + \alpha A^2)^{-1} \left\{ (E - \alpha A^2)^{-1} \varepsilon_n + \alpha \gamma_n \right\}$ ,  $\varepsilon_0 = 0$ . Так как нулевые приближения равны нулю, то  $\gamma_0 = 0$ . По индукции нетрудно получить, что

$$\varepsilon_n = \sum_{i=0}^{n-1} (E + \alpha A^2)^{-1} (E - \alpha A^2)^{-i-1} (E - \alpha A^2)^{-n-1-i} \alpha \gamma_i.$$

В силу (4) и того, что  $0 \in Sp A$  справедливо  $\| (E + \alpha A^2)^{-1} (E - \alpha A^2) \| \leq 1$ , поэтому  $\|\varepsilon_n\| \leq n\alpha\gamma$ ,  $\gamma = \sup_i |\gamma_i|$ .

Таким образом, с учетом вычислительной погрешности оценка погрешности метода (3) запишется в виде

$$\|x - z_n\| \leq \|x - x_{n,\delta}\| + \|x_{n,\delta} - z_n\| \leq s^{s/2} n\alpha e^{-s/2} \|z\| + 4n^{1/2} \alpha^{1/2} \delta + n\alpha\gamma, \quad n \geq 1.$$

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Савчук, В. Ф. Некоторые итеративные методы решения уравнений I рода / В. Ф. Савчук // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1976. – № 5. – С. 23–27.
2. Вайникко, Г. М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г. М. Вайникко, А. Ю. Веретенников. – М. : Наука, 1986. – 178 с.
3. Константинова, Я. В. Оценки погрешности в методе итераций для уравнений I рода / Я. В. Константинова, О. А. Лисковец // Вестн. БГУ. Сер. 1. – 1973. – № 1. – С. 9–15.
4. Самарский, А. А. Численные методы решения обратных задач математической физики / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 480 с.
5. Лаврентьев, М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики / М. М. Лаврентьев. – Новосибирск : Изд-во Сиб. отд. АН СССР, 1962. – 92 с.
6. Денисов, А. М. Введение в теорию обратных задач / А. М. Денисов. – М. : Изд-во МГУ, 1994. – 207 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 14.09.2016

### *Matysik O.V., Sidak S.V. Convergence the Non-evident Iteration Process of the Decision of the Ill-Posed Equations of first kind in the Hilbert Space*

*In the Hilbert space to solve of the linear equations with limited affirmed self-adjoned operator we investigate the application of the new non-evident iterative method. Convergence of the method in its initial norm of Hilbert space is proved. The apriori estimations of this method error, having a precise and approximate right-side part of the operator equation, the error in calculation have been received. For the offered method the found estimations of the error are optimised. The comparison of the error estimations of the given iteration method and the evident method of simple iteration has been done.*

УДК 515.1

**А.О. Пришляк<sup>1</sup>, Д.Н. Скочко<sup>2</sup>**<sup>1</sup>д-р физ.-мат. наук, проф. каф. геометрии топологии и динамических систем

Киевского государственного университета имени Т. Шевченко

<sup>2</sup>аспирант каф. геометрии топологии и динамических систем

Киевского государственного университета имени Т. Шевченко

**АТОМЫ С ОДНОЙ, ДВУМЯ И ТРЕМЯ КРИТИЧЕСКИМИ ТОЧКАМИ  
ДЛЯ ФУНКЦИЙ МОРСА НА ПОВЕРХНОСТЯХ С КРАЕМ**

*Теория функций Морса является одним из основных инструментов для исследования топологических объектов. Данная статья посвящена исследованиям атомов функций Морса, которые заданы на поверхностях с краем. Присутствуют и некоторые ограничения на атомы: они могут иметь сложность от одного до трех и обязательно должны иметь хотя бы одну критическую точку, которая отвечает локальному минимуму или максимуму компоненты края относительно функции Морса. В работе найдены и приведены иллюстрации всех таких атомов, а именно, один атом сложности один, пять атомов сложности два и сорок семь атомов сложности три.*

**Введение**

Теория функций Морса является одним из основных инструментов для исследования топологических объектов. Она развивалась во многих работах, например, таких как [1; 2, с. 18; 3, с. 66–147], в которых были сформулированы основные понятия теории. В [3, с. 74] рассмотрено простые функции Морса для двумерных многообразий; в [4, с. 40] – сложные функции Морса, на каждом критическом уровне которой может быть 2 или 3 критические точки, т.е. исследованы все возможные -атомы сложности 2 и 3. Кроме того, в работах [5, с. 49; 6, с. 61; 7, с. 799; 8, с. 22; 9, с. 1129] исследуются случаи функций Морса на двух- и трехмерных многообразиях с краем.

В [1, с. 138] найдены все атомы для двумерных многообразий без края. Любой из них может быть атомом для функции Морса  $f$ , заданной на некоторой поверхности  $X^2$  с краем, однако эти атомы не учитывают особенностей, возникающих в окрестности точек локальных минимумов и максимумов компонент края многообразия относительно ограничения функции  $f$  на край. Поэтому для поверхностей с краем к атомам сложности один:  $A$ ,  $B$ ,  $\tilde{B}$  стоит добавить еще два типа атомов  $C_1$ , отвечающий локальному минимуму, и  $C_2$ , отвечающий локальному максимуму ограничения функции  $f$  на край.

Целью данной работы является нахождение всех атомов для функций Морса, заданных на двумерных многообразиях с краем, которые содержат одну, две или три критические точки и хотя бы одна из этих точек отвечает  $C_1$ - или  $C_2$ -особенности.

**1. Атомы на замкнутых поверхностях**

Пусть  $f(x)$  – функция, которая задана на гладком многообразии  $X^2$ , и  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – гладкие регулярные координаты в окрестности точки  $x$ .

**Определение 1.** Точка  $x$  называется *критической* для функции  $f$ , если дифференциал  $df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$  обращается в ноль в точке  $x$ . Это эквивалентно условию преобразования в ноль всех частных производных в данной точке. Критическая точка  $x$  называется *невырожденной*, если второй дифференциал  $d^2f = \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$  невырожденный в этой точке. Это эквивалентно тому, что матрица вторых частных производных имеет определитель, отличный от нуля.

Согласно лемме Морса [2], в окрестности каждой невырожденной критической точки всегда можно выбрать такие локальные координаты, в которых функция запишется в виде квадратичной формы:  $f(x) = -x_1^2 - x_1^2 - \dots + x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_n^2$ . Для каждой невырожденной критической точки число  $\lambda$  определяется однозначно и называется ее индексом. Таким образом, на поверхности может существовать только три типа критических точек: минимум, максимум и седловая.

**Определение 2.** Гладкая функция называется *функцией Морса*, если все ее критические точки невырожденные. Мы также будем требовать, чтобы критические точки не лежали на краю и все критические точки ограничения функции на край были невырожденными. Функция Морса, которая на каждом критическом уровне имеет только одну критическую точку, называется *простой*, а во всех остальных случаях – *сложной*.

Пусть  $f$  – функция Морса на поверхности  $X^2$ , а  $g$  – функция Морса на другой поверхности  $Y^2$ . Рассмотрим  $(X^2, f)$  и  $(Y^2, g)$ .

**Определение 3.** Функции Морса  $f$  и  $g$  на поверхностях  $X^2$  и  $Y^2$  называются *послойно-эквивалентными*, если существует диффеоморфизм  $\mu : X^2 \rightarrow Y^2$ , переводящий связные компоненты линий уровня функции  $f$  в связные компоненты линий уровня функции  $g$ . В этом случае говорят, что пара  $(X^2, f)$  послойно эквивалентна паре  $(Y^2, g)$ .

**Определение 4.** *Атомом* называется окрестность  $P^2$  критического слоя, задаваемая неравенством  $c - \varepsilon \leq f \leq c + \varepsilon$  для достаточно малого  $\varepsilon$ , расслоенная на линии уровня функции  $f$  и рассматриваемая с точностью до послойной эквивалентности.

Для случая двумерных многообразий без края вполне достаточно трех атомов  $A$  (локальный минимум или максимум),  $B$  (седловая точка) и  $\tilde{B}$  (случай вклеивания листа Мебиуса).

**Определение 5.** Атом называется *простым*, если функция Морса  $f$  в паре  $(P^2, f)$  – простая. Остальные атомы называются *сложными*.

**Определение 6.** Рассмотрим пару  $(P^2, f)$ , где  $P^2$  – связная компактная поверхность с непустым краем  $\partial P^2$ , а  $f$  – функция Морса на ней, имеющая ровно одно критическое значение, причем  $f^{-1}(c - \varepsilon) \cup f^{-1}(c + \varepsilon) = \partial P^2$ . Класс оснащенной послойной эквивалентности этой пары  $(P^2, f)$  будет называться *-атомом*, или *оснащенным атомом*.

## 2. Атомы сложности 1 и 2 для многообразий с краем

Пусть  $f$  – функция Морса на поверхности  $M^2$  с краем. Исследуем, сколько всего существует атомов для сложных функций Морса на  $M^2$ , содержащие одну, две или три критические точки на одном критическом уровне. Как отмечено ранее, существует пять типов критических точек  $A, B, \tilde{B}, C_1$  и  $C_2$ . Для построения многообразий с краем удобно воспользоваться представлением атома в виде склейки крестов и полос, изображенных на рисунке 1, где заштрихованные участки – это положительная часть окрестности критического слоя, а белые – отрицательная часть. Стрелки  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \zeta, \eta, \theta, \vartheta$  указывают направление роста функции  $f$  и места склейки полосок и крестов.

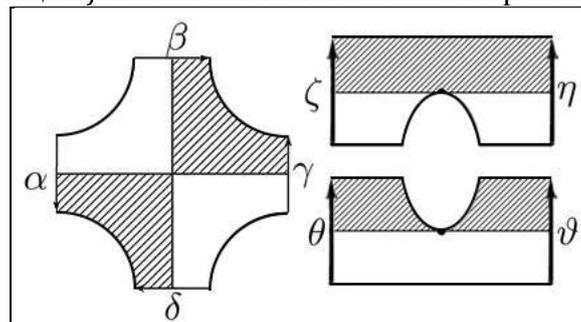


Рисунок 1. – Кресты и полосы для создания склеек атомов

Следует отметить, что функция Морса  $f: M^2 \rightarrow R$  должна удовлетворять следующие условия:

- 1) все ее критические точки невырождены и не лежат на  $\partial M^2$ ;
- 2) край многообразия можно представить в виде объединения

$$\partial M^2 = \partial M_-^2 \cup \partial M_0^2 \cup \partial M_+^2,$$

такого, что ограничение  $f_\partial$  функции  $f$  на  $\partial M_0^2$  является функцией Морса, и если множество  $\partial M_-^2 \neq \emptyset$  ( $\partial M_+^2 \neq \emptyset$ ), то функция  $f$  принимает на ней минимальное (максимальное) значение. При этом пересечение  $V_- = \partial M_-^2 \cap \partial M_0^2$  и  $V_+ = \partial M_0^2 \cap \partial M_+^2$  будут 0-мерными многообразиями, которые называются углами, а сама тройка  $(M^2, \partial M^2, V_- \cup V_+)$  – поверхностью с углами. Критические значения такой функции состоят из критических значений функций  $f$  и  $f_\partial$ . Критические значения для функций Морса  $f$  и соответствующие им атомы рассмотрены в [3, с. 138].

В дальнейшем под *атомами для функций Морса, заданных на многообразиях с краем*, будем понимать атом функции Морса, содержащий обязательно хотя бы одну из двух особенностей  $C_1$  или  $C_2$ . В таком случае -атомов с одной критической точкой для двумерных многообразий с краем существует только два:  $C_1$  и  $C_2$  (рисунок 2), – и они соответствуют одному атому.

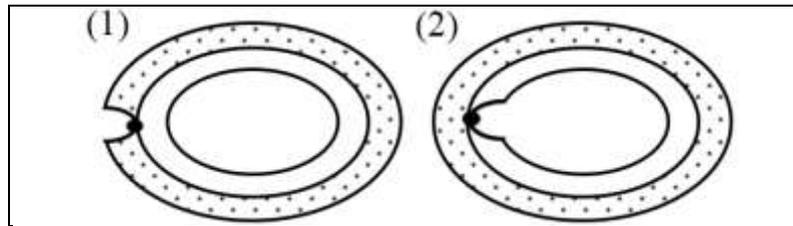


Рисунок 2. – Атомы сложности 1

Для случая, когда атом имеет сложность 2, имеет место следующее свойство.

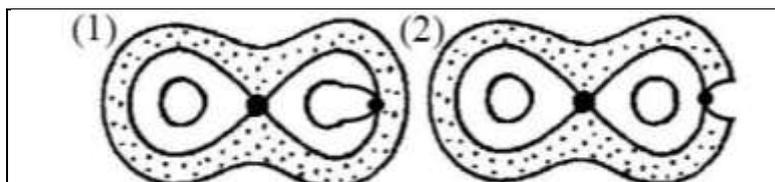
**Теорема 1.** Для сложных функций Морса, заданных на двумерных многообразиях с краем, существует 5 атомов сложности 2, содержащих локальные минимумы и максимумы компонент края.

**Доказательство.** Атом, имеющий две критические точки, можно представить в виде двух вариантов склеек: склейка креста с полосой или склейки двух полос.

1. Исследуем сколько существует вариантов для приклеивания полосы к кресту. Полосы с  $C_1$ - и  $C_2$ -особенностями имеют по два места для склейки  $\theta, \vartheta$  и  $\zeta, \eta$  соответственно, а крест – четыре:  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ . В дальнейшем выражение  $\alpha\beta$  означает, что  $\alpha$  приклеено к  $\beta$ .

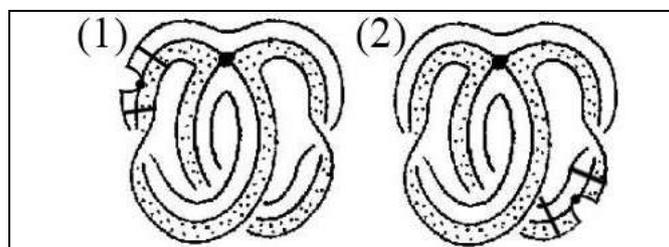
**Ориентированные атомы.** Рассмотрим два типа склеек  $(\alpha\beta, \gamma\delta)$  и  $(\alpha\delta, \gamma\beta)$ . Они образуют два -атома, соответствующие атому  $B$  (седловая критическая точка).

В первую склейку можно вклеить полосу с  $C_2$ -особенностью двумя способами:  $(\alpha\zeta, \eta\beta, \gamma\delta)$  и  $(\alpha\beta, \gamma\zeta, \eta\delta)$ . Эти склейки задают один и тот же атом, показанный на рисунке 3(1), с точностью до поворота на  $180^0$ . Во вторую склейку можно вклеить полосу с  $C_1$ -особенностью также двумя способами:  $(\alpha\theta, \vartheta\delta, \beta\gamma)$  и  $(\alpha\delta, \beta\vartheta, \theta\gamma)$ . Но, как и в предыдущем случае, полученные склейки задают один и тот же атом с точностью до поворота на  $180^0$  – рисунок 3(2).



**Рисунок 3. – Ориентируемые атомы сложности 2 с одной седловой точкой**

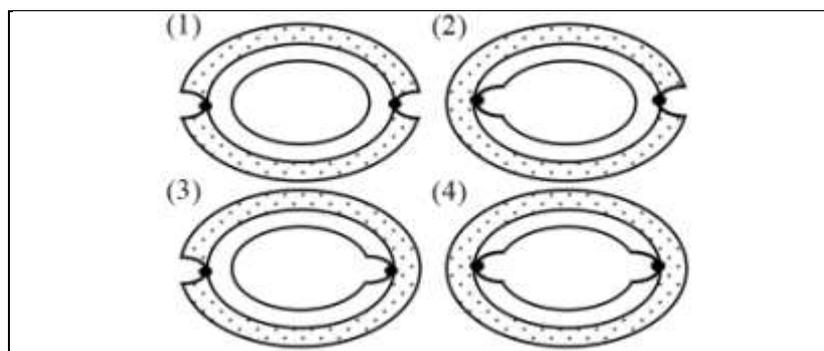
*Неориентированные атомы.* Склейка  $(\alpha\gamma, \beta\delta)$  отвечает атому  $\tilde{B}$ . В нее можно вклеить полоску  $\theta\vartheta$  двумя способами:  $(\alpha\theta, \vartheta\gamma, \beta\delta)$  и  $(\alpha\gamma, \beta\theta, \vartheta\delta)$ , – оба из которых соответствуют одному -атому (рисунок 4(2)), и полоску  $\zeta\eta$  двумя способами:  $(\alpha\gamma, \beta\zeta, \eta\delta)$  и  $(\alpha\zeta, \eta\gamma, \beta\delta)$ , соответствующими  $f$ -атому (рисунок 4(1)). Заменяя у первого -атома цвета окрестностей на противоположные, получим второй  $f$ -атом. Таким образом, существует только один атом сложности 2, обе критические точки которого являются  $C_1$ - или  $C_2$ -особенностями.



**Рисунок 4. – Неориентируемые атомы сложности 2**

2. Склейка двух полос дает такие варианты атомов (рисунок 5), все из которых являются ориентированными:

- 1)  $(\theta_1\vartheta_2, \theta_2\vartheta_1)$  – рисунок5(1);
- 2)  $(\vartheta\zeta, \theta\eta)$  – рисунок5(2);
- 3)  $(\theta\eta, \vartheta\theta)$  – рисунок5(3);
- 4)  $(\zeta_1\eta_2, \zeta_2\eta_1)$  – рисунок (4).



**Рисунок 5. – Ориентируемые атомы сложности 2 без седловых точек**

Атом (1) и (4), так же как (2) и (3), являются -атомами одного атома. Таким образом, существует только два атома, имеющих две критические точки, каждая из которых является  $C_1$ - или  $C_2$ -особенностью.

Итак, всего существует 4 ориентированных атома с двумя критическими точками и 1 неориентированный атом для функций Морса, заданные на поверхности с краем.

### 3. Атомы сложности 3 для многообразий с краем

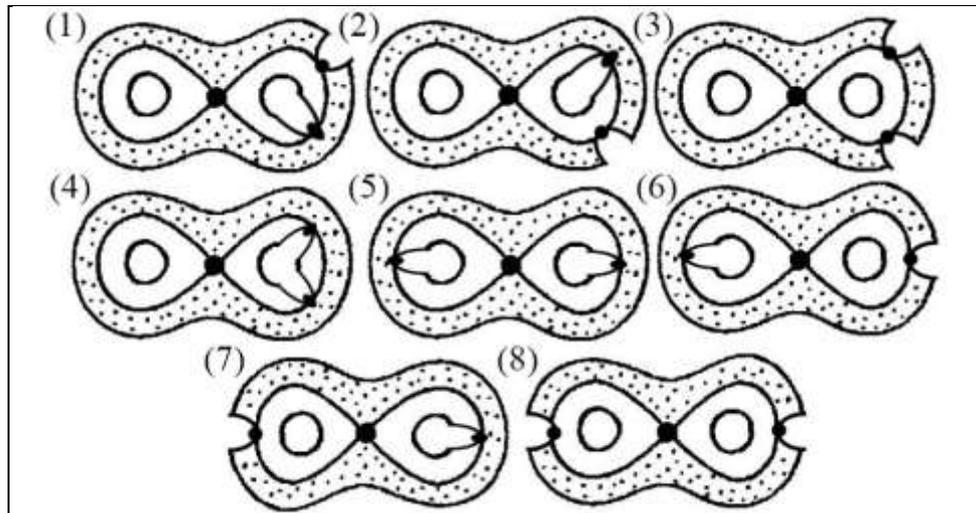
**Теорема 2.** Для сложных функций Морса, заданных на двумерных многообразиях с границей, существует 47 атомов сложности 3, содержащих локальные минимумы и максимумы компонент пределов.

**Доказательство.** Атом сложности 3 можно получить следующими типами склейки:

- 1) склейка креста с двумя полосами;
- 2) склейка двух крестов с одной полосой;
- 3) склейка трех полос.

1. Пусть крест склеен по следующему закону:  $(\alpha\beta, \gamma\delta)$ . Он соответствует атому, на критическом уровне которого находится одна седловая точка. В него можно вклеить две полосы восемью способами (рисунок 6):

- 1)  $(\alpha\theta, \vartheta\zeta, \eta\gamma, \beta\delta)$ ;
- 2)  $(\alpha\theta_1, \vartheta_1\theta_2, \vartheta_2\gamma, \beta\delta)$ ;
- 3)  $(\alpha\zeta_1, \eta_1\zeta_2, \eta_2\gamma, \beta\delta)$ ;
- 4)  $(\alpha\zeta, \eta\theta, \vartheta\gamma, \beta\delta)$ ;
- 5)  $(\alpha\zeta, \eta\gamma, \beta\vartheta, \theta\delta)$ ;
- 6)  $(\alpha\theta, \vartheta\gamma, \beta\zeta, \eta\delta)$ ;
- 7)  $(\alpha\zeta_1, \eta_1\gamma, \beta\eta_2, \zeta_2\delta)$ ;
- 8)  $(\alpha\theta_1, \vartheta_1\gamma, \beta\vartheta_2, \theta_2\delta)$ .

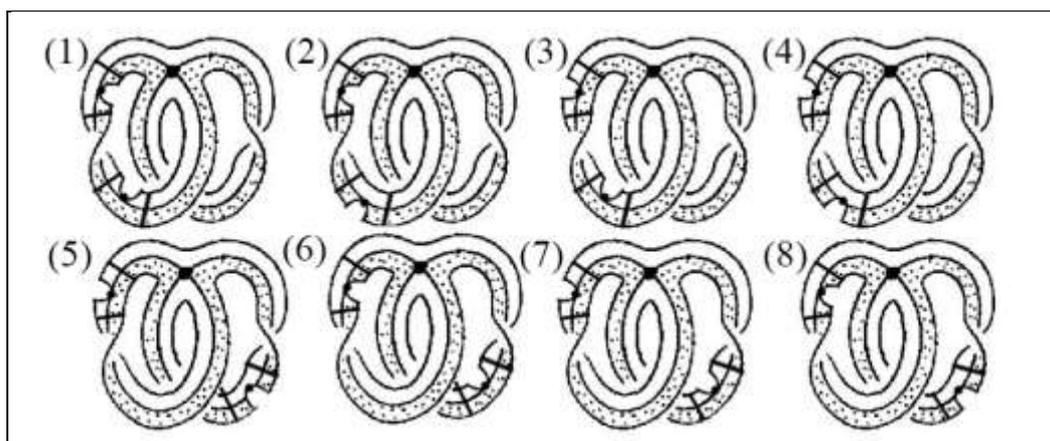


**Рисунок 6.** – Ориентируемые атомы сложности 3 с одной седловой точкой

Первые четыре варианта соответствуют тем случаям, когда обе полосы вклеиваются с одной стороны относительно седловой критической точки, а остальные четыре – с разных. Варианты (1) и (2) являются гомеоморфными относительно осевой симметрии, а варианты (6) и (7) – относительно поворота на  $180^\circ$ . Таким образом, существует шесть ориентируемых атомов сложности 3 с одной седловой точкой.

Пусть крест склеен неориентированно, т.е.  $(\alpha\gamma, \beta\delta)$ , аналогично предыдущему случаю, существует четыре склейки, где полосы располагаются на одной стороне относительно критической точки креста и четыре на разных (рисунок 7):

- 1)  $(\alpha\theta, \vartheta\zeta, \eta\gamma, \beta\delta)$ ;
- 2)  $(\alpha\theta_1, \vartheta_1\theta_2, \vartheta_2\gamma, \beta\delta)$ ;
- 3)  $(\alpha\zeta_1, \eta_1\zeta_2, \eta_2\gamma, \beta\delta)$ ;
- 4)  $(\alpha\zeta, \eta\theta, \vartheta\gamma, \beta\delta)$ ;
- 5)  $(\alpha\zeta, \eta\gamma, \beta\vartheta, \theta\delta)$ ;
- 6)  $(\alpha\theta, \vartheta\gamma, \beta\zeta, \eta\delta)$ ;
- 7)  $(\alpha\zeta_1, \eta_1\gamma, \beta\eta_2, \zeta_2\delta)$ ;
- 8)  $(\alpha\theta_1, \vartheta_1\gamma, \beta\vartheta_2, \theta_2\delta)$ .



Рисунек 7. – Неориентируемые атомы сложности 3

Атомы (1) и (4) гомеоморфны, а (5) и (6) являются  $f$ -атомами одного атома. Таким образом, существует шесть не ориентируемых атомов сложности три.

2. Существует четыре ориентированных атома сложности два, образованные склеиванием двух крестов:

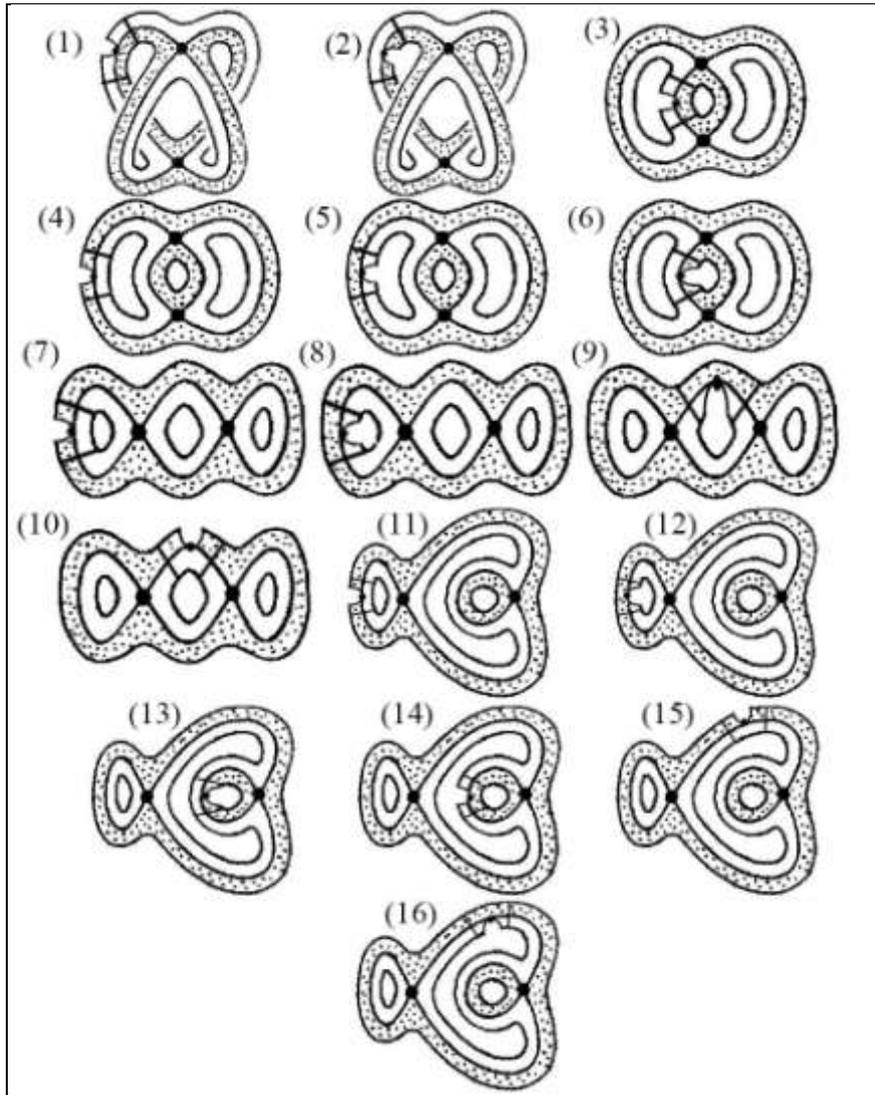
- 1)  $(\alpha_1\beta_2, \beta_1\gamma_2, \gamma_1\delta_2, \delta_1\alpha_2)$ ;
- 2)  $(\alpha_2\beta_1, \beta_2\alpha_1, \gamma_2\delta_1, \delta_2\gamma_1)$ ;
- 3)  $(\alpha_1\beta_1, \gamma_1\beta_2, \delta_1\alpha_2, \gamma_2\delta_2)$ ;
- 4)  $(\alpha_1\beta_1, \gamma_1\beta_2, \delta_1\gamma_2, \alpha_2\delta_2)$ ;

Вклеить полосу в первую склейку можно восемью способами: четырьмя для вклейки полосы локального максимума (каждый из трех последних может быть получен из первого поворотом на  $180^\circ$  или осевой симметрией) и четырьмя для минимума (три последних из которых также могут быть получены поворотом первого на  $180^\circ$  или осевой симметрией).

Таким образом, существует два атома, которые на рисунке 9 пронумерованы как 1 и 2, но, заменив цвета первого атома на противоположные, получим атом под номером 2; следовательно, 1 и 2 являются двумя -атомами одного атома.

Для второй склейки существует восемь вариантов атомов, которые разбиваются на пары таким образом, чтобы в каждой из пар второй атом можно было получить из первого осевой симметрией; следовательно, каждой паре соответствует по одному атому, а потому существует 4 атома, которые изображены на рисунке 8 под номерами от 3 до 6.

Для третьей склейки также существует четыре пары с симметричными атомами; представители каждой из пар имеют на рисунке 8 номера от 7 до 10. Для четвертой склейки существует 6 атомов, их номера – 12–16, для атомов под номерами 15 и 16 существует по паре симметричных атомов.



**Рисунок 8. – Ориентированные атомы сложности 3 с двумя седловыми точками**

Итак, существует 15 ориентированных атомов сложности три, которые можно представить в виде склейки из двух крестов и одной полосы.

Существует четыре типа неориентированных атомов сложности два, каждый из которых можно представить в виде склейки двух крестов:

- 1)  $(\alpha_1\beta_2, \gamma_1\alpha_2, \beta_1\gamma_2, \delta_1\delta_2)$ ;
- 2)  $(\alpha_1\alpha_2, \beta_1\delta_2, \gamma_1\beta_2, \delta_1\gamma_2)$ ;
- 3)  $(\alpha_1\beta_1, \gamma_1\beta_2, \alpha_2\gamma_2, \delta_1\delta_2)$ ;
- 4)  $(\alpha_1\gamma_1, \delta_1\beta_2, \beta_1\delta_2, \alpha_2\gamma_2)$ .

Для первой склейки существует четыре пары атомов, каждой из которых соответствует по одному атому с номерами от 1 до 4 (рисунок 9).

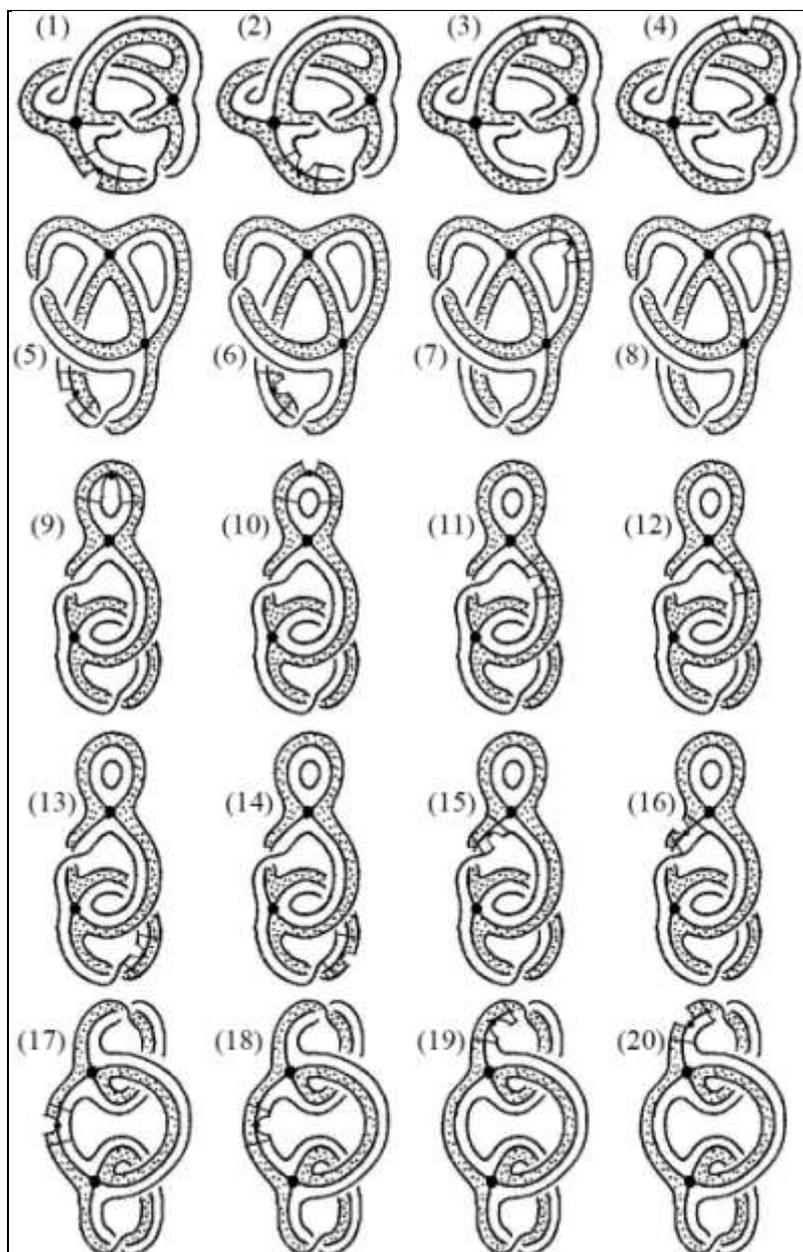
Для второй склейки имеется две пары симметричных атомов, которым на рисунке 10 соответствуют номера 5 и 6, и два атома – 7 и 8, которые симметричны сами себе.

Третья склейка не имеет симметрий и поворотов, следовательно, все восемь возможных атомов не гомеоморфны между собой (рисунок 10); их номера – 9–16.

Для четвертой существует две склейки под номерами 17 и 18, причем 17 получается из 18 заменой цветов на противоположные, следовательно, они соответствуют од-

ному атому. Кроме того, еще есть две пары симметричных склеек, которым даны номера 19 и 20, но 19 аналогичным образом можно получить из 20.

Таким образом, всего существует 18 неориентированных атомов сложности три, которые можно представить в виде склейки двух крестов и одной полосы.



**Рисунок 9. – Неориентированные атомы сложности три**

3. Случаев, когда атом образован склеиванием двух полос, всего 4:

- 1) все три критические точки являются  $C_1$ -особенностью (рисунок 10(1));
- 2) все три критические точки являются  $C_2$ -особенностью (рисунок 10(2));
- 3) одна  $C_1$ - и две  $C_2$ -особенности (рисунок 10(3));
- 4) одна  $C_2$ - и две  $C_1$ -особенности (рисунок 10(4)).

Случаи (1) и (2), так же, как и (3) и (4), соответствуют различным -атомом одного атома, а потому существует только два атома сложности 3, склеенных только из полос.

Следовательно, всего существует 47 атомов сложности 3 для функций Морса, заданной на поверхности с краем.

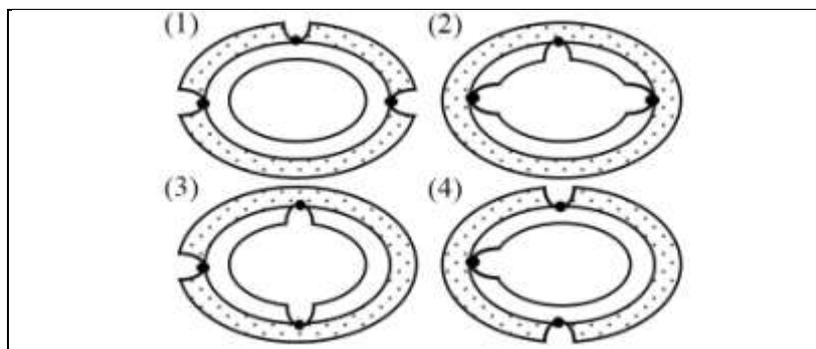


Рисунок 10. – Склейки с трех лент

Таким образом, для функций Морса, заданных на поверхностях с краем, существует 1 атом сложности один, 5 атомов сложности два и 47 атомов сложности три.

### Заключение

В данной работе найдены все атомы с одной, двумя и тремя критическими точками функций Морса на замкнутых двумерных многообразиях с краем. Все данные занесены в таблицу.

Таблица. – Характеристики атомов сложности один, два и три

Тип	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Сумма
Сложность атома	1		2				3			53
Количество крестов	0	1	1	0	1	1	2	2	0	
Количество полос	1	1	1	2	2	2	1	1	3	
Ориентированный (+/-)	+	+	-	+	+	-	+	-	-	
Количество атомов	1	2	1	2	6	6	15	18	2	

Многообразия и заданные для них функции Морса могут иметь более сложное строение; например, функция Морса может иметь на одном критическом уровне больше трех критических точек. В дальнейшем планируется исследовать атомы с четырьмя и пятью критическими точками.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Милнор, Дж. Теория Морса / Дж. Милнор. – М. : Мир, 1971.
2. Matsumoto, Y. An Introduction to Morse Theory / Y. Matsumoto // American Mathematical Society. Translations of Mathematical Monography. – 2002. – Vol. 208.
3. Болсинов, А. В. Интегрируемые гамильтоновы системы / А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко. – Ижевск : Удмур. ун-т. – 1999. – Т. 1.
4. Иванюк, О. Атомы сложности 2 на поверхностях с краем / О. Иванюк, О. Пришляк // Proceedings of International Geometrical Center. – 2013. – Vol. 6, № 3.

5. Prishlyak, A. O. Equivalence of Morse function on 3-manifolds / A. O. Prishlyak // Methods of Functional Analysis and Topology. – 1999. – Vol. 5, № 3.
6. Пришляк, А. О. Гомотопическая эквивалентность  $m$ -функций без внутренних критических точек на трёхмерных телах / А. О. Пришляк // ТВИМ. – 2012. – № 2.
7. Пришляк, А. О. Топологическая классификация  $m$ -полей на двух- и трехмерных многообразиях с краем / А. О. Пришляк // Украин. мат. журн. – 2003. – Т. 55, № 6.
8. Пришляк, А. О. Эквивалентность  $m$ -функций на трехмерных многообразиях с углами / А. О. Пришляк // Доповіді НАН України. – 2000. – № 6.
9. Максименко, С. І. Класифікація  $m$ -функцій на поверхнях / С. І. Максименко // Украин. мат. журн. – 1999. – Т. 51, № 8.

Рукапіс паступїў у рєдакцью 06.10.2016

***Prishlyak A.O., Scochco D.N. Atoms with One, Two and Three Critical Points for Morse Functions on Surfaces with Boundary***

*This article is devoted to the study of atoms of Morse functions which are defined on surfaces with a boundary. There are some atoms limitations: they have one, two or three critical points and they must have at least one critical point, which corresponds to a local minimum or maximum of the function restriction to the boundary. There are forty three different atoms, which satisfy these limitations: only one atom with one critical point, five atoms with two critical points and forty seven atoms that contain three critical points. Illustrations were listed for every of forty three atoms.*

УДК 513.82

**Е.М. Ракович<sup>1</sup>, А.А. Юдов<sup>2</sup>**<sup>1</sup>магистрантка каф. алгебры, геометрии и математического моделирования  
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина<sup>2</sup>канд. физ.-мат. наук, доц. каф. алгебры, геометрии и математического моделирования  
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина**КЛАССИФИКАЦИЯ ПОДГРУПП ЛИ ГРУППЫ ЛИ  
ДВИЖЕНИЙ ЧЕТЫРЁХМЕРНОГО ПСЕВДОЕКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА  
НУЛЕВОЙ СИГНАТУРЫ**

*В работе классифицируются связанные подгруппы Ли группы Ли движений четырёхмерного псевдоевклидова пространства нулевой сигнатуры – пространства  ${}^2R_4$ . Найдены инвариантные плоскости и прямые для таких подгруппы Ли и их образы стационарности.*

В работе изучается геометрия однородных пространств. Анализ таких пространств является одной из актуальных проблем современной геометрии. В этом направлении выполняется много исследовательских работ. В Беларуси задачами такого характера занимались В.И. Ведерников, И.В. Белько, А.А. Бурдун, В.В. Балащенко, С.Г. Кононов, Л.К. Тутаев, А.С. Феденко и др., а за рубежом – эстонский геометр Ю. Лумисте и японские геометры К. Номидзу и Ш. Кобаяси. Ю. Лумисте показал применимость редутивных однородных пространств к проблеме расширения связностей на расслоениях с редутивными однородными слоями. К. Номидзу и Ш. Кобаяси проводили широкое исследование редутивных однородных пространств, в частности, исследовали свойства инвариантной связности в редутивных однородных пространствах.

**1. Постановка задачи и метод решения**

Рассматривается группа  $G_0 = T_4 \cdot O_{4,2}$  движений пространства  ${}^2R_4$ . Ставится задача классификации всех связных подгрупп Ли группы  $G_0$  с точностью до внутренних автоморфизмов этой группы, т.е. до сопряжённости. Для решения этой задачи будем применять тот же метод, который разработали И.В. Белько и А.С. Феденко для классификации связных подгрупп Ли группы движения пространства Минковского [1; 2]. Ниже кратко излагаются основы этого метода применительно к группе движений пространства  ${}^2R_4$ .

Как известно, задача классификации связных подгрупп группы Ли с точностью до внутренних автоморфизмов эквивалентна задаче классификации подалгебр алгебры Ли этой группы с точностью до присоединённого представления этой группы. Подалгебры, переводящиеся друг в друга элементами присоединённой группы, тоже будем называть сопряжёнными.

В настоящей работе решается задача классификации подалгебр Ли алгебры  $\overline{G}_0$  с точностью до присоединённого представления  $Ad$  группы  $G_0$ . Присоединённая группа действует в  $\overline{G}_0$  по формуле:

$$Ad B C = B^{-1} C B, \quad B \in G_0, C \in \overline{G}_0. \quad (1)$$

Следуя И.В. Белько [2], введем следующие определения:

*Определение 1.* Пусть  $\bar{T} \oplus K$  – полупрямая сумма идеала  $\bar{T}$  и подалгебры  $K$ ,  $\bar{H}$  – подалгебра алгебры  $\bar{T} \oplus K$ ,  $H_1 = \bar{H} \cap \bar{T}$ ,  $H_2 = pr_2 \bar{H}$ . Подалгебра  $\bar{H}$  называется полупрямой, если  $\bar{H} = H_1 \oplus H_2$ , т.е.  $pr_1 \bar{H} = H_1$ ,  $\bar{H} \cap K = H_2$ .

*Определение 2.* Подалгебра  $\bar{I}$  алгебры  $\bar{T} \oplus K$  называется расширением полупрямой подалгебры  $\bar{H} = H_1 \oplus H_2$ , если  $\bar{I} \cap \bar{T} = H_1$ ,  $pr_2 \bar{I} = H_2$ .

Имеют место следующие леммы, первые две из которых доказаны в [2].

*Лемма 1.* Пусть  $\bar{T} \oplus K$  – полупрямая сумма идеала  $\bar{T}$  и подалгебры  $K$ ,  $\bar{H}$  – подалгебра алгебры  $\bar{T} \oplus K$ . Тогда:

- 1)  $\bar{H} \cap \bar{T} = H_1$  – подалгебра алгебры  $\bar{T}$ ,
- 2)  $pr_2 \bar{H} = H_2$  – подалгебра алгебры  $K$ ,
- 3) если идеал  $\bar{T}$  абелев, то  $H_1 \oplus H_2$  – подалгебра алгебры  $\bar{T} \oplus K$ .

*Лемма 2.* Пусть  $\bar{T} \oplus K$  – полупрямая сумма идеала  $\bar{T}$  и подалгебры  $K$ ,  $\bar{P}$  – подалгебра алгебры  $\bar{T}$ ,  $\bar{H}$  – подалгебра алгебры  $K$ . Подпространство  $\bar{P} \oplus \bar{H}$  тогда и только тогда является подалгеброй алгебры  $\bar{T} \oplus K$ , когда подпространство  $\bar{P}$  инвариантно относительно  $adX$  для любого  $X \in \bar{H}$ .

*Лемма 3.* Пусть  $\bar{H} = H_1 \oplus H_2$  – полупрямая подалгебра алгебры  $\bar{T}_4 \oplus \mathfrak{g}_{4,2}$ ,  $\bar{I}$  – произвольное расширение подалгебры  $\bar{H}$ ,  $Ad h$  – элемент присоединённой группы  $Ad(O(4,2))$ . Тогда  $Ad h(\bar{H})$  – полупрямая подалгебра,  $Ad h(\bar{I})$  – расширение полупрямой подалгебры  $Ad h(\bar{H})$ .

*Доказательство.*

Пусть  $h \in O_{4,2}$ . Из определения действия присоединённой группы  $AdG_0$  получаем, что выполняются равенства:

$$pr_1 \circ Adh = Adh \circ pr_1, \quad pr_2 \circ Adh = Adh \circ pr_2, \quad (2)$$

где  $pr_i$  – проекция на  $i$ -е слагаемое в сумме  $\bar{T}_4 \oplus \mathfrak{g}_{4,2}$ . Так как  $\bar{H}$  – полупрямая подалгебра, то  $pr_1 \bar{H} = \bar{H} \cap \bar{T}_4$ ,  $pr_2 \bar{H} = \bar{H} \cap \mathfrak{g}_{4,2}$ . Рассмотрим

$$Adh \bar{H} = Adh \bar{H}_1 \oplus Adh \bar{H}_2$$

Из (2) следует, что  $pr_1 Adh \bar{H} = Adh \circ pr_1 \bar{H} = Adh \bar{H}_1$ . С другой стороны, поскольку  $\bar{T}_4$  инвариантно относительно  $Adh$ , то  $Adh \bar{H} \cap \bar{T}_4 = Adh \bar{H}_1$ . Таким образом,  $pr_1 Adh \bar{H} = Adh \bar{H} \cap \bar{T}_4 = Adh \bar{H}_1$ .

Аналогично доказывается равенство

$$pr_2 Adh \bar{H} = Adh \bar{H} \cap \mathfrak{g}_{4,2} = Adh \bar{H}_2$$

Таким образом, алгебра  $Adh \bar{H} = Adh \bar{H}_1 \oplus Adh \bar{H}_2$  – полупрямая.

Подалгебра  $\bar{I}$  – расширение полупрямой подалгебры  $\bar{H}$ , значит,  $\bar{I} \cap \bar{T}_4 = H_1$ ,  $pr_2 \bar{I} = H_2$ . Рассмотрим соотношения:

$$\begin{aligned} Adh \bar{H} \cap \bar{T}_4 &= Adh \bar{H} \cap Adh \bar{T}_4 = Adh \bar{H} \cap \bar{T}_4 = Adh \bar{H}_1, \\ pr_2 \circ Adh \bar{H} &= Adh \circ pr_2 \bar{H} = Adh \bar{H}_2. \end{aligned}$$

Значит,  $Adh \bar{H}$  – расширение полупрямой подалгебры  $Adh \bar{H}$ .

Лемма доказана.

Имеет место следующая основная теорема:

**Теорема.** Всякая подалгебра алгебры  $\bar{T}_4 \oplus \mathfrak{G}_{4,2}$  с помощью  $Adh, h \in O_{4,2}$  сопряжена некоторому расширению подалгебры  $H_1 \oplus H_2$ , где  $H_2$  – один из представителей классов сопряжённых подалгебр алгебры  $\mathfrak{G}_{4,2}$ ,  $H_1$  – подпространство пространства  $\bar{T}_4$ , инвариантное относительно  $adH_2$ .

*Доказательство.*

Пусть  $\bar{I}$  – произвольная подалгебра алгебры  $\bar{T}_4 \oplus \mathfrak{G}_{4,2}$ ,  $\bar{I}_1 = \bar{I} \cap \bar{T}_4$ ,  $\bar{I}_2 = pr_2 \bar{I}$ .

В силу леммы 1,  $\bar{I}_2$  – подалгебра алгебры  $\mathfrak{G}_{4,2}$ . Значит, существует элемент  $h \in O_{4,2}$ , такой, что  $Adh \bar{I}_2 = H_2$ , где  $H_2$  – один из представителей классов сопряжённых подалгебр алгебры  $\mathfrak{G}_{4,2}$ . В силу определения 2,  $\bar{I}$  является расширением полупрямой подалгебры  $\bar{I}_1 \oplus \bar{I}_2$ . В силу леммы 3,  $Adh \bar{I}$  является расширением полупрямой подалгебры  $\bar{I}_1 \oplus \bar{I}_2$ . В силу леммы 3,  $Adh \bar{I}$  является расширением полупрямой подалгебры  $Adh \bar{I}_1 \oplus Adh \bar{I}_2 = Adh \bar{I}_1 \oplus H_2$ . В силу леммы 2, подпространство  $Adh \bar{I}_1$  инвариантно относительно  $adX$  для любого  $X \in H_2$ . Теорема доказана.

Из теоремы следует, что классификация подалгебр алгебры  $\bar{G}_0$  должна проводиться с использованием классификации подалгебр алгебры  $\mathfrak{G}_{4,2}$ . В данной работе используется классификация с точностью до сопряжённости подалгебр алгебры Ли  $\mathfrak{G}_{4,2}$ , приведённая Р.Н. Хабибуллиной и А. П. Широковым [3].

Доказанная теорема сводит задачу классификации подалгебр алгебры  $\bar{T}_4 \oplus \mathfrak{G}_{4,2}$  к трём следующим задачам:

- 1) нахождение всех полупрямых подалгебр вида  $H_1 \oplus H_2$ , где  $H_2$  прибегает множество представителей классов сопряжённых подалгебр алгебры  $\mathfrak{G}_{4,2}$ ,
- 2) нахождение всех расширений полученных полупрямых подалгебр,
- 3) классификация полученных расширений с точностью до сопряжённости.

Покажем, как для подалгебры  $H_2 \in \mathfrak{G}_{4,2}$  находятся подпространства пространства  $\bar{T}_4$ , инвариантные относительно  $ad H_2$ .

Пусть  $A \in \bar{T}_4, B \in \mathfrak{G}_{4,2}$ . Тогда

$$ad B (A) = AB - BA = AB \tag{3}$$

Таким образом, для нахождения инвариантных одномерных подпространств, необходимо решить следующее матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & O_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & O_4 \end{pmatrix},$$

где  $\lambda \in R$  – произвольное число,  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$  – произвольный элемент из  $H_2$ . Аналогично

для нахождения инвариантных двумерных подпространств необходимо решить систему:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & O_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & O_4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & O_4 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & O_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} = \nu \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & O_4 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & O_4 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

где  $\lambda, \mu, \nu, \delta$  – произвольные числа,  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$  – произвольный элемент из  $H_2$ .

Для нахождения инвариантных трёхмерных подпространств воспользуемся следующим утверждением, доказательство которого опускаем. Пусть  $H_2$  – алгебра Ли связной группы Ли  $H_2$ .

Тогда из  $AdH_2 \bar{\mathcal{K}} \subset K$  следует  $adH_2 \bar{\mathcal{K}} \subset K$  и обратно, где  $K$  – подпространство алгебры Ли  $G_0$ . Из формулы (1.8) и (1) заключаем, что присоединённая группа  $AdO_{4,2}$  сохраняет метрику в пространстве  $\bar{T}_4$  (изоморфном  $V_4$ ). Таким образом, если  $Adh \bar{\mathcal{P}} \subset \bar{P}$ , то  $Adh \bar{\mathcal{P}}_0 \subset \bar{P}_0$ , где  $h \in O_{4,2}$ ,  $\bar{P}_0$  – ортогональное дополнение пространства  $\bar{P}$ . Значит, из  $adK \bar{\mathcal{P}} \subset \bar{P}$  следует, что  $adK \bar{\mathcal{P}}_0 \subset \bar{P}_0$ . Таким образом, инвариантные трёхмерные пространства находим как ортогональные дополнения к инвариантным одномерным подпространствам.

Чтобы найти расширения полупрямой подалгебры  $H_1 \oplus H_2$ , необходимо из множества  $\bar{\Gamma}$  всех векторных подпространств алгебры  $\bar{T}_4 \oplus \mathfrak{G}_{4,2}$  удовлетворяющих условию  $\bar{\Gamma} \cap \bar{T} = H_1$ ,  $pr_2 \bar{\Gamma} = H_2$ , выбрать подалгебры, для чего надо потребовать замкнутость операции коммутирования.

Замечание. Для нахождения полупрямых подалгебр, соответствующих подалгебре  $H_2 \subset \mathfrak{G}_{4,2}$ , подпространства  $H_1$  пространства  $\bar{T}_4$ , инвариантные относительно  $adH_2$  нужно искать с точностью до преобразований  $Adh, h \in O_{4,2}$  таких, что  $Adh \bar{\mathcal{H}}_2 \cong H_2$ .

В данной работе находятся расширения для однопрометрических подалгебр Ли.

Для приведения найденных инвариантных подпространств к минимальному числу, согласно замечанию, будем использовать следующие элементы группы  $O_{4,2}$ :

$$h_1 = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \phi - \sin \phi & \\ 0 & 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}, h_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$h_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ch\phi & 0 & sh\phi \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & sh\phi & 0 & ch\phi \end{pmatrix}, h_5 = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 & \lambda \\ \lambda & 1 - \lambda^2/2 & 0 & \lambda^2/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \lambda & -\lambda^2/2 & 0 & 1 + \lambda^2/2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
 h_6 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\lambda^2/2 & -\lambda & -\lambda^2/2 \\ 0 & -\lambda & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda^2/2 & -\lambda & 1-\lambda^2/2 \end{pmatrix}, h_7 = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda/2 & -\lambda/2 & 0 \\ \lambda/2 & 1 & 0 & -\lambda/2 \\ -\lambda/2 & 0 & 1 & \lambda/2 \\ 0 & -\lambda/2 & -\lambda/2 & 1 \end{pmatrix}, \\
 h_8 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, h_9 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, h_{10} = \begin{pmatrix} ch\phi & 0 & sh\phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ sh\phi & 0 & ch\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
 h_{11} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, h_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
 h_{13} &= \begin{pmatrix} 1+\lambda^2/2 & -\sin\phi & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & 0 & 0 \\ 1+\lambda^2/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, h_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
 h_{15} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, h_{16} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

**2. Полупрямые подалгебры алгебры  $\overline{G}_0 = \overline{T}_4 \oplus \mathfrak{g}_{4,2}$**

2.1 Приведём некоторые сведения о  $k$ -плоскостях пространства  ${}^2R_4$ . В зависимости от метрики, которая индуцируется на  $k$ -плоскостях, все  $k$ -плоскости пространства  ${}^2R_4$  разделяются на действительные (евклидовы), «мнимые» (мнимоевклидовы), полувеклидовы и изотропные.

Пусть дана плоскость  $\beta = 0; \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ , где  $O \in {}^2R_4$ ,  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$  – попарно ортогональные векторы из  $V_4$ , определяющие  $k$ -плоскость  $\beta$ . Произвольный вектор  $\vec{a} = \lambda^\alpha \vec{a}_\alpha, \alpha = 1, \dots, k$  имеет длину  $|\vec{a}|$ , определяемую по формуле:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\lambda^1 \vec{a}_1^2 + \lambda^2 \vec{a}_2^2 + \dots + \lambda^k \vec{a}_k^2}.$$

Если  $\vec{a}_1^2 > 0, \vec{a}_2^2 > 0, \dots, \vec{a}_k^2 > 0$ , то  $k$ -плоскость  $\beta$  называется евклидовой; если  $\vec{a}_1^2 > 0, \vec{a}_2^2 > 0, \dots, \vec{a}_k^2 > 0$ , – мнимоевклидовой. Если  $\vec{a}_1^2 > 0, \dots, \vec{a}_e^2 > 0, \vec{a}_{e+1}^2 < 0, \dots, \vec{a}_{e+p}^2 < 0, \vec{a}_{e+p+1}^2 = 0, \dots, \vec{a}_k^2 = 0$ , то  $k$ -плоскость  $\beta$  называется полувеклидовой  $k$ -плоскостью индекса  $l$  дефекта  $k-(l+p)$ . Если все  $\vec{a}_i^2 = 0 \quad i = 1, 2, \dots, k$ , то  $k$ -плоскость  $\beta$  называется изотропной  $k$ -плоскостью.

Евклидову  $k$ -плоскость будем обозначать  $R_k$ , мнимоевклидову  $k$ -плоскость будем обозначать  ${}^k R_k$ , полувеклидову  $k$ -плоскость индекса  $l$  дефекта  $r$  будем обозначать  ${}^e R_k^r$ , изотропную  $k$ -плоскость будем обозначать  $R_k^k$ .

В пространстве  ${}^2 R_4$  существуют все возможные виды 1-плоскостей (т.е. прямых):  $R_1 = 0, \vec{e}_1, {}^1 R_1 = 0, \vec{e}_3, {}^1 R_1^1 = 0, \vec{e}_1 + \vec{e}_3$  – и все возможные виды 2-плоскостей:

$$R_2 = 0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, {}^1 R_2 = 0, \vec{e}_1, \vec{e}_3, {}^2 R_2 = 0, \vec{e}_3, \vec{e}_4, {}^1 R_2^1 = 0, \vec{e}_1, \vec{e}_2 + \vec{e}_3, {}^1 R_2^1 = 0, \vec{e}_3, \vec{e}_2 + \vec{e}_4, {}^2 R_2^2 = 0, \vec{e}_1 + \vec{e}_3, \vec{e}_2 + \vec{e}_4.$$

В пространстве  ${}^2 R_4$  существует только три типа 3-плоскостей:  ${}^1 R_3 = 0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, {}^2 R_3 = 0, \vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_4, {}^1 R_3^1 = 0, \vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_2 + \vec{e}_4$ . 3-плоскостей  $R_3^1, {}^2 R_3^1, R_3, {}^3 R_3, {}^1 R_3^2, R_3^2, R_3^3$  в пространстве  ${}^2 R_4$  не существует. Это следует из того, что существует только три типа прямых, а 3-плоскости являются ортогональными дополнениями соответствующих прямых. Если при движениях пространства  ${}^2 R_4$  прямые переходят друг в друга, то и их ортогональные дополнения также переходят друг в друга. Значит, они несут на себе метрику одного типа.

Введем теперь определение образа стационарности.

*Определение.* Образом стационарности (о.с.) данной подгруппы Ли  $H$  группы Ли  $G$  (а также соответствующей подгруппе  $H$  алгебры Ли  $N$ ) называется такая фигура  $F$  в пространстве  ${}^2 R_4$ , что подгруппа  $H$  состоит из тех и только тех движений пространства  ${}^2 R_4$ , при которых фигура  $F$  инвариантна.

Всякая фигура  $F$  пространства  ${}^2 R_4$  определяет некоторую подгруппу  $H$ , образом стационарности которой служит данная фигура. Под фигурой понимается любое множество точек пространства  $P({}^2 R_4)$ . Если две фигуры отличаются только положением в пространстве  ${}^2 R_4$  (т.е. переводятся друг в друга некоторым движением пространства  ${}^2 R_4$ ), то определяемые ими подгруппы сопряжены. Любые две  $K$ -плоскости пространства  ${}^2 R_4$ , несущие метрику одного типа, переводятся друг в друга некоторым движением пространства  ${}^2 R_4$ .

Важнейшими фигурами пространства  ${}^2R_4$  являются  $k$ -плоскости и образованные с их помощью флаги.

*Определение.* Последовательность плоскостей  $\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, \dots, \alpha_{k_r}$  пространства  ${}^2R_4$ ,  $\dim \alpha_{k_i} = k_i, k_1 < k_2 < \dots < k_r$  называется флагом пространства  ${}^2R_4$  и обозначается  $\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, \dots, \alpha_{k_r}$ , если  $\alpha_{k_1} \subset \alpha_{k_2} \subset \dots \subset \alpha_{k_r}$ .

Каждой  $K$ -плоскости  $\alpha_k$  пространства  ${}^2R_4$  отвечает  $K$ -мерное подпространство  $\bar{\alpha}_k$  векторного пространства  $V_4$ .

*Определение.* Последовательность  $\bar{\alpha}_{k_1}, \alpha_{k_2}, \bar{\alpha}_{k_3}, \alpha_{k_4}, \alpha_{k_5}, \dots, \alpha_{k_r}, k_1 < k_2 < \dots < k_r$ , состоящая из плоскостей пространства  ${}^2R_4$  и подпространств векторного пространства  $V_4$ , называется обобщенным флагом и обозначается  $\bar{\alpha}_{k_1}, \alpha_{k_2}, \bar{\alpha}_{k_3}, \dots, \alpha_{k_r}$ , если существует последовательность  $\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, \alpha_{k_3}, \dots, \alpha_{k_r}$ , такая, что подпространство  $\bar{\alpha}_{k_1}$  отвечает  $k_1$ -плоскости  $\alpha_{k_1}$ ; пространство  $\bar{\alpha}_{k_3} - k_3$ -плоскости  $\alpha_{k_3}$  и т.д., причем последовательность  $\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, \alpha_{k_3}, \dots, \alpha_{k_r}$  является флагом.

Плоскости и подпространства могут быть расположены в произвольном порядке и числе.

2.2 Перечислим теперь подалгебры алгебры  $O(4,2)$ , указывая образы стационарности (о.с.) и обозначая каждую подалгебру буквой. Это обозначение будет применяться во всей работе.

$$J_1 = \{i_{10}\}, \text{ о.с. - три точки, определяющие } R_2,$$

$$J_2 = \{i_5\}, \text{ о.с. - три точки, определяющие } {}^2R_2,$$

$$J_3 = \{i_6\}, \text{ о.с. - три точки, определяющие } {}^1R_2,$$

$$J_4 = \{i_8 - i_{10}\}, \text{ о.с. - три точки, определяющие } R_2^1,$$

$$J_5 = \{i_5 - i_7\}, \text{ о.с. - три точки, определяющие } {}^1R_2^1,$$

$$J_6 = \{i_5 - i_7 - i_8 + i_{10}\}, \text{ о.с. - три точки, определяющие } R_2^2,$$

$$J_7 = \{i_5 + i_{10}\}, \text{ о.с. - пара } (R_2, {}^2R_2), \text{ причем } (R_2)^\perp \neq {}^2R_2.$$

Здесь символом  $\alpha^\perp$  обозначается плоскость ортогональная к плоскости  $\alpha$  и  $\dim \alpha + \dim \alpha^\perp = \dim {}^2R_4$ .

$$J_8 = \{i_6 - i_9\}, \text{ о.с. - пара } ({}^1R_2, {}^1R_2'), \text{ где } {}^1R_2 \neq ({}^1R_2')^\perp \text{ и } {}^1R_2 \cap ({}^1R_2') = R$$

$$J_9 = \{i_5 + \lambda i_{10}\}, \lambda \neq 0, \pm 1, \quad J_{10} = \{i_6 + \lambda i_9\}, \lambda \neq 0, \pm 1,$$

$$J_{11} = \{i_5 - i_7 + i_8 - i_{10} + 2i_6 - 2i_9\}, \quad J_{12} = \{i_6 - i_9 + \lambda(i_5 - i_7)\}, \lambda \neq 0,$$

$$J_{13} = \{i_5 + i_7 + i_8 - 3i_{10}\}, \quad J_{14} = \{3i_5 - i_7 - i_8 - i_{10}\},$$

$$J_{15} = \{i_5, i_{10}\}, \text{ о.с. - флаг } \{R_0, R_2\},$$

$$J_{16} = \{i_6, i_9\}, \text{ о.с. - флаг } R_0, {}^2R_2,$$

$$J_{17} = i_9, i_8 - i_{10}, \text{ о.с. - флаг } R_0, R_1, R_2^1,$$

$$J_{18} = i_9, i_5 - i_7, \text{ о.с. - флаг } R_0, R_2^1,$$

$J_{19} = i_5 - i_7, i_8 - i_{10}, \text{ о.с. - флаг } R_0, R_2^1$ . Волна означает, что в плоскости  $R_2^1$  изотропная прямая точно неподвижна.

$J_{20} = i_6, i_5 - i_7 - i_8 + i_{10}, \text{ о.с. - пара } R_1^1, R_2^1$ , причем  $R_1^1 \cap R_2^1 = R_0$  и 3-плоскость, содержащая  $R_2^1$  и  $R_1^1$ , есть  $R_3^1$ .

$J_{21} = i_6 - i_9, i_5 - i_7 - i_8 + i_{10}, \text{ о.с. - три изотропных прямых, лежащих в одной изотропной плоскости и пересекающихся в одной точке.}$

$$J_{22} = i_6 - i_9, i_5 - i_7 + i_{10}, \quad J_{23} = i_6 + \lambda i_9, i_5 - i_7 + i_8 - i_{10}, \quad \lambda \neq 0, \pm 1.$$

$$J_{24} = i_5 - i_7 - i_8 + i_{10}, i_8 - i_{10} \pm i_6 \pm i_9, \quad J_{25} = i_5 - i_{10}, i_5 - i_7 - i_8 + i_{10},$$

$$J_{26} = i_6 - i_9 + \lambda i_5 - i_{10}, i_5 - i_7 - i_8 + i_{10}, \quad J_{27} = i_5 - i_{10}, i_6 - i_9,$$

$$J_{28} = i_8, i_9, i_{10}, \text{ о.с. - две точки, определяющие } R_1,$$

$$J_{29} = i_5, i_7, i_9, \text{ о.с. - две точки, определяющие } R_1,$$

$$J_{30} = i_6, i_5 - i_7, i_8 - i_{10}, \text{ о.с. - две точки, определяющие } R_1^1,$$

$J_{31} = i_6, i_9, i_5 - i_7 - i_8 + i_{10}, \text{ о.с. - две пересекающиеся изотропные прямые, определяющие изотропную плоскость.}$

$J_{32} = i_5 + i_{10}, i_6 - i_9, i_7 + i_8, \text{ о.с. - три изотропные плоскости, каждая пара из которых имеет только одну общую точку, общую для трех плоскостей.}$

$$J_{33} = i_5 - i_7, i_6 - i_9, i_8 - i_{10}, \quad J_{34} = i_5 - i_7, i_8 - i_{10}, i_6 + \lambda i_9, \quad \lambda \neq 0, \pm 1$$

$$J_{35} = i_5 - i_{10}, i_6 - i_9, i_5 - i_7 - i_8 + i_{10},$$

$$J_{36} = i_9, i_5 - i_7, i_8 - i_{10}, \text{ о.с. - } R_0, R_2^1,$$

$$J_{37} = i_6, i_9, i_5 - i_7, i_8 - i_{10} - \text{ флаг } R_0, R_1^1,$$

$J_{38} = i_6, i_9, i_5 - i_{10}, i_7 - i_8, \text{ о.с. - две изотропные плоскости, имеющих только одну общую точку и симметричных относительно некоторой евклидовой плоскости.}$

$$J_{39} = i_5 - i_7, i_5 - i_{10}, i_6 + i_9, i_7 - i_8, \quad J_{40} = i_5, i_{10}, i_6 + i_9, i_7 + i_8,$$

$$J_{41} = i_6, i_9, i_5 - i_7, i_5 - i_{10}, i_8 - i_{10} - \text{ флаг } R_0, R_2^2,$$

$$J_{42} = i_5, i_6, i_7, i_8, i_9, i_{10}, \text{ о.с. - } R_0.$$

2.3 Перечислим теперь полупрямые подалгебры. Для этого будем находить подпространства пространства  $\bar{T}_4$ , инвариантные относительно присоединенного представления подалгебр алгебры  $O \llcorner 2$ . Элементы пространства  $\bar{T}_4 = V_4$  будем записывать в виде:  $a = \mathbf{0}, a^1, a^2, a^3, a^4$ . Инвариантность подпространства  $K \subset \bar{T}_4$  относительно присоединенного представления некоторой алгебры  $J_i, i = 1, \dots, 42$  эквивалентна инвариантности этого пространства относительно присоединенного представле-

ния базиса этой алгебры. Заметим, что присоединенное представление  $adi, i \in J$  в нашем случае определяется формулой

$$adi a = ai. \tag{I}$$

Подпространства  $\bar{K}$ , инвариантные относительно  $adJ_i$ , достаточно искать с точностью до  $Adh$ , где  $Adh \in \mathbb{Z}_2^2, h \in O \in \mathbb{Z}_2^2$ .

Для приведения подпространств, инвариантных относительно подалгебры  $adJ_i$ , будем пользоваться матрицами  $h_1 - h_{16}$ , записанными в 2.4. Чтобы каждый раз не проверять инвариантность базиса данной алгебры относительно  $Adh$ , выпишем формулы действия  $Adh_i$  на базисы данных алгебр.

Будем пользоваться формулой 2.1, полагая для краткости

$$Ad \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} = Adh, \quad \begin{pmatrix} r \\ O_4 \end{pmatrix} = r.$$

Имеют место формулы:

$$Adh_1 i_5 + i_{10} = i_5 + i_{10}, \quad Adh_2 i_5 = i_5,$$

$$Adh_3 i_6 = -i_6, \quad Adh_3 i_6 - i_9 = i_9 - i_6, \quad Adh_3 i_6 + \lambda i_9 = -i_6 - \lambda i_9,$$

$$Adh_3 i_9 = -i_9, \quad Adh_3 i_5 - i_{10} = i_5 - i_{10}, \quad Adh_3 i_7 - i_8 = i_8 - i_7,$$

$$Adh_4 i_6 = i_6, \quad Adh_4 i_5 - i_7 - i_8 + i_{10} = chJ + shJ i_5 - i_7 - i_8 + i_{10},$$

$$Adh_4 i_6 - i_9 = i_6 - i_9, \quad Adh_5 i_8 - i_{10} = i_8 - i_{10}, \quad Adh_6 \langle -i_7 \rangle = -i_7,$$

$$Adh_7 \langle -i_7 - i_8 + i_{10} \rangle = -i_7 - i_8 + i_{10}, \quad Adh_7 \langle -i_9 \rangle = -i_9,$$

$$Adh_8 \langle \rangle_9, \quad Adh_8 \langle \rangle_6, \quad Adh_8 \langle +i_{10} \rangle = +i_{10},$$

$$Adh_8 \langle +i_8 \rangle = +i_8, \quad Adh_9 \langle \rangle_8, \quad Adh_9 \langle \rangle_9$$

$$Adh_9 \langle -i_9 \rangle = -i_9, \quad Adh_9 \langle -i_7 + i_8 - i_{10} \rangle = -i_7 + i_8 - i_{10},$$

$$Adh_{10} \langle -i_7 \rangle = -i_7, \quad Adh_{10} \langle -i_7 + i_8 \rangle = -i_7 + i_8, \quad Adh_{10} \langle -i_{10} \rangle = -i_{10},$$

$$Adh_{10} i_8 - i_{10} = shJ i_5 - i_7 + chJ i_8 - i_{10},$$

$$Adh_{11} i_5 + i_{10} = i_5 + i_{10}, \quad Adh_{11} i_7 + i_8 = i_9 - i_6, \quad Adh_{11} i_6 - i_9 = i_7 + i_8$$

$$Adh_{12} i_6 = -i_6, \quad Adh_{12} i_9 = i_9, \quad Adh_{12} i_8 - i_{10} = -i_8 + i_{10},$$

$$Adh_{12} i_5 - i_7 = i_5 - i_7, \quad Adh_{13} i_6 - i_9 = i_6 - i_9,$$

$$Adh_{13} i_5 - i_7 - i_8 + i_{10} = i_5 - i_7 - i_8 + i_{10},$$

$$Adh_{14} i_5 + i_7 - i_8 + i_{10} - 2i_6 + 2i_9 = i_5 + i_7 - i_8 + i_{10} - 2i_6 + 2i_9,$$

$$Adh_5 i_6 = i_6, \quad Adh_{15} i_9 = i_9, \quad Adh_{16} i_8 + \lambda i_9 = i_8 + \lambda i_9,$$

$$Adh_{16} i_9 = i_9, \quad Adh_{16} i_7 = i_7 + sJ i_7 + sJ i_{10},$$

$$Adh_{16} i_8 - i_{10} = shJ i_5 - i_7 + chJ i_8 - i_{10},$$

$$Adh_{16} i_5 - i_7 - i_8 + i_{10} = -i_5 + i_7 + i_8 - i_{10},$$

$$Adh_{16} i_5 - i_7 + i_8 - i_{10} = -i_5 + i_7 - i_8 + i_{10}.$$

Рассмотрим подалгебру  $J_1 = i_{10}$ . Пусть подпространство пространства  $\bar{T}_4$ , натянутое на вектор  $a = 0; a^1, a^2, a^3, a^4$ , инвариантно относительно  $adi_{10}$ . Это приводит к системе  $a \cdot i_{10} = \lambda a$ , или:  $0 = \lambda a^1$ ,  $0 = \lambda a^2$ ,  $-a^4 = \lambda a^3$ ,  $a^3 = \lambda a^4$ .

$$\text{Отсюда: } -a^4 = \lambda^2 a^4, \quad a^4 = 0, \quad a^3 = 0, \quad \lambda = 0.$$

Вывод: относительно  $adi_{10}$  инвариантны все одномерные подпространства с базисами  $a = 0, a^1, a^2, 0, 0$ ,  $a^1, a^2$ -произвольные.

Чтобы двумерное подпространство, натянутое на векторы  $a = 0, a^1, a^2, a^3, a^4$  и  $b = b^1, b^2, b^3, b^4$  было инвариантно относительно  $adi_{10}$ , необходимо, чтобы нашлись числа  $\lambda, \mu, \nu, \delta$ , такие, что

$$a \cdot i_{10} = \lambda a + \mu b, \quad b \cdot i_{10} = \nu a + \delta b.$$

Это эквивалентно системе

$$-a^4 = \lambda a^3 + \mu b^3, \quad a^3 = \lambda a^4 + \mu b^4, \quad 0 = \lambda a^1 + \mu b^1, \quad 0 = \lambda a^2 + \mu b^2, \quad (3)$$

$$0 = \nu a^1 + \delta b^1, \quad 0 = \nu a^2 + \delta b^2, \quad -b^4 = \nu a^3 + \delta b^3, \quad b^4 = \nu a^4 + \delta b^4.$$

Рассмотрим следующие случаи.

а)  $a^4 \neq 0, b^4 \neq 0$ . Тогда можно положить:  $a^4 = 1, b^4 = 0, b^3 = 1, a^3 = 0$ .

Из (3):  $0 = \lambda, -1 = \mu, b^1 = 0, b^2 = 0, \delta = 0, v^1 = 1, a^1 = 0, a^2 = 0$ .

Таким образом, получили подпространство  $i_1, i_2$ .

б)  $a^4 \neq 0, b^3 = 0, b^2 \neq 0$ . В этом случае можно положить:  $a^4 = 1, b^4 = 0, b^2 = 1, a^2 = 0$ . Из (3) следует  $\lambda^2 = -1$ . Система противоречива.

в)  $a^4 \neq 0, b^3 = b^2 = 0, b^1 \neq 0$ . Можно положить:  $a^4 = 1, b^4 = 0, b^1 = 1, a^1 = 0$ .

Система (3) противоречива.

г)  $a^4 = b^4 = 0, a^3 \neq 0, b^2 \neq 0$ . Можно положить:  $a^3 = 1, b^3 = 0, b^2 = 1, a^2 = 0$ . Из (3):  $a^3 = 0$  – противоречие.

д)  $a^4 = b^4 = 0, a^3 \neq 0, b^2 \neq 0, b^1 = 0$ . Можно положить:  $a^3 = 1, b^3 = 0, b^1 = 1, a^1 = 0$ . Из (3):  $a^3 = 0$  – противоречие.

е)  $a^4 = b^4 = a^3 = b^3 = 0$ . Получим подпространство  $i_3, i_4$ , которое удовлетворяет системе (3).

Таким образом, относительно  $adi_{10}$  инвариантны только подпространства:  $i_1, i_2, i_3, i_4$ .

Чтобы найти трехмерные подпространства пространства  $\bar{T}_4$ , инвариантные относительно  $adi_{10}$ , достаточно рассмотреть ортогональные дополнения к уже найденным одномерным инвариантным подпространствам. Они запишутся в виде:  $a^2 i_1 - a^1 i_2, i_3, i_4$ . Наконец, относительно  $adi_{10}$  будет инвариантно четырехмерное пространство  $i_1, i_2, i_3, i_4 \equiv \bar{T}_4$ .

При помощи  $Adh_1$  подпространство  $a^1 i_1 + a^2 i_2$  приводится к виду  $i_1$ . Этим же преобразованием подпространства  $a^2 i_1 - a^1 i_2, i_3, i_4$  приводятся к  $i_2, i_3, i_4$ . При этом подалгебра  $i_{10}$  инвариантна относительно  $Adh_1$  (2).

Таким образом, подпространства пространства  $\bar{T}_4$ , инвариантные относительно  $adi_{10}$ , приводятся к виду:  $i_1, i_1, i_2, i_3, i_4, i_2, i_3, i_4, i_1, i_2, i_3, i_4$ .

Рассмотрим подалгебру  $J_2$ . Поступая, как в предыдущем случае, получим, что подпространства, инвариантные относительно  $adJ_2$ , имеют вид:

$$\lambda i_3 + \mu i_4, i_1, i_2, i_3, i_4, i_1, i_2, \mu i_3 - \lambda i_4, i_1, i_2, i_3, i_4.$$

При помощи  $Adh_2$  подпространства  $\lambda i_3 + \mu i_4$  приводятся к  $i_3$ , а подпространства  $i_1, i_2, \mu i_3 - \lambda i_4$  – к  $i_1, i_2, i_4$ . При этом подалгебра  $J_2$  инвариантна относительно  $Adh_2$  (2). Таким образом, инвариантные подпространства приводятся к виду:

$$i_3, i_1, i_2, i_3, i_4, i_1, i_2, i_4, i_1, i_2, i_3, i_4.$$

Рассмотрим подалгебру  $J_3$ . Инвариантные относительно  $adJ_3$  подпространства имеют вид:

$$i_1 \pm i_3, \quad \lambda i_2 + \mu i_4, \quad i_1 \pm i_3, \lambda i_2 + \mu i_4, \quad i_1, i_3, \\ i_2, i_4, \quad i_1 \pm i_3^\perp, \quad \lambda i_2 + \mu i_4^\perp, \quad i_1, i_2, i_3, i_4,$$

где символом  $v^\perp$  обозначается ортогональное дополнение подпространства  $v$  пространства  $\bar{T}_4$ .

При помощи  $Adh_3$  пространства  $i_1 + i_3$  и  $i_1 - i_3$ ,  $i_2 + i_4$  и  $i_2 - i_4$ ,  $i_1 + i_3, i_2 + i_4$  и  $i_1 - i_3, i_2 - i_4$ ,  $i_1 - i_3, i_2 + i_4$  и  $i_1 + i_3, i_2 - i_4$ ,  $i_1 + i_3, i_2$  и  $i_1 - i_3, i_2$ ,  $i_1 + i_3, i_4$  и  $i_1 - i_3, i_4$  сопряжены. При помощи  $Adh_4$  пространство  $\lambda i_2 + \mu i_4$  переводится либо в  $i_2$ , либо в  $i_4$ , либо в  $i_2 \pm i_4$ . При помощи  $Adh_{12}$  пространства  $i_1 + i_3, i_2 + i_4$  и  $i_1 - i_3, i_2 + i_4$  сопряжены. При этом подалгебра  $J_3$  инвариантна относительно  $Adh_3$ ,  $Adh_4$  и  $Adh_{12}$  (2). Таким образом, инвариантные относительно  $adJ_3$  подпространства приводятся к виду:

$$i_2, \quad i_4, \quad i_1 + i_3, \quad i_2 + i_4, \quad i_1 + i_3, i_2, \quad i_1 + i_3, i_4, \\ i_1, i_3, \quad i_2, i_4, \quad i_1 + i_3, i_2 + i_4, \quad i_1, i_3, i_4, \quad i_1, i_2, i_3, \\ i_1 + i_3, i_2, i_4, \quad i_1, i_3, i_2 + i_4, \quad i_1, i_2, i_3, i_4.$$

Рассмотрим подалгебру  $J_4$ . Инвариантные относительно  $adJ_4$  подпространства имеют вид:  $\lambda i_1 + \mu i_2 - i_4$ ,  $i_2 - i_4, \lambda i_1 + \mu i_3$ ,  $\lambda i_1 + \mu i_2 - i_4^\perp$ ,  $i_1, i_2, i_3, i_4$ . При помощи  $Adh_5$  подпространство  $\lambda i_1 + \mu i_2 - i_4$  сопряжено либо  $i_1$ , либо  $i_2 - i_4$ . При этом  $J_4$  инвариантна относительно  $Adh_5$  (2). Таким образом, инвариантные подпространства приводятся к виду:

$$i_1, \quad i_2 - i_4, \quad i_2 - i_4, \lambda i_1 + \mu i_3, \quad i_2, i_3, i_4, \quad i_1, i_3, i_2 - i_4, \quad i_1, i_2, i_3, i_4.$$

Рассмотрим подалгебру  $J_5$ . Инвариантные относительно  $adJ_5$  подпространства имеют вид:  $\lambda i_1 + \mu i_2 - i_4 + \mu i_3$ ,  $i_2 - i_4, \lambda i_1 + \mu i_3$ ,  $\lambda i_1 + \mu i_2 - i_4^\perp + \mu i_3^\perp$ ,  $i_1, i_2, i_3, i_4$ . При помощи  $Adh_6$  подпространство  $\lambda i_1 + \mu i_2 - i_4 + \mu i_3$  приводится к  $i_3$  или  $i_2 - i_4$ . При этом подалгебра  $J_5$  инвариантна относительно  $Adh_6$  (2).

Таким образом, инвариантные подпространства приводятся к виду:

$$i_3, \quad i_2 - i_4, \quad i_2 - i_4, \lambda i_1 + \mu i_3, \quad i_1, i_2, i_4, \quad i_2 - i_4, i_1, i_3, \quad i_1, i_2, i_3, i_4.$$

Рассмотрим подалгебру  $J_6$ . Инвариантные относительно  $adJ_6$  подпространства:  $\lambda i_1 + i_3 + \mu i_2 - i_4$ ,  $v i_1 + i_3 - \lambda i_2 - i_4$ ,  $\lambda i_1 - i_2 + v i_2 + i_4$ ,  $v \neq 0$ ,  $i_1 - \lambda i_2, i_2 - i_4 + \lambda i_1 + i_3$ ,  $i_2 - i_4, \lambda i_1 + \mu i_3$ ,  $i_1 + i_3, \lambda i_2 + \mu i_4$ ,  $\lambda i_1 + i_3 + \mu i_2 - i_4^\perp$ ,  $i_1, i_2, i_3, i_4$ .

При помощи  $Adh_7$  пространство  $\lambda i_1 + i_3 + \mu i_2 - i_4$  приводится к  $i_1 + i_3$  или  $i_1 + i_2 + i_3 - i_4$ . При помощи  $Adh_{13}$  эти пространства сопряжены. При помощи  $Adh_7$  пространство  $v i_1 + i_3 - \lambda i_2 - i_4, \lambda i_1 - i_2 + v i_2 + i_4$  приводится к  $i_1 + i_3, \lambda i_2 + \mu i_4$  или  $i_1 + i_2 + i_3 - i_4, \lambda i_1 - i_2 + v i_2 + i_4$ . При помощи

$Adh_{13}$  пространство  $i_1 + i_2 + i_3 - i_4, \lambda i_1 - \mu i_2 + i_4$  приводится к пространству  $i_1 + i_3, \lambda i_2 + \mu i_4$ . При помощи  $Adh_8$  пространства  $i_2 - i_4, \lambda i_1 + \mu i_3$  и  $i_1 + i_3, \lambda i_2 + \mu i_4$  сопряжены. При помощи  $Adh_7$  пространство  $i_1 - \lambda i_2, i_2 - i_4 + \lambda \mu + i_3$  при  $\lambda \neq 1$  приводится к виду  $i_1 + i_3, \lambda i_2 + \mu i_4$ , а пространство  $i_1 - i_2, i_1 + i_2 + i_3 - i_4$  при помощи  $Adh_4$  - к виду  $i_1 + i_3, \lambda i_2 + \mu i_4$ . При помощи  $Adh_4$  пространство  $i_1 + i_3, \lambda i_2 + \mu i_4$  приводится к  $i_1 + i_3, i_2$ ,  $i_1 + i_3, i_4$  или к  $i_1 + i_3, i_2 \pm i_4$ . При этом подалгебра  $J_6$  инвариантна относительно  $Adh_4, Adh_7, Adh_8, Adh_{13}$ . (2). Таким образом, инвариантные подпространства приводятся к виду:  $i_1 + i_3$ ,  $i_1 + i_3, i_2 \pm i_4$ ,  $i_1 + i_3, i_2$ ,  $i_1 + i_3, i_4$ ,  $i_1 + i_3, i_2, i_4$ ,  $i_1, i_2, i_3, i_4$ .

Рассмотрим подалгебру  $J_7$ . Инвариантны относительно  $adJ_7$  подпространства:  $i_1, i_2$ ,  $i_3 + \mu i_1 - \lambda i_2, i_4 + \lambda i_1 + \mu i_2$ ,  $i_1, i_2, i_3, i_4$ . При помощи  $Adh_1$  подпространства  $i_3 + \mu i_1 - \lambda i_2, i_4 + \lambda i_1 + \mu i_2$  приводятся к виду  $i_3 + \lambda i_1, i_4 + \lambda i_2$ . При этом подалгебра  $J_7$  инвариантна относительно  $Adh_1$  (2).

Таким образом, инвариантные пространства приводятся к виду:

$$i_1, i_2, i_3 + \lambda i_1, i_4 + \lambda i_2, i_1, i_2, i_3, i_4.$$

Рассмотрим подалгебру  $J_8$ . Относительно  $adJ_8$  инвариантны подпространства  $\lambda \mu \pm i_3 + \mu \mu \mp i_4$ ,  $i_4 + \lambda i_1 + \mu i_2, i_2 - \lambda i_3 + \mu i_4$ ,  $i_2 \pm i_4, \pm i_1 + \lambda i_2 + i_3$ ,  $i_2 - i_4, i_1 \pm i_3$ ,  $i_2 + i_4, i_1 \pm i_3$ ,  $i_4 + \lambda i_3, i_2 - \lambda i_1$ ,  $\lambda \mu \pm i_3 + \mu \mu \mp i_4$ ,  $i_1, i_2, i_3, i_4$ ,  $i_1, i_3$ ,  $i_2, i_4$ .

При помощи  $Adh_3$  пространства  $\lambda \mu + i_3 + \mu \mu - i_4$  и  $\lambda \mu - i_3 + \mu \mu + i_4$  сопряжены. При помощи  $Adh_7$  пространство  $\lambda \mu + i_3 + \mu \mu - i_4$  переводится в  $i_1 + i_3$  или  $i_1 + i_2 + i_3 - i_4$ . При помощи  $Adh_{13}$  эти пространства сопряжены. При помощи  $Adh_4$  пространство  $i_4 + \lambda i_1 + \mu i_2, i_2 - \lambda i_3 + \mu i_4$  приводится к  $\lambda i_1 + \mu i_4, \mu i_2 - \lambda i_3$  или  $i_1 + i_3, i_2 \pm i_4$ . При помощи  $Adh_7$  пространство  $\lambda i_1 + \mu i_4, \mu i_2 - \lambda i_3$  приводится к  $i_1 + i_3, \lambda \mu - i_3 + \mu \mu + i_4$  или  $i_1 + i_2, i_3 - i_4$ . При помощи  $Adh_3$  пространства  $i_2 - i_4, -i_1 + \lambda i_2 + i_3$  и  $i_2 + i_4, i_1 + \lambda i_2 + i_3$ ,  $i_1 + i_3, i_2 - i_4$  и  $i_1 - i_3, i_2 + i_4$ ,  $i_1 + i_3, i_2 + i_4$  и  $i_1 - i_3, i_2 - i_4$ ,  $i_1 + i_3, i_1 + \mu \mu + i_4$  и  $i_1 - i_3, i_1 + \lambda \mu - i_4$  сопряжены. При помощи  $Adh_7$  подпространства  $i_2 + i_4, i_1 + \lambda i_2 + i_3$  и  $i_1 - i_3, i_1 + \lambda \mu - i_4$  при  $\lambda \neq 0$  сопряжены, а пространство  $i_1 + i_3, \lambda \mu - i_3 + \mu \mu + i_4$  при  $\lambda \neq 0$  входит в семейство  $i_1 + i_3, i_1 + \lambda \mu + i_4$ . При этом подалгебра  $J_8$  инвариантна относительно  $Adh_3, Adh_4, Adh_7, Adh_{13}$  (2). Таким образом, инвариантные относительно  $adJ_8$  подпространства приводятся к виду:  $i_1 + i_3$ ,  $i_2 - \lambda i_1, i_4 + \lambda i_3$ ,  $i_1 - i_3, i_2 \pm i_4$ ,  $i_1 - i_3, i_1 + \lambda \mu - i_4$ ,  $i_1 + i_3$ ,  $i_1, i_2, i_3, i_4$ .

Рассмотрим подалгебру  $J_9$ . Относительно  $adJ_{10}$  инвариантны подпространства:  $i_1, i_2, i_3, i_4, i_1, i_2, i_3, i_4$ .

Рассмотрим подалгебру  $J_{10}$ . Относительно  $adJ_{10}$  инвариантны подпространства:  $i_1 \pm i_3, i_2 \pm i_4, i_1, i_3, i_2, i_4, i_1 + i_3, i_2 \pm i_4, i_1 - i_3, i_2 \pm i_4, i_1 \pm i_3, i_2, i_4, i_2 \pm i_4, i_1, i_3, i_1, i_2, i_3, i_4$ .

При помощи  $Adh_3$  пространства  $i_1 + i_3$  и  $i_1 - i_3, i_2 - i_4$  и  $i_2 + i_4, i_1 + i_3, i_2 \pm i_4$  и  $i_1 - i_3, i_2 \mp i_4$  сопряжены. При этом подалгебра  $J_{10}$  инвариантна относительно  $Adh_3$  (2). Таким образом, инвариантные подпространства приводятся к виду  $i_1 + i_3, i_2 + i_4, i_1, i_3, i_2, i_4, i_1 + i_3, i_2 \pm i_4, i_1 + i_3, i_2, i_4, i_2 + i_4^\perp, i_1, i_2, i_3, i_4$ .

Рассмотрим подалгебру  $J_{11}$ . Относительно  $adJ_{11}$  инвариантны пространства:  $i_1 - i_3, i_2 - i_4, i_1 - i_3, i_2 \pm i_4, i_1 + i_3, i_2 - i_4, i_1 - i_3, i_2, i_4, i_2 - i_4, i_1, i_3, i_1, i_2, i_3, i_4$ . При помощи  $Adh_{14}$  подпространства  $i_1 - i_3$  и  $i_2 - i_4, i_1 - i_3, i_2 + i_4$  и  $i_1 + i_3, i_2 - i_4$  сопряжены. При этом  $J_{11}$  инвариантна относительно  $Adh_{14}$  (2). Таким образом, инвариантные подпространства приводятся к виду:  $i_1 - i_3, i_1 - i_3, i_2 \pm i_4, i_1 - i_3, i_2, i_4, i_1, i_2, i_3, i_4$ .

Рассмотрим подалгебру  $J_{12}$ . Относительно  $adJ_{12}$  инвариантны подпространства:  $i_2 \mp i_4, i_1 \pm i_3, i_1, i_2, i_3, i_4$ .

Рассмотрим подалгебру  $J_{13}$ . Относительно  $adJ_{13}$  инвариантны подпространства:  $i_1 + i_3, i_2 - i_4, i_1, i_2, i_3, i_4$ .

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белько, И. В. Подгруппы группы Лоренца / И. В. Белько, А. С. Феденко // Докл. АН БССР. – 1970. – Т. 14. – № 6. – С. 393–395.
2. Белько, И. В. Подгруппы группы Лоренца – Пуанкаре / И. В. Белько // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1971. – № 1. – С. 5–13.
3. Хабибуллина, Р. Н. Классификация групп движений биаксиального пространства гиперболического типа / Р. Н. Хабибуллина, А. П. Широков // Уч. зап. Казан. ун-та. – 1968. – Т. 128, кн. 3. – С. 154–163.
4. Юдов, А. А. Канонический лифт подмногообразия однородного пространства в структурную группу Ли и её алгебру Ли. Проблема эквивалентности подмногообразий пространства  ${}^2R_4$  / А. А. Юдов // Изв. АН БССР. – 1989. – Деп. в ВИНТИ, № 1498-B89.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 19.10.2016

**Rakovich A.M., Yudov A.A. Classification of Subgroups Lie Whether the Groups of Lie Motions of Four-Dimensional Pseudo-Euclidean Space of Signature Zero**

*The work is classified the related subgroup If the Lie groups of motions of four-dimensional pseudo-Euclidean space of signature zero – space  ${}^2R_4$ . Are the invariant plane and straight for such subgroup Whether their images of stationarity.*

## Да ведама аўтараў

Рэдкалегія часопіса разглядае рукапісы толькі тых артыкулаў, якія адпавядаюць навуковаму профілю выдання, нідзе не апублікаваныя і не перададзеныя ў іншыя рэдакцыі.

Матэрыялы прадстаўляюцца на беларускай ці рускай мове ў двух экзэмплярах аб'ёмам ад 0,35 да 0,5 друкаванага аркуша, у электронным варыянце – у фармаце Microsoft Word for Windows (\*.doc; \*.rtf) і павінны быць аформлены ў адпаведнасці з наступнымі патрабаваннямі:

- папера фармата А4 (21×29,7 см);
- палі: зверху – 2,8 см, справа, знізу, злева – 2,5 см;
- шрыфт – гарнітура Times New Roman;
- кегль – 12 pt.;
- міжрадкавы інтэрвал – адзінарны;
- двукоссе парнае «...»;
- абзац: водступ першага радка 1,25 см;
- выраўноўванне тэксту па шырыні.

Максімальныя лінейныя памеры табліц і малюнкаў не павінны перавышаць 15×23 см або 23×15 см. Усе графічныя аб'екты, якія ўваходзяць у склад аднаго малюнка, павінны быць згрупаваны паміж сабой. Фатаграфіі ў друк не прымаюцца. Размернасць усіх велічынь, якія выкарыстоўваюцца ў тэксце, павінна адпавядаць Міжнароднай сістэме адзінак вымярэння (СВ). Пажадана пазбягаць скарачэнняў слоў, акрамя агульнапрынятых. Спіс літаратуры павінен быць аформлены паводле Узораў афармлення бібліяграфічнага апісання ў спісе крыніц, якія прыводзяцца ў дысертацыі і аўтарэфераце, зацверджаных загадам Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь ад 25.06.2014 № 159 у рэдакцыі загада Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь ад 08.09.2016 № 206. Спасылкі на крыніцы ў артыкуле нумаруюцца адпаведна парадку цытавання. Парадкавыя нумары спасылак падаюцца ў квадратных дужках (напрыклад, [1, с. 32], [2, с. 52–54]). Не дапускаецца выкарыстанне канцавых зносаў.

Матэрыял уключае наступныя элементы па парадку:

- індэкс УДК (выраўноўванне па левым краі);
- ініцыялы і прозвішча аўтара (аўтараў) (выдзяляюцца паўтлустым шрыфтам і курсівам; выраўноўванне па цэнтры);
- звесткі пра аўтара (навуковая ступень, званне, пасада);
- назва артыкула (друкуецца вялікімі літарамі без пераносаў; выраўноўванне па цэнтры);
- анатацыя ў аб'ёме ад 100 да 150 слоў на мове артыкула (курсіў, кегль – 10 pt.);
- звесткі аб навуковым кіраўніку (для аспірантаў і саіскальнікаў) указваюцца на першай старонцы артыкула ўнізе;
- асноўны тэкст, структураваны ў адпаведнасці з патрабаваннямі ВАКа да навуковых артыкулаў, якія друкуюцца ў выданнях, уключаных у Пералік навуковых выданняў Рэспублікі Беларусь для апублікавання вынікаў дысертацыйных даследаванняў (Уводзіны з пастаўленымі мэтай і задачамі; Асноўная частка, тэкст якой структуруецца падзагалоўкамі (назва раздзела «Асноўная частка» не друкуецца); Заключэнне, у якім сцісла сфармуляваны асноўныя вынікі даследавання, указана іх навізна);
- спіс выкарыстанай літаратуры;
- рэзюмэ на англійскай мове (курсіў; да 10 радкоў, кегль – 10 pt.): назва артыкула, прозвішча і ініцыялы аўтара/аўтараў, тэзісны пераказ зместу артыкула; у выпадку калі аўтар падае матэрыял на англійскай мове, рэзюмэ – на рускай ці беларускай.

Да рукапісу артыкула абавязкова дадаюцца:

- звесткі пра аўтара на беларускай мове (прозвішча, імя, імя па бацьку поўнаасцю, вучоная ступень і званне, месца працы (вучобы) і пасада, паштовы і электронны адрасы для перапіскі і кантактныя тэлефоны);
- выписка з пратакола пасяджэння кафедры, навуковай лабараторыі ці ўстановы адукацыі, дзе працуе/вучыцца аўтар, завераная пячаткаю, з рэкамендацыяй артыкула да друку;
- рэцэнзія знешняга ў адносінах да аўтара профільнага спецыяліста з вучонай ступенню, завераная пячаткаю;
- экспертнае заключэнне (для аспірантаў і дактарантаў).

Рукапісы, афармленыя не ў адпаведнасці з выкладзенымі правіламі, рэдкалегіяй не разглядаюцца.

Аўтары нясуць адказнасць за змест прадстаўленага матэрыялу.

Карэктары *С.Ф. Бут-Гусаім, Л.М. Калілец*

Камп'ютарнае макетаванне *С.М. Мініч, Г.Ю. Пархац*

Падпісана ў друк 30.12.2016. Фармат 60×84/8. Папера афсетная.

Гарнітура Таймс. Рызаграфія. Ум. друк. арк. 8,03. Ул.-выд. арк. 6,66.

Тыраж 100 экз. Заказ № 534.

Выдавец і паліграфічнае выкананне: УА «Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт імя А.С. Пушкіна».

Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы,

распаўсюджвальніка друкаваных выданняў

№ 1/55 ад 14.10.2013.

ЛП № 02330/454 ад 30.12.2013.

224016, г. Брэст, вул. Міцкевіча, 28.