



Веснік

Брэсцкага ўніверсітэта

Галоўны рэдактар:
М.Э. Часноўскі

Намеснік галоўнага рэдактара:
Г.М. Сендзер

Міжнародны савет
Я.А. Грэбенікаў (Расія)
В.Г. Самойленка (Украіна)
В.В. Дзікусар (Расія)

Рэдакцыйная калегія:

А.В. Матысік
(адказны рэдактар)
У.В. Амелькін
М.І. Ляўчук
В.С. Манахаў
У.А. Плещохоў
А.Ф. Равінскі
Я.В. Радыно
В.Ф. Саўчук
У.С. Секержыцкі
М.М. Труш

Пасведчанне аб рэгістрацыі
ў Міністэрстве інфармацыі
Рэспублікі Беларусь
№ 1338 ад 28 красавіка 2010 г.

Адрас рэдакцыі:
224665, г. Брэст,
бульвар Касманаўтаў, 21
тэл.: 23-34-29
e-mail: vesnik@brsu.brest.by

Часопіс «Веснік Брэсцкага
ўніверсітэта» выдаецца
з снежня 1997 года

Серыя 4

ФІЗІКА

МАТЭМАТЫКА

НАВУКОВА-ТЭАРЭТЫЧНЫ ЧАСОПІС

Выходзіць два разы ў год

Заснавальнік – установа адукацыі
«Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт імя А.С. Пушкіна»

№ 2 / 2011

У адпаведнасці з загадам Вышэйшай атэстацыйнай
камісіі №26 ад 02.02.2011 г. часопіс «Веснік Брэсцкага ўніверсітэта»
ўключаны ў Пералік навуковых выданняў Рэспублікі Беларусь
для апублікавання вынікаў дысертацыйных даследаванняў
па фізіка-матэматычных навук



Vesnik

of Brest University

Editor-in-chief:
M.E. Chasnovski

Deputy Editor-in-chief:
G.M. Sender

International Board:
Y.A. Grebenikav (Russia)
V.G. Samoilenka (Ukraine)
V.V. Dzikussar (Russia)

Editorial Board:
A.V. Matysik
(managing editor)
Y.V. Amelkin
M.I. Lyavchuk
V.S. Monakhov
Y.A. Pletsukhov
A.F. Ravinski
Y.V. Radyno
V.F. Sauchuk
Y.S. Sekerhzitski
M.M. Trush

Registration Certificate
by Ministry of Information
of the Republic of Belarus
№ 1338 from April 28, 2010

Editorial Office:
224665, Brest,
Boulevard Kosmonavtov, 21
tel.: 23-34-29
e-mail: vesnik@brsu.brest.by

Published since December 1997

Series 4

PHYSICS

MATHEMATICS

SCIENTIFIC-THEORETICAL JOURNAL

Issued two times a year

Founder – Educational institution
«Brest State University named after A.S. Pushkin»

№ 2 / 2011

According to the order of Supreme certification commission № 26
from February 02, 2011, the journal «Vesnik of Brest University» was included
to the List of editions of the Republic of Belarus for publication of the results
of scientific research in physics-mathematical sciences

ЗМЕСТ

ФІЗИКА

Андрусевич П.П., Стражев В.И. Внутренняя симметрия системы двух уравнений Дирака в пространстве размерности $2+1$	5
Лиопо В.А., Саросек С.И., Секержицкий С.С., Никитин А.В. Фрактальные структуры. Модели шаровых упаковок	12
Нерода М.В., Ционенко Н.М. Распределение химических элементов в поверхностном слое защитных покрытий при магнитно-электрическом шлифовании	16
Овсиюк Е.М. О решении уравнений Максвелла в пространстве-времени Шварцшильда	23
Овсиюк Е.М., Веко О.В. О моделировании потенциального барьера в теории Шредингера геометрией пространства Лобачевского	30
Ревинский А.Ф. О магнитоэлектрическом взаимодействии в тонких пленках BiFeO_3	37
Серый А.И. О комптоновском вращении при движении фотонов под произвольным углом к линиям индукции магнитного поля	43

МАТЭМАТЫКА

Бородич Е.Н., Бородич Р.В., Селькин М.В. О влиянии индексов максимальных подгрупп на их пересечения	49
Зайонц Ю., Харкевич Ю.И., Степанюк Т.А. Аппроксимативные свойства интегралов Пуассона на классах H_ω	57
Кальчук И.В., Маковий Р.А., Задорожный А.О., Приймас И.П. 4-гармонический интеграл Пуассона как решение краевой задачи	66
Козинский А.А., Охримчук В.В. Реализация математической модели программной системы управления учетом военнообязанных	73
Матысик О.В., Басин В.И. Неявная итерационная процедура и её применение для решения модельной некорректной задачи в гильбертовом пространстве	83
Савчук В.Ф., Матысик О.В. Об одном итерационном методе решения некорректных задач с самосопряженными операторами	93
Степанюк Г.П., Чичурин А.В. Об одном условии интегрируемости линейного дифференциального уравнения четвертого порядка	99
Звесткі аб аўтарах	104

INDEX

PHYSICS

Andrusevich P.P., Strazhev V.I. Internal Symmetry of Two Dirac Equations in the Space of Dimension $2 + 1$	5
Liopo V.A., Sarosek S.I., Sekerzhitsky S.S., Nikitin A.V. Fractal Structures. Model of Ball Packages.....	12
Njaroda M.V., Tsyanenka N.M. The Distribution of Chemical Elements on the Surface of Protecting Covers as Result of Magnetic-and-Electrical Polishing	16
Ovsiyuk E.M. About Solution of the Maxwell Equations in the Schwarzschild Space-Time	23
Ovsiyuk E.M., Veko O.V. On Modeling a Potential Barrier in Schrödinger Theory by Geometry of the Lobachevsky Space	30
Ravinski A.F. On the Magnetoelectric Interaction in BiFeO_3 thin Films	37
Sery A.I. On Compton Rotation at the Motion of Photons at Arbitrary Angle to Magnetic Field Strength Lines	43

MATHEMATICS

Borodich E.N., Borodich R.V., Selkin M.V. About Influence of Indexes of the Maximal Subgroups on their Intersection	49
Zajac J., Kharkevych Yu.I., Stepaniuk T.A. Approximating Properties of Poisson's Integrals on the Classes H_ω	57
Kalchuk I.V., Makovij R.O., Zadorozhnyi A.O., Priymas I.P. 4-harmonic Poisson Integral as the Solution of Boundary-Value Problem.....	66
Kazinski A.A., Akhrymchuk V.V. Realization of Mathematical Model of a Software System of Management of the Account of Persons Liable for Military Service	73
Matysik O.V., Basin V.I. Implicite Iteration Procedure and its Application for Decision the Model Incorrect Problems in the Hilbert Space	83
Savchuk V.F., Matysik O.V. About Iteration Method Decision of the Incorrect Problems with Self-Adjoined Operator	93
Stepanjuk G.P., Chichurin A.V. About One Condition of Integrability of the Linear Differential Equation of the Fourth Order.....	99
Information about the authors	104

УДК 539.12:530.145

П.П. Андрусевич, В.И. Стражев

ВНУТРЕННЯЯ СИММЕТРИЯ СИСТЕМЫ ДВУХ УРАВНЕНИЙ ДИРАКА В ПРОСТРАНСТВЕ РАЗМЕРНОСТИ 2+1

Продолжено начатое в предыдущих работах авторов исследование внутренней симметрии дираковских полей в пространстве размерности 2+1. В рамках вещественного описания рассмотрена система двух уравнений Дирака для случаев $m = 0$ и $m \neq 0$. Показано, что наиболее полная группа внутренней симметрии указанной системы при $m = 0$ содержит 40, а при $m \neq 0$ – 20 независимых параметров. Установленные симметрии существенно шире симметрий, которые сопоставляются в литературе 8-компонентному дираковскому полю в пространстве 2+1, и содержат последние в качестве подгрупп.

Введение

В работах [1; 2] исследовалась внутренняя симметрия уравнения Дирака для массивной и безмассовой частиц в пространстве 2+1. При этом использовался метод, основанный на приведении рассматриваемого уравнения к вещественной форме [3; 4]. Было установлено наличие более широких групп симметрии по сравнению с теми, которые обычно обсуждаются в работах других авторов на данную тему [5; 6].

Интерес к этой проблеме обусловлен возможностью описания решеточной структуры графена методами релятивистской квантовой механики [5–7]. Кристаллическая решетка графена представляет собой плоскость, состоящую из шестиугольных ячеек, то есть является двумерной гексагональной структурой. В элементарной ячейке находятся два атома, которые образуют в кристалле две независимые подрешетки. В низкоэнергетическом пределе для электронов в графене имеет место линейный закон дисперсии

$$E = \hbar v_F k, \quad (1)$$

где v_F – скорость Ферми (экспериментальное значение $v_F \approx 10^6$ м/с), k – модуль волнового вектора в двумерном пространстве. Как известно, такого рода энергией обладает фотон. Поэтому реальным электронам и дыркам в графене можно сопоставить квазичастицы с положительной и отрицательной энергией $E = \pm \hbar v_F k$ и нулевой эффективной массой. Если учесть степень свободы, связанную с принадлежностью электронов и дырок к определенной подрешетке, и не принимать во внимание спин (что обычно делается в отсутствие магнитных полей), то получается, что указанные квазичастицы должны описываться четырехкомпонентной волновой функцией. А поскольку электроны и дырки являются фермионами, естественно предположить, что данная волновая функция должна подчиняться уравнению Дирака в пространстве 2+1 с нулевой массой частиц и античастиц, чем и обусловлена постановка задачи в работах [1; 2].

Однако при наличии достаточно сильных магнитных полей необходимо учитывать спин, так что число компонент волновой функции увеличивается до восьми. С такой функцией обычно связывают систему из двух уравнений Дирака [5; 6]. В настоящей работе подход, используемый в [1–4], применяется для исследования внутренней симметрии системы из двух уравнений Дирака в пространстве размерности 2+1.

Вещественная форма исходных уравнений

Рассмотрим систему двух безмассовых уравнений Дирака (уравнений для безмассового нейтрино) в пространстве 2+1

$$\begin{aligned}\gamma_\mu \partial_\mu \psi_1 &= 0, \\ \gamma_\mu \partial_\mu \psi_2 &= 0,\end{aligned}\tag{1}$$

где индекс μ пробегает значения 0,1,2. Метрику пространства $g_{\mu\nu}$ и матрицы γ_μ выберем в виде:

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(1,1,1),\tag{2}$$

$$\gamma_0 = \sigma_3 \otimes I_2, \gamma_1 = \sigma_2 \otimes \sigma_1, \gamma_2 = \sigma_2 \otimes \sigma_2\tag{3}$$

(σ_i – матрицы Паули). Взяв от (1) комплексное сопряжение и учитывая мнимый характер временной координаты x_0 , для сопряженных функций ψ_1^*, ψ_2^* получим уравнения:

$$\begin{aligned}(-\gamma_0 \partial_0 - \gamma_1 \partial_1 + \gamma_2 \partial_2) \psi_1^* &= 0, \\ (-\gamma_0 \partial_0 - \gamma_1 \partial_1 + \gamma_2 \partial_2) \psi_2^* &= 0.\end{aligned}\tag{4}$$

Рассматривая системы (1) и (4) совместно, приходим к 16-компонентной системе, которую можно представить в универсальной матричной форме:

$$\Gamma_\mu \partial_\mu \Psi = 0.\tag{5}$$

При выборе волновой функции Ψ в виде

$$\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_1^*, \psi_2^*) - \text{столбец}\tag{6}$$

для матриц Γ_μ в (5) будем иметь выражения:

$$\Gamma_0 = \gamma_0 \otimes \gamma_0, \quad \Gamma_1 = \gamma_0 \otimes \gamma_1, \quad \Gamma_2 = I_4 \otimes \gamma_2.\tag{7}$$

Для дальнейшего удобно перейти к представлению, в котором вещественные и мнимые компоненты волновой функции разделены:

$$\begin{aligned}\Psi &= (\psi_1^r, \psi_2^r, \psi_1^i, \psi_2^i) - \text{столбец}, \\ \psi_{1,2}^r &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{1,2} + \psi_{1,2}^*), \quad \psi_{1,2}^i = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{1,2} - \psi_{1,2}^*).\end{aligned}\tag{8}$$

Указанный переход от представления (6) осуществляется с помощью унитарного преобразования базиса в пространстве состояний:

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_8 & I_8 \\ I_8 & -I_8 \end{pmatrix}, \quad u^{-1} = u^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_8 & I_8 \\ I_8 & -I_8 \end{pmatrix}.\tag{9}$$

Матрицы Γ_μ при этом принимают вид

$$\Gamma_0 = \gamma_5 \otimes \gamma_0, \quad \Gamma_1 = \gamma_5 \otimes \gamma_1, \quad \Gamma_2 = I_4 \otimes \gamma_2,\tag{10}$$

где

$$\gamma_5 = \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3, \quad \gamma_3 = \sigma_2 \otimes \sigma_3.\tag{11}$$

Лагранжиан уравнения (5)

$$L = -\bar{\Psi} \Gamma_\mu \partial_\mu \Psi = -\Psi^+ \eta \Gamma_\mu \partial_\mu \Psi\tag{12}$$

эквивалентен лагранжиану исходной системы (1)

$$L = -\bar{\psi}_1 \gamma_\mu \partial_\mu \psi_1 - \bar{\psi}_2 \gamma_\mu \partial_\mu \psi_2 = -\psi_1^+ \gamma_0 \gamma_\mu \partial_\mu \psi_1 - \psi_2^+ \gamma_0 \gamma_\mu \partial_\mu \psi_2\tag{13}$$

при выборе матрицы билинейной формы η в (12) в виде

$$\eta = I_4 \otimes \gamma_0,\tag{14}$$

который инвариантен относительно преобразования (9).

Уравнение (5) с волновой функцией (8), матрицами Γ_μ (10) и лагранжианом (12) будем называть вещественной формой исходной системы (1), поскольку соответствующая (5) система 16 уравнений, записанных в явном виде, является вещественной. Эту форму мы и будем использовать при установлении группы внутренней симметрии лагранжевой формулировки системы (1).

Внутренняя симметрия

Для решения поставленной задачи будем использовать также фермионный базис, в котором диракоподобные матрицы Γ_μ , по определению, имеют структуру:

$$\Gamma_\mu = I_4 \otimes \gamma_\mu. \quad (15)$$

Переход от представления (8) в фермионный базис может быть осуществлен посредством унитарного преобразования:

$$A = \frac{1}{2}[I_4 \otimes (I_4 + i\gamma_2) + \gamma_5 \otimes (I_4 - i\gamma_2)], \quad (16)$$

$$A^{-1} = A^+ = \frac{1}{2}[I_4 \otimes (I_4 - i\gamma_2) + \gamma_5 \otimes (I_4 + i\gamma_2)].$$

Матрица билинейной формы η при этом принимает вид:

$$\eta = \gamma_5 \otimes \gamma_0. \quad (17)$$

Инвариантность уравнения (5) с матрицами Γ_μ (15) относительно преобразований внутренней симметрии

$$\Psi'(x_\mu) = Q\Psi(x_\mu) \quad (18)$$

обеспечивается матрицами четырех типов

$$Q_1 = q^{(1)} \otimes I_4, \quad Q_2 = q^{(2)} \otimes i\gamma_3\gamma_5, \quad (19)$$

$$Q_3 = q^{(3)} \otimes \gamma_3, \quad Q_4 = q^{(4)} \otimes \gamma_5,$$

где $q^{(\alpha)}$ ($\alpha = 1 \div 4$) – комплексные матрицы 4x4, на которые накладываются лишь ограничения, связанные с сохранением вещественного характера уравнения (5). При этом матрицы Q_1, Q_2 удовлетворяют условиям коммутации, а матрицы Q_3, Q_4 – условиям антикоммутации с матрицами Γ_μ :

$$[Q_1, \Gamma_\mu]_- = [Q_2, \Gamma_\mu]_- = 0, \quad (20)$$

$$[Q_3, \Gamma_\mu]_+ = [Q_4, \Gamma_\mu]_+ = 0. \quad (21)$$

Параметризуя четырехмерные матрицы $q^{(\alpha)}$ посредством базисных элементов e_N ($N = 1 \div 16$)

$$e_1 = I_4, \quad e_2 = \gamma_0, \quad e_3 = \gamma_1, \quad e_4 = \gamma_2, \quad e_5 = \gamma_3, \quad e_6 = i\gamma_0\gamma_3, \quad (22)$$

$$e_7 = i\gamma_1\gamma_3, \quad e_8 = i\gamma_2\gamma_3, \quad e_9 = \gamma_5, \quad e_{10} = i\gamma_0\gamma_5, \quad e_{11} = i\gamma_1\gamma_5,$$

$$e_{12} = i\gamma_2\gamma_5, \quad e_{13} = i\gamma_3\gamma_5, \quad e_{14} = i\gamma_0\gamma_1, \quad e_{15} = i\gamma_1\gamma_2, \quad e_{16} = i\gamma_2\gamma_0,$$

получим 64 базисных оператора преобразований внутренней симметрии уравнения (5), имеющих в фермионном базисе вид:

$$J^N = e_N \otimes I_4, \quad L^N = e_N \otimes i\gamma_3\gamma_5, \quad K^N = e_N \otimes \gamma_3, \quad I^N = e_N \otimes \gamma_5 \quad (23)$$

(множитель i здесь вводится для обеспечения эрмитовости операторов (22), (23)).

Возвращаясь теперь обратно в базис (8), получим для операторов (23) выражения:

$$\begin{aligned}
J^1 &= I_{16}, \quad J^2 = -i\gamma_0\gamma_5 \otimes \gamma_2, \quad J^3 = -i\gamma_1\gamma_5 \otimes \gamma_2, \quad J^4 = -i\gamma_2\gamma_5 \otimes \gamma_2, \\
J^5 &= -i\gamma_3\gamma_5 \otimes \gamma_2, \quad J^6 = i\gamma_0\gamma_3 \otimes I_4, \quad J^7 = i\gamma_1\gamma_3 \otimes I_4, \quad J^8 = i\gamma_2\gamma_3 \otimes I_4, \\
J^9 &= \gamma_5 \otimes I_4, \quad J^{10} = \gamma_0 \otimes \gamma_2, \quad J^{11} = \gamma_1 \otimes \gamma_2, \quad J^{12} = \gamma_2 \otimes \gamma_2,
\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
J^{13} &= \gamma_3 \otimes \gamma_2, \quad J^{14} = i\gamma_0\gamma_1 \otimes I_4, \quad J^{15} = i\gamma_1\gamma_2 \otimes I_4, \quad J^{16} = i\gamma_2\gamma_0 \otimes I_4; \\
L^1 &= I_4 \otimes i\gamma_3\gamma_5, \quad L^2 = \gamma_0\gamma_5 \otimes \gamma_1\gamma_0, \quad L^3 = \gamma_1\gamma_5 \otimes \gamma_1\gamma_0, \quad L^4 = \gamma_2\gamma_5 \otimes \gamma_1\gamma_0, \\
L^5 &= \gamma_3\gamma_5 \otimes \gamma_1\gamma_0, \quad L^6 = -\gamma_0\gamma_3 \otimes \gamma_3\gamma_5, \quad L^7 = -\gamma_1\gamma_3 \otimes \gamma_3\gamma_5, \quad L^8 = -\gamma_2\gamma_3 \otimes \gamma_3\gamma_5, \\
L^9 &= \gamma_5 \otimes i\gamma_3\gamma_5, \quad L^{10} = i\gamma_0 \otimes \gamma_1\gamma_0, \quad L^{11} = i\gamma_1 \otimes \gamma_1\gamma_0, \quad L^{12} = i\gamma_2 \otimes \gamma_1\gamma_0, \\
L^{13} &= i\gamma_3 \otimes \gamma_1\gamma_0, \quad L^{14} = -\gamma_0\gamma_1 \otimes \gamma_1\gamma_0, \quad L^{15} = -\gamma_1\gamma_2 \otimes \gamma_3\gamma_5, \quad L^{16} = -\gamma_2\gamma_0 \otimes \gamma_3\gamma_5;
\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
K^1 &= \gamma_5 \otimes \gamma_3, \quad K^2 = -i\gamma_0 \otimes \gamma_2\gamma_3, \quad K^3 = -i\gamma_1 \otimes \gamma_2\gamma_3, \quad K^4 = -i\gamma_2 \otimes \gamma_2\gamma_3, \\
K^5 &= -i\gamma_3 \otimes \gamma_2\gamma_3, \quad K^6 = -i\gamma_1\gamma_2 \otimes \gamma_3, \quad K^7 = -i\gamma_2\gamma_0 \otimes \gamma_3, \quad K^8 = -i\gamma_0\gamma_1 \otimes \gamma_3, \\
K^9 &= I_4 \otimes \gamma_3, \quad K^{10} = \gamma_0\gamma_5 \otimes \gamma_2\gamma_3, \quad K^{11} = \gamma_1\gamma_5 \otimes \gamma_2\gamma_3, \quad K^{12} = \gamma_2\gamma_5 \otimes \gamma_2\gamma_3, \\
K^{13} &= \gamma_3\gamma_5 \otimes \gamma_2\gamma_3, \quad K^{14} = -i\gamma_2\gamma_3 \otimes \gamma_3, \quad K^{15} = -i\gamma_0\gamma_3 \otimes \gamma_3, \quad K^{16} = -i\gamma_1\gamma_3 \otimes \gamma_3;
\end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
I^1 &= \gamma_5 \otimes \gamma_5, \quad I^2 = -i\gamma_0 \otimes \gamma_2\gamma_5, \quad I^3 = -i\gamma_1 \otimes \gamma_2\gamma_5, \quad I^4 = -i\gamma_2 \otimes \gamma_2\gamma_5, \\
I^5 &= -i\gamma_3 \otimes \gamma_2\gamma_5, \quad I^6 = -i\gamma_1\gamma_2 \otimes \gamma_5, \quad I^7 = -i\gamma_2\gamma_0 \otimes \gamma_5, \quad I^8 = -i\gamma_0\gamma_1 \otimes \gamma_5, \\
I^9 &= I_4 \otimes \gamma_5, \quad I^{10} = \gamma_0\gamma_5 \otimes \gamma_2\gamma_5, \quad I^{11} = \gamma_1\gamma_5 \otimes \gamma_2\gamma_5, \quad I^{12} = \gamma_2\gamma_5 \otimes \gamma_2\gamma_5, \\
I^{13} &= \gamma_3\gamma_5 \otimes \gamma_2\gamma_5, \quad I^{14} = -i\gamma_2\gamma_3 \otimes \gamma_5, \quad I^{15} = -i\gamma_0\gamma_3 \otimes \gamma_5, \quad I^{16} = -i\gamma_1\gamma_3 \otimes \gamma_5.
\end{aligned} \tag{27}$$

Условие сохранения вещественного характера уравнения (5) (вещественности поля) относительно матричных преобразований (18), задаваемых базисными операторами (24)–(27), накладывает на соответствующие параметры ($\omega_N \leftrightarrow J^N$, $\theta_N \leftrightarrow L^N$, $\Lambda_N \leftrightarrow K^N$, $\Omega_N \leftrightarrow I^N$) следующие ограничения:

$$\begin{aligned}
&\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_5, \omega_8, \omega_{10}, \omega_{11}, \omega_{13}, \omega_{15}, \omega_{16}, \\
&\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_5, \theta_8, \theta_{10}, \theta_{11}, \theta_{13}, \theta_{15}, \theta_{16}, \\
&\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_5, \Lambda_8, \Lambda_{10}, \Lambda_{11}, \Lambda_{13}, \Lambda_{15}, \Lambda_{16}, \\
&\Omega_4, \Omega_6, \Omega_7, \Omega_9, \Omega_{12}, \Omega_{14} \text{ — вещественные;} \\
&\omega_4, \omega_6, \omega_7, \omega_9, \omega_{12}, \omega_{14}, \theta_4, \theta_6, \theta_7, \theta_9, \theta_{12}, \theta_{14}, \\
&\Lambda_4, \Lambda_6, \Lambda_7, \Lambda_9, \Lambda_{12}, \Lambda_{14}, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_5, \Omega_8, \\
&\Omega_{10}, \Omega_{11}, \Omega_{13}, \Omega_{15}, \Omega_{16} \text{ — мнимые.}
\end{aligned} \tag{28}$$

Таким образом, преобразования внутренней симметрии исследуемой системы двух безмассовых уравнений Дирака в пространстве 2+1 описываются унитарной 64-параметрической группой, задаваемой эрмитовскими базисными операторами (24)–(27), которым соответствует 36 вещественных и 28 мнимых параметров (28).

Требование инвариантности лагранжиана (12) относительно преобразований (18) накладывает на матрицу Q ограничение

$$Q^+ \eta \Gamma_\mu Q = \eta \Gamma_\mu, \tag{29}$$

которое для матриц Q_1 , Q_2 (Q_3 , Q_4), коммутирующих (антикоммутирующих) с Γ_μ , принимает соответственно вид:

$$Q_1^+ \eta Q_1 = \eta, \quad Q_2^+ \eta Q_2 = \eta, \tag{30}$$

$$Q_3^+ \eta Q_3 = -\eta, \quad Q_4^+ \eta Q_4 = -\eta, \quad (31)$$

Каждое из соотношений (30), (31) накладывает по 6 связей на параметры этих преобразований:

$$\begin{aligned} 1 - \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2 + \omega_5^2 - \omega_6^2 - \omega_7^2 - \omega_8^2 - \omega_9^2 + \omega_{10}^2 + \omega_{11}^2 + \omega_{12}^2 + \\ + \omega_{13}^2 - \omega_{14}^2 - \omega_{15}^2 - \omega_{16}^2 = 0, \\ -\omega_3\omega_4 + \omega_5\omega_{10} + \omega_6\omega_9 - \omega_7\omega_8 - \omega_{11}\omega_{12} - \omega_2\omega_{13} - \omega_1\omega_{15} + \omega_{14}\omega_{16} = 0, \\ \omega_3\omega_5 - \omega_4\omega_{10} - \omega_6\omega_{14} - \omega_1\omega_7 - \omega_9\omega_{16} + \omega_2\omega_{12} + \omega_{11}\omega_{13} - \omega_{15}\omega_8 = 0, \\ -\omega_3\omega_9 - \omega_6\omega_4 - \omega_{10}\omega_{14} - \omega_1\omega_{11} - \omega_2\omega_8 + \omega_{13}\omega_7 + \omega_{12}\omega_{15} + \omega_{16}\omega_5 = 0, \\ \omega_6\omega_{12} - \omega_1\omega_3 - \omega_2\omega_{14} - \omega_{13}\omega_6 + \omega_4\omega_{15} + \omega_5\omega_7 + \omega_8\omega_{10} + \omega_{11}\omega_9 = 0, \\ -\omega_{16}\omega_{15} - \omega_7\omega_6 + \omega_9\omega_8 + \omega_{10}\omega_{11} - \omega_5\omega_{12} + \omega_1\omega_{14} + \omega_2\omega_3 + \omega_4\omega_{13} = 0; \end{aligned} \quad (32a)$$

$$\begin{aligned} 1 - \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 + \theta_4^2 + \theta_5^2 - \theta_6^2 - \theta_7^2 - \theta_8^2 - \theta_9^2 + \theta_{10}^2 + \theta_{11}^2 + \\ + \theta_{12}^2 + \theta_{13}^2 - \theta_{14}^2 - \theta_{15}^2 - \theta_{16}^2 = 0, \\ -\theta_7\theta_8 - \theta_{11}\theta_{12} + \theta_2\theta_{13} - \theta_3\theta_4 + \theta_{14}\theta_{16} - \theta_5\theta_{10} - \theta_6\theta_9 + \theta_1\theta_{15} = 0, \\ -\theta_{14}\theta_{15} + \theta_2\theta_4 + \theta_{10}\theta_{12} + \theta_{13}\theta_3 - \theta_9\theta_7 - \theta_5\theta_{11} + \theta_6\theta_8 + \theta_{16}\theta_1 = 0, \\ \theta_5\theta_8 + \theta_{16}\theta_2 + \theta_{14}\theta_{13} - \theta_3\theta_{15} + \theta_4\theta_1 - \theta_6\theta_{11} - \theta_9\theta_{12} + \theta_{10}\theta_7 = 0, \\ \theta_1\theta_8 - \theta_{10}\theta_3 - \theta_9\theta_{14} - \theta_6\theta_{16} + \theta_5\theta_4 + \theta_{15}\theta_7 + \theta_{13}\theta_{12} + \theta_2\theta_{11} = 0, \\ \theta_1\theta_{12} - \theta_2\theta_7 + \theta_{10}\theta_{16} + \theta_9\theta_4 + \theta_6\theta_3 - \theta_5\theta_{14} - \theta_{15}\theta_{11} + \theta_8\theta_{13} = 0; \end{aligned} \quad (32б)$$

$$\begin{aligned} 1 - \Lambda_1^2 + \Lambda_2^2 - \Lambda_3^2 - \Lambda_4^2 + \Lambda_5^2 - \Lambda_6^2 + \Lambda_7^2 + \Lambda_8^2 - \Lambda_9^2 + \Lambda_{10}^2 - \Lambda_{11}^2 - \Lambda_{12}^2 + \\ + \Lambda_{13}^2 + \Lambda_{14}^2 - \Lambda_{15}^2 + \Lambda_{16}^2 = 0, \\ \Lambda_7\Lambda_8 - \Lambda_{14}\Lambda_{16} + \Lambda_3\Lambda_4 + \Lambda_6\Lambda_9 + \Lambda_5\Lambda_{10} - \Lambda_2\Lambda_{13} + \Lambda_{11}\Lambda_{12} - \Lambda_1\Lambda_{15} = 0, \\ -\Lambda_{10}\Lambda_{16} - \Lambda_9\Lambda_4 - \Lambda_6\Lambda_3 + \Lambda_{15}\Lambda_4 + \Lambda_{11}\Lambda_{15} - \Lambda_{13}\Lambda_8 + \Lambda_2\Lambda_7 - \Lambda_1\Lambda_{12} = 0, \\ \Lambda_{10}\Lambda_3 + \Lambda_9\Lambda_{14} + \Lambda_6\Lambda_{16} - \Lambda_5\Lambda_4 - \Lambda_7\Lambda_{15} - \Lambda_{13}\Lambda_{12} - \Lambda_2\Lambda_{11} - \Lambda_1\Lambda_8 = 0, \\ -\Lambda_6\Lambda_8 + \Lambda_{14}\Lambda_{15} - \Lambda_{10}\Lambda_{12} - \Lambda_3\Lambda_{13} + \Lambda_5\Lambda_{11} - \Lambda_{16}\Lambda_1 - \Lambda_4\Lambda_2 + \Lambda_9\Lambda_7 = 0, \\ \Lambda_9\Lambda_{12} - \Lambda_{10}\Lambda_7 + \Lambda_6\Lambda_{11} - \Lambda_5\Lambda_8 - \Lambda_{16}\Lambda_2 - \Lambda_{14}\Lambda_{13} + \Lambda_3\Lambda_{15} - \Lambda_4\Lambda_1 = 0; \end{aligned} \quad (32в)$$

$$\begin{aligned} 1 - \Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2 + \Omega_5^2 - \Omega_6^2 - \Omega_7^2 - \Omega_8^2 - \Omega_9^2 + \Omega_{10}^2 + \Omega_{11}^2 + \Omega_{12}^2 + \\ + \Omega_{13}^2 - \Omega_{14}^2 - \Omega_{15}^2 - \Omega_{16}^2 = 0, \\ \Omega_{11}\Omega_{12} + \Omega_7\Omega_8 - \Omega_{14}\Omega_{16} + \Omega_5\Omega_{10} + \Omega_9\Omega_6 + \Omega_3\Omega_4 - \Omega_2\Omega_{13} - \Omega_1\Omega_{15} = 0, \\ \Omega_6\Omega_7 - \Omega_{10}\Omega_{11} - \Omega_3\Omega_2 + \Omega_9\Omega_8 + \Omega_{13}\Omega_4 - \Omega_5\Omega_{12} + \Omega_{16}\Omega_{15} + \Omega_1\Omega_{14} = 0, \\ \Omega_6\Omega_{12} - \Omega_{13}\Omega_{16} - \Omega_{15}\Omega_4 - \Omega_1\Omega_3 + \Omega_8\Omega_{10} - \Omega_9\Omega_{11} + \Omega_2\Omega_{14} - \Omega_5\Omega_7 = 0, \\ -\Omega_{10}\Omega_4 + \Omega_6\Omega_{14} - \Omega_9\Omega_{16} - \Omega_1\Omega_7 + \Omega_2\Omega_{12} - \Omega_5\Omega_3 + \Omega_8\Omega_{15} - \Omega_{11}\Omega_{13} = 0, \\ \Omega_{14}\Omega_{10} + \Omega_9\Omega_3 - \Omega_6\Omega_4 - \Omega_{12}\Omega_{15} - \Omega_1\Omega_{11} - \Omega_2\Omega_8 - \Omega_7\Omega_{13} + \Omega_5\Omega_{16} = 0. \end{aligned} \quad (32г)$$

В результате получаем 40-параметрическую группу матричных преобразований, задаваемую 64 базисными операторами (24)–(27), на параметры которых (28) накладывается 24 условия (32).

Для того чтобы выделить из указанных преобразований те, которые представимы в форме Ли, надо записать соотношения (29) для бесконечно малых преобразований. В результате получим условия

$$(\omega_N J^N)^+ \eta = -\omega_N \eta J^N, (\theta_N L^N)^+ \eta = -\theta_N \eta L^N, \quad (33)$$

$$(\Lambda_N K^N)^+ \eta = \Lambda_N \eta K^N, (\Omega_N I^N)^+ \eta = \Omega_N \eta I^N, \quad (34)$$

в которых базисные операторы J^N, L^N, K^N, I^N выступают в качестве генераторов. Непосредственная проверка показывает, что условия (33), (34) выполняются для 36 однопараметрических преобразований, задаваемых генераторами

$$\begin{aligned} J^2, J^3, J^5, J^6, J^7, J^9, J^{10}, J^{11}, J^{13}, J^{14}, L^2, L^3, L^5, L^6, \\ L^7, L^9, L^{10}, L^{11}, L^{13}, L^{14}, K^2, K^3, K^5, K^6, K^7, K^9, K^{10}, K^{11}, \\ K^{13}, K^{14}, I^1, I^4, I^8, I^{12}, I^{15}, I^{16}, \end{aligned} \quad (35)$$

которым соответствуют 20 вещественных ($\omega_2, \omega_3, \omega_5, \omega_{10}, \omega_{11}, \omega_{13}, \theta_2, \theta_3, \theta_5, \theta_{10}, \theta_{11}, \theta_{13}, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_5, \Lambda_{10}, \Lambda_{11}, \Lambda_{13}, \Omega_4, \Omega_{12}$) и 16 мнимых ($\omega_6, \omega_7, \omega_9, \omega_{14}, \theta_6, \theta_7, \theta_9, \theta_{14}, \Lambda_6, \Lambda_7, \Lambda_9, \Lambda_{14}, \Omega_1, \Omega_8, \Omega_{15}, \Omega_{16}$) параметров. Указанные преобразования образуют группу Ли, изоморфную группе SO(5,4).

При переходе в пространство размерности 3+1 из рассматриваемых преобразований надо исключить те, что связаны с базисными операторами L^N, K^N . Тогда получим 20-параметрическую группу матричных преобразований внутренней симметрии системы двух безмассовых уравнений Дирака, определяемую базисными операторами (24), (27) при наложении на соответствующие параметры 12 условий. Преобразования, представимые в форме Ли, задаются 16 генераторами:

$$J^2, J^3, J^5, J^6, J^7, J^9, J^{10}, J^{11}, J^{13}, J^{14}, I^1, I^4, I^8, I^{12}, I^{15}, I^{16}. \quad (36)$$

При этом генератор I^1 коммутирует со всеми остальными в наборе (36), которые образуют 15-параметрическую унитарную группу с 8 вещественными ($\omega_2, \omega_3, \omega_5, \omega_{10}, \omega_{11}, \omega_{13}, \Omega_4, \Omega_{12}$) и 7 мнимыми ($\omega_6, \omega_7, \omega_9, \omega_{14}, \Omega_8, \Omega_{15}, \Omega_{16}$) параметрами, изоморфную группе SO(4,2).

Полную группу внутренней симметрии лагранжиана системы двух уравнений Дирака с $m \neq 0$ в пространстве 2+1 можно получить из вышеустановленной 40-параметрической группы симметрии для безмассовых уравнений путем исключения преобразований, связанных с генераторами K^N, I^N , которые антикоммутируют с матрицами Γ_μ . В результате получим 20-параметрическую группу преобразований, представимых в форме Ли и задаваемых генераторами

$$J^2, J^3, J^5, J^6, J^7, J^9, J^{10}, J^{11}, J^{13}, J^{14}, L^2, L^3, L^5, L^6, L^7, L^9, L^{10}, L^{11}, L^{13}, L^{14} \quad (37)$$

с 12 вещественными ($\omega_2, \omega_3, \omega_5, \omega_{10}, \omega_{11}, \omega_{13}, \theta_2, \theta_3, \theta_5, \theta_{10}, \theta_{11}, \theta_{13}$) и 8 мнимыми ($\omega_6, \omega_7, \omega_9, \omega_{14}, \theta_6, \theta_7, \theta_9, \theta_{14}$) параметрами.

Заключение

Итак, наиболее полная группа матричных преобразований внутренней симметрии системы двух безмассовых уравнений Дирака в пространстве размерности 2+1 содержит 40 независимых параметров. При этом непрерывные преобразования, представимые в форме Ли, описываются 36-параметрической группой, изоморфной группе SO(5,4). Симметрия системы двух уравнений Дирака с $m \neq 0$ описывается 20-параметрической группой. Установленные симметрии значительно шире U(4) –

$U(2) \times U(2)$ -симметрий, которые обычно сопоставляются указанным системам уравнений в работах других авторов на данную тему [5 – 7].

Полученные результаты являются новыми и могут оказаться полезными при описании методами релятивистской квантовой механики свойств графена, таких, например, как парадокс Клейна, квантовый эффект Холла и других эффектов, характерных для двумерного электронного газа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Плетюхов, В.А. Внутренняя симметрия уравнения Дирака в пространстве $2+1$ / В.А. Плетюхов // Веснік Брэсцкага ўн-та. Сер. 4 «Фізіка. Матэматыка». – 2011. – № 1. – С. 30–34.
2. Андрусевич, П.П. О внутренней симметрии уравнения Дирака в графене / П.П. Андрусевич, В.А. Плетюхов, В.И. Стражев // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 2. – С. 11–14.
3. Плетюхов, В.А. Вещественное поле Дирака-Кэлера и дираковские частицы / В.А. Плетюхов, В.И. Стражев // Вестник БГУ, сер. 1. 2009. № 2. С. 3–7.
4. Андрусевич, П.П. О внутренней симметрии дираковских полей (ч. 1) / П.П. Андрусевич, В.А. Плетюхов, В.И. Стражев // Веснік Брэсцкага ўн-та. Сер. 4 «Фізіка. Матэматыка». – 2010. – № 1. – С. 5–10.
5. Gorbar, E.V. Magnetic field driven metal-insulator phase transition in planar systems / E.V. Gorbar [et al.] // arXiv: cond-mat/0202422v3 26 Aug 2002.
6. Gusynin, V.P. AC Conductivity of grapheme: from tight-binding model to $2+1$ -dimensional quantum electrodynamics / V.P. Gusynin, S.G. Sharapov, J.P. Carbotte // arXiv: 0706.3016v2 [cond-mat. mess-hall] 27 Nov 2007.
7. Bashir, A. Fermions in odd space-time dimensions: back to basics / A. Bashir, Ma. De J.A. Galicia // arXiv: hep-ph/0502089v1 9 Feb 2005.

P.P. Andrusevich, V.I. Strazhev. Internal Symmetry of Two Dirac Equations in the Space of Dimension $2+1$

In the present paper we continue our investigation of the internal symmetry of the Dirac fields in $2+1$ dimensional space. In the framework of the real description, a system of two Dirac equations for cases of masses $m=0$ and $m \neq 0$ is considered. It is shown that the most complete group of the internal symmetry of such a system contains forty and twenty independent parameters for $m=0$ and $m \neq 0$, respectively. These symmetries are more complete than ones usually discussed in the literature.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 30.09.2011 г.

УДК 539.2-022.532

В.А. Лиопо, С.И. Саросек, С.С. Секержицкий, А.В. Никитин**ФРАКТАЛЬНЫЕ СТРУКТУРЫ.
МОДЕЛИ ШАРОВЫХ УПАКОВОК**

Показано, что в рамках плотнейших упаковок построить объёмную структуру, включающую только тетраэдрические пустоты невозможно. Используя моделирование на основании атомных тетраэдров, можно построить линейчатые структуры висцерного типа, разветвления которых приводят к структурам типа фрактальных кластеров. Аналогичные системы могут быть построены на основе структурных атомных октаэдров.

Введение

Ричард Фейнман 23 декабря 1959 г. прочел в Калифорнийском университете свою знаменитую рождественскую лекцию «Внизу полным-полно места: приглашение в новый мир физики», в которой осветил два подхода создания наноматериалов: «сверху-вниз» и «снизу-вверх» [1]. Подход «сверху-вниз» заключается в том, что исходные тела измельчают до наночастиц. Этот способ реализован в различных технологических методах [1]. При подходе «снизу-вверх» наночастицы получают путем конденсации частиц из газовой или жидкой (растворы, расплавы) фаз. В результате образуются новые объекты с новыми свойствами, которые можно прогнозировать путем изменения условий формирования ансамблей. Оба эти подхода облегчают решение проблемы миниатюризации объектов [1].

Методом «снизу-вверх» можно создавать объекты, которые не существуют в природе, и создавать из них блоки наноматериалов. Для наноразмерных наночастиц справедливы принципы плотнейших упаковок [1].

Принципы плотнейших упаковок

Плотнейшие шаровые упаковки при сохранении решеточной симметрии могут существовать в двух вариантах. В первом случае плотноупакованные слои укладываются один на другой по типуABCABCABC....., при этом образуются гранецентрированная кубическая (ГЦК) решетка (рис. 1а). Во втором случае упаковка создана по типуABABAB.....и называется гексагональной плотной упаковкой (ГПУ). Данная упаковка показана на рисунке 1б. Кроме решеточных систем возможны образования структур смешаннослойного типа, например,ABCBCACAB.....[2;4;5].

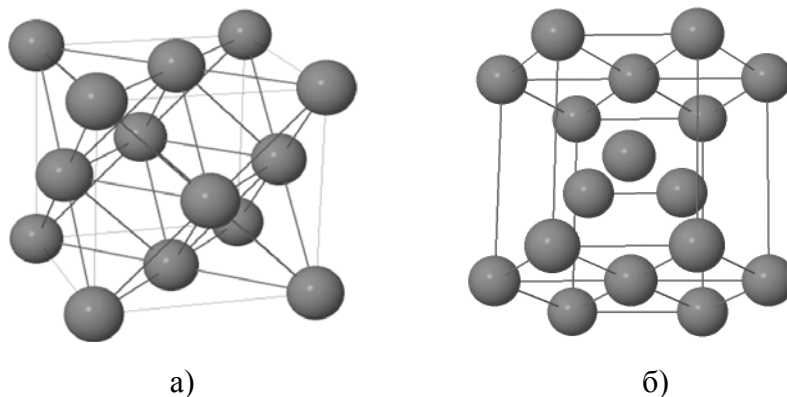
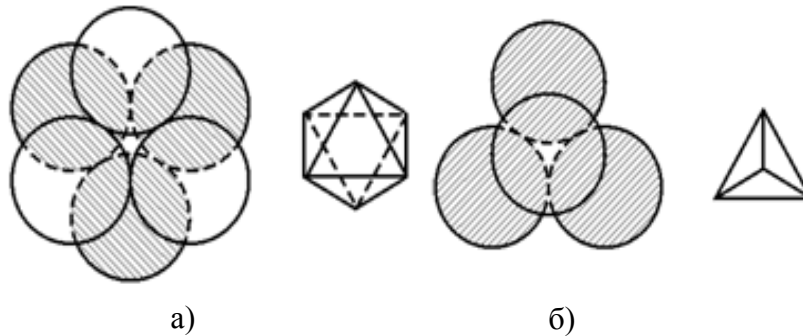


Рисунок 1 – Плотнейшие упаковки: ГЦК (а), ГПУ (б)

Во всех указанных случаях между шарами в упаковках имеются пустоты, координированные либо шестью шарами, либо четырьмя. В первом случае центры шаров, соединённые прямолинейными отрезками, формируют октаэдр, и пустота называется октаэдрическая (рис. 2а), а во втором центры четырех шаров формируют тетраэдр, то есть пустота тетраэдрическая (рис 2б).

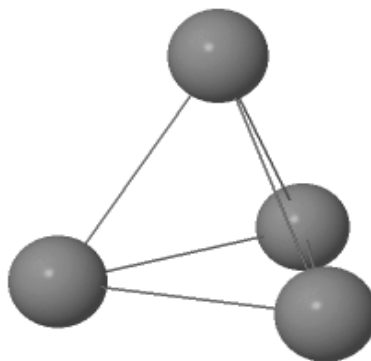


**Рисунок 2 – Пустоты в плотнейших упаковках:
а) октаэдрическая, б) тетраэдрическая**

На каждый атом шаровой упаковки приходится две тетраэдрические и одна октаэдрическая пустоты. В октаэдрическую пустоту, созданную шарами радиуса R , можно поместить, не искажая октаэдр, шар с радиусом $r_{\text{окт}} = R(\sqrt{2} - 1) \approx 0,41R$. В тетраэдрическую пустоту можно поместить шар с радиусом $r_{\text{тет}} = 0,5R(\sqrt{6} - 2) \approx 0,225R$. Естественно, что при такой упаковке шаров с разными размерами возникают пустоты меньшего размера. Для них можно подобрать шары, которыми эти новые пустоты будут заполнены, но при этом коэффициент компактности возрастает незначительно.

Если в плотнейших упаковках одинаковых шаров коэффициент компактности, определенный отношением объема шаров к общему объему системы, равен 0,74, то при заполнении всех тетраэдрических пустот коэффициент компактности принимает значение 0,76. При заполнении всех октаэдрических пустот коэффициент компактности – 0,79, если заполнены и тетраэдрические и октаэдрические пустоты то 0,81.

Так как тетраэдрическая пустота меньше, чем октаэдрическая, была предложена методика упаковки шаров по тетраэдрической схеме [2]. Тетраэдрическая конфигурация является плотнейшей упаковкой четырёх шаров в пространстве. Данная конфигурация показана на рисунке 3.



**Рисунок 3 – Тетраэдрическая
конфигурация шаров**

Однако плотно прилегающими друг к другу тетраэдрами нельзя заполнить всё пространство. Стратегия упаковки шаров в тетраэдрические комплекты до тех пор, пока это возможно, приводит к тому, что наступает ситуация, когда возникает такая конфигурация шаров, которая уже неспособна «поглотить» очередной шар без увеличения просвета между ними (рис. 4).

Такая упаковка шаров известна, как «жадный» алгоритм [3]. Таким образом, хотя «жадный» алгоритм и порождает оптимальную упаковку шаров в небольшой области, размеры которой не превосходят нескольких их диаметров, в конечном счете он приводит к коэффициенту компактности меньше, чем 0,74.

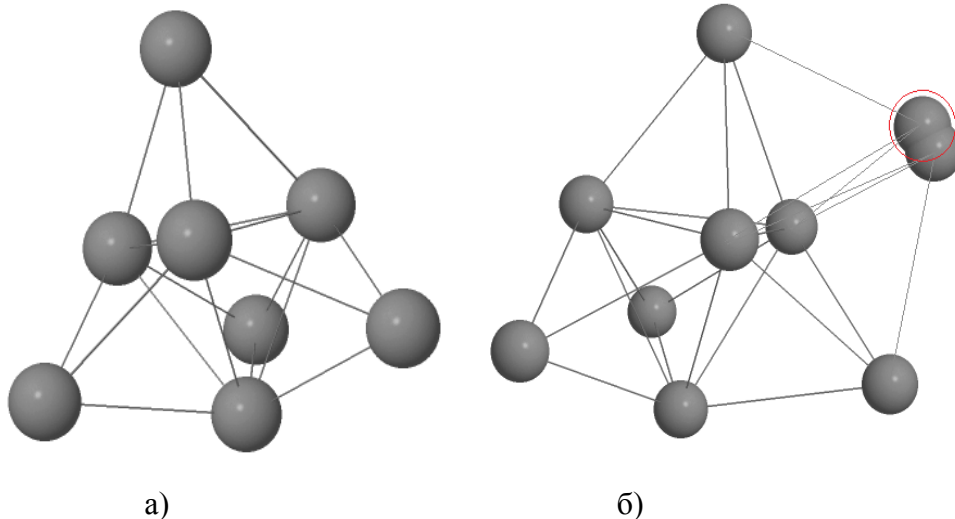
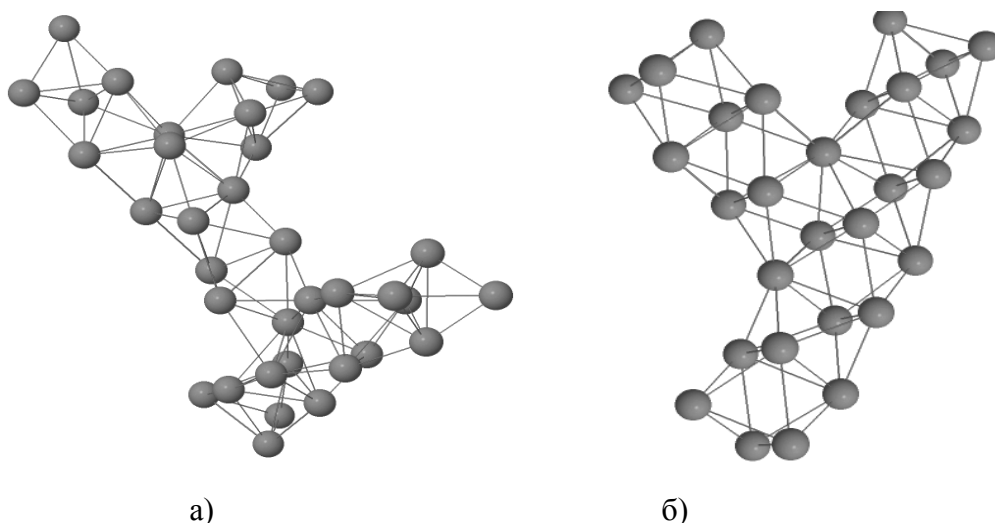


Рисунок 4 – Начальный а) и конечный этап б) «жадного» алгоритма

Получение фрактальных структур

Выполненные нами исследования показали, что «жадный» алгоритм может создавать линейные структуры висцерного типа. Причем эти структуры могут иметь ответвления, то есть создавать фрактальные кластеры. Если коэффициент компактности рассчитывается на отношение частей объёма всех шаров внутри тетраэдра к объёму этого тетраэдра, то он равен 0,776. Если этот коэффициент рассчитывается как отношение объёма всех шаров в тетраэдрической цепочке к минимальному объёму, в которой эту конструкцию можно поместить, то коэффициент компактности принимает значение 0,65.

Построить по тетраэдрическому мотиву сплошную конструкцию невозможно, но грани тетраэдров на начальной цепочке могут служить для создания ответвлений (рис. 5а). На каждом из этих ответвлений может возникнуть новая ветвь, то есть создастся конструкция фрактального кластера. Аналогично структуру можно получить при соединении структурных октаэдров их общей гранью. Цепочка таких октаэдров, как и цепочка тетраэдров, может иметь макроскопические размеры, то есть и в первом, и во втором случае возникают структуры типа вискеро́в. Как и для тетраэдрической конструкции, цепочки октаэдров могут создавать фрактальные кластеры, как это показано на рисунке 5б.



**Рисунок 5 – Построение фрактального кластера:
на основе тетраэдров а) и октаэдров б)**

Заключение

Проведённые исследования показали, что на основании атомных тетраэдров или на основании атомных октаэдров пространственные (объемные) структуры построить невозможно. Из этих отдельно взятых атомных структурных полиэдров образуются атомные конфигурации висцерного типа. Разветвления этих вискеро́в рассмотрены в обоих указанных случаях. При этом будут созданы структуры типа фрактальных кластеров. Подчеркивается, что коэффициент компактности шаровых упаковок для структурных полиэдров указанных типов, рассчитанный только с учетом частей шаров, входящих в полиэдр, некорректен. Определение величины коэффициента компактности должно учитывать минимальный объем, в котором могут размещаться рассматриваемые структуры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фейнман, Р.Ф. Внизу полным-полно места: приглашение в новый мир физики / Р.Ф. Фейнман // Рос. хим. журн. (Ж. Рос. хим. об-ва им. Д.И. Менделеева). – 2002. – Т. XLVI, № 5.
2. Конвей, Дж. Упаковка шаров, решетки и группы : в 2-х т. Т. 1. Пер. с англ. / Дж. Конвей, Н. Слоэн. – М. : Мир, – 1990. – 415 с.
3. Слоэн, Н. Упаковка шаров / Н. Дж. А. Слоэн // В мире науки. Scientific American Издание на русском языке, март 1984. – № 3. – С. 72–82.
4. Лиопо, В.А. Характеристики координационных сфер упаковок / В.А. Лиопо [и др.] // Вестник БрГУ им. А.С. Пушкина. 2010. – С. 4. – № 2. – 2010. – С. 23–31.
5. Белов, Н.В. Очерки по структурной минералогии / Н.В. Белов. – М.: Недра. 1976. – 344 с.

V.A. Liopo, S.I. Sarosek, S.S. Sekerzhitsky, A.V. Nikitin. Fractal Structures. Model of Ball Packages

It is shown that within the close packing it is impossible to construct volumetric structure that includes only tetrahedral emptiness. Using the modeling on the basis of atomic tetrahedral we can construct line structures of whisker type, which branching leads to structures such as fractal clusters. Similar systems can be built based on the atomic structure octahedrons.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 15.06.2011 г.

УДК 538.17

М.В. Нерода, Н.М. Ционенко

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ХИМИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ В ПОВЕРХНОСТНОМ СЛОЕ ЗАЩИТНЫХ ПОКРЫТИЙ ПРИ МАГНИТНО-ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ШЛИФОВАНИИ

Установлено влияние режимов обработки при магнитно-электрическом шлифовании на распределение элементов в поверхностном слое защитного упрочняющего покрытия ПГ-СР4, полученного путем газопламенного напыления.

Введение

Актуальным направлением в физике конденсированных сред является разработка методов получения и модификации свойств защитных покрытий [1 – 4], которые могут повышать твердость, износостойкость, сопротивление усталости, жаропрочность, коррозионную стойкость изделий [5–8]. В последнее время ведутся исследования по созданию нанокompозитных покрытий [9]. Активно изучаются и свойства комбинированных и гибридных покрытий [10–12]. В связи с этим целесообразным является рассмотрение методов, связанных с обработкой защитных покрытий, используемых в промышленном производстве (таких как ПГ-СР2, ПГ-СР4, имеющих низкую себестоимость и простоту методов нанесения).

Наиболее эффективными в ряде случаев являются комбинированные методы обработки, к числу которых относится магнитно-электрическое шлифование (МЭШ) [13–15]. В его основе лежат процессы, связанные с механическим резанием зернами абразива, электроэрозионным и термическим воздействием электрического (технологического) тока на поверхность упрочняющего покрытия под влиянием внешнего магнитного поля.

Методика приготовления образцов и методы анализа

Напыление образцов проводили газопламенным методом на основу из конструкционной стали СТ45. Газопламенное напыление образцов производилось на установке ТРУ-БПИ [16]. В качестве горючего газа применялась метилацетиленовая фракция (МАН) ТУ-38.102.12-89, в качестве транспортирующего – воздух. Расход МАН составлял 1-1,2 м³/ч, расход кислорода (ГОСТ 5583-79) 4-4,5 м³/ч, расход воздуха 0,2 м³/ч, дистанция напыления 180–220 мм. Толщина напыленных защитных покрытий ПГ-СР4 составляет 0,5...2 мм. Пористость покрытия до обработки находится в пределах 25...30 %, а шероховатость поверхности была 160...320 мкм. Химический состав материала защитного покрытия ПГ-СР4: Ni – основа, Cr~17 %; C~ 0,8 %; Fe ~ 0,7 %; Si ~3,5 %; B~3 %. Твердость покрытий находится в пределах 55..62 HRC.

Топография поверхности упрочняющего покрытия до и после обработки МЭШ исследуемых образцов изучалась с помощью растрового электронного микроскопа модели LEO1455VP. При этом регистрировался сигнал отраженных и вторичных электронов одновременно или поочередно. Исследования проводились как при нормальном падении пучка на поверхность образца, так и при наклоне образца на 30°. Ускоряющее напряжение составляло 20 кВ. Изображение в растровом электронном микроскопе формировалось при сканировании узким электронным лучом (диаметр пучка 50–500 Å) участка поверхности упрочняющего покрытия.

Рентгеноспектральный микроанализ проводился с использованием энергодисперсионного SiLi – полупроводникового детектора фирмы «Röntec». Для обеспечения удовлетворительного для статической обработки числа импульсов в пиках спектр записывался не менее 300 сек. Количественный анализ осуществлялся с использованием программного анализа спектров, проводимого на основе сравнения с эталонными образцами и уровнем тормозного излучения. Оценку изменения химического состава в поверхностном слое упрочняющих покрытий после обработки МЭШ проводили по спектральным графикам распределения химических элементов.

Экспериментальные результаты и их обсуждение

Поверхность образца после газопламенного напыления покрытия ПГ-СР4 и распределение химических элементов на ней показаны на рисунке 1.

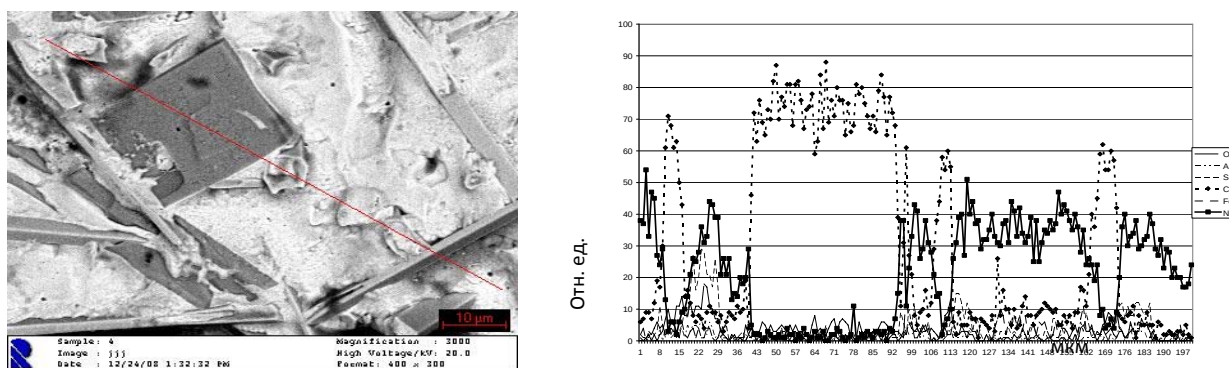


Рисунок 1 – Поверхность покрытия и распределение химических элементов на поверхности после напыления

Микрорельеф поверхности определяется неоднородностью распределения элементов покрытия. При кристаллизации на поверхности образуются кристаллы хрома размером порядка 5 мкм (а в отдельных случаях до 40 мкм), имеющие правильную кубическую форму, которые расположены на поверхности покрытия случайным образом. Возникают также кристаллы игольчатой формы, в сечении достигающие размеров 5×5 мкм и длиной в среднем 60 мкм. Они расположены в основном в плоскости, параллельной поверхности образца, но их ориентация в данной плоскости носит случайный характер. Никель, являющийся основой покрытия, кристаллизуется на поверхности в виде мелкодисперсной структуры, а размеры зерен составляют порядка 0,5...1,5 мкм.

Такой характер поверхности может определяться особенностями теплоотвода при нанесении покрытий. Процесс охлаждения вблизи основы является быстрым вследствие значительной теплопроводности стали, что приводит к уменьшению размеров зёрен кристаллов хрома. При нанесении последующих слоев вследствие образования пористой структуры процесс кристаллизации замедляется. На поверхности он имеет наименьшую скорость, что и способствует росту кристаллов хрома больших размеров. Распределение остальных элементов в никелевой основе можно считать равномерным.

При режимах обработки: частота вращения круга $n = 200 \text{ мин}^{-1}$; скорость продольной подачи $S = 120 \text{ мм/мин}$; сила технологического тока $I = 5 \text{ А}$; глубина резания $t = 5 \text{ мкм}$; значение вектора магнитной индукции $B = 0,1 \text{ Тл}$ (направлен вдоль обрабатываемой поверхности перпендикулярно плотности тока) – получены изображения поверхности и распределения химических элементов, представленные на рисунке 2.

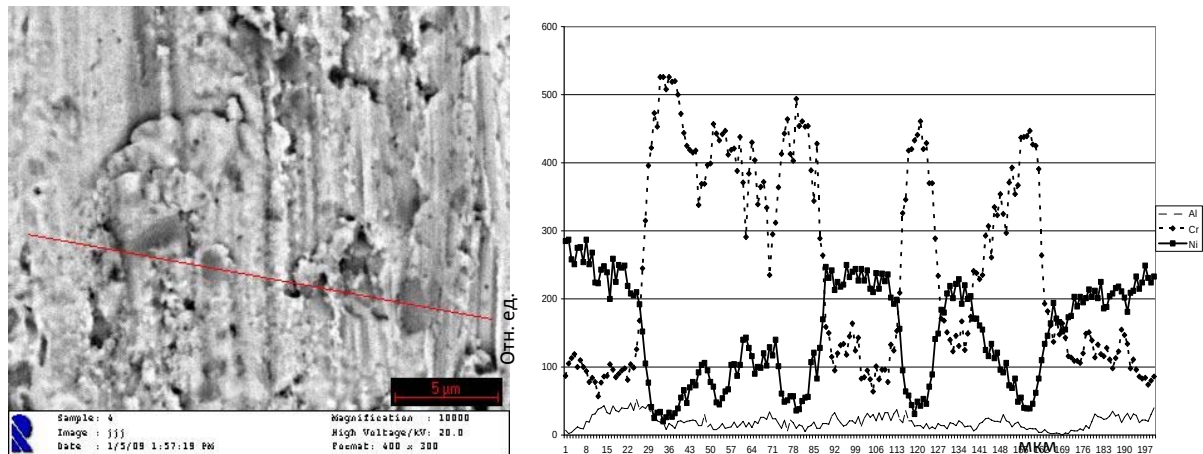


Рисунок 2 – Топография поверхности и распределение химических элементов покрытия ПГ-СР4 после обработки МЭШ при начальных режимах

При малой глубине резания происходит лишь частичное срезание крупных кристаллов хрома, в то время как тонкие кристаллы, имеющие игольчатую форму, удаляются практически полностью. Наблюдается повышение содержания алюминия Al до 7...10 %. Это объясняется дополнительным легированием поверхностного слоя покрытия элементами, содержащимися в связке абразивного круга. При этом основную роль играет диффузия, возникающая при контакте круга и обрабатываемой поверхности, и заполнение алюминием пор на поверхности при механическом резании.

При увеличении глубины резания t до 50 мкм и значения магнитной индукции B до 1,5 Тл существенно изменяется рельеф поверхности и распределение химических элементов на ней (рисунок 3).

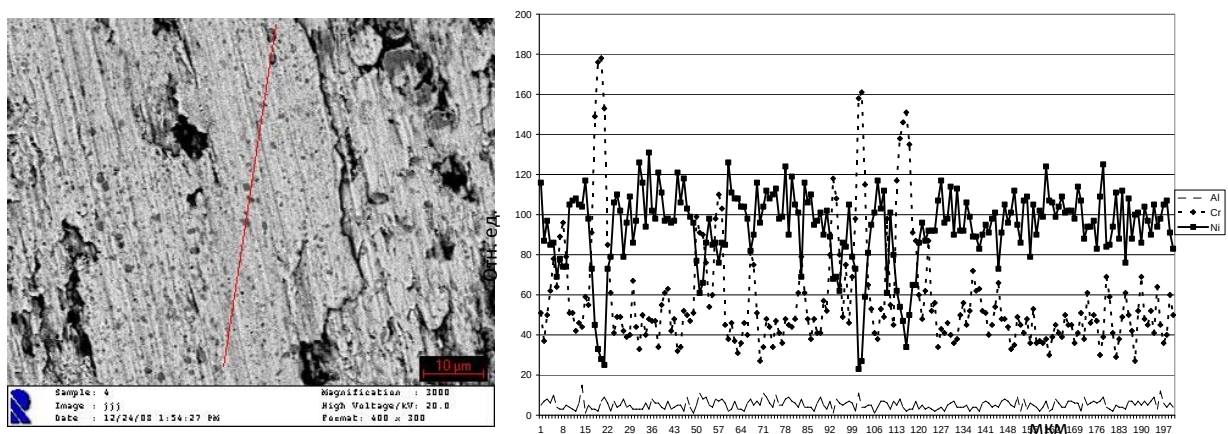


Рисунок 3 – Топография поверхности покрытия ПГ-СР4 после обработки МЭШ и распределение химических элементов в поверхностном слое при увеличении глубины резания и значения магнитной индукции

При обработке с глубиной резания порядка 50 мкм происходит полное удаление крупных кристаллов хрома, возникающих на поверхности. Наблюдается равномерное распределение мелких кристаллов хрома размерами порядка 1...2 мкм в никелевой основе. При данном режиме обработки процентное содержание хрома на поверхности уменьшается по сравнению с предыдущим режимом до 20 %. Связь кристаллов хрома с никелевой основой возрастает вследствие увеличения диффузии с ростом температу-

ры при обработке. Об этом свидетельствует уменьшение угла наклона линий, соответствующих границам кристаллов на графике распределения химических элементов на поверхности. Анализируя данные изменения распределения химических элементов в поверхностном слое, можно отметить, что содержание алюминия Al составляет до 5...6 %, и обусловлено процессами диффузии и припеканием связки круга к поверхности покрытия.

Увеличение скорости продольной подачи S до значения 2 800 мм/мин и магнитной индукции B до 0,2 Тл приводит к изменению топографии поверхности и распределения элементов на ней, что показано на рисунке 4.

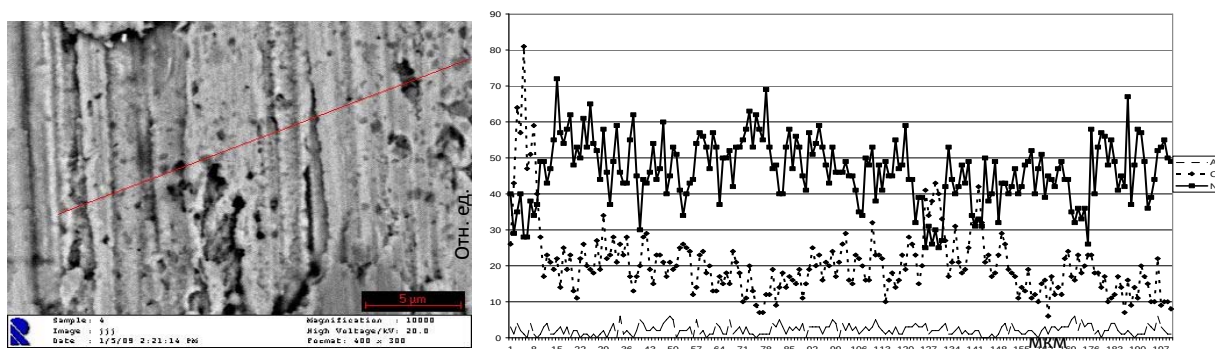


Рисунок 4 – Топография поверхности покрытия ПГ-СР4 после обработки МЭШ и распределение химических элементов в поверхностном слое при увеличении скорости продольной подачи и магнитной индукции

В поверхностном слое (рисунок 4) преобладают Ni (66 %) и хром Cr – (23 %). Наблюдается также дробление зерен хрома и образование мелкодисперсной структуры (~0,5мкм). Содержание алюминия Al уменьшается до 2...5 %. Это связано с уменьшением времени контакта участков круга и обрабатываемой поверхности при увеличении скорости резания, что в свою очередь уменьшает вклад диффузии.

Увеличение силы тока I до 15 А и уменьшение магнитной индукции B до 0,15 Тл приводит к изменению структуры поверхности защитного покрытия (рисунок 5).

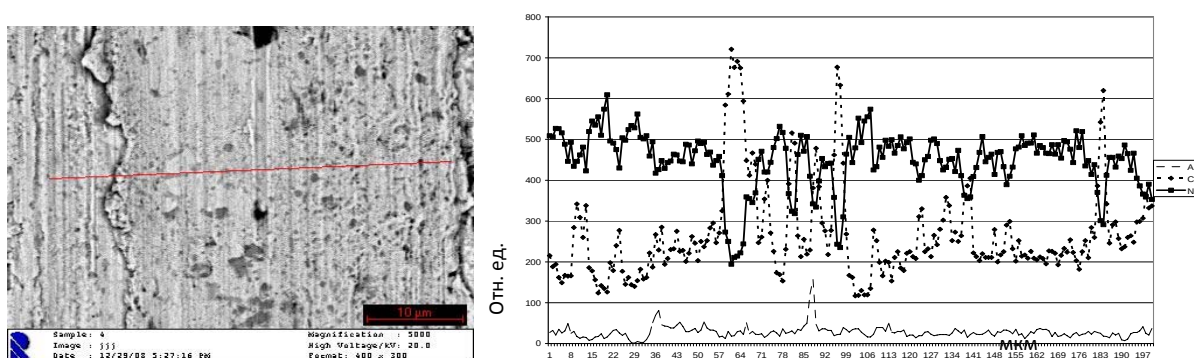


Рисунок 5 – Топография поверхности покрытия после обработки МЭШ и распределение химических элементов при увеличении силы тока

При данном режиме обработки происходит изменение распределения химических элементов в поверхностном слое покрытия, что может быть связано с увеличением температуры в зоне обработки. Наблюдается неравномерность распределения хрома и никеля, причем размеры кристаллов хрома различны: от 0,5 мкм до 3 мкм. При этом отчетливо видны области скопления крупных кристаллов. Это связано с условиями

кристаллизации, которые способствуют образованию крупных кристаллов при высоких температурах, с одной стороны, и дроблению кристаллов под воздействием магнитного поля – с другой. Слияние кристаллов происходит в областях, где концентрация хрома локально увеличена, а дробление – где кристаллы хрома в большей степени погружены в никелевую основу.

При высоком значении силы тока I наблюдается увеличение содержания алюминия в поверхностном слое покрытия до 15...20 %. Это связано с диффузией элементов связки токопроводящего абразивного круга на поверхность защитного покрытия, происходящей более интенсивно при высоких температурах.

Выбор режима обработки в соответствии с параметрами: частота вращения круга $n = 3\,000\text{ мин}^{-1}$; скорость продольной подачи $S = 1\,400\text{ мм/мин}$; сила технологического тока $I = 10\text{ А}$; глубина резания $t = 25\text{ мкм}$; значение вектора магнитной индукции $B = 0,15\text{ Тл}$ – приводит к равномерному распределению химических элементов на поверхности защитного покрытия (рисунок 6).

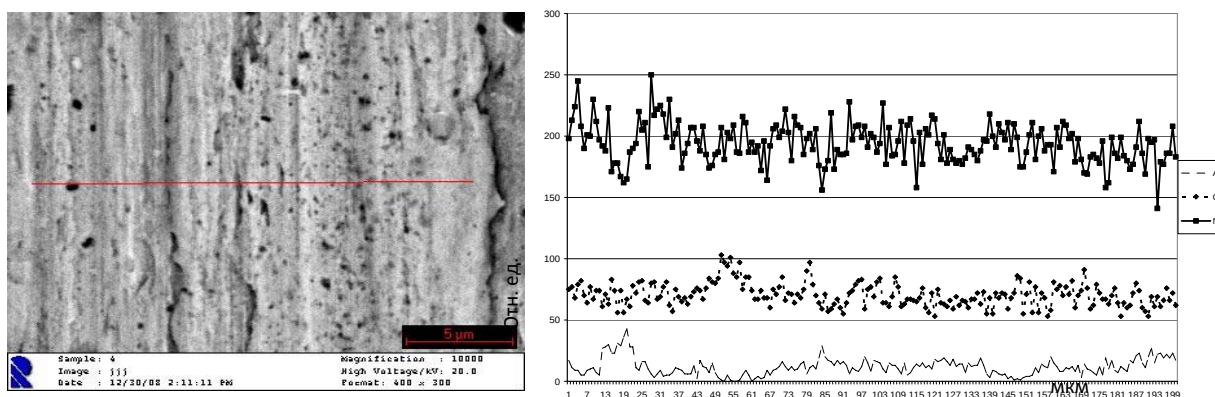


Рисунок 6 – Топография поверхности покрытия после обработки МЭШ и распределение химических элементов в поверхностном слое при режимах, обеспечивающих равномерное распределение элементов

Увеличение скорости вращения круга обеспечивает повышение температуры в зоне обработки, что в комбинации с уменьшением скорости подачи создает благоприятные условия для диффузии алюминия на обрабатываемую поверхность. Уменьшение технологического тока обеспечивает большую равномерность распределения алюминия по поверхности. Уменьшение глубины резания приводит к повышению концентрации хрома на поверхности защитного покрытия. Увеличение магнитной индукции приводит к дроблению кристаллов хрома и образованию мелкодисперсной структуры с высокой объемной долей границ раздела фаз, что повышает твердость поверхности покрытия. При повышении температуры происходит взаимная диффузия атомов никеля и хрома вблизи границ зерен кристаллов, что приводит к частичному растворению наиболее мелких кристаллов хрома в никелевой основе. Указанные факторы обеспечивают повышение прочности соединения кристаллов различных фракций, то есть к повышению износостойкости образца.

Выводы

Исходя из вышеприведенных данных, можно сделать вывод, что технологические параметры МЭШ оказывают влияние на распределение химических элементов в поверхностном слое газотермического защитного покрытия, причем основное влияние оказывают электрофизические и магнитные параметры процесса. Использование абразивного инструмента на токопроводящей алюминиевой связке осуществляет до-

полнительное легирование поверхности газотермического защитного покрытия. После обработки МЭШ распределение основных химических элементов на поверхности газотермического защитного покрытия становится более равномерным, что способствует увеличению его износостойкости и долговечности, а также коррозионной стойкости. При этом повышается качество поверхности: уменьшается шероховатость, снижается пористость покрытия и отсутствуют микротрещины.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фельдман, Л. Основы анализа поверхности и тонких плёнок / Л. Фельдман, Д. Майер. – М. : Мир, 1989 – 342 с.
2. Левашов, Е.А. Многофункциональные наноструктурированные плёнки / Е.А. Левашов, Д.В. Штанский // Успехи химии. – 2007. – № 76(5). – С. 501–509.
3. Решетняк, Е.Н. Синтез наноструктурных плёнок: достижения и перспективы / Е.Н. Решетняк, В.Е. Стрельницкий // Харьковская нанотехнологическая ассамблея «Наноструктурные материалы». – 2007. – Т. 1 – С. 6–16.
4. Носкова Н.И. Субмикроструктурные и нанокристаллические металлы и сплавы / Н.И. Носкова, А.Р.Мулюков. – Екатеринбург: УрО РАН, 2003. – 278 с.
5. Штанский, Д.В. Адгезионные, фрикционные и деформационные характеристики покрытий Ti-(Ca, Zr)-(C, N, O, P) для ортопедических и зубных имплантатов / Д.В. Штанский [и др.] // ФТФ. – 2006. – Т. 48, Вып. 7. – С. 1231–1238.
6. Андриевский Р.А., Спивак И.И. Прочность тугоплавких соединений и материалов на их основе : справочник / Р.А. Андриевский, И.И. Спивак. – Челябинск : Метеллургия, 1983. – 386 с.
7. Береснев, В.М. Структура, свойства и получение твёрдых нанокристаллических покрытий, осаждаемых несколькими методами / В.М. Береснев [и др.] // УФМ. – 2007. – Т. 3. С. 1–78.
8. Кадыржанов, К.К. Ионно-лучевая и ионно-плазменная обработка материалов / К.К. Кадыржанов. – М. : МГУ, 2005. – 640 с.
9. Погребняк, А.Д. Структура и физико-химические свойства комбинированных нанокompозитных защитных покрытий / А.Д. Погребняк [и др.] // ФИП. – 2007. – Т. 5, № 3–4. – С. 186–196.
10. Береснев, В.М. Нанокристаллические и нанокompозитные покрытия: структура и свойства / В.М. Береснев [и др.] // ФИП. – 2007. – Т. 5. – № 1–2. – С. 4–27.
11. Погребняк, А.Д. Эффект облучения электронным пучком на структуру и свойства Ni сплава, нанесённого плазменной струёй / А.Д. Погребняк [и др.] // Письма в ЖТФ. – 2004. – Т. 30, Вып. 4. – С. 79–86.
12. Погребняк, А.Д. Формирование гибридных покрытий TiN/Cr/Al₂O₃ на подложку из стали AISI 321 / А.Д. Погребняк, Ю.А. Кравченко // Поверхность. Рентг. Синхр. и нейтр. исследов. – 2006. – № 11. – С. 1–23.
13. Niaroda, M. Technological and physical features of magnetic-electric grinding process / M. Niaroda, V. Blagodarny // INFOTECH 2007, Moderní informační a komunikační technologie ve vzdělávání, Moravské vysoké škola. – Olomouci, 2007. – Díl 2. – P. 734–737.
14. Узунян, М.Д. Высокопроизводительное шлифование безвольфрамовых твердых сплавов / М.Д. Узунян, Ю.С. Краснощек. – М. : Машиностроение, 1988. – 80 с.
15. Дмитриченко, Э.И. Влияние электрофизических режимов магнитно-электрического шлифования на производительность при обработке покрытий / Э.И. Дмитриченко, М.В. Нерода // Материалы, оборудование и ресурсосберегающие

технологии: мат. междунар. науч.-технич. конф. Могилев : ГУ ВПО «Белорусско-Российский университет», 2004. – Ч.1. – С. 163–165.

16. Кудинов, В.В. Нанесение покрытий напылением. Теория, технология и оборудование: учеб. для вузов./ В.В. Кудинов, Г.В. Бобров. – М.: Металлургия, 1992. – 432 с.

M.V. Njaroda, N.M. Tsyankenka. The Distribution of Chemical Elements on the Surface of Protecting Covers as Result of Magnetic-and-Electrical Polishing

The influence of parameters of magnetic-and-electrical polishing on the element's distribution of protecting cover PG-SR4 near the surface is established.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 18.04.2011 г.

УДК 539.12

Е.М. Овсюк

О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА В ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ ШВАРЦШИЛЬДА

Общековариантный формализм Римана–Зильберштейна–Майораны–Оппенгеймера применен к решению уравнений электродинамики в метрике Шварцшильда. После разделения переменных задача сводится к дифференциальному уравнению того же вида, которое возникает в теории скалярного поля в пространстве-времени Шварцшильда. Полученное уравнение является вырожденным уравнением Гойна. Электромагнитное поле рассмотрено также на основе 10-мерного матричного формализма Даффина–Кеммера, в котором в дополнение к шести компонентам электромагнитного тензора используются 4 компоненты векторного потенциала. С помощью оператора пространственной честности радиальная система из 10 уравнений расщепляется на подсистемы из 4 и 6 уравнений. В этом подходе задача также сводится к вырожденному уравнению Гойна. Показано, каким образом решения, найденные в комплексной форме, встроены в 10-мерный формализм. Кроме того, определены радиальные функции, ответственные за калибровочные степени свободы электромагнитного поля.

Введение

Обычно, рассматривая электромагнитное поле в искривленном пространстве-времени [1; 2] (например, в пространстве черной дыры Шварцшильда [3]), используют вещественное тензорное представление электромагнитного поля [4] либо аппарат, развитый в рамках формализма Ньюмана–Пенроуза [5–7], который по существу эквивалентен спинорному подходу.

В работе [8] для этого был применен комплексный трехмерный формализм Майораны–Оппенгеймера. В настоящей работе формализм Майораны–Оппенгеймера применяется при решении уравнений Максвелла в пространстве-времени Шварцшильда. Этот метод дает возможность довольно легко провести процедуру разделения переменных и свести задачу к анализу дифференциального уравнения второго порядка (вырожденного уравнения Гойна) для одной единственной функции.

Дополнительно эта же система анализируется в пространстве Шварцшильда с применением 10-мерного формализма Даффина–Кеммера [9], когда в описание электромагнитного поля кроме тензора входит и четырехмерный электромагнитный тензор. Такое описание электромагнитного поля является более информативным, поскольку включает также и калибровочные степени свободы.

Матричное уравнение Максвелла [8]

$$\alpha^c (e_{(c)}^\rho \partial_\rho + \frac{1}{2} j^{ab} \gamma_{abc}) \Psi = 0, \quad \alpha^0 = -iI, \quad \Psi = \begin{vmatrix} 0 \\ \vec{E} + ic\vec{B} \end{vmatrix} \quad (1)$$

в пространстве-времени Шварцшильда

$$dS^2 = \Phi dt^2 - \frac{dr^2}{\Phi} - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad \Phi = 1 - M/r$$

$$e_{(0)}^\alpha = (\frac{1}{\sqrt{\Phi}}, 0, 0, 0), \quad e_{(3)}^\alpha = (0, \sqrt{\Phi}, 0, 0), \quad e_{(1)}^\alpha = (0, 0, \frac{1}{r}, 0), \quad e_{(2)}^\alpha = (1, 0, 0, \frac{1}{r \sin \theta}) \quad (2)$$

имеет следующий вид:

$$\left[-\frac{i\partial_t}{\sqrt{\Phi}} + \sqrt{\Phi}(\alpha^3 \partial_r + \frac{\alpha^1 s_2 - \alpha^2 s_1}{r} + \frac{\Phi'}{2\Phi} s_3) + \frac{1}{r} \Sigma_{\theta, \phi} \right] \begin{vmatrix} 0 \\ \psi \end{vmatrix} = 0, \quad \Sigma_{\theta, \phi} = \frac{\alpha^1}{r} \partial_\theta + \alpha^2 \frac{\partial_\phi + s_3 \cos \theta}{\sin \theta}. \quad (3)$$

Предполагаем использование циклического базиса, когда матрица S_3 диагональна.

1. Разделение переменных и функции Вигнера

Будем диагонализировать оператор квадрата и третьей проекции полного момента электромагнитного поля $\mathbf{J}^2$, J^3 ; для полевой функции используем подстановку

$$\psi = e^{-i\omega t} \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_1(r)D_{-1} \\ \varphi_2(r)D_0 \\ \varphi_3(r)D_{+1} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где для выделения угловой зависимости используются D -функции Вигнера [11] $D_\sigma = D_{-m,\sigma}^j(\phi, \theta, 0)$, $\sigma = -1, 0, +1$. Далее используем рекуррентные формулы [10]

$$\begin{aligned} \partial_\theta D_{-1} &= \frac{1}{2}(aD_{-2} - \nu D_0), & \frac{m - \cos \theta}{\sin \theta} D_{-1} &= \frac{1}{2}(aD_{-2} + \nu D_0), \\ \partial_\theta D_0 &= \frac{1}{2}(\nu D_{-1} - \nu D_{+1}), & \frac{m}{\sin \theta} D_0 &= \frac{1}{2}(\nu D_{-1} + \nu D_{+1}), \\ \partial_\theta D_{+1} &= \frac{1}{2}(\nu D_0 - aD_{+2}), & \frac{m + \cos \theta}{\sin \theta} D_{+1} &= \frac{1}{2}(\nu D_0 + aD_{+2}), \\ \nu &= \sqrt{j(j+1)}, & a &= \sqrt{(j-1)(j+2)}. \end{aligned} \quad (5)$$

После разделения переменных получаем три независимых уравнения (обозначаем $\nu/\sqrt{2} = \sqrt{j(j+1)}/2 \Rightarrow \nu$)

$$\begin{aligned} -\frac{\omega}{\sqrt{\Phi}} \varphi_2 + \frac{i\nu}{r} (\varphi_1 - \varphi_3) &= 0, \\ -\frac{\omega}{\sqrt{\Phi}} (\varphi_1 + \varphi_3) - i \left(\sqrt{\Phi} \frac{d}{dr} + \frac{\sqrt{\Phi}}{r} + \frac{\Phi'}{2\sqrt{\Phi}} \right) (\varphi_1 - \varphi_3) &= 0, \\ -\frac{\omega}{\sqrt{\Phi}} (\varphi_1 - \varphi_3) - i \left(\sqrt{\Phi} \frac{d}{dr} + \frac{\sqrt{\Phi}}{r} + \frac{\Phi'}{2\sqrt{\Phi}} \right) (\varphi_1 + \varphi_3) - \frac{2i\nu}{r} \varphi_2 &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Введем новые функции:

$$f = \varphi_1 + \varphi_3, \quad g = \varphi_1 - \varphi_3, \quad f = \frac{1}{r\sqrt{\Phi}} F(r), \quad g = \frac{1}{r\sqrt{\Phi}} G(r).$$

Тогда уравнения (6) примут вид

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \frac{i\nu}{\omega} \frac{1}{r^2} G(r), & F &= \frac{\Phi}{i\omega} \frac{d}{dr} G(r), \\ \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{M}{r(r-M)} \frac{d}{dr} + \left(\frac{\omega^2 r^2}{(r-M)^2} - \frac{j(j+1)}{r(r-M)} \right) \right] G(r) &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

или (после замены переменной $x = r/M$)

$$\frac{d^2 G}{dx^2} + \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} \right) \frac{dG}{dx} + \left(M^2 \omega^2 + \frac{j(j+1)}{x} + \frac{2M^2 \omega^2 - j(j+1)}{x-1} + \frac{M^2 \omega^2}{(x-1)^2} \right) G = 0. \quad (8)$$

Применяя подстановку $G = (x-1)^\alpha x^\beta e^{\gamma x} g(x)$, из (8) получаем

$$\frac{d^2 g}{dx^2} + \left[\frac{1+2\alpha}{x-1} - \frac{1-2\beta}{x} + 2\gamma \right] \frac{dg}{dx} + \left[M^2 \omega^2 + \gamma^2 + \frac{M^2 \omega^2 + \alpha^2}{(x-1)^2} + \frac{\beta(\beta-2)}{x^2} + \right.$$

$$+ \frac{j(j+1) + \alpha - \beta - \gamma - 2\alpha\beta + 2\beta\gamma}{x} + \frac{2M^2\omega^2 - j(j+1) - \alpha + \beta + \gamma + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma}{x-1} \Big] g = 0. \quad (9)$$

При ограничениях на параметры α, β, γ

$$\alpha = \pm iM\omega, \quad \beta = 0, 2, \quad \gamma = \pm iM\omega \quad (10)$$

уравнение (9) упрощается:

$$\frac{d^2g}{dx^2} + \left[\frac{1+2\alpha}{x-1} - \frac{1-2\beta}{x} + 2\gamma \right] \frac{dg}{dx} + \left[\frac{j(j+1) + \alpha - \beta - \gamma - 2\alpha\beta + 2\beta\gamma}{x} + \frac{2M^2\omega^2 - j(j+1) - \alpha + \beta + \gamma + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma}{x-1} \right] g = 0, \quad (11)$$

что является вырожденным уравнением Гойна $G(A, B, C, D, F)$

$$\frac{d^2Z}{dz^2} + \left[A + \frac{1+B}{z} + \frac{1+C}{z-1} \right] \frac{dZ}{dz} + \left[\frac{1}{2} \frac{A-B-C+AB-BC-2F}{z} + \frac{1}{2} \frac{A+B+C+AC+BC+2D+2F}{z-1} \right] Z = 0$$

с параметрами

$$A = 2\gamma, \quad B = 2\beta - 2, \quad C = 2\alpha, \quad D = 2M^2\omega^2, \quad F = 1 - j(j+1). \quad (12)$$

2. О векторном поле в подходе Даффина–Кеммера

Для уравнения Даффина–Кеммера [11] в пространстве-времени Швацшильда получим представление

$$\begin{aligned} & [i\beta^0\partial_t + i\Phi(\beta^3\partial_r + \frac{1}{r}(\beta^1j^{31} + \beta^2j^{32})) + \\ & + \frac{\Phi'}{2\Phi}\beta^0J^{03}) + \frac{\sqrt{\Phi}}{r}\Sigma_{\theta,\phi}^\kappa - I_6\sqrt{\Phi}] \Phi(x) = 0, \\ & \Sigma_{\theta,\phi}^\kappa = i\beta^1\partial_\theta + \beta^2\frac{i\partial + j^{12}\cos\theta}{\sin\theta}. \end{aligned} \quad (13)$$

Подстановка для решения в виде сферической волны имеет вид:

$$\Phi_{\omega jm}(x) = e^{-i\omega t} [f_1(r)D_0, f_2(r)D_{-1}, f_3(r)D_0, f_4(r)D_{+1}, f_5(r)D_{-1}, f_6(r)D_0, f_7(r)D_{+1}, f_8(r)D_{-1}, f_9(r)D_0, f_{10}(r)D_{+1}]. \quad (14)$$

Диагностируя оператор пространственной инверсии $\hat{P}_{sph}^{cycl.} \Phi_{jm} = P \Phi_{jm}$, получаем два типа собственных значений с соответствующими ограничениями на радиальные функции:

$$P = (-1)^{j+1} \quad f_1 = f_3 = f_6 = 0, \quad f_4 = -f_2, \quad f_7 = -f_5, \quad f_{10} = +f_8; \quad (15)$$

$$P = (-1)^j \quad f_9 = 0, \quad f_4 = +f_2, \quad f_7 = +f_5, \quad f_{10} = -f_8. \quad (16)$$

Пусть $P = (-1)^{j+1}$, принимая во внимание (15), получаем более простые системы

$$\begin{aligned} i\omega f_5 + i\Phi\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} + \frac{\Phi'}{2\Phi}\right) f_8 + i\nu\frac{\sqrt{\Phi}}{r} f_9 &= 0, \quad -i\omega f_2 - \sqrt{\Phi} f_5 = 0, \\ -i\Phi\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right) f_2 - \sqrt{\Phi} f_8 &= 0, \quad i2\nu\frac{\sqrt{\Phi}}{r} f_2 - \sqrt{\Phi} f_9 = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

откуда следует дифференциальное уравнение второго порядка (пусть $f_2 = r^{-1}F_2$):

$$\frac{d^2 F_2}{dr^2} + \frac{\Phi'}{\Phi} \frac{dF_2}{dr} + \left(\frac{\omega^2}{\Phi^2} - \frac{j(j+1)}{r^2 \Phi} \right) F_2 = 0, \quad (18)$$

что совпадает с уравнением для G .

В случае $P = (-1)^j$ соответственно получаем:

$$\begin{aligned} \Phi \left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r} \right) F_6 + \frac{2\nu}{r} F_5 &= 0, \\ i\omega F_5 + i\Phi \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) F_8 &= 0, \quad i\omega F_6 - i\frac{2\nu}{r} F_8 = 0, \\ -i\omega F_2 + \frac{\nu}{r} F_1 - F_5 &= 0, \\ i\omega F_3 + \Phi \frac{d}{dr} F_1 + \Phi F_6 &= 0, \\ i\Phi \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) F_2 + i\frac{\nu}{r} F_3 + F_8 &= 0, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$F_1 = \sqrt{\Phi} f_1, \quad F_2 = f_2, \quad F_3 = \sqrt{\Phi} f_3, \quad F_5 = \sqrt{\Phi} f_5, \quad F_6 = f_6, \quad F_8 = \sqrt{\Phi} f_8. \quad (20)$$

3. Связь между формализмами

Рассмотрим систему (17), воспользовавшись известными результатами, полученными в разделе 1. Учитывая известные структуры 3-вектора и 6-мерного тензора

$$\Psi = e^{-i\omega t} \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_1 D_{-1} \\ \varphi_2 D_0 \\ \varphi_3 D_{+1} \end{pmatrix}, \quad \Phi = e^{-i\omega t} [f_5 D_{-1}, f_6 D_0, f_7 D_{+1}, f_8 D_{-1}, f_9 D_0, f_{10} D_{+1}], \quad (21)$$

приходим к трем уравнениям

$$\varphi_2 = f_6 + i f_9, \quad \varphi_1 = f_5 - i f_8, \quad \varphi_3 = f_7 - i f_{10}. \quad (22)$$

Принимая во внимание ограничения, связанные с четностью (15), (16), из (22) получаем

$$\underline{P = (-1)^{j+1}}, \quad f_9 = -i\varphi_2, \quad f_8 = \frac{i}{2}(\varphi_1 + \varphi_3), \quad f_5 = \frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_3); \quad (23)$$

$$\underline{P = (-1)^j}, \quad F_6 = \varphi_2, \quad F_5 = \frac{\sqrt{\Phi}}{2}(\varphi_1 + \varphi_3), \quad F_8 = i\frac{\sqrt{\Phi}}{2}(\varphi_1 - \varphi_3). \quad (24)$$

4. Анализ радиальной системы для состояний $P = (-1)^j$

В шести уравнениях (19) учтем (24). Три первых уравнения (они содержат только функции F_5, F_6, F_8) после введения новых переменных запишутся так:

$$\begin{aligned} -i\omega \varphi_2 + i\frac{\nu}{r} i\sqrt{\Phi} (\varphi_1 - \varphi_3) &= 0, \\ \Phi \left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r} \right) \varphi_2 + \frac{\nu}{r} \sqrt{\Phi} (\varphi_1 + \varphi_3) &= 0, \\ -\omega \sqrt{\Phi} (\varphi_1 + \varphi_3) - \Phi \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) i\sqrt{\Phi} (\varphi_1 - \varphi_3) &= 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Уравнения (25) можно сравнить с уравнениями, полученными в комплексном подходе:

$$\begin{aligned} -\frac{\omega}{\sqrt{\Phi}}\varphi_2 + \frac{i\nu}{r}(\varphi_1 - \varphi_3) &= 0, \\ \sqrt{\Phi}\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)\varphi_2 + \frac{\nu}{r}(\varphi_1 + \varphi_3) &= 0, \\ -\frac{\omega}{\sqrt{\Phi}}(\varphi_1 + \varphi_3) - i\left(\sqrt{\Phi}\frac{d}{dr} + \frac{\sqrt{\Phi}}{r} + \frac{\Phi'}{2\sqrt{\Phi}}\right)(\varphi_1 - \varphi_3) &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Они совпадают. Три уравнения из (20) связывают радиальные функции электромагнитного 4-вектора F_1, F_2, F_3 с радиальными функциями электромагнитного тензора F_5, F_6, F_8 :

$$\begin{aligned} i\omega F_3 + \Phi \frac{d}{dr} F_1 + \Phi F_6 &= 0, \\ -i\omega F_2 + \frac{\nu}{r} F_1 - F_5 &= 0, \\ i\Phi \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right) F_2 + i\frac{\nu}{r} F_3 + F_8 &= 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Эта система эквивалентна следующей:

$$\begin{aligned} F_3 &= \frac{i\Phi}{\omega} \frac{dF_1}{dr} - \frac{\Phi\nu}{\omega^2 r^2} G(r), \quad F_2 = -\frac{i\nu}{\omega r} F_1 + \frac{\Phi}{\sqrt{2}\omega^2 r} \frac{dG(r)}{dr}, \\ \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{M}{r(r-M)} \frac{d}{dr} + \left(\frac{\omega^2 r^2}{(r-M)^2} - \frac{j(j+1)}{r(r-M)} \right) \right] G(r) &= 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Обращаем внимание, что все члены с F_1 компенсируют друг друга. Это означает, что функция F_1 может быть произвольной. Этот факт является проявлением калибровочной свободы в электромагнитных 4-потенциалах по фиксированном электромагнитном тензоре.

5. Анализ радиальной системы для состояний $\mathbf{P} = (-1)^{j+1}$

Рассмотрим теперь случай $P = (-1)^{j+1}$

$$\begin{aligned} f_2 = -\frac{r}{2\nu}\varphi_2, \quad +\frac{\omega}{\sqrt{\Phi}}\varphi_2 + \frac{i\nu}{r}(\varphi_1 - \varphi_3) &= 0, \quad -\sqrt{\Phi}\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)\varphi_2 + \frac{\nu}{r}(\varphi_1 + \varphi_3) = 0, \\ -\frac{\omega}{\sqrt{\Phi}}(\varphi_1 - \varphi_3) - i\sqrt{\Phi}\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} + \frac{\Phi'}{2\Phi}\right)(\varphi_1 + \varphi_3) + \frac{2i\nu}{r}\varphi_2 &= 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Обращаем внимание, что функция f_2 определяемого электромагнитного 4-вектора однозначно определяется компонентами тензора. Это означает, что в этом классе решений не существует калибровочной свободы.

Сравним уравнения (29) с первыми тремя уравнениями в (26). Системы (29), (26) отличаются только знаком функции φ_2 .

Введем новые переменные $f = \varphi_1 + \varphi_3$, $g = \varphi_1 - \varphi_3$, тогда

$$\varphi_2 = -\frac{i\nu}{\omega} \frac{\sqrt{\Phi}}{r} g, \quad i\sqrt{\Phi}\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right) \frac{\sqrt{\Phi}}{r} g + \frac{\omega}{r} f = 0,$$

$$-\frac{\omega^2}{\Phi} g - i\omega \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} + \frac{\Phi'}{2\Phi} \right) f + \frac{2\nu^2}{r^2} g = 0. \quad (30)$$

Система (30) упрощается с помощью подстановки

$$g = \frac{1}{r\sqrt{\Phi}} G(r), \quad f = \frac{1}{r\sqrt{\Phi}} F(r),$$

в результате чего приходим к уравнениям:

$$P = (-1)^{j+1} \quad \varphi_2 = -\frac{i\nu}{\omega r^2} G, \quad \omega F = -i\Phi \frac{d}{dr} G, \\ \frac{d^2 G}{dr^2} + \frac{M}{r(r-M)} \frac{dG}{dr} + \left(\frac{\omega^2 r^2}{(r-M)^2} - \frac{j(j+1)}{r(r-M)} \right) G = 0. \quad (31)$$

Заклучение

Общековариантный тетрадный формализм Римана–Зильберштейна–Майораны–Оппенгеймера применен к решению уравнений электродинамики в метрике Шварцшильда. После разделения переменных задача сведена к дифференциальному уравнению того же вида, которое возникает в теории скалярного поля в пространстве-времени Шварцшильда. Полученное уравнение является вырожденным уравнением Гойна.

Электромагнитное поле рассмотрено также на основе 10-мерного матричного формализма Даффина–Кеммера, в котором в дополнение к шести компонентам электромагнитного тензора используются 4 компоненты векторного потенциала. С помощью оператора пространственной четности радиальная система из 10 уравнений расщепляется на подсистемы из 4 и 6 уравнений соответственно. В этом подходе задача также сводится к вырожденному уравнению Гойна.

В частности показано, каким образом решения, найденные в комплексной форме, встроены в 10-мерный формализм. Кроме того, определены радиальные функции, ответственные за калибровочные степени свободы электромагнитного поля.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Misner, C. Gravitation / C. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler. – San Francisco : Freeman, 1973.
2. Landau, L.D. Classical Theory of Fields / L.D. Landau, E.M. Lifshitz. – Oxford : Pergamon Press, 1975.
3. Schwarzschild, K. Uber das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie / K. Schwarzschild // Sitzungsber. Preuss. Akad. Wissen. Phys. Math. Kl. – 1916. – P. 189–196.
4. Bachelot, A. Gravitational scattering of electromagnetic field by Schwarzschild black-hole / A. Bachelot // Annales de l'institut Henri Poincarre (A) Physique theorique. – 1991. – Vol. 54, № 3 – P. 261–320.
5. Newman, E.T. New Approach to Einstein and Maxwell-Einstein field equations / E.T. Newman // J.Math. Phys. – 1961. – Vol. 2. – P. 674–676.
6. Чандрасекхар, С. Математическая теория черных дыр : в 2 ч. / С. Чандрасекхар. – Москва : Мир, 1986. – 2 ч.
7. Пенроуз, Р. Спиноры и пространство-время : в 2 т. / Р. Пенроуз, В. Риндлер. – Москва : Мир, 1987. – Т. 1: Два-спинорное исчисление и релятивистские поля. – 528 с.
8. Bogush, A.A. Maxwell equations in complex form of Majorana–Oppenheimer, solutions with cylindric symmetry in Riemann S_3 and Lobachevsky H_3 spaces / A.A. Bogush,

G.G. Krylov, E.M. Ovsiyuk, V.M. Red'kov // *Ricerche di matematica*. – 2010. – Vol. 59, № 1. – P. 59–96.

9. Duffin–Kemmer–Petiau formalism reexamined: non-relativistic approximation for spin 0 and spin 1 particles in a Riemannian space–time / A.A. Bogush [et al] // *Annales de la Fondation Louis de Broglie*. – 2007. – Vol. 32, № 2–3. – P. 355–381.

10. Варшалович, Д.А. Квантовая теория углового момента / Д.А. Варшалович, А.Н. Москалев, В.К. Херсонский. – Ленинград : Наука, 1975. – 441 с.

11. Богуш, А.А. Общековариантный формализм Даффина-Кеммера и сферические волны для векторного поля в пространстве де Ситтера / А.А. Богуш, В.С. Отчик, В.М. Редьков. – Минск, 1986. – 45 с. – (Препринт / Акад. наук БССР, Ин-т физики; № 426).

12. Редьков, В.М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В.М. Редьков. – Минск : Белорус. наука, 2009. – 496 с.

E.M. Ovsiyuk. On Maxwell Equations in General Covariant Majorana – Oppenheimer Form in the Space of Schwarzschild Black Hole

It is shown that the generally covariant method of Riemann – Silberstein – Majorana – Oppenheimer in electrodynamics, specified in Schwarzschild metrics, after separating the variables reduces the problem of electromagnetic solutions to a differential equation similar to that arising in the case of a scalar field in the Schwarzschild space-time. This differential equation is recognized as a confluent Heun equation. Also, the electromagnetic field is treated on the base of 10-dimensional Duffin–Kemmer approach, when in addition to six components of the strength tensor one uses a 4-component electromagnetic potential. The corresponding system of 10 radial equations is simplified by the use of additional constraints stemming from value equation for the spatial parity operator; the radial system is divided into two subsystems of 4 and 6 equations. In this second approach the problem of electromagnetic field reduces to the confluent Heun differential equation as well. In particular, we show explicitly how solutions found in the complex form are embedded into the 10-dimensional formalism. Besides we determine radial functions that are responsible for gauge degrees of freedom of the electromagnetic field.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 25.04.2011 г.

УДК 539.12

Е.М. Овсюк, О.В. Веко

О МОДЕЛИРОВАНИИ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО БАРЬЕРА В ТЕОРИИ ШРЕДИНГЕРА ГЕОМЕТРИЕЙ ПРОСТРАНСТВА ЛОБАЧЕВСКОГО

Построена система точных решений уравнения Шредингера в 3-мерном пространстве Лобачевского в системе квазидекартовых координат. Показано, что поставленная в рамках пространства Лобачевского задача моделирует ситуацию в плоском пространстве для квантово-механической частицы в поле плавно растущего до бесконечности 2-мерного потенциального барьера. Коэффициент отражения для всех состояний оказывается равным 1.

Введение

Известно, что при наличии у пространства-времени кривизны плоских волн в стандартном понимании для полей частиц не существует. Поэтому особый интерес вызывают примеры неевклидовых пространств, где некоторые аналоги таких решений можно построить. В работах Шапиро [1; 2] было показано, что в пространстве Лобачевского есть такие решения для частиц со спином 0. Проблема построения аналога плоских волн в пространстве постоянной положительной кривизны исследовалась Волобуевым [3]. Следует также отметить, что теоретико-групповой гармонический анализ в пространстве Лобачевского, в том числе с применением решений, аналогичных плоским волнам, развивался в работах Гельфанда – Граева – Виленкина [4; 5]. Более поздняя трактовка вопроса о плоских волнах в пространствах постоянной кривизны дана в [6]. Решения типа плоских волн для уравнений Максвелла были построены в работах [7–10]. Недавно в [11] исследовался вопрос о построении решений уравнений Дирака в пространстве Лобачевского на основе метода квадрирования; при этом, в частности, было указано на возможность построения таким способом решений типа плоских волн из скалярных волн Шапиро.

В настоящей работе мы обращаемся вновь к случаю уравнения Шредингера в пространстве Лобачевского и строим обобщенную систему решений типа плоских волн для уравнения Шредингера в этом пространстве. Используется система квазидекартовых координат, тесно связанная с орисферическими координатами. Основной акцент сделан на вопросе, какую эффективную квантово-механическую ситуацию в обычном пространстве моделирует эта задача, поставленная и решенная в рамках пространства Лобачевского. Оказалось, что она моделирует точно решаемую задачу о прохождении частицы через потенциальный барьер, плавно растущий до бесконечности.

1. Параметризация пространства Лобачевского квазидекартовыми координатами

В пространстве-времени Лобачевского будем использовать квазидекартовые координаты

$$dS^2 = dt^2 - e^{-2z}(dx^2 + dy^2) - dz^2, \quad x, y, z \in (-\infty, +\infty);$$

элемент объема равен $dV = \sqrt{-g} \, dx \, dy \, dz = e^{-2z} dx \, dy \, dz$, величина и знак координаты z существенны при обращении к вероятностной интерпретации волновой функции

$$dW = |\Psi|^2 dV = |\Psi|^2 e^{-2z} dx \, dy \, dz.$$

Ниже потребуются некоторые особенности параметризации пространства координатами (x, y, z) . Напомним, что пространство Лобачевского может быть отождествлено с ветвью гиперboloида в 4-мерном псевдоевклидовом пространстве

$$u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 = \rho^2, \quad u_0 = +\sqrt{\rho^2 + u^2}.$$

Используемые координаты (x, y, z) связаны с u_a соотношениями

$$u_1 = xe^{-z}, \quad u_2 = ye^{-z},$$

$$u_3 = \frac{1}{2}[(e^z - e^{-z}) + (x^2 + y^2)e^{-z}], \quad u_0 = \frac{1}{2}[(e^z + e^{-z}) + (x^2 + y^2)e^{-z}]. \quad (1a)$$

Будем использовать 3-мерную реализацию Пуанкаре пространства Лобачевского как внутренности 3-мерной сферы:

$$q_i = \frac{u_i}{u_0} = \frac{u_i}{\sqrt{\rho^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}}, \quad q_i q_i < +1. \quad (1b)$$

Координаты (x, y, z) связаны с q_i так:

$$q_1 = \frac{2x}{x^2 + y^2 + e^{2z} + 1}, \quad q_2 = \frac{2y}{x^2 + y^2 + e^{2z} + 1}, \quad q_3 = \frac{x^2 + y^2 + e^{2z} - 1}{x^2 + y^2 + e^{2z} + 1}. \quad (1c)$$

Обратные к (1c) соотношения имеют вид

$$x = \frac{q_1}{1 - q_3}, \quad y = \frac{q_2}{1 - q_3}, \quad e^z = \frac{\sqrt{1 - q_3^2}}{1 - q_3}. \quad (1d)$$

Отмечаем, что на оси $q_1 = 0, q_2 = 0, q \in (-1, +1)$ формулы (1d) дают

$$x = 0, \quad y = 0, \quad e^z = \frac{\sqrt{1 + q_3}}{\sqrt{1 - q_3}}, \quad (2a)$$

т. е. граничные точки этой оси параметризуются так:

$$q_3 \longrightarrow +1, \quad e^z \longrightarrow +\infty, \quad z \longrightarrow +\infty;$$

$$q_3 \longrightarrow -1, \quad e^z \longrightarrow +0, \quad z \longrightarrow -\infty. \quad (2b)$$

2. Разделение переменных в уравнении Шредингера. Решения типа плоских волн

Уравнение Шредингера в римановом пространстве [12]

$$i\hbar \partial_t \Psi = \frac{1}{2M} \left[\left(\frac{i\hbar}{\sqrt{-g}} \partial_k \sqrt{-g} + eA_k \right) (-g^{kl}) (i\hbar \partial_l + eA_l) \right] \Psi \quad (3)$$

в квазидекартовых координатах примет вид:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = -\frac{\hbar^2}{2M\rho^2} \left[e^{2z} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + e^{2z} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + e^{2z} \frac{\partial}{\partial z} e^{-2z} \frac{\partial}{\partial z} \right] \Psi.$$

Переменные делятся подстановкой $\Psi = e^{-iEt/\hbar} e^{ik_1 x} e^{ik_2 y} f(z)$:

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} - 2 \frac{d}{dz} + \varepsilon - e^{2z} (k_1^2 + k_2^2) \right] f(z) = 0, \quad (4a)$$

где $\varepsilon = 2ME\rho^2/\hbar^2$. Элементарной подстановкой $f = e^z \varphi(z)$ уравнение (3) приводится к виду

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \varepsilon - 1 - (k_1^2 + k_2^2) e^{2z} \right] \varphi(z) = 0 \quad (4b)$$

с потенциальной функцией $U(z) = 1 + (k_1^2 + k_2^2)e^{2z}$. Следует обратить внимание на то, что вероятностная интерпретация после преобразования к функции φ принимает вид $dW = |\Psi|^2 dV = |\varphi|^2 dx dy dz$. Ситуация иллюстрируется рисунком 1.

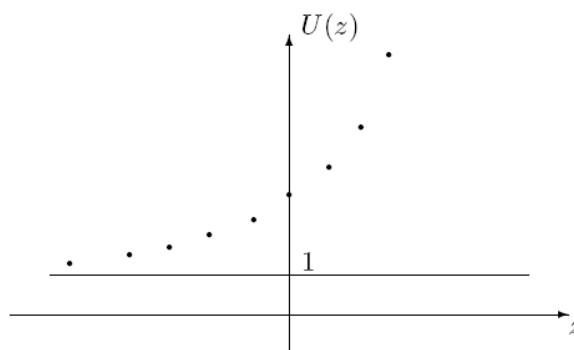


Рисунок 1 – Эффективная потенциальная кривая

Характерным и легко интерпретируемым физическим решением при $\varepsilon > 1$ является следующее: слева имеем суперпозицию волн (падающей слева и отраженной), а справа за барьером волновая функция должна резко спадать до нуля. Случай, когда исходная волна движется с правой стороны барьера, в принципе, с точки зрения квантовой механики, также возможен. Тогда случае действующее влево эффективное поле, наоборот, способствует продвижению частицы из классически запрещенной области в область, классически разрешенную; эта волна может частично отражаться назад в классически запрещенную область. Из качественных соображений нужно предполагать, что исходная плотность вероятности справа за барьером при достаточно больших значениях Z должна быть очень большой. Ниже будут построены решения, описывающие обе эти ситуации.

Отметим специально, что случай $k_1 = 0, k_2 = 0$ является особым; при этом уравнение (4а) существенно меняется: в нем исчезает потенциальная функция

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - 2 \frac{d}{dz} + \varepsilon \right) f(z) = 0, \quad f = e^{(1 \pm i \sqrt{\varepsilon - 1} z)}, \quad \varphi = e^{(\pm i \sqrt{\varepsilon - 1} z)}; \quad (5)$$

т. е. для функции φ здесь возникают решения типа обычных плоских волн.

3. Анализ общего случая

Теперь обращаемся к общему случаю. Перейдем в (4а) к переменной

$$\sqrt{k_1^2 + k_2^2} e^z = Z, \quad Z \in (0, +\infty).$$

Тогда уравнение принимает вид

$$\left(\frac{d^2}{dZ^2} - \frac{1}{Z} \frac{d}{dZ} + \frac{\varepsilon}{Z^2} - 1 \right) f(Z) = 0; \quad (6)$$

выделением множителя $f = \sqrt{Z} F$ можно убрать член с первой производной

$$\left(\frac{d^2}{dZ^2} + \frac{\varepsilon - 3/4}{Z^2} - 1 \right) F(Z) = 0.$$

Это представление позволяет легко найти асимптотики решений:

$$(z \longrightarrow -\infty) \quad Z \longrightarrow 0,$$

$$F \sim Z^{1/2 \pm i\sqrt{\varepsilon-1}}, \quad f \sim Z^{1 \pm i\sqrt{\varepsilon-1}}, \quad \varphi \sim e^{\pm i\sqrt{\varepsilon-1}z};$$

$(z \longrightarrow +\infty) \quad Z \rightarrow +\infty,$

$$F \sim e^{\pm Z}, \quad f = \sqrt{Z} e^{\pm Z}, \quad \varphi \sim e^{-z/2} \exp\left[\pm \sqrt{k_1^2 + k_2^2} e^z\right]. \quad (7)$$

Теперь обратимся к построению точных решений уравнения во всей области изменения координаты z . Будем искать решения в виде $f(Z) = Z^A e^{BZ} F(Z)$; уравнение (5) дает:

$$Z \frac{d^2 F}{dZ^2} + (2A - 1 + 2BZ) \frac{dF}{dZ} + \left((B^2 - 1)Z - B(1 - 2A) + \frac{A(A - 2) + \varepsilon}{Z} \right) F = 0. \quad (8)$$

При A, B выбранных согласно (далее для определенности выбираем знак «минус» перед корнем в выражении для A ; предполагаем $\varepsilon > 1$)

$$A = 1 - i\sqrt{\varepsilon - 1}, \quad B^2 = 1, \quad (9)$$

уравнение (8) упрощается:

$$Z \frac{d^2 F}{dZ^2} + (2A - 1 + 2BZ) \frac{dF}{dZ} - B(1 - 2A) F = 0. \quad (10)$$

В полученном уравнении сделаем еще одну замену $Z = y/2$:

$$y \frac{d^2 F}{dy^2} + (2A - 1 + By) \frac{dF}{dy} + B\left(A - \frac{1}{2}\right) F = 0. \quad (11)$$

Уравнение (11) при $B = -1$ представляет собой уравнение для вырожденной гипергеометрической функции:

$$y \frac{d^2 Y}{dy^2} + (c - y) \frac{dY}{dy} - aY = 0, \\ c = 2a, \quad a = A - 1/2 = 1/2 - i\sqrt{\varepsilon - 1}, \\ f(Z) = y^{a+1/2} e^{-y/2} Y(y). \quad (12)$$

Будем использовать две пары линейно независимых решений [13]:

$$Y_1 = \Phi(a, 2a, y), \quad Y_2 = y^{1-2a} \Phi(1-a, 2-2a, y)$$

и

$$Y_5 = \Psi(a, 2a, y), \quad Y_7 = e^y \Psi(a, 2a, -y). \quad (13)$$

Эти пары решений связаны линейными соотношениями Куммера [13]

$$Y_5 = \frac{\Gamma(1-2a)}{\Gamma(1-a)} Y_1 + \frac{\Gamma(2a-1)}{\Gamma(a)} Y_2, \\ Y_7 = \frac{\Gamma(1-2a)}{\Gamma(1-a)} Y_1 - \frac{\Gamma(2a-1)}{\Gamma(a)} Y_2, \quad (14a)$$

которые после умножения на $y^{a+1/2} e^{-y/2}$ принимают вид:

$$f_5 = \frac{\Gamma(1-2a)}{\Gamma(1-a)} f_1 + \frac{\Gamma(2a-1)}{\Gamma(a)} f_2, \\ f_7 = \frac{\Gamma(1-2a)}{\Gamma(1-a)} f_1 - \frac{\Gamma(2a-1)}{\Gamma(a)} f_2. \quad (14b)$$

Обращаем внимание, что решения Y_1 и Y_2 описывают при отрицательных $z \longrightarrow -\infty$ волны с асимптотическим поведением (типа плоских волн)

$$z \rightarrow -\infty, (y \rightarrow 0)$$

$$\begin{aligned} f_1 &= y^{a+1/2} = \left(2\sqrt{k_1^2 + k_2^2}\right)^{1-i\sqrt{\varepsilon-1}} e^z e^{-i\sqrt{\varepsilon-1}z}, \\ \varphi_1 &= \left(2\sqrt{k_1^2 + k_2^2}\right)^{1-i\sqrt{\varepsilon-1}} e^{-i\sqrt{\varepsilon-1}z} \end{aligned} \quad (15a)$$

и

$$\begin{aligned} f_2 &= y^{a+1/2} y^{1-2a} = \left(2\sqrt{k_1^2 + k_2^2}\right)^{1+i\sqrt{\varepsilon-1}} e^z e^{+i\sqrt{\varepsilon-1}z}, \\ \varphi_2 &= \left(2\sqrt{k_1^2 + k_2^2}\right)^{1+i\sqrt{\varepsilon-1}} e^{+i\sqrt{\varepsilon-1}z}. \end{aligned} \quad (15b)$$

Следовательно, функция Y_5 (и связанная с ней φ_5) при отрицательных $z \longrightarrow -\infty$ ведет себя как суперпозиция двух плоских волн согласно

$$\begin{aligned} \varphi_5 &= \frac{\Gamma(1-2a)}{\Gamma(1-a)} \left(2\sqrt{k_1^2 + k_2^2}\right)^{1-i\sqrt{\varepsilon-1}} e^{-i\sqrt{\varepsilon-1}z} + \\ &+ \frac{\Gamma(2a-1)}{\Gamma(a)} \left(2\sqrt{k_1^2 + k_2^2}\right)^{1+i\sqrt{\varepsilon-1}} e^{+i\sqrt{\varepsilon-1}z}. \end{aligned} \quad (16)$$

Можно определить коэффициент отражения как квадрат модуля отношения амплитуд в суперпозиции плоских волн:

$$M_- e^{-i\sqrt{\varepsilon-1}z} + M_+ e^{+i\sqrt{\varepsilon-1}z}, \quad R = \left| \frac{M_-}{M_+} \right|^2, \quad (17a)$$

$$R = \left| \frac{\Gamma(1-2a)}{\Gamma(2a-1)} \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(1-a)} \right|^2. \quad (17b)$$

Учтем

$$\begin{aligned} 1-2a &= +2i\sqrt{\varepsilon-1}, & 2a-1 &= -2i\sqrt{\varepsilon-1}, \\ a &= 1/2 - i\sqrt{\varepsilon-1}, & 1-a &= 1/2 + i\sqrt{\varepsilon-1}, \end{aligned} \quad (17c)$$

тогда

$$R = \left| \frac{\Gamma(+2i\sqrt{\varepsilon-1})}{\Gamma(-2i\sqrt{\varepsilon-1})} \right|^2 \left| \frac{\Gamma(1/2 - i\sqrt{\varepsilon-1})}{\Gamma(1/2 + i\sqrt{\varepsilon-1})} \right|^2 \equiv 1. \quad (17d)$$

Отметим специально, что в силу (17с) построенные решения подчиняются условиям

$$f_2 = f_1^*, \quad f_5^* = f_5, \quad f_7^* = -f_7. \quad (18a)$$

Это позволяет, обратившись к выражению для z -компоненты сохраняющегося тока

$$J_z = i(f \partial_z f^* - f^* \partial_z f), \quad (18b)$$

утверждать, что токи решений f_1 и f_2 – ненулевые и противоположны по знаку, а токи решений f_5 и f_7 нулевые

$$J_z^{(2)} = -J_z^{(1)} \neq 0, \quad J_z^{(5)} = 0, \quad J_z^{(7)} = 0. \quad (18c)$$

Найдем поведение Y_5 в области больших y . Применяя известное [13] асимптотическое соотношение $Y_5 = \Psi(a, c, y) \sim y^{-a}$, получим

$$z \rightarrow +\infty, \quad f_5 = y^{a+1/2} e^{-y/2} Y_5 \sim y^{1/2} e^{-y/2} \sim \\ \sim \left(2\sqrt{k_1^2 + k_2^2} e^z \right)^{1/2} \exp\left(-\sqrt{k_1^2 + k_2^2} e^z\right) \longrightarrow \exp^{-e^{+\infty}} = 0. \quad (19)$$

Таким образом, решение f_5 является описанием ожидаемой ситуации: волна падает слева, отражается с вероятностью 1/2 от эффективного барьера; справа за барьером решение резко падает до нуля.

Решение f_7 при $y \longrightarrow +\infty$ стремится к бесконечности

$$f_7 \sim y^{a+1/2} e^{-y/2} e^y y^{-a} = y^{+1/2} e^{+y/2};$$

дать физическую интерпретацию этого решения сложно, однако обращаем внимание, что в силу второго уравнения в (14b) далеко слева это решения также является суперпозиций двух плоских волн.

Довольно легко можно интерпретировать решение типа f_1 . Действительно, далеко справа, учитывая известную [13] асимптотическую формулу $y \rightarrow +\infty$, $\Phi(A, C, y) \sim e^y y^{A-C}$, получаем

$$z \longrightarrow +\infty, \quad f_1 \sim y^{1/2} e^{y/2} \longrightarrow +\infty^\infty;$$

т. е. в области $z \rightarrow +\infty$ это вещественная функция с бесконечно большой плотностью вероятности. Далеко слева это плоская волна, распространяющаяся влево.

Авторы благодарны В.М. Редькову за интерес к работе и полезные советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шапиро И.С. // ДАН СССР. – 1956. – Т. 106. – С. 647.
2. Shapiro, I.S. Expansion of the scattering amplitude in relativistic spherical functions / I.S. Shapiro // Phys. Lett. – 1962. – Vol. 1, № 7. – P. 253–255.
3. Волобуев, И.П. Плоские волны на сфере и некоторые их применения / И.П. Волобуев // ТМФ. – Т. 45, № 3. – С. 421–426.
4. Виленкин, Н.Я. Инвариантные разложения релятивистских амплитуд / Н.Я. Виленкин, Я.А. Смородинский // ЖЭТФ. – 1964. – Т. 46. – С. 1793–1808.
5. Гельфанд, И.М. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений / И.М. Гельфанд, М.И. Граев, Н.Я. Виленкин. – Москва : ФМ, 1962. – 656 с.
6. Ovsyuk, E.M. Shapiro's plane waves in spaces of constant curvature and separation of variables in real and complex coordinates / E.M. Ovsyuk, N.G. Tokarevskaya, V.M. Red'kov // NPCS. – 2009. – Vol. 12, № 1. – P. 1–15.
7. Бычковская, Е.М. О решениях уравнений Максвелла в трехмерном пространстве Лобачевского / Е.М. Бычковская // Весці Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2006. – № 5. – С. 45–48.
8. Bogush, A.A. Analogue of the plane electromagnetic waves in the Lobachevsky space / A.A. Bogush, Yu.A. Kurochkin, V.S. Otchik, E.M. Bychkovskaya // Non-euclidean geometry in modern physics: Proceedings of the International Conference BGL-5, Minsk, October 10-13, 2006 / National Academy of Sciences of Belarus, B.I. Stepanov Institute of Physics; Eds. : Yu. Kurochkin, V. Red'kov. – Minsk, 2006. – P. 111–115.
9. Бычковская, Е.М. О волновых решениях уравнений Максвелла в трехмерном пространстве Лобачевского / Е.М. Бычковская // Современные проблемы физики: сб. науч. тр. конф. – Минск : Институт физики им. Б.И. Степанова НАН Беларуси, 2006. – С. 98–102.

10. Овсиук, Е.М. О решениях уравнений Максвелла в квазидекартовых координатах в пространстве Лобачевского / Е.М. Овсиук, В.М. Редьков // Весці Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2009. – № 4. – 99–105.

11. Курочкин, Ю.А. Решения уравнения Дирака в пространстве Лобачевского / Ю.А. Курочкин, В.С. Отчик // Весці Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2011. – № 2. – С. 31–35.

12. Редьков, В.М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В.М. Редьков. – Минск: Беларус. наука, 2009. – 495 с.

13. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции: в 3 т. / Г. Бейтмен, А. Эрдеи. – 2-е изд. – Москва : Наука, 1973. – Т. 1: Гипергеометрическая функция, функции Лежандра. – 294 с.

E.M. Ovsyuk, O.V. Veko. On Modeling a Potential Barrier in Schrödinger Theory by Geometry of the Lobachevsky Space

In the article the system of exact solutions for Schrödinger equation in the Lobachevsky 3-space is constructed in the system of quasi-cartesian coordinates closely related to horospherical ones. It is shown that the problem posed in Lobachevsky space simulates a situation in the flat space for a quantum-mechanical particle in a 2-dimensional potential barrier smoothly rising to infinity on the right. Reflection coefficient for all states turns out to be equal +1.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 20.09.2011 г.

УДК 537.312.62; 538.945

А. Ф. Ревинский

О МАГНИТОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ В ТОНКИХ ПЛЕНКАХ BiFeO_3

В данной работе представлены данные о природе сосуществования взаимосвязанных спин-поляризованных электрической и магнитной структур в BiFeO_3 . Данные результаты подтверждают, что причиной спонтанной намагниченности в тонких пленках BiFeO_3 является слабый ферромагнетизм.

Введение

Интерес к ферриту висмута BiFeO_3 вызван, с одной стороны, наличием в нем сосуществования упорядоченных магнитной и электрической фаз, благодаря которому открывается уникальная возможность создания принципиально новых элементов памяти в электронных устройствах, а с другой – особым вниманием к физике магнитоэлектрического взаимодействия между указанными выше фазами [1]. Именно в такого рода мультиферроиках можно при помощи электрического поля управлять намагниченностью вещества, и магнитным полем – поляризацией. Тем самым появляется реальная возможность считывания информации с дисков без электрических токов. Исключая при этом джоулево тепло, можно достичь существенного прогресса в направлении миниатюризации электронных схем [2].

Феррит висмута BiFeO_3 имеет уже полувековую историю, т.к. впервые был синтезирован московскими физиками [1] в начале 60-х годов прошлого столетия. Долгое время особого интереса к BiFeO_3 среди исследователей не было, т.к. из-за наличия в нем т.н. спиновой спирали [3] намагниченность поликристаллической керамики и монокристаллов BiFeO_3 находилась в пределе до $1,5 \sim 2 \text{ Гс} \cdot \text{см}^3 / \text{г}$ в зависимости от температуры и внешнего магнитного поля. Малая намагниченность была серьезным барьером на пути практического применения BiFeO_3 .

Всплеск интереса к BiFeO_3 и ко всем магнитоэлектрическим материалам (~ 800 публикаций в год) произошел в 2003 году после работы Ванга и др. [4]. В данном исследовании на тонких пленках BiFeO_3 был зарегистрирован гигантский магнитоэлектрический эффект ($3 \text{ В} / \text{см} \cdot \text{Э}$). При этом остаточная намагниченность при комнатной температуре составляла $\sim 8 \text{ Гс} \cdot \text{см}^3 / \text{г}$.

Нами были синтезированы как объемные, так и наноразмерные образцы феррита висмута BiFeO_3 [5], проведены расчеты распределения электронной плотности, зонной структуры и динамики кристаллической решетки BiFeO_3 [6; 7]. Однако физическая природа взаимосвязи между упорядоченными антиферромагнитной и сегнетоэлектрической фазами в BiFeO_3 до сих пор до конца не выяснена.

Применительно к объемным образцам BiFeO_3 в настоящее время имеется достаточно обширный теоретический материал [8; 9], связанный с теоретическими основами сосуществования т.н. взаимодействия Дзялошинского-Мория [10] с линейным магнитоэлектрическим эффектом. При этом для тонкопленочных материалов BiFeO_3 в литературе представлено достаточно много противоречащих друг другу гипотез [11; 12] относительно природы вышеуказанной большой намагниченности феррита висмута. И практически полностью отсутствуют работы, связанные с выяснением механизма магнитоэлектрической корреляции между антиферромагнитной и сегнетоэлектрической фазами.

В связи с вышесказанным целью настоящей работы является выяснение природы магнитоэлектрического взаимодействия в наноразмерных образцах BiFeO_3 .

Магнетизм в тонких пленках BiFeO_3

В рамках теории функционала электронной плотности (LSDA+U-приближение) нами были проведены расчеты распределения спиновой плотности [13] в BiFeO_3 для пространственной группы $R3c(C_{3V}^6)$. На основании использования полученных карт вычислены значения локализованного на ионе железа Fe^{3+} магнитного момента. Согласно нашим расчетам $\mu(\text{Fe}^{3+}) = 4,2\mu_B$, где μ_B – магнетон Бора.

По нашему мнению основной причиной относительно большой намагниченности наноразмерных образцов BiFeO_3 является нарушение коллинеарности магнитных подрешеток ионов железа (рисунок 1).

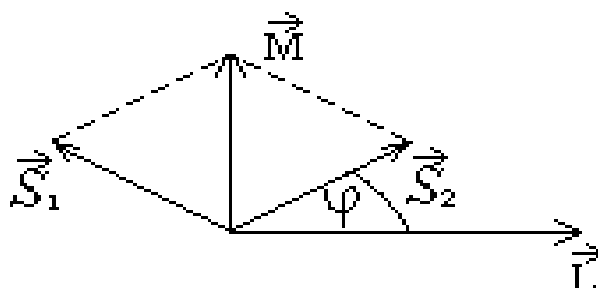


Рисунок 1 – Нарушение коллинеарности магнитных подрешеток ионов железа Fe^{3+} в феррите висмута

Здесь φ – угол схода между спинами $\vec{S}_1$ и $\vec{S}_2$ ионов Fe^{3+} для двух подрешеток соответственно, $\vec{M}$ – результирующий магнитный момент $\vec{M} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$, $\vec{L}$ – вектор антиферромагнетизма $\vec{L} = \vec{S}_1 - \vec{S}_2$.

Известно [8; 9], что подобного рода слабый ферромагнетизм допускается только определенными классами магнитной симметрии. Для симметрии группы $R3c$ существование слабого ферромагнетизма допустимо, т.к. для BiFeO_3 ($R3c$) центр инверсии отсутствует как в кристаллической, так и в магнитной структуре. При этом возникает вопрос о физических причинах схода магнитных подрешеток.

Рассмотрим некоторые механизмы нарушения коллинеарности и возникновения слабого ферромагнетизма.

Вначале проведем оценочные расчеты влияния взаимодействия Дзялошинского-Мория [10] на появление слабого ферромагнетизма. Антиферромагнитное упорядочение G -типа ионов Fe^{3+} в решетке объемных образцов BiFeO_3 осуществляется за счет косвенного обменного взаимодействия между ионами железа Fe^{3+} посредством иона кислорода O^{2-} (рисунок 2).

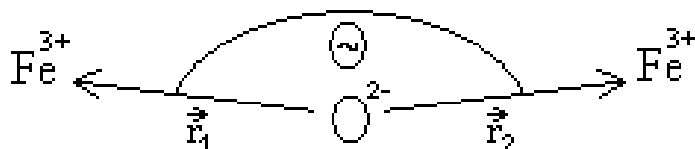


Рисунок 2 – Схема обменного взаимодействия в структуре $R3c$

Здесь указанные ионы взаимодействуют приблизительно под углом $\theta \sim 180^\circ$. Благодаря релятивистской спин-орбитальной добавке к волновым функциям, в указанном косвенном обмене появляется дополнительное слагаемое [14]:

$$(d_1 + d_2 \cos \theta)(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)(\vec{S}_1 \times \vec{S}_2). \quad (1)$$

Здесь d_1 и d_2 – постоянные, ответственные за спин-орбитальное и обменное взаимодействие. Из (1) видно, что взаимодействие Дзялошинского-Мория является своего рода гибридом обменного взаимодействия и релятивистского спин-орбитального. Оценочные расчеты [15] показывают, что взаимодействие (1) дает угол скоса $\varphi \sim 1^\circ$. При этом для достижения наблюдаемой на опыте намагниченности $\sim 8 \text{ Å} \cdot \tilde{n} \cdot \tilde{n}^3 / \tilde{a}$ необходим угол скоса $\varphi \sim 4^\circ$ при $S_1(Fe^{3+}) = 4,2 \mu_B$ (рисунок 1). Следует отметить, что нарушение коллинеарности в указанном пределе является достаточно существенным искажением магнитной структуры и возможно, по всей видимости, только при более сильном взаимодействии, чем взаимодействие Дзялошинского-Мория.

Рассмотрим далее второй возможный вид взаимодействия: магнитоэлектрическое. Известно [3; 4], что объемные и наноразмерные структуры BiFeO_3 помимо антиферромагнитного упорядочения обладают дополнительно сегнетоэлектрическим упорядочением. При этом последнее определяется перераспределением электронной плотности [16]. Отличительной особенностью сегнетомагнетиков является то, что в них существуют спонтанные магнитоэлектрические эффекты. Сегнетоэлектрик BiFeO_3 является сегнетоэлектриком типа смещения. А именно, магнитные ионы Fe^{3+} участвуют в сегнетоэлектрическом упорядочении, смещаясь из октаэдрических позиций.

В рамках теории магнитоэлектрического взаимодействия основной причиной указанного смещения ионов является зеемановское расщепление энергетических уровней Fe^{3+} при обменном взаимодействии (рисунок 2). Данное расщепление посредством электрон-фононного взаимодействия смещает ионы железа, порождая тем самым сегнетоэлектрическую фазу. Гамильтониан магнитоэлектрического взаимодействия можно записать следующим образом [16]:

$$\hat{H}_{M\Xi} = \sum_{i,k} \left[V_{ik}^j (u_i^j - u_k^j) + \frac{1}{2} V_{ik}^{jj'} (u_i^j - u_k^j) (u_i^{j'} - u_k^{j'}) \right] \hat{S}_i^j \hat{S}_k^{j'}, \quad (2)$$

где u_i^j – j -тая компонента смещения i -го иона от положения равновесия (поляризация и намагниченность равны нулю), V_{ik}^j , $V_{ik}^{jj'}$ – первые и вторые производные от обменных интегралов по расстоянию между ионами.

Используя гамильтониан (2), можно провести оценочные расчеты плотности свободной энергии, обусловленной данным взаимодействием для двух магнитных под решеток [16]:

$$f_{M\Xi} = - \left(\Gamma_{12}^j \cdot p^j + \frac{1}{2} \gamma_{12}^{jj'} p^j p^{j'} \right) \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2. \quad (3)$$

Здесь первое слагаемое обусловлено наличием линейного магнитоэлектрического эффекта, второе – квадратичного.

В случае изотропной модели кристалла усредненное значение $\gamma \approx 10^{-7} \frac{\text{см}^{-2}}{\text{дн}}$ [16].

Согласно утверждениям авторов [8; 9] именно магнитоэлектрическое взаимодействие является основной причиной нарушения коллинеарности магнитных подрешеток Fe^{3+} в объемных образцах BiFeO_3 . Следует отметить, что возможной причиной появления слабого ферромагнетизма в тонких пленках BiFeO_3 является также наличие в них ионов железа разной валентности (Fe^{2+} и Fe^{3+}) [12].

Согласно нашим рентгеновским измерениям кристаллическая структура наноразмерных образцов BiFeO_3 является моноклинной. При этом указанная структура относится к пространственной группе $C_{2h}^2(P2_1/m)$ [17]. Рассмотрим характеры неприводимых представлений данной группы [18]:

Таблица – Характеры неприводимых представлений пространственной группы C_{2h}^2

Операции симметрии Неприводимые представления	(x, y, z) ↓ (x, y, z)	(x, y, z) ↓ $(-x, -y, z)$	(x, y, z) ↓ $(-x, y, z)$	(x, y, z) ↓ $(x, -y, z)$
Γ_1	1	1	1	1
Γ_2	1	1	-1	-1
Γ_3	1	-1	1	-1
Γ_4	1	-1	-1	1

Из таблицы видно, что все четыре неприводимые представления $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ и Γ_4 группы C_{2h}^2 являются одномерными. Для сравнения дополнительно рассмотрим группу $R3c$. Для объемных образцов BiFeO_3 (пространственная группа $R3c$) четыре неприводимые представления являются одномерными, а четыре двухмерными [8]. Магнитная симметрия $R3c$ разрешает сосуществование линейного магнитоэлектрического эффекта и спонтанной намагниченности в виде слабого ферромагнетизма. Тензор линейного магнитоэлектрического эффекта связывает вектор поляризации, индуцированный магнитным полем, с вектором магнитного поля [8]:

$$P_i = \alpha_{ij} H_j, \quad (4)$$

где α_{ij} – тензор магнитоэлектрического взаимодействия.

Вместе с тем, как видно из таблицы 1 в случае моноклинной симметрии для пространственной группы C_{2h}^2 отсутствует операция инверсии $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z)$. Именно отсутствием центра инверсии объясняется [8] наличие в объемных образцах BiFeO_3 сосуществования слабого ферромагнетизма и магнитоэлектрического эффекта. Отметим, что в теории антиферромагнетизма доказана теорема о невозможности сосуществования слабого ферромагнетизма и линейного магнитоэлектрического эффекта [19]. Однако данная теорема применима только к кристаллическим структурам, пространственная группа которых содержит операцию пространственной инверсии.

На основе анализа вышесказанного можно утверждать, что в наноразмерных структурах BiFeO_3 причиной намагниченности является все-таки слабый ферромагнетизм. Дополнительным подтверждением данному утверждению могут служить недавно проведенные измерения магнитной структуры тонких пленок BiFeO_3 [20]. Согласно данным измерениям только в случае моноклинной кристаллической структуры наблюдается на опыте магнитное упорядочение G -типа, когда ион Fe^{3+} со спином «вверх» окружен шестью ионами Fe^{3+} со спином «вниз». Остается при этом открытым вопрос о физических причинах нарушения коллинарности магнитных подрешеток в случае тонких пленок BiFeO_3 и, как следствие, появление слабого спонтанного магнитного момента (рисунок 1).

По нашему мнению существенный вклад во взаимодействие, разрушающее коллинеарность магнитных подрешеток железа G -типа в случае наноразмерных структур вносит взаимодействие тонкой пленки с подложкой. Именно силы поверхностного натяжения между пленкой и подложкой во многом определяют физические свойства наноразмерных материалов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Веневцев, Ю.Н. Сегнетомагнетики / Ю.Н. Веневцев, В.В. Гатулин, В.Н. Любимов. – М. : Наука, 1982. – 224 с.
2. Макоед, И.И. Получение и физические свойства мультиферроиков : монография / И.И. Макоед. – Брест : БрГУ им. А.С. Пушкина. – Брест : БрГУ, 2009. – 181 с.
3. Catalan, G. Physics and application of bismuth ferrite / G. Catalan, J.F. Scott. – Adv. Materials. – 2009. – Vol. 21. P. 2463–2485.
4. Wang, J. Epitaxial BiFeO_3 multiferroic thin film heterostructures / J. Wang, J.B. Neaton, H. Zhang [et. al.]. – Science. – 2003. – Vol. 299. – P.1719–1721.
5. Ревинский, А.Ф. Магнитные свойства и распределение электронной плотности в системе $\text{La}_x\text{Bi}_{1-x}\text{FeO}_3$ / А.Ф. Ревинский, И.И. Макоед [и др.] // Неорганические материалы. – 2007. – Т. 43. – № 8. – С. 1–6.
6. Ravinski, A.F. Preparation and physical properties of multiferroics $\text{La}_x\text{Bi}_{1-x}\text{FeO}_3$ / A.F. Ravinski, I.I. Makoeed [et. al.] // Вучоня записки Брэсцкага дзяржаўнага ўн-та імя А.С. Пушкіна. – 2005. – Т. 1. – Ч. 2. – С. 74–81.
7. Ревинский, А.Ф. О сегнетоэлектрической неустойчивости феррита висмута / А.Ф. Ревинский, В.В. Тригук, И.И. Макоед // Веснік Брэсцкага ўн-та. Сер. 4. – 2010. – № 1. – С. 28–36.
8. Кадомцева, А.М. Нарушенная четность относительно инверсии пространства и времени и магнитоэлектрические взаимодействия в антиферромагнетиках / А.М. Кадомцева, А.К. Звездин, Ю.Ф. Попов [и др.]. – Письма в ЖЭТФ. – 2004. – Т. 79. – Вып. 11. – С. 705–716.
9. Звездин, А.К. Неоднородное магнитоэлектрическое взаимодействие в мультиферроиках и вызванные им новые физические эффекты / А.К. Звездин, А.П. Пятаков. – УФН. – 2009. – Т. 179. – № 8. – С. 897–904.
10. Ландау, Л.Д. Электродинамика сплошных сред / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М. : Наука, 1982. – 620 с.
11. Ravindran, P. Origin of magnetoelectric behavior in BiFeO_3 / P. Ravindran, R. Vidya, A. Kjekslus [et. al.]. – Phys. Rev. – 2006. – Vol. B–74. – P. 224412–224430.
12. Chang, J. A possible origin of ferromagnetism in epitaxial BiFeO_3 thin films / J. Chang, H.M. Jang, S.K. Kim // J. Magn. – 2006. – Vol. 11. – P. 1–6.

13. Ревинский, А.Ф. Распределение спиновой плотности в мультиферроиках системы $\text{La}_x\text{Bi}_{1-x}\text{FeO}_3$ / А.Ф. Ревинский, И.И. Макоед, К. Кокошкевич, В.В. Тригук [и др.] // Труды I межд. Симпозиума «Multiferroics–2007». – Ростов-н/Д, пос. Лоо, Россия. – 2007. – С. 194–197.
14. Туров, Е.А. Симметрия и физические свойства антиферромагнетиков / Е.А. Туров, А.В. Колганов [и др.]. – М. : Физматлит, 2001. – 560 с.
15. Тикадзуми, С. Физика ферромагнетизма / С. Тикадзуми. – М. : Мир, 1983. – 302 с.
16. Смоленский, Г.А. Сегнетомагнетики / Г.А. Смоленский, И.Е. Чупис. – УФН. – 1982. – Т. 137. – Вып. 3. – С. 415–448.
17. Ravinski, A.F. Weak ferromagnetism in $\text{Bi}_{1-x}\text{La}_x\text{FeO}_3$ thin films / A.F. Ravinski, I.I. Makoe, V.V. Lazenka, V.V. Moshchalkov. – In press.
18. Ковалев, О.В. Неприводимые и индуцированные представления и копредставления федоровских групп / О.В. Ковалев. – М. : Наука, 1986. – 366 с.
19. Туров, Е.А. Можем ли существовать в антиферромагнетиках магнитоэлектрический эффект со слабым ферромагнетизмом и пьезомагнетизмом? / Е.А. Туров. – УФН. – 1994. – Т. 164. – № 3. – С. 325–332.
20. Bea, H. Unraveling the origin of the controversial magnetic properties of BiFeO_3 thin films / H. Bea, M. Bibes, E. Jacquet [et. al.] // Cond. – mat. – 2006. – Vol. 1. – № 0606441. – P. 1–5.

A.F. Ravinski. On the Magnetoelectric Interaction in BiFeO_3 thin Films

In this paper we report the materials on the origin of the coexistence of interrelated electric and magnetic spin-polarized structures in BiFeO_3 . These results suggest that origin of the spontaneous magnetization in BiFeO_3 thin films is weak ferromagnetism.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 24.10.2011 г.

УДК 524.3-735+535.3+537.6

А.И. Серый

О КОМПТОНОВСКОМ ВРАЩЕНИИ ПРИ ДВИЖЕНИИ ФОТОНОВ ПОД ПРОИЗВОЛЬНЫМ УГЛОМ К ЛИНИЯМ ИНДУКЦИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

В релятивистском подходе с использованием электронного пропагатора вычислена разность амплитуд комптоновского рассеяния вперед в квантующем магнитном поле для электрона в основном состоянии и циркулярно поляризованных движущихся под произвольным углом к магнитному полю рентгеновских фотонов с противоположными спиральностями. Получена формула для вычисления угла комптоновского вращения плоскости линейной поляризации фотонов на единицу длины пути в электронном газе с высокой степенью спиновой поляризации электронов.

Введение

Исследования в данной работе проведены по предложению В.Г. Барышевского и В.В. Тихомирова. Эффект комптоновского вращения плоскости поляризации жестких рентгеновских (мягких гамма-) фотонов в отсутствие магнитного поля был теоретически предсказан В.Г. Барышевским и В.Л. Любошицем [1, с. 89] в 1965 г., а в начале 1970-х гг. экспериментально проверен на железе, где степень поляризации электронов не превосходила 8 %, причем наибольшее вращение наблюдалось в жестком рентгеновском диапазоне [1, с. 95]. При наличии сверхсильного магнитного поля (недостижимого пока в земных условиях) степень спиновой поляризации электронов должна быть близкой к 100 %. При этом, однако, появляется возможность резонансного поглощения фотона при переходах электрона между уровнями Ландау. Но при $\hbar\omega \gg 2\mu_B V$ либо $\hbar\omega \ll 2\mu_B V$ (μ_B – магнетон Бора) таким поглощением можно пренебречь. Жесткий рентгеновский и мягкий гамма-диапазон (0,1–5 МэВ) удовлетворяют 2-му случаю при магнитных полях у полюсов магнетаров ($\sim 10^{14} - 10^{15}$ Гс). При этом почти все электроны находятся на нулевом уровне Ландау. Исследуемый эффект может оказывать влияние на спектры излучения сверхплотных замагниченных астрофизических объектов.

Рассмотрим фотон, движущийся в электронном газе под произвольным углом к силовым линиям магнитного поля при указанных выше условиях (частный случай движения параллельно магнитному полю был рассмотрен в [2, с. 41–46]). Рассмотрим амплитуды комптоновского рассеяния для круговой поляризации, которые будут использованы при вычислении угла комптоновского поворота плоскости поляризации фотона.

Применяемый подход использовался для вычисления резонансного сечения эффекта Комптона в магнитном поле [3, с. 323]. В ряде зарубежных публикаций (например, таких, как [4; 5]) либо использовался нерелятивистский подход, либо матричный элемент в общем виде не вычислялся до конца, либо также рассматривался случай резонансного рассеяния. При этом, как и в [3], отмечалось, что в общем виде точное интегрирование до конца произвести не удастся. Работ с анализом случая круговой поляризации фотона и упоминанием о комптоновском вращении обнаружить не удалось.

Характеристики фотона, электрона и внешнего магнитного поля

Для постоянного однородного магнитного поля, направленного по оси z , выберем калибровку векторного потенциала [3, с. 320]:

$$A_0 = A_x = A_z = 0, A_y = Bx. \quad (1)$$

Пусть p_z – импульс электрона по оси z , m – его масса. Запишем выражение для энергии с учетом квантования Ландау, а волновые функции выразим через биспиноры u_n и функции Эрмита H_n [3, с. 320; 6, с. 120]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= \sqrt{\tilde{m}^2 c^4 + p_z^2 c^2}, \quad \Psi(x) = A_n [i(2eB\hbar)^{1/2} U_n(x) + c^2(m + \sigma\tilde{m}) U_{n-1}(x) \gamma_1] u_n, \\ U_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) H_n(x), \quad H_n(x) = (-1)^n \exp(x^2) \frac{d^n}{dx^n} \exp(-x^2), \quad n \geq 0, \\ A_0 &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar c \varepsilon_0 (\varepsilon_0 + mc^2)} \sqrt{eB\hbar}} \quad \text{при } \sigma = -1, \quad A_n = \sqrt{\frac{eB}{\hbar c} \frac{\varepsilon_n + \sigma\tilde{m}c^2}{4c^4 p_z^2 \tilde{m} \varepsilon_n (\tilde{m}c^2 + \sigma\tilde{m}c^2)}}, \\ u_n &= \begin{bmatrix} 0 & \sigma\tilde{m}c^2 - \varepsilon_n & 0 & p_z c \end{bmatrix}^T, \quad \tilde{m}c^2 = \sqrt{m^2 c^4 + 2nBe\hbar}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь и далее T означает транспонирование. Матрицы Дирака γ_k ($k = 0, 1, 2, 3$) берутся в стандартном представлении. При построении электронного пропагатора будем использовать матрицы [3, с. 320] (i – мнимая единица):

$$\beta_1 = \frac{1}{2}(1 + i\gamma_2\gamma_1), \quad \beta_2 = \frac{1}{2}(1 - i\gamma_2\gamma_1). \quad (3)$$

Не нарушая общности, можно выбрать систему координат, в которой волновой вектор фотона $\vec{k}$ лежит в одной из координатных плоскостей. Пусть θ – угол между $\vec{k}$ и $\vec{B}$. В силу законов сохранения, при упругом рассеянии вперед $\vec{k}$ (и частота фотона ω), а также импульс электрона $\vec{p}$ не меняются, и тогда четырехмерный импульс начального и конечного фотона запишем двумя способами:

$$\hbar k = \left(\frac{\hbar\omega}{c}, 0, k_y, k_z\right) \Rightarrow k_y = \frac{\hbar\omega}{c} \sin\theta, k_z = \frac{\hbar\omega}{c} \cos\theta, \quad (4)$$

$$\hbar k = \left(\frac{\hbar\omega}{c}, k_x, 0, k_z\right) \Rightarrow k_x = \frac{\hbar\omega}{c} \sin\theta, k_z = \frac{\hbar\omega}{c} \cos\theta. \quad (5)$$

Как и в отсутствие магнитного поля, импульсы виртуального промежуточного электрона для R - и S -процесса выражаются (с учетом (4), (5)) по формулам [3, с. 320]:

$$\begin{aligned} \vec{g} &= \vec{p} + \hbar\vec{k} \Rightarrow cg_0 = \varepsilon_0 + \hbar\omega, cg_2 = p_y c + \hbar\omega \sin\theta, cg_3 = p_z c + \hbar\omega \cos\theta, \\ \vec{f} &= \vec{p} - \hbar\vec{k} \Rightarrow cf_0 = \varepsilon_0 - \hbar\omega, cf_2 = p_y c - \hbar\omega \sin\theta, cf_3 = p_z c - \hbar\omega \cos\theta. \end{aligned} \quad (6)$$

Согласно [3, с. 320–321], нам также понадобятся переобозначения координат (p_y – y -компонента импульса начального и конечного электрона; $k = 1, 2$):

$$L(x_k, p) = \sqrt{\frac{eB}{\hbar c}} \left(x_k + \frac{cp}{eB}\right), \xi_k = L(x_k, p_y), \rho_k = L(x_k, g_2), \eta_k = L(x_k, f_2). \quad (7)$$

В состав электронного пропагатора входят конструкции вида [3, с. 321]:

$$G_B(\lambda, x) = \sqrt{\frac{eB}{\hbar c}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hbar c^2}{c^2 \lambda_0^2 - \varepsilon_n^2 - i \cdot 0} (U_n(x_1) U_n(x_2) (\gamma_0 \lambda_0 - \gamma_3 \lambda_3 + mc) \beta_1 + \\ + (1 - \delta_{0n}) U_{n-1}(x_1) U_{n-1}(x_2) (\gamma_0 \lambda_0 - \gamma_3 \lambda_3 + mc) \beta_2 + \\ + (1 - \delta_{0n}) i \sqrt{\frac{2neB\hbar}{c}} (U_{n-1}(x_1) U_n(x_2) \gamma_1 \beta_1 - U_n(x_1) U_{n-1}(x_2) \beta_1 \gamma_1). \quad (8)$$

Преобразования матричных элементов

В [3, с. 321] в матричном элементе процесса интегрирование не завершено:

$$\Omega = \frac{-i\alpha(2\pi\hbar)^4 c e_\mu e_\nu'^*}{\hbar V S_0 \sqrt{\omega \omega'}} \delta^3(\vec{p} + \hbar \vec{k} - \vec{p}' - \hbar \vec{k}') \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} dx_1 dx_2 \bar{\Psi}(\xi_1) Q_{\mu\nu} \Psi(\xi_2), \omega = \omega'. \quad (9)$$

Здесь $\alpha = e^2 / \hbar c$; $\omega, \omega', e_\mu, e_\nu'$ – частота, а также компоненты вектора поляризации начального и конечного фотонов соответственно, V – нормировочный объём для фотона, S_0 – нормировочная площадь для электрона в плоскости (xy). Кроме того, в силу законов сохранения при рассеянии вперед сделаны упрощения (т.к. при различии между составляющими начального и конечного импульса электрона по оси y вместо ξ_2 в [3, с. 321] использовалась обобщенная координата, содержащая p'_y вместо p_y); δ -функция включает в себя y -, z - и t -компоненты. Общее выражение для $Q_{\mu\nu}$, согласно [3, с. 321], при упругом рассеянии на нулевой угол имеет вид (с учетом (6) – (8)):

$$Q_{\mu\nu} = \exp(ik_x(x_2 - x_1)) \gamma_\nu G_B(g, \rho) \gamma_\mu + \exp(ik_x(x_1 - x_2)) \gamma_\mu G_B(f, \eta) \gamma_\nu. \quad (10)$$

Из (6), (7) видно, что первое слагаемое в (10) соответствует R -процессу, второе – S -процессу. Подставляя (10) при $\mu, \nu = \overline{1, 2}$ в (9), можно показать, что это даст ноль при свертке u_0 (2) с комбинациями матриц Дирака в (8), в состав которых не входит β_2 (3). При других сочетаниях μ, ν есть отличные от нуля свертки с комбинациями матриц $\beta_1 \gamma_1$ и $\gamma_1 \beta_1$, но они взаимно уничтожаются либо из-за противоположных знаков в (8), либо при вычитании в (13). Для слагаемых, содержащих β_2 , учтем, что

$$\gamma_1 \zeta \gamma_2 = -\gamma_2 \zeta \gamma_1, \zeta = \gamma_0 \beta_2, \gamma_3 \beta_2, \beta_2. \quad (11)$$

При выборе формул (4) в (10) исчезают мнимые экспоненты, а при выборе (5), согласно (6), (7), $\rho_k = \eta_k = \xi_k, k = \overline{1, 2}$. Т.е. интегрировать в (9) можно по-разному, в каждом случае со своими упрощениями. Приведем рассуждения для первого случая, т.е. когда фотон движется в плоскости (yz) (во втором конечный результат такой же).

В случае чистого состояния (т.е. с определенным импульсом и поляризацией) [7, с. 44] фотон полностью поляризован перпендикулярно направлению распространения [7, с. 47]. При записи компонент вектора поляризации для кругового случая имеет место некоторый произвол (сравни [1, с. 90; 7, с. 43; 8, с. 168]). Выбирая правую (+) или левую (–) круговую поляризацию и руководствуясь общими соображениями [9, с. 163], согласно [8, с. 168], запишем (в 3-мерной форме нулевая компонента опускается):

$$e_{(\pm)} = \frac{1}{\sqrt{2}} [0 \mp i \cos \theta \quad -\sin \theta]^T. \quad (12)$$

Подставляя (12) в (9), с учетом (11) найдем разность матричных элементов:

$$\frac{\Omega_{(+)} - \Omega_{(-)}}{2c\alpha(2\pi\hbar)^4} = \frac{\delta^3(\vec{p} + \hbar\vec{k} - \vec{p}' - \hbar\vec{k}') \cos \theta}{\hbar V S_0 \omega} \chi, \quad \chi = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 dx_2 \bar{\Psi}(\xi_1) \tilde{Q}_{21} \Psi(\xi_2). \quad (13)$$

Здесь $\tilde{Q}_{21}$ отличается от Q_{21} тем, что в (8) (при подстановке в (10)) оставлены только слагаемые, содержащие β_2 . Для основного состояния начального и конечного электрона выражения для подынтегральных волновых функций в (13) берутся из (2) при $n = 0$. Полагая в (10) $k_x = 0$, с учетом (8) и (11) распишем интеграл в (13):

$$\begin{aligned} \chi &= cA_0^2 (\hbar c B e)^{3/2} \sum_{n=1}^{\infty} (J_n(g) I_{n-1}^2(\rho) \Lambda(g) - J_n(f) I_{n-1}^2(\eta) \Lambda(f)), \\ J_n(\lambda) &= (c^2 \lambda_0^2 - \varepsilon_n^2 - i \cdot 0)^{-1}, \quad \Lambda(\lambda) = \Gamma_0 \lambda_0 - \Gamma_3 \lambda_3 + \Gamma m c, \\ \Gamma_0 &= \bar{u}_0 \gamma_1 \gamma_0 \beta_2 \gamma_2 u_0 = -2i \varepsilon_0 (m c^2 + \varepsilon_0), \quad \Gamma_3 = \bar{u}_0 \gamma_1 \gamma_3 \beta_2 \gamma_2 u_0 = -2i p_z c (m c^2 + \varepsilon_0), \\ \Gamma &= \bar{u}_0 \gamma_1 \beta_2 \gamma_2 u_0 = 2i m c^2 (m c^2 + \varepsilon_0). \end{aligned} \quad (14)$$

Для вычисления оставшихся интегралов введем обозначения:

$$\tau = \sqrt{\frac{Be}{\hbar c}} \left(x_k + \frac{c p_y}{eB} \right) + \phi, \quad \phi = \frac{\hbar \omega \sin \theta}{\sqrt{\hbar c B e}}, \quad k = \overline{1, 2}. \quad (16)$$

Учитывая (2), (6) и (7), путем несложных преобразований получаем:

$$\begin{aligned} I_{n-1}(\rho) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\xi_k^2) U_{n-1}(\rho_k) dx_k = \sqrt{\frac{\hbar c}{2Be}} \exp\left(-\frac{\phi^2}{2}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\tau^2 + \phi \tau) H_{n-1}(\tau) d\tau = \\ &= \sqrt{\frac{\hbar c}{2Be}} \phi^{n-1} \exp\left(-\frac{\phi^2}{2}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\tau^2 + \phi \tau) d\tau = \sqrt{\frac{\pi \hbar c}{2Be}} \phi^{n-1} \exp\left(-\frac{\phi^2}{4}\right). \end{aligned} \quad (17)$$

При вычислении интеграла $I_{n-1}(\eta)$ необходимо взять ϕ с противоположным знаком, но с учетом (17) при возведении в квадрат конечный результат не изменится:

$$I_{n-1}^2(\rho) = I_{n-1}^2(\eta) = \frac{\pi \hbar c}{2Be} \phi^{2n-2} \exp\left(-\frac{\phi^2}{2}\right). \quad (18)$$

Вычисление угла поворота плоскости линейной поляризации

Запишем формулу для угла комптоновского поворота плоскости линейной поляризации жесткого рентгеновского фотона на единицу длины пути [1, с. 91]:

$$\frac{d\phi}{dl} = \frac{2\pi n_e c}{\omega} (\vec{q} \cdot \vec{n}) \operatorname{Re} W_2(\omega), \quad (19)$$

где n_e – концентрация электронов, $\vec{q}$ – вектор их спиновой поляризации, ω – частота фотона, $\vec{n} = \vec{k}/|\vec{k}|$. Наша задача сводится к нахождению $ReW_2(\omega)$.

Обозначая через F амплитуду комптоновского рассеяния вперед, запишем соотношения для случаев правой (+) и левой (–) круговой поляризации фотона [1, с. 90]:

$$F_{(\pm)} = W_1(\omega) \mp W_2(\omega)(\vec{p} \cdot \vec{n}), 2 \operatorname{Re} W_2(\omega)(\vec{q} \cdot \vec{n}) = \operatorname{Re}(F_{(-)} - F_{(+)}) \equiv 2\tilde{W}_2(\omega). \quad (20)$$

Остается установить связь между $F_{(\pm)}$ в (20) и $\Omega_{(\pm)}$ в (9), (13). В разных источниках одни и те же величины обозначаются по-разному, в чем можно убедиться, сопоставляя, например, формулы в [1, с. 15; 7, с. 314] и [1, с. 24; 7, с. 315], где присутствует одна и та же амплитуда, в роли которой в нашем случае может выступать F . С учетом этого обстоятельства, используя формулы в [7, с. 281, 283, 314], запишем аналог выражения (9) в отсутствие магнитного поля:

$$\Omega = 2\pi\varepsilon \frac{i(2\pi\hbar)^4 c\hbar F}{V^2 \sqrt{\varepsilon_0 \hbar \omega \varepsilon'_0 \hbar \omega'}} \delta^3(\vec{p} + \hbar\vec{k} - \vec{p}' - \hbar\vec{k}') \delta(p_x + \hbar k_x - p'_x - \hbar k'_x). \quad (21)$$

При этом ε – полная энергия в системе центра масс, ε'_0 – энергия конечного электрона. При этом в нашем случае, согласно (2), с учетом законов сохранения

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \hbar\omega, \varepsilon_0 = (m^2 c^4 + p_z^2 c^2)^{1/2} = \varepsilon'_0, \omega' = \omega. \quad (22)$$

Поскольку из (21) можно выразить F через Ω , то в присутствии магнитного поля выражение для F меняется, поскольку в левую часть (21) подставляется правая часть (9). Сделаем в (21) для x -компоненты δ -функции замену по аналогии с [7, с. 282]:

$$\delta(p_x + \hbar k_x - p'_x - \hbar k'_x) \rightarrow \frac{L_0}{2\pi\hbar} = \frac{V}{2\pi\hbar S_0}. \quad (23)$$

После этого с учетом (13) и (20) получаем:

$$\begin{aligned} \tilde{W}_2(\omega) &= \frac{\pi\hbar c^2 \alpha \cos \theta}{2(\varepsilon_0 + mc^2)(\varepsilon_0 + \hbar\omega)} \exp\left(-\frac{\hbar\omega^2 \sin^2 \theta}{2cBe}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\hbar\omega^2 \sin^2 \theta}{cBe}\right)^{n-1} (\Xi_n(g) - \Xi_n(f)), \\ \Xi_n(\lambda) &= \frac{\lambda_0 \varepsilon_0 (mc^2 + \varepsilon_0) - \lambda_3 p_z c (mc^2 + \varepsilon_0) - m^2 c^3 (mc^2 + \varepsilon_0)}{c^2 \lambda_0^2 - \varepsilon_n^2 - i \cdot 0}. \end{aligned} \quad (24)$$

При движении фотона параллельно силовым линиям магнитного поля $\theta = 0$, и тогда косинус и экспонента в (24) заменяются на единицу, а в сумме остается одно слагаемое ($n = 1$), что согласуется с результатом, полученным в [2, с. 45]. В дальнейшем предполагается вычисление бесконечного ряда и усреднение по импульсу p_z . Кроме того, открытым остается вопрос о конкуренции данного эффекта с расщеплением и слиянием фотонов в сверхсильных магнитных полях [7, с. 637–643; 10, с. 283–284].

Заключение

В релятивистском подходе в рамках квантовой электродинамики вычислена разность амплитуд комптоновского рассеяния вперед в сверхсильном магнитном поле для электрона в основном состоянии и циркулярно поляризованных движущихся под про-

извольным углом к силовым линиям магнитного поля жестких рентгеновских фотонов с противоположными спиральностями. Получена соответствующая формула для вычисления угла комптоновского вращения плоскости поляризации фотонов на единицу длины пути в электронном газе с высокой степенью поляризации электронов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барышевский, В.Г. Ядерная оптика поляризованных сред / В.Г. Барышевский. – М. : Энергоатомиздат, 1995. – 320 с.
2. Серый, А.И. К вопросу о комптоновском вращении плоскости поляризации рентгеновских фотонов в магнитном поле. / А.И. Серый // Веснік Брэсцкага ўн-та. Сер. 4 «Фізіка. Матэматыка» – 2011. – № 1. – С. 41–46.
3. Фомин, П.И. Резонансное комптоновское рассеяние во внешнем магнитном поле / П.И. Фомин, Р.И. Холодов // ЖЭТФ. – 2000. – Т.117, вып. 2. – С. 319–325.
4. Daugherty, J.K. Compton Scattering in Strong Magnetic Fields / J.K. Daugherty, A.K. Harding // The Astrophysical Journal. – 1986. – Vol. 309. – P. 362–371.
5. Bussard, R.W. One- and Two-Photon Compton Scattering in Strong Magnetic Fields / R.W. Bussard, S.B. Alexander, P. Meszaros // Phys. Rev. D – 1986. – Vol 34, № 2. – P. 440–451.
6. Русак, В.Н. Математическая физика / В.Н. Русак // Мн. : Дизайн ПРО, 1998. – 208 с.
7. Берестецкий, В.Б. Квантовая электродинамика (Серия «Теоретическая физика», том IV) / В.Б. Берестецкий, Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. – М. : Наука, 1980. – 704 с.
8. Andreev, V.V. Invariant amplitudes of real Compton scattering / V.V. Andreev, A.M. Seytliyev, A.A. Yuchko // Actual Problems of Microworld Physics: in 2 Vol. : Proceedings of International School-Seminar, Gomel, Belarus, July 15–26, 2009 – Dubna, 2011. – Vol. 2. – 189 p. – P. 167 – 172.
9. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика: учеб. пособ. для вузов. В 10 т. Т. II. Теория поля. – 8-е изд., стереот. / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 536 с.
10. Thompson, C. The soft gamma repeaters as very strong magnetized neutron stars – I. Radiative mechanism for outbursts / C. Thompson and R.C. Duncan // Mon. Nat. R. Astron. Soc. – 1995. – 275. – P. 255–300.

A.I. Sery. On Compton Rotation at the Motion of Photons at Arbitrary Angle to Magnetic Field Strength Lines

In relativistic approach using electronic propagator the difference of Compton forward scattering amplitudes in quantizing magnetic field is calculated for electron in the ground state and circularly polarized hard X-photons moving at arbitrary angle to magnetic field with opposite helicities. A formula is obtained for the calculation of Compton rotation angle of the plane of linear polarization of photons per unit path in electron gas with high degree of spin polarization of electrons.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 21.10.2011 г.

УДК 512.542

Е.Н. Бородич, Р.В. Бородич, М.В. Селькин

О ВЛИЯНИИ ИНДЕКСОВ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП НА ИХ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ

В работе исследуются пересечения $\mathfrak{Z}$ -абнормальных максимальных подгрупп с ограничениями на их индексы, выделяемые подгрупповым функтором.

Введение

Все рассматриваемые в статье группы предполагаются конечными. Одно из классических направлений в исследовании конечных групп связано с исследованием свойств пересечений заданных максимальных подгрупп и влиянием этих свойств на подгрупповое и нормальное строение группы. Важную роль здесь занимает подгруппа Фраттини, введенная в работе [1]. Теорема Фраттини получила развитие в работах многих авторов: В. Гашюца [2] (пересечение $\Delta(G)$ всех ненормальных максимальных подгрупп группы G), В. Дескинса [3] (пересечение $\Phi_p(G)$ всех максимальных подгрупп группы G , индексы которых не делятся на p) и других [4; 5].

Развитие теории пересечений в 1960-х годах в значительной степени стимулировалось результатами, связанными с теорией формаций. Применение идей и методов теории формаций позволило систематизировать накопившийся богатый фактический материал о максимальных подгруппах. Этому способствовало введенное в работах Р. Картера, Т. Хоукса [6] и Л.А. Шеметкова [7] понятие $\mathfrak{Z}$ -абнормальной максимальной подгруппы.

Данная работа посвящена развитию указанных направлений в группах с операторами.

1. Определения и обозначения

Подгруппа H группы G называется:

- 1) пронормальной, если для любого $x \in G$ подгруппы H и H^x сопряжены между собой в $\langle H, H^x \rangle$;
- 2) абнормальной, если $x \in \langle H, H^x \rangle$ для любого $x \in G$.

Напомним, что классом групп называют всякое множество групп, содержащее вместе с каждой своей группой G и все группы, изоморфные G .

Класс групп называют нормально наследственным (S_n -замкнутым), если вместе с каждой своей группой G он содержит все нормальные подгруппы группы G .

Класс групп $\mathfrak{Z}$ называется формацией, если выполняются следующие условия:

- 1) если $G \in \mathfrak{Z}$ и $N \triangleleft G$, то $G/N \in \mathfrak{Z}$;
- 2) если $G/N_1 \in \mathfrak{Z}$ и $G/N_2 \in \mathfrak{Z}$, то $G/N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{Z}$.

Отображение f класса G всех групп в множество классов групп называют экраном, если для любой группы G выполняются следующие условия:

- 1) $f(G)$ – формация;
- 2) $f(G) \subseteq f(G^\varphi) \cap f(\text{Ker} \varphi)$ для любого гомоморфизма φ группы G ;

3) $f(1) = G$.

Экран f называют локальным, если для любого простого числа p он принимает одинаковые значения на всех неединичных p -группах и $f(G) = \bigcap_{p \in \pi(G)} f(p)$ для любой группы G .

Формацию $\mathfrak{F}$ называют локальной, если она имеет хотя бы один локальный экран.

Пусть $\mathfrak{F}$ – формация. Тогда через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$ -корадикал группы G – пересечение всех нормальных подгрупп N группы, для которых $G/N \in \mathfrak{F}$.

Максимальная подгруппа M группы G называется $\mathfrak{F}$ -нормальной ($\mathfrak{F}$ -абнормальной), если $G^{\mathfrak{F}}$ содержится (не содержится) в M .

Через M_G обозначают ядро подгруппы M в группе G (то есть пересечение всех подгрупп из G сопряженных с подгруппой M).

Учитывая, что максимальные подгруппы оказывают существенное влияние на строение конечных групп, рассмотрим максимальные подгруппы среди подгрупп, обладающих общим заданным свойством, и изучим их пересечения и влияние на нормальное строение группы.

Пусть даны группа G , множество A и отображение $f: A \mapsto \text{End}(G)$, где $\text{End}(G)$ – гомоморфное отображение группы G в себя или эндоморфизм группы G . Подгруппа M называется A -допустимой, если M выдерживает действие всех операторов из A , т. е. $M^\alpha \subseteq M$ для любого оператора $\alpha \in A$.

Несложно заметить, что так как операторы действуют как соответствующие им эндоморфизмы, то каждая характеристическая подгруппа является A -допустимой для произвольной группы операторов.

Обозначим через $\Phi(G, A)$ пересечение ядер всех максимальных A -допустимых подгрупп. Если таких подгрупп в группе G нет, то положим $\Phi(G, A) = G$.

Заметим, что максимальная A -допустимая подгруппа M либо целиком содержит $\mathfrak{F}$ -корадикал группы G , либо $MG^{\mathfrak{F}} = G$. Действительно, так как произведение A -допустимых подгрупп A -допустимо и $G^{\mathfrak{F}}$ – характеристическая подгруппа, а, следовательно, A -допустимая, то $MG^{\mathfrak{F}} = M$ или $MG^{\mathfrak{F}} = G$.

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация и группа G имеет группу операторов A . Через $D^{\mathfrak{F}}(G, A)$ обозначим пересечение ядер всех максимальных A -допустимых подгрупп группы G , не содержащих $\mathfrak{F}$ -корадикал группы G . Если в группе G все максимальные A -допустимые подгруппы содержат $\mathfrak{F}$ -корадикал группы G , то, положим, $D^{\mathfrak{F}}(G, A) = G$.

В случае, когда $\mathfrak{F}$ совпадает с формацией всех нильпотентных групп, то подгруппу $D^{\mathfrak{F}}(G, A)$ будем обозначать $D^{\mathfrak{N}}(G, A)$.

Пусть π – некоторое множество простых чисел, $\mathfrak{F}$ – непустая формация и группа G имеет группу операторов A . Через $D_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A)$ обозначим пересечение ядер всех $\mathfrak{F}$ -абнормальных максимальных A -допустимых подгрупп группы G , не содержащих $\mathfrak{F}$ -корадикал группы G , индексы которых не делятся на простые числа из π . Если в G таких подгрупп нет, то положим $D_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) = G$.

Отметим, если $A = 1$, то подгруппы $D^{\mathfrak{F}}(G, A)$ и $D_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A)$ совпадают соответственно с подгруппами $\Delta^{\mathfrak{F}}(G)$ и $\Delta_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G)$, равной пересечению всех $\mathfrak{F}$ -абнормальных максимальных подгрупп группы G и $\mathfrak{F}$ -абнормальных максимальных подгрупп группы G , индексы которых не делятся на простые числа из π , строение

которых рассматривалось в [5].

Необходимо отметить, что не каждая максимальная подгруппа будет являться максимальной A -допустимой относительно некоторой группы операторов A , а так же не всякая максимальная A -допустимая подгруппа группы является максимальной подгруппой в этой же группе.

Пример 2.1. Пусть Q – группа кватернионов 8-го порядка. Рассмотрим $G = [Q]Z_3$, Z_3 – группа операторов для Q . В группе Q подгруппа K порядка 2 является максимальной допустимой относительно группы операторов Z_3 , но не является максимальной подгруппой группы Q .

Пример 2.2. Рассмотрим группу

$$G^* = \langle a, b, c \mid a^2 = b^3 = c^3 = 1, bc = cb, b^a = c \rangle.$$

Тогда $G^* = [G]A$, где $G = \langle b \rangle \times \langle c \rangle$ и $A = \langle a \rangle$ – группа операторов группы G . Простая проверка показывает, что в группе G есть максимальная A -допустимая подгруппа $H = \langle bc \rangle$ порядка 3, но не все подгруппы порядка 3, например, b , являются A -допустимыми. Отмеченный класс групп становится достаточно широким, если образовать группу $R = G^* \times Q$, где Q – сверхразрешимая группа и $(|G|, |Q|) = 1$.

3. Вспомогательные результаты

Лемма 3.1. [С. 24, 8]. Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$. Тогда в группе G существует A -допустимая силовская p -подгруппа, для любого простого числа $p \in \pi(G)$ и все такие подгруппы сопряжены между собой в G .

Теорема 3.2. [С. 96, 4] Для любой группы G и любой ступенчатой формации $\mathfrak{F}$ имеет место равенство $\Delta^{\mathfrak{F}}(G) / \Phi(G) = Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G / \Phi(G))$.

Лемма 3.3. [С. 96, 4] Пусть $\mathfrak{F}$ – S_n -замкнутая локальная формация. Тогда каждая $\mathfrak{F}$ -гиперцентральная нормальная подгруппа любой группы принадлежит $\mathfrak{F}$.

Лемма 3.4. [С. 86, 8] Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$. Тогда подгруппа $\Phi(G, A)$ нильпотентна.

Лемма 3.5. Если N – нормальная A -допустимая подгруппа группы G и $N \subseteq \Phi_{\pi}(G, A)$, то

$$\Phi_{\pi}(G / N, A) = \Phi_{\pi}(G, A) / N.$$

Доказательство. Если $N \subseteq \Phi_{\pi}(G, A)$, то $N \subseteq M$, где M – любая максимальная A -допустимая подгруппа из G с индексом, не делящимся на простые числа из π . Тогда

$$\Phi_{\pi}(G / N, A) = \cap (M / N)_{G/N},$$

где M / N пробегает множество всех максимальных A -допустимых подгрупп из G / N с индексом, не делящимся на простые числа из π .

Продолжим равенство

$$\cap (M / N)_{G/N} = (\cap M_G) / N = \Phi_{\pi}(G, A) / N.$$

Из приведенных равенств вытекает утверждение леммы.

Лемма 3.6. Пусть группа G имеет группу операторов A , $\mathfrak{F}$ – формация. Тогда если N – нормальная A -допустимая подгруппа группы G и $N \subseteq D_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A)$, то

$$D_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G / N, A) = D_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) / N.$$

Доказательство. Если $N \subseteq D_\pi^\mathfrak{Z}(G, A)$, то $N \subseteq M$, где M – любая максимальная A -допустимая подгруппа из G , не содержащая $\mathfrak{Z}$ -корадикал, с индексом, не делящимся на простые числа из π . Тогда

$$D_\pi^\mathfrak{Z}(G/N, A) = \cap (M/N)_{G/N},$$

где M/N пробегает множество всех максимальных A -допустимых подгрупп из G/N , не содержащих $\mathfrak{Z}$ -корадикал, с индексом, не делящимся на простые числа из π .

Продолжим равенство

$$\cap (M/N)_{G/N} = (\cap M_G) / N = D_\pi^\mathfrak{Z}(G, A) / N.$$

Из приведенного вытекает справедливость утверждения.

Лемма 3.7. Пусть группа G имеет группу операторов A , $\mathfrak{Z}$ – ступенчатая формация, K – некоторая нормальная подгруппа группы G . Пусть каждая максимальная A -допустимая подгруппа группы G , не содержащая K , содержит $G^\mathfrak{Z}$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) $K \cap G^\mathfrak{Z} \subseteq \Phi(G, A)$;
- 2) $K / K \cap \Phi(G, A) \subseteq Z_\infty^\mathfrak{Z}(G / \Phi(G, A))$.

Доказательство. Очевидно, что пересечение $K \cap G^\mathfrak{Z}$ содержится во всех максимальных A -допустимых подгруппах, как содержащих $G^\mathfrak{Z}$, так и не содержащих $G^\mathfrak{Z}$, а следовательно, оно входит в $\Phi(G, A)$.

Пусть R/S – главный фактор группы G , причём $R \subseteq K, S \supseteq K \cap \Phi(G, A)$. Так как

$$R \cap G^\mathfrak{Z} \subseteq K \cap G^\mathfrak{Z} \subseteq S,$$

то имеем G -изоморфизм:

$$RG^\mathfrak{Z} / SG^\mathfrak{Z} R / (R \cap SG^\mathfrak{Z}) = R / S(R \cap G^\mathfrak{Z}) = R / S.$$

Так как $G / SG^\mathfrak{Z} \in \mathfrak{Z}$, то $RG^\mathfrak{Z} / SG^\mathfrak{Z}$ $\mathfrak{Z}$ -централен в $G / SG^\mathfrak{Z}$, а значит, и в G . Но тогда R/S $\mathfrak{Z}$ -централен в G . Лемма доказана.

4. Основной результат

В работе [8] Д. Горенштейн исследовал существование силовских A -допустимых подгрупп и установил, что если группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$, тогда в ней существует A -допустимая силовская подгруппа и любые две из них сопряжены между собой в G .

Напомним, что группа G обладает свойством C_π , если в ней существует холловская π -подгруппа и любые две из них сопряжены между собой.

Теорема 4.1. Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$ и подгруппа $\Phi_\pi(G, A)$ обладает свойством C_π . Тогда

$$\Phi_\pi(G, A) / O_\pi(G) = \Phi(G / O_\pi(G), A).$$

Доказательство. Очевидно, что $O_\pi(G) \subseteq \Phi_\pi(G, A)$. По лемме 3.1 в $\Phi_\pi(G, A)$ существует A -допустимая холловская π -подгруппа. Обозначим её через P . Тогда, по обобщенной лемме Фраттини,

$$G = \Phi_\pi(G, A) N_G(P)$$

Предположим, что $N_G(P)$ – собственная подгруппа группы G . Тогда в G найдётся максимальная A -допустимая подгруппа M , такая что $\Phi_\pi(G, A) \not\subseteq M$

и $N_G(P) \subseteq M$. Ясно, что индекс $N_G(P)$ в G не делится на числа из π . Следовательно, $\Phi_\pi(G, A) \subseteq M$. Получили противоречие. Значит, P – нормальная подгруппа группы G . Отсюда следует, что число $|\Phi_\pi(G, A) / O_\pi(G)|$ не делится на числа из π . Очевидно, что

$$\Phi(G / O_\pi(G), A) \subseteq \Phi_\pi(G, A) / O_\pi(G).$$

Если $\Phi(G / O_\pi(G), A) \subset \Phi_\pi(G, A) / O_\pi(G)$, то в G найдётся максимальная A -допустимая подгруппа K такая, что $O_\pi(G) \subseteq K$ и $K\Phi_\pi(G, A) = G$. Следовательно,

$$|G : K| = |\Phi_\pi(G, A) : \Phi_\pi(G, A) \cap K|$$

не делится на числа из π . Отсюда получаем, что $\Phi_\pi(G, A) \subseteq K$, что противоречит определению K . Значит, $\Phi(G / O_\pi(G), A) = \Phi_\pi(G, A) / O_\pi(G)$. Лемма доказана.

Применяя лемму 3.4, получаем

Следствие 4.1.1. Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$ и подгруппа $\Phi_\pi(G, A)$ обладает свойством C_π . Тогда факторгруппа $\Phi_\pi(G, A) / O_\pi(G)$ нильпотентна.

По теореме Силова, в любой группе G подгруппа $\Phi_p(G, A)$ обладает свойством C_p , тогда при $\pi = \{p\}$ имеем следующий результат.

Следствие 4.1.2. Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$. Тогда $\Phi_p(G, A) / O_p(G) = \Phi(G / O_p(G), A)$ — нильпотентная факторгруппа.

Если группа операторов $A = 1$, то из теоремы 4.1 вытекает результат В. Дескинса [3].

Теорема 4.2. Пусть π и τ – различные множества простых чисел и $\pi \cap \tau = \emptyset$. Тогда для любой группы G с группой операторов A такой, что $(|G|, |A|) = 1$, справедливо равенство

$$\Phi_\pi(G, A) \cap \Phi_\tau(G, A) = \Phi(G, A).$$

Доказательство. Очевидно, $\Phi(G, A) \subseteq \Phi_\pi(G, A) \cap \Phi_\tau(G, A)$. Пусть $\Phi(G, A) \subset K = \Phi_\pi(G, A) \cap \Phi_\tau(G, A)$. Тогда в G найдётся максимальная A -допустимая подгруппа M такая, что $G = MK$. Если $|G : M|$ не делится на числа из $\omega = \pi \cup \tau$, то $\Phi_\omega(G, A) \subseteq M$. Следовательно, $KM = M$, что не возможно. Значит, индекс M в G делится одновременно на числа из $\pi \cup \tau$.

Пусть $O_\pi(G) = 1$. Тогда ввиду теоремы 4.1 имеем равенство $\Phi_\pi(G, A) = \Phi(G, A)$. Поэтому $K \subseteq M$, что противоречит определению подгруппы K . Значит, $O_\pi(G) \neq 1$. Если $O_\pi(G)M = G$, то $|G : M|$ делится на числа из π . Противоречие. Поэтому $O_\pi(G) \subseteq M$. На основании теоремы 4.1 имеем:

$$\Phi_\pi(G, A) / O_\pi(G) = \Phi_\pi(G / O_\pi(G), A) \subseteq M / O_\pi(G).$$

Отсюда следует, что $\Phi_\pi(G, A) \subseteq M$. Снова пришли к противоречию. Таким образом, остаётся заключить, что

$$\Phi_\pi(G, A) \cap \Phi_\tau(G, A) = \Phi(G, A).$$

Лемма доказана.

Следствие 4.2.1. Пусть π и τ – различные множества простых чисел и $\pi \cap \tau = \emptyset$. Тогда для любой группы G с группой операторов A такой, что $(|G|, |A|) = 1$, подгруппа $\Phi_\pi(G, A) \cap \Phi_\tau(G, A)$ нильпотентна.

Если $\pi = \{p\}$ и $\tau = \{q\}$, то имеем:

Следствие 4.2.2. Пусть p и q – различные простые числа. Тогда для любой группы G с группой операторов A такой, что $(|G|, |A|) = 1$ подгруппа $\Phi_p(G, A) \cap \Phi_q(G, A) = \Phi(G, A)$ нильпотентна.

В случае, когда группа операторов единична, получаем

Следствие 4.2.3. Пусть π и τ – различные множества простых чисел и $\pi \cap \tau = \emptyset$. Тогда для любой группы G справедливо

$$\Phi_\pi(G) \cap \Phi_\tau(G) = \Phi(G).$$

Теорема 4.3. Пусть группа G имеет группу операторов A , $\mathfrak{F}$ – ступенчатая формация. Тогда

$$D^\mathfrak{F}(G, A) / \Phi(G, A) = Z_\infty^\mathfrak{F}(G / \Phi(G, A)).$$

Доказательство. Так как подгруппа Фраттини фактор-группы $G / \Phi(G, A)$ единична, то, применяя теорему 3.2 и то, что $\Delta^\mathfrak{F}(G) \subseteq D^\mathfrak{F}(G, A)$, получаем

$$\begin{aligned} D^\mathfrak{F}(G, A) / \Phi(G, A) &\supseteq \Delta^\mathfrak{F}(G) \Phi(G, A) / \Phi(G, A) \supseteq \\ &\supseteq \Delta^\mathfrak{F}(G / \Phi(G, A)) = Z_\infty^\mathfrak{F}(G / \Phi(G, A)). \end{aligned}$$

Обратное включение выполняется ввиду леммы 3.7. Теорема доказана.

Согласно леммы 3.3 получаем следующее:

Следствие 4.3.1. Пусть группа G имеет группу операторов A , $\mathfrak{F}$ – нормально наследственная локальная формация. Тогда $D^\mathfrak{F}(G, A) / \Phi(G, A) \in \mathfrak{F}$.

В случае единичности группы операторов A из теоремы 4.3 получаем соответствующий результат Л.А. Шеметкова [4].

Теорема 4.4. Пусть $\mathfrak{F}$ – формация, группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$. Если в группе G подгруппа $\Phi_\pi(G, A)$ обладает свойством C_π , то

$$D_\pi^\mathfrak{F}(G, A) / O_\pi(G) = D^\mathfrak{F}(G / O_\pi(G), A).$$

Доказательство. Пусть $O_\pi(G) \neq 1$. По теореме 4.1

$$\Phi_\pi(G, A) / O_\pi(G) = \Phi(G / O_\pi(G), A),$$

то теорема для факторгруппы $G / O_\pi(G)$ верна по индукции. Следовательно,

$$D_\pi^\mathfrak{F}(G / O_\pi(G), A) / O_\pi(G / O_\pi(G)) = D^\mathfrak{F}(G / O_\pi(G) / O_\pi(G / O_\pi(G)), A).$$

Так как $O_\pi(G / O_\pi(G)) = 1$ и

$$D_\pi^\mathfrak{F}(G / O_\pi(G), A) = D_\pi^\mathfrak{F}(G, A) / O_\pi(G),$$

то

$$D_\pi^\mathfrak{F}(G, A) / O_\pi(G) = D^\mathfrak{F}(G / O_\pi(G), A).$$

Пусть теперь $O_\pi(G) = 1$. Тогда, по теореме, 4.1 $\Phi_\pi(G, A) / O_\pi(G) = \Phi(G / O_\pi(G), A)$. Значит,

$$D_\pi^\mathfrak{F}(G, A) \cap G^\mathfrak{F} \subseteq \Phi_\pi(G, A) = \Phi(G, A).$$

Пусть K / N – главный фактор группы G , причём,

$$\Phi(G, A) \subseteq N \subseteq K \subseteq D_\pi^\mathfrak{F}(G, A).$$

Так как

$$K \cap G^\mathfrak{F} \subseteq D_\pi^\mathfrak{F}(G, A) \cap G^\mathfrak{F} \subseteq \Phi(G, A),$$

то

$$N = N(K \cap G^\mathfrak{F}) = K \cap NG^\mathfrak{F}.$$

Поэтому имеет место следующий изоморфизм:

$$KG^{\mathfrak{Z}} / NG^{\mathfrak{Z}}K / K \cap NG^{\mathfrak{Z}} = K / N(K \cap G^{\mathfrak{Z}}) = K / N.$$

Но $G / NG^{\mathfrak{Z}} \in \mathfrak{Z}$, поэтому главный фактор $KG^{\mathfrak{Z}} / NG^{\mathfrak{Z}}$ является $\mathfrak{Z}$ -центральным в G . Следовательно, главный фактор K / N также является $\mathfrak{Z}$ -центральным в G . Таким образом, $D_{\pi}^{\mathfrak{Z}}(G, A) / \Phi(G, A)$ – $\mathfrak{Z}$ -гиперцентральная нормальная подгруппа группы $G / \Phi(G, A)$. Поэтому

$$D_{\pi}^{\mathfrak{Z}}(G, A) / \Phi(G, A) \subseteq Z_{\infty}^{\mathfrak{Z}}(G / \Phi(G, A)).$$

С другой стороны, на основании теоремы 4.3

$$D_{\pi}^{\mathfrak{Z}}(G, A) / \Phi(G, A) \supseteq D^{\mathfrak{Z}}(G, A) / \Phi(G, A) = Z_{\infty}^{\mathfrak{Z}}(G / \Phi(G, A)).$$

Значит,

$$D_{\pi}^{\mathfrak{Z}}(G, A) / \Phi(G, A) = Z_{\infty}^{\mathfrak{Z}}(G / \Phi(G, A)).$$

Следовательно,

$$D_{\pi}^{\mathfrak{Z}}(G, A) / \Phi(G, A) = D^{\mathfrak{Z}}(G, A) / \Phi(G, A),$$

то есть $D_{\pi}^{\mathfrak{Z}}(G, A) = D^{\mathfrak{Z}}(G, A)$. Теорема доказана.

Из теоремы 4.4 с помощью следствия 4.3.1 получаем следующее:

Следствие 4.4.1. Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$, $\mathfrak{Z}$ – локальная нормально наследственная формация, содержащая все нильпотентные группы, а подгруппа $\Phi(G, A)$ обладает свойством C_{π} , тогда $D_{\pi}^{\mathfrak{Z}}(G, A) / O_{\pi}(G) \in \mathfrak{Z}$.

В случае, когда $\mathfrak{Z}$ – формация всех нильпотентных групп, то из теоремы 4.4 получаем следующее

Следствие 4.4.2. Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$. Если подгруппа $\Phi(G, A)$ обладает свойством C_{π} , то $D_{\pi}^{\mathfrak{N}}(G, A) / O_{\pi}(G) \in \mathfrak{N}$.

Пусть $\pi = \{p\}$, где p – простое число, $D_p^{\mathfrak{Z}}(G, A)$ – пересечение ядер всех $\mathfrak{Z}$ -абнормальных максимальных A -допустимых подгрупп группы G , индексы которых не делятся на данное простое число p .

Ввиду теоремы Силова и теоремы 4.4 справедливы следующие утверждения.

Следствие 4.4.3. Пусть $\mathfrak{Z}$ – формация, группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$. Тогда

$$D_p^{\mathfrak{Z}}(G, A) / O_p(G) = D^{\mathfrak{Z}}(G / O_p(G), A).$$

Следствие 4.4.4. Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$, $\mathfrak{Z}$ – S_n -замкнутая локальная формация, содержащая все нильпотентные группы. Тогда $D_p^{\mathfrak{Z}}(G, A) / O_p(G) \in \mathfrak{Z}$.

Следствие 4.4.5. Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$. Тогда $D_p^{\mathfrak{N}}(G, A) / O_p(G) \in \mathfrak{N}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Frattini, G. Intorno alla generazione dei gruppi di operazioni / G. Frattini // Atti Acad. Dei Lincei. – 1885. – Vol.1. – P. 281–285.
2. Gaschütz, W. Über die Φ -Untergruppen endlicher Gruppen / W. Gaschütz // Math. Z. – 1953. – Bd. 58. – S. 160–170.
3. Deskins, W.E. A condition for the solvability of a finite group / W.E. Deskins //

III. J. Math. – 1961. – Vol. 5. – № 2. – P. 306–313.

4. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 267 с.

5. Селькин, М.В. Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп / М.В. Селькин. – Мн. : Беларуская навука, 1997. – 144 с.

6. Carter, R. The F -normalizers of a finite soluble group / R. Carter, T. Hawkes // J. Algebra. – 1967. – V. 5. – № 2 – P. 175–202.

7. Шеметков, Л.А. Ступенчатые формации групп / Л.А. Шеметков // Матем. сб. – 1974. – Т. 94. – № 4. – С. 628–648.

8. Gorenstein, D. Finite groups / D. Gorenstein. – New York : Harper and Row, 1968. – 572 p.

9. Бородич, Р.В. О пересечениях подгрупп заданных индексов в конечных группах с операторами / Р.В. Бородич // Известия Гомельского государственного ун-та им. Ф. Скорины, 5(14). Вопросы алгебры 18. – 2002. – С. 85–87.

E.N. Borodich, R.V. Borodich, M.V. Selkin. About Influence of Indexes of the Maximal Subgroups on their Intersection

The intersections of $\mathfrak{F}$ -abnormal maximal subgroup, with crossings on their indexes singled out by subgroup functor are investigated in this work.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 06.06.2011 г.

УДК 517.5

Ю. Зайонц, Ю.И. Харкевич, Т.А. Степанюк**АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛОВ
ПУАССОНА НА КЛАССАХ H_ω**

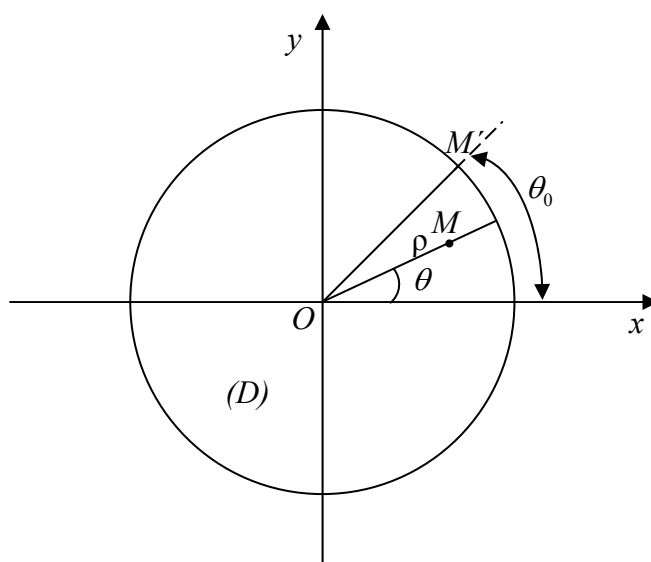
В работе проведено исследование вопросов о приближении функций классов H_ω , т.е. функций, которые удовлетворяют условию $|f(x) - f(x')| \leq \omega(|x - x'|) \quad \forall x, x'$, с помощью интегралов Пуассона. Аппроксимативные свойства метода приближения интегралами Пуассона на классах дифференцируемых функций исследовались многими учеными: И.П. Натансоном, А.Ф. Тиманом, Б. Надем, Л.В. Малей, Е.Л. Штарком, В.А. Баскаковым, Л.П. Фалалеевым, К.Н. Жигаллом, Ю.И. Харкевичем и Т.В. Жигалло и др. Нами получено равенство для верхней грани отклонения функций классов H_ω от интегралов Пуассона.

1. Интеграл Пуассона как решение задачи Дирихле для круга

Интеграл Пуассона можно получить как решение так называемой задачи Дирихле для одного простого, но очень важного случая [1]. Напомним, что функция $u = u(x, y)$ называется гармонической в некоторой области, если она в этой области непрерывна вместе со своими производными $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ и удовлетворяет уравнению в частных производных (уравнению Лапласа)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (1)$$

Рассмотрим конечную область (D) , ограниченную замкнутым контуром (L) . Тогда задача Дирихле в этой области формулируется следующим образом: на контуре (L) произвольно задана непрерывная функция точки; требуется же найти такую

**Рисунок 1**

непрерывную в замкнутой области (D) и гармоническую внутри нее функцию $u = u(x, y)$, которая на контуре совпадала бы с заданной функцией. Дадим решение этой задачи для случая, когда область (D) есть круг, описанный вокруг начала координат радиусом 1 (к этому, очевидно, легко приводится и случай произвольного круга).

Итак, пусть на окружности (L) названного круга задана некоторая непрерывная функция точки. Если положение точки на окружности определять полярным углом θ (рисунок 1), то это равносильно заданию непрерывной

(и, очевидно, имеющей период 2π функции $f(\theta)$). Нам удобно и внутри круга (D) перейти к полярным координатам ρ, θ , заменив уравнение (1) соответствующим преобразованным уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0. \quad (2)$$

Нам предстоит, таким образом, найти непрерывную при $\rho \leq 1$ функцию $u = u(\rho, \theta)$, которая при $\rho < 1$ удовлетворяла бы уравнению (2), а при $\rho = 1$ совпадала бы с $f(\theta)$.

В порядке наведения начнем с простейших (не считая постоянной) решений уравнения (2):

$$\rho^n \cos n\theta, \quad \rho^n \sin n\theta, \quad (n=1, 2, 3, \dots);$$

найти их можно было бы по методу Фурье. Нетрудно проверить непосредственно, что эти функции уравнению удовлетворяют. Умножив их на произвольные множители A_n, B_n и присоединив еще постоянный член A_0 , составим ряд

$$u(\rho, \theta) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta) \rho^k,$$

который формально также удовлетворяет уравнению (2). Наконец, учитывая граничное условие $u(1, \theta) = f(\theta)$, получим

$$A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta = f(\theta).$$

Отсюда заключаем, что A_0, A_k, B_k – коэффициенты Фурье функции $f(\theta)$:

$$A_0 = \frac{a_0}{2}, \quad A_k = a_k, \quad B_k = b_k.$$

Окончательно приходим к такому, пока формальному, решению поставленной задачи:

$$u(\rho, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta). \quad (3)$$

В этом ряде легко узнать ряд Пуассона для функции $f(\theta)$, который, если угодно, можно заменить и интегралом Пуассона:

$$u(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho \cos(u - \theta) + \rho^2} du. \quad (4)$$

Остается убедиться, что построенная функция в действительности удовлетворяет всем требованиям.

Прежде всего, так как коэффициенты a_k, b_k ограничены в их совокупности, нетрудно видеть, что если рассматривать лишь значения $\rho \leq \rho_0$, где $\rho_0 < 1$, но может быть взято как угодно близким к единице, ряды, полученные из (3) почленным дифференцированием по ρ или по θ (однажды или дважды), все будут сходиться равномерно как относительно ρ , так и относительно θ . В таком случае они и дадут последовательные производные функции $u(\rho, \theta)$, и эта функция внутри круга, то есть при $\rho < 1$, будет удовлетворять преобразованному уравнению Лапласа, поскольку ему удовлетворяют по отдельности все члены ряда.

Внутри круга функция $u(\rho, \theta)$ непрерывна по совокупности переменных (ρ, θ) ; это вытекает из равномерной сходимости ряда (3) сразу по обоим переменным (при $\rho \leq \rho_0 < 1$). Установим теперь, что функция $u(\rho, \theta)$ при приближении точки $M(\rho, \theta)$ изнутри круга к точке $M'(1, \theta_n)$ на окружности, стремится именно к $f(\theta_n)$. Действительно, ввиду непрерывности функции $f(\theta)$ по произвольно взятом $\varepsilon > 0$,

найдется такое $\delta > 0$, что при $|\theta - \theta_n| < \delta$ будет

$$|f(\theta) - f(\theta_n)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

С другой стороны, в силу того, что $u(\rho, \theta)$ при $\rho \rightarrow 1-0$ стремится к $f(\theta)$ равномерно относительно θ , число δ можно считать и столь малым, что при $|\rho - 1| < \delta$ будет

$$|u(\rho, \theta) - f(\theta)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

при всех θ . Итак, окончательно при $|\rho - 1| < \delta$ и $|\theta - \theta_n| < \delta$ имеем:

$$|u(\rho, \theta) - f(\theta_n)| < \varepsilon,$$

что и завершает доказательство.

Интеграл Пуассона, заданный при помощи формулы (4), далее будем обозначать через $P_\rho(f; \theta)$, а именно:

$$u(\rho, \theta) = P_\rho(f; \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta + t) \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho \cos t + \rho^2} dt, \quad (5)$$

Не теряя общности рассуждений, заменив в правой части (5) переменную θ на переменную x и также положив $\rho = e^{-\frac{1}{\delta}}$, всюду далее будем пользоваться интегралом Пуассона в виде

$$P_\delta(f; x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x + t) \frac{1 - e^{-\frac{2}{\delta}}}{1 - 2e^{-\frac{1}{\delta}} \cos t + e^{-\frac{2}{\delta}}} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x + t) K_\delta(t) dt, \quad (6)$$

где

$$K_\delta(t) = \frac{1 - e^{-\frac{2}{\delta}}}{2} \frac{1}{1 - 2e^{-\frac{1}{\delta}} \cos t + e^{-\frac{2}{\delta}}} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k}{\delta}} \cos kt \text{ — ядро интеграла Пуассона.}$$

2. Постановка задачи и некоторые исторические сведения, касающиеся данного вопроса исследования

Пусть C — пространство 2π -периодических функций, в котором норма задается при помощи равенства

$$\|f\|_C = \max_t |f(t)|.$$

Модулем непрерывности функции $f(x)$ непрерывной на отрезке $[a, b]$ называют функцию $\omega(t) = \omega(f, t)$, определенную для $t \in [0, b - a]$ при помощи равенства:

$$\omega(t) = \omega(f, t) = \sup_{0 \leq h \leq t} \max_{a \leq x \leq b-h} |f(x+h) - f(x)| = \sup_{\substack{|x' - x''| \leq t, \\ x', x'' \in [a, b]}} |f(x') - f(x'')|.$$

Пусть $\omega = \omega(t)$ — произвольный фиксированный модуль непрерывности. Говорят, что функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a, b]$, принадлежит к классу $H_\omega[a, b]$ ($f \in H_\omega[a, b]$), если ее модуль непрерывности $\omega(f, t)$ удовлетворяет условию

$$\omega(f, t) \leq \omega(t)$$

или каковы бы ни были точки $t_1, t_2 \in [a, b]$, справедливо

$$|f(t_1) - f(t_2)| \leq \omega(|t_1 - t_2|).$$

Задачу об отыскании асимптотических равенств для величины

$$\mathcal{E}(\mathfrak{N}; U_\delta(\Lambda))_C = \sup_{f \in \mathfrak{N}} \|f(x) - U_\delta(f; x; \Lambda)\|_C,$$

где $\mathfrak{N} \subseteq C$ – заданный класс функций, $U_\delta(f; x; \Lambda)$ – операторы, порожденные конкретным методом суммирования рядов Фурье, будем называть, следуя А.И. Степанцу [2], задачей Колмогорова–Никольского.

Если в явном виде найдена функция $g(\delta) = \varphi(P_\delta; \delta)$ такая, что при $\delta \rightarrow \infty$

$$\mathcal{E}(H_\omega; P_\delta)_C = \varphi(\delta) + o(\varphi(\delta)),$$

то говорят, что решена задача Колмогорова–Никольского для интеграла Пуассона P_δ на классе H_ω в метрике пространства C .

Аппроксимативные свойства метода приближения интегралами Пуассона на классах дифференцируемых функций исследовались многими учеными: И.П. Натансоном [3], О.П. Тиманом [4], Б. Надем, Л.В. Малей [5], Е.Л. Штарком [6], В.А. Баскаковым [7], Л.П. Фалалеевым, К.Н. Жигалло, Ю.И. Харкевичем и Т.В. Жигалло [8–11] и др.

Сделаем краткий исторический обзор данного вопроса исследования.

Нахождению точных асимптотических равенств для верхних граней отклонения функций классов W^1 от интегралов Пуассона посвящен ряд работ [3–11].

И.П. Натансон [3] решил задачу Колмогорова–Никольского на классах W^1 для интеграла Пуассона:

$$\mathcal{E}(W^1; P_\rho)_C = \frac{2}{\pi} (1 - \rho) |\ln(1 - \rho)| + O(1 - \rho), \quad \rho \rightarrow 1-. \quad (7)$$

В работе [4] А.Ф. Тиман получил точные значения аппроксимативных характеристик $\mathcal{E}(W^1; P_\rho)_C$:

$$\mathcal{E}(W^1; P_\rho)_C = \frac{2}{\pi} (1 - \rho) \ln \frac{1}{1 - \rho} + \varepsilon_\rho, \quad (8)$$

$$\varepsilon_\rho = \frac{2}{\pi} \int_0^{1-\rho} \left\{ \frac{1}{1-t} \ln \frac{2-t}{t} + 1 \right\} dt, \quad 0 < \rho < 1.$$

В работе Л.В. Малей [5] было найдено полное асимптотическое разложение для верхней грани отклонения функций с класса W^1 от интегралов Пуассона вида

$$\mathcal{E}(W^1; P_\rho)_C = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \alpha_k (1 - \rho)^k \ln \frac{1}{1 - \rho} + \beta_k (1 - \rho)^k \right\},$$

$$\alpha_k = \frac{1}{k}, \quad \beta_k = \frac{1}{k} \left\{ \ln 2 + \frac{1}{k} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i \cdot 2^i} \right\}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Позднее оно было передоказано в работе Е.Л. Штарка [6].

В.А. Баскаков в работе [7] нашел полные асимптотические разложения для верхних граней отклонения функций из классов H^α , $0 < \alpha < 1$, а также из класса W^1 от интегралов Пуассона, а именно:

$$\mathcal{E}(H^\alpha; P_\delta)_C = \frac{1}{\cos \frac{\alpha\pi}{2} \delta^\alpha} + \frac{2}{\pi} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left[\int_{\pi}^{\infty} \frac{(t^\alpha)_{2\pi} dt}{t^{2(k+1)}} - \frac{1}{(2k+1-\alpha)\pi^{2k+1-\alpha}} \right] \frac{1}{\delta^{2k+1}} \right\}, \quad (9)$$

$$\mathcal{E}(W^1; P_\delta)_C = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\delta} \ln \delta + \frac{1}{\delta} \left[\frac{2 \ln \pi}{\pi} + \frac{2}{\pi} \int_{\pi}^{\infty} \frac{(t)_{2\pi}}{t^2} dt \right] + \frac{2}{\pi \delta} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left[\int_{\pi}^{\infty} \frac{(t)_{2\pi}}{t^{2(k+1)}} dt - \frac{1}{2k\pi^{2k}} \right] \frac{1}{\delta^{2k}}, \quad (10)$$

где символ $(f(t))_{2\pi}$ обозначает четное 2π -периодическое продолжение функции $f(t)$, $0 \leq t \leq \pi$.

Как следствие из полных асимптотических разложений (9–10), вытекает справедливость асимптотических равенств

$$\mathcal{E}(H^\alpha; P_\delta)_C = \frac{1}{\cos \frac{\alpha\pi}{2}} \frac{1}{\delta^\alpha} + O\left(\frac{1}{\delta}\right),$$

$$\mathcal{E}(W^1; P_\delta)_C = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\delta} \ln \delta + O\left(\frac{1}{\delta}\right).$$

В тоже время аппроксимативные свойства интегралов Пуассона на классах H_ω не были исследованы. Поэтому возник вопрос об отыскании асимптотических равенств для точных верхних граней отклонения функций из классов H_ω их интегралами Пуассона в равномерной метрике.

Основной целью данной работы есть изучение асимптотического поведения величин

$$\mathcal{E}(H_\omega; P_\delta)_C = \sup_{f \in H_\omega} \|f(x) - P_\delta(f, x)\|_C, \quad \delta \rightarrow \infty.$$

3. Приближение функций с классов H_ω интегралами Пуассона

Имеет место следующая теорема.

Теорема. Для произвольного фиксированного модуля непрерывности $\omega(t)$ в принятых выше обозначениях справедливо равенство

$$\mathcal{E}(H_\omega; P_\delta)_C = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \omega(t) \frac{1 - e^{-\frac{2}{\delta}}}{1 - 2e^{-\frac{1}{\delta}} \cos t + e^{-\frac{2}{\delta}}} dt. \quad (11)$$

Доказательство. Рядом с функцией $f(t)$ рассмотрим функцию $f_1(t) = f(t+x)$. Тогда $f_1(0) - P_\delta(f_1, 0) = f(x) - P_\delta(f, x)$.

Так как функции $f(t)$ и $f_1(t)$ одновременно принадлежат классу H_ω , то делаем выводы, что

$$\mathcal{E}(H_\omega; P_\delta)_C = \sup_{f \in H_\omega} |f(0) - P_\delta(f, 0)|.$$

Для каждой функции $f(x)$ с класса H_ω построим функцию $f_2(x) = f(x) - f(0)$. Очевидно, что функция $f_2(x)$ принадлежит к классу H_ω , причем $f_2(0) = 0$. Отсюда

$$P_\delta(f_2; 0) = P_\delta(f; 0) - f(0),$$

то есть

$$\mathcal{E}(H_\omega; P_\delta)_C = \sup_{\substack{f \in H_\omega \\ f(0)=0}} \frac{1}{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) K_\delta(t) dt \right|.$$

Вследствие четности ядра $K_\delta(t)$ достаточно ограничиться только случаем четных функций $f(x)$. Это значит, что

$$\mathcal{E}(H_\omega; P_\delta)_C = \sup_{f \in H} \frac{2}{\pi} \left| \int_0^\pi f(t) K_\delta(t) dt \right|, \quad (12)$$

где H – множество четных функций $f \in H_\omega$ таких, что $f(0) = 0$. Какой бы ни была функция $f \in H$,

$$\frac{2}{\pi} \left| \int_0^\pi f(t) K_\delta(t) dt \right| \leq \int_0^\pi \omega(t) K_\delta(t) dt. \quad (13)$$

С другой стороны, так как $K_\delta(t) \geq 0$, то для функции $f_0(t) \in H$,

$$f_0(t) = \omega(|t|), \quad |t| \leq \pi,$$

будем иметь

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f_0(t) K_\delta(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \omega(t) K_\delta(t) dt. \quad (14)$$

Итак, согласно (12–14) получаем:

$$\mathcal{E}(H_\omega; P_\delta)_C = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \omega(t) \frac{1 - e^{-\frac{2}{\delta}}}{1 - 2e^{-\frac{1}{\delta}} \cos t + e^{-\frac{2}{\delta}}} dt.$$

Теорема доказана.

Следствие 1. Если в равенстве (11) положить $\omega(t) = t$, то получим следствие из результата В.А. Баскакова:

$$\mathcal{E}(W^1; P_\delta)_C = \frac{2}{\pi} \frac{\ln \delta}{\delta} + O\left(\frac{1}{\delta}\right). \quad (15)$$

Доказательство.

Действительно,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(W^1; P_\delta)_C &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi t \frac{1 - e^{-\frac{2}{\delta}}}{1 - 2e^{-\frac{1}{\delta}} \cos t + e^{-\frac{2}{\delta}}} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi t K_\delta(t) dt = \frac{2}{\pi \delta} \int_0^\infty \frac{(t)_{2\pi}}{\frac{1}{\delta^2} + t^2} dt = \\ &= \frac{2}{\pi \delta} \int_0^{2\pi} \frac{t}{\frac{1}{\delta^2} + t^2} dt + \frac{2}{\pi \delta} \int_{2\pi}^\infty \frac{(t)_{2\pi}}{\frac{1}{\delta^2} + t^2} dt. \end{aligned}$$

Учтя, что

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi \delta} \int_0^{2\pi} \frac{t}{\frac{1}{\delta^2} + t^2} dt &= \frac{1}{\pi \delta} \ln \left(\frac{1}{\delta^2} + 4\pi^2 \right) - \frac{1}{\pi \delta} \ln \left(\frac{1}{\delta^2} \right) = \frac{1}{\pi \delta} \ln (4\pi^2 \delta^2 + 1) = \\ &= \frac{1}{\pi \delta} \ln \delta^2 \left(\frac{1}{\delta^2} + 4\pi^2 \right) = \frac{2}{\pi \delta} \ln \delta + \left(\frac{1}{\delta} \right), \\ \frac{2}{\pi \delta} \int_{2\pi}^\infty \frac{(t)_{2\pi}}{\frac{1}{\delta^2} + t^2} dt &< \frac{2}{\pi \delta} \int_{2\pi}^\infty \frac{2\pi}{\frac{1}{\delta^2} + t^2} dt = O\left(\frac{1}{\delta}\right). \end{aligned}$$

Получаем равенство (17).

Так как $\frac{1}{\delta} \sim (1 - \rho)$, когда $\delta \rightarrow \infty$, $\rho \rightarrow 1-$, то можно сделать вывод, что равенства (7) и (8) эквивалентные (15).

Следствие 2. Если в равенстве (11) положить $\omega(t) = t^\alpha$, $0 \leq \alpha < 1$, то получим следствие из результата В.А. Баскакова:

$$\mathcal{E}(H^\alpha; P_\delta)_C = \frac{1}{\cos \frac{\alpha\pi}{2}} \frac{1}{\delta^\alpha} + O\left(\frac{1}{\delta}\right). \quad (16)$$

Доказательство.

Чтобы показать справедливость следствия 2, запишем сначала интеграл Пуассона в виде известного сингулярного интеграла. Для этого ядро интеграла Пуассона представим в виде

$$K_\delta(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k}{\delta}} \cos kt = \frac{1}{2} \varphi_\delta(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_\delta(k),$$

где

$$\varphi_\delta(k) = e^{-\frac{k}{\delta}} \cos kt.$$

Применяя формулу суммирования Пуассона [12, с.72], получим, что

$$K_\delta(t) = \sqrt{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} \Phi_\delta(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_\delta(2\pi k) \right\}, \quad (17)$$

где $\Phi_\delta(u)$ – косинус преобразование Фурье функций $\varphi_\delta(u)$, то есть

$$\begin{aligned} \Phi_\delta(u) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \varphi_\delta(z) \cos zudz = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{z}{\delta}} \cos zt \cos zudz = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{z}{\delta}} \cos z(u+t)dz + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{z}{\delta}} \cos z(u-t)dz = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Дважды интегрируя первый интеграл из правой части последнего равенства, получим

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\frac{1}{\delta}}{\frac{1}{\delta^2} + (t+u)^2}.$$

Аналогичным образом получаем, что

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\frac{1}{\delta}}{\frac{1}{\delta^2} + (t-u)^2}.$$

Отсюда

$$\Phi_\delta(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\delta} \left(\frac{1}{\frac{1}{\delta^2} + (t+u)^2} + \frac{1}{\frac{1}{\delta^2} + (t-u)^2} \right).$$

Подставив последнее соотношение в (16), имеем, что

$$K_\delta(t) = \frac{1}{\delta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\frac{1}{\delta^2} + (t+2\pi k)^2}.$$

Итак,

$$P_\delta(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) K_\delta(t) dt = \frac{1}{\pi\delta} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\frac{1}{\delta^2} + (t+2\pi k)^2} dt = \frac{1}{\pi\delta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x+t)_{2\pi}}{\frac{1}{\delta^2} + t^2} dt, \quad (18)$$

где $f(x+t)_{2\pi}$ – четное 2π - периодическое продолжение функции $f(x+t)$.

Учитывая равенство (19), убеждаемся в справедливости следствия 2. Действительно,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(H^\alpha; P_\delta)_C &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi t^\alpha \frac{1 - e^{-\frac{2}{\delta}}}{1 - 2e^{-\frac{1}{\delta}} \cos t + e^{-\frac{2}{\delta}}} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi t^\alpha K_\delta(t) dt = \frac{2}{\pi\delta} \int_0^\infty \frac{(t^\alpha)_{2\pi}}{\frac{1}{\delta^2} + t^2} dt = \\ &= \frac{2}{\pi\delta} \int_0^{2\pi} \frac{t^\alpha}{\frac{1}{\delta^2} + t^2} dt + \frac{2}{\pi\delta} \int_{2\pi}^\infty \frac{(t^\alpha)_{2\pi}}{\frac{1}{\delta^2} + t^2} dt. \\ \frac{2}{\pi\delta} \int_0^{2\pi} \frac{t^\alpha}{\frac{1}{\delta^2} + t^2} dt &= \frac{2}{\pi\delta^\alpha} \int_0^{\pi\delta} \frac{t^\alpha}{1+t^2} dt = \frac{2}{\pi\delta^\alpha} \int_0^\infty \frac{t^\alpha}{1+t^2} dt - \frac{2}{\pi\delta^\alpha} \int_{\pi\delta}^\infty \frac{t^\alpha}{1+t^2} dt. \end{aligned}$$

Пользуясь формулой (856.07) [13], возьмем первый интеграл из правой части последнего равенства:

$$\frac{2}{\pi\delta^\alpha} \int_0^\infty \frac{t^\alpha}{1+t^2} dt = \frac{2}{\pi\delta^\alpha} \frac{\pi}{2 \cos \frac{\alpha\pi}{2}} = \frac{1}{\cos \frac{\alpha\pi}{2}} \frac{1}{\delta^\alpha}.$$

Так как

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi\delta^\alpha} \int_{\pi\delta}^\infty \frac{t^\alpha}{1+t^2} dt &< \frac{2}{\pi\delta^\alpha} \int_{\pi\delta}^\infty t^{\alpha-2} dt = O\left(\frac{1}{\delta}\right), \\ \frac{2}{\pi\delta} \int_0^{2\pi} \frac{t^\alpha}{\frac{1}{\delta^2} + t^2} dt &< \frac{2}{\pi\delta} \int_0^{2\pi} t^\alpha dt = O\left(\frac{1}{\delta}\right), \\ \frac{2}{\pi\delta} \int_{2\pi}^\infty \frac{(t^\alpha)_{2\pi}}{\frac{1}{\delta^2} + t^2} dt &< \frac{2}{\pi\delta} \int_{2\pi}^\infty \frac{2\pi}{\frac{1}{\delta^2} + t^2} dt < \frac{4}{\delta} \int_{2\pi}^\infty t^{-2} dt = O\left(\frac{1}{\delta}\right), \end{aligned}$$

то получаем (18).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г.М. Фихтенгольц. – т. 3. – М. : физматгиз, 1960. – 656 с.
2. Степанец, А.И. Равномерные приближения тригонометрическими полиномами / А.И. Степанец. – К : Наук. Думка, 1981. – 340 с.
3. Натансон, И.П. О порядке приближения непрерывной 2π -периодической функции при помощи ее интеграла Пуассона / И.П. Натансон // Докл. АН СССР. – 1950. – 72. – С. 11–14.
4. Тимман, А.Ф. Точная оценка остатка при приближении периодических дифференцируемых функций интегралами Пуассона / А.Ф. Тиман // Докл. АН СССР. – 1950. – 74. – С. 17–20.
5. Малей, Л.В. Точная оценка приближения квазигладких функций интегралами Пуассона / Л.В. Малей // Докл. АН БССР. Сер. физ.-техн. 1961, № 3. – С.25–32.

6. Штарк, Е.Л. Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонения функций из Lip_1 от сингулярного интеграла Абеля-Пуассона / Е.Л. Штарк // Мат. Заметки. – 1973. – 13, № 1 – С. 21–28.
7. Баскаков, В.А. О некоторых свойствах операторов типа операторов Абеля-Пуассона / В.А. Баскаков // Мат. Заметки. – 1975. – 17, № 2. – С.169–180.
8. Zhyhallo, K.M. Complete asymptotics of the deviation of a class of differentiable functions from the set of their harmonic Poisson integrals / K.M. Zhyhallo, Yu.I. Kharkevych // Ukr. Math. Journal. – 2002. – 54, № 1. – P. 51–63.
9. Kharkevych, Yu.I. Approximation of (ψ, β) -differentiable functions defined on the real axis by Abel-Poisson operators / Yu.I. Kharkevych, T.V. Zhyhallo // Ukr. Math. Journal. – 2005. – 57, № 8. – P. 1297–1315.
10. Zhyhallo, T.V. Approximation of (ψ, β) -differentiable functions by Poisson integrals in the uniform metric / T.V. Zhyhallo, Yu.I. Kharkevych // Ukr. Math. Journal. – 2009. – 61, № 11. – P. 1757–1779.
11. Zhyhallo, T.V. Approximation of functions from the class C_{ψ}^{β} by Poisson integrals in the uniform metric / T.V. Zhyhallo, Yu.I. Kharkevych // Ukr. Math. Journal. – 2009. – 61, №12. – P. 1893–1914.
12. Титмарш, Е. Введение в теорию интегралов Фурье / Е. Титмарш. – М.-Л. – 1948.
13. Двайт, Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы / Г.Б. Двайт. – М. – 1973.

J. Zajac, Yu.I. Kharkevych, T.A. Stepaniuk. Approximating Properties of Poisson's Integrals on the Classes H_{ω}

In work we conducted research of questions of approximation functions from the classes H_{ω} , that is to say the functions which satisfied the condition $|f(x) - f(x')| \leq \omega(|x - x'|) \quad \forall x, x'$, with a help of Poisson's integrals. Approximative properties of the method of approximation by integrals of Poisson on the classes of differentiable functions were researched by many of mathematicians, such as I.P. Natanson, A.F. Timan, B. Nagy, L.V. Malej, E.L. Shtark, V.A. Baskakov, L.P. Fallaleev, K.M. Zhyhallo, Yu.I. Kharkevych and T.V. Zhyhallo. and others. We obtained the equality for upper border of defluxion the functions from the classes H_{ω} from Poisson's integrals.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 10.05.2011 г.

УДК 517.5

И.В. Кальчук, Р.А. Маковий, А.О. Задорожный, И.П. Приймас**4-ГАРМОНИЧЕСКИЙ ИНТЕГРАЛ ПУАССОНА
КАК РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ**

В работе рассматривается задача Дирихле для 4-гармонического уравнения $\Delta^4 u = 0$. Решение этой задачи будем называть 4-гармоническим интегралом Пуассона, который являет определенный интерес в теории приближения функций. Также найдено разложение ядра 4-гармонического интеграла Пуассона в ряд Фурье.

Пусть задана функция $u = u(z) = u(re^{i\varphi})$, $0 \leq r < 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Через $K^r : K_0^r \subset R^n$ обозначим обобщенный шар с радиусом r и центром в начале координат, S^r – граница шара, Ω – внутренность шара.

Для m -гармонического оператора $\Delta^m := \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \right)^m$ рассмотрим задачу Дирихле: найти решение уравнения

$$\Delta^m u = 0 \quad (1)$$

в области Ω при заданных граничных условиях

$$\left. \frac{\partial^k u}{\partial n^k} \right|_{S^r} = g_k, \quad (k = 0, 1, \dots, m-1), \quad (2)$$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ – нормальная производная на границе шара.

Известно [1], если выполняется условие $g_k \in C^{m-1-k}(S^r)$, то решение $u(x)$ этой задачи Дирихле для $x \in \Omega$ представляется в виде формулы:

$$u(x) = \frac{(-1)^{m-1} (r^2 - |x|^2)^m}{(m-1)! \omega_n r^{n-1}} \int_{S^r} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} \left[\frac{\partial^{m-1-k}}{\partial (r^2)^{m-1-k}} \cdot \frac{r^{n-2}}{|x-y|^n} \right] g_k(y) dO_n(y). \quad (3)$$

Положив в формуле (3) $m = 4$, $n = 2$, получим

$$u(x) = \frac{(-1)^3 (r^2 - |x|^2)^4}{3! \omega_2 r} \left[\int_{S^r} \frac{\partial^3}{\partial (r^2)^3} \left(\frac{1}{|x-y|^2} \right) g_0(y) ds + 3 \int_{S^r} \frac{\partial^2}{\partial (r^2)^2} \left(\frac{1}{|x-y|^2} \right) g_1(y) ds + \right. \\ \left. + 3 \int_{S^r} \frac{\partial}{\partial (r^2)} \left(\frac{1}{|x-y|^2} \right) g_2(y) ds + \int_{S^r} \frac{1}{|x-y|^2} g_3(y) ds \right].$$

Учитывая, что $\omega_2 = 2\pi r$, $x = |x| e^{i\varphi}$, $y = r e^{it}$, $ds = r dt$, из предыдущей формулы имеем

$$u(|x| e^{i\varphi}) = -\frac{(r^2 - |x|^2)^4}{3! \cdot 2\pi r \cdot r} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{\partial^3}{\partial (r^2)^3} \left(\frac{1}{|x|^2 - 2|x|r \cos(\varphi - t) + r^2} \right) g_0(re^{it}) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& +3 \frac{\partial^2}{\partial (r^2)^2} \left(\frac{1}{|x|^2 - 2|x|r \cos(\varphi - t) + r^2} \right) g_1(re^{it}) + \\
& +3 \frac{\partial}{\partial (r^2)} \left(\frac{1}{|x|^2 - 2|x|r \cos(\varphi - t) + r^2} \right) g_2(re^{it}) + \\
& + \left(\frac{1}{|x|^2 - 2|x|r \cos(\varphi - t) + r^2} \right) g_3(re^{it}) \Big] r dt. \quad (4)
\end{aligned}$$

Найдем соответствующие производные из последнего равенства. Поскольку $\frac{\partial}{\partial r^2}(r) = \frac{1}{2r}$, $\frac{\partial}{\partial r^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{2r^3}$, $\frac{\partial}{\partial r^2}\left(\frac{1}{r^2}\right) = -\frac{1}{r^4}$ и $\frac{\partial}{\partial r^2}\left(\frac{1}{r^3}\right) = -\frac{3}{2} \frac{1}{r^5}$, то

$$\frac{\partial}{\partial (r^2)} \left(\frac{1}{|x|^2 - 2|x|r \cos(\varphi - t) + r^2} \right) = -\frac{-\frac{|x|}{r} \cos(\varphi - t) + 1}{(|x|^2 - 2|x|r \cos(\varphi - t) + r^2)^2}, \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial (r^2)^2} \left(\frac{1}{|x|^2 - 2|x|r \cos(\varphi - t) + r^2} \right) &= \frac{\partial}{\partial (r^2)} \left(-\frac{-\frac{|x|}{r} \cos(\varphi - t) + 1}{(|x|^2 - 2|x|r \cos(\varphi - t) + r^2)^2} \right) = \\
&= \frac{|x| \frac{\partial}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \right) \cos(\varphi - t) \cdot (|x|^2 - 2|x|r \cos(\varphi - t) + r^2)}{(|x|^2 - 2|x|r \cos(\varphi - t) + r^2)^3} + \\
&+ \frac{\left(-\frac{|x|}{r} \cos(\varphi - t) + 1 \right) \cdot 2 \left(-2|x| \frac{\partial}{\partial r^2}(r) \cos(\varphi - t) + 1 \right)}{(|x|^2 - 2|x|r \cos(\varphi - t) + r^2)^3} = \\
&= \frac{-\frac{|x|}{2r^3} \cos(\varphi - t) \cdot (|x|^2 - 2|x|r \cos(\varphi - t) + r^2) + 2 \left(-\frac{|x|}{r} \cos(\varphi - t) + 1 \right) \cdot \left(-\frac{|x|}{r} \cos(\varphi - t) + 1 \right)}{(|x|^2 - 2|x|r \cos(\varphi - t) + r^2)^3} = \\
&= \frac{1}{2} \frac{4 - 9 \frac{|x|}{r} \cos(\varphi - t) + 6 \frac{|x|^2}{r^2} \cos^2(\varphi - t) - \frac{|x|^3}{r^3} \cos^3(\varphi - t)}{(|x|^2 - 2|x|r \cos(\varphi - t) + r^2)^3}, \quad (6)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^3}{\partial (r^2)^3} \left(\frac{1}{|x|^2 - 2|x|r \cos(\varphi - t) + r^2} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r^2} \left(\frac{4 - 9 \frac{|x|}{r} \cos(\varphi - t) + 6 \frac{|x|^2}{r^2} \cos^2(\varphi - t) - \frac{|x|^3}{r^3} \cos^3(\varphi - t)}{(|x|^2 - 2|x|r \cos(\varphi - t) + r^2)^3} \right) = \\
&= \frac{-9|x| \frac{\partial}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \right) \cos(\varphi - t) + 6|x|^2 \frac{\partial}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r^2} \right) \cos^2(\varphi - t) - |x|^3 \frac{\partial}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r^3} \right) \cos^3(\varphi - t)}{2(|x|^2 - 2|x|r \cos(\varphi - t) + r^2)^3} - \\
&- \frac{3}{2} \frac{\left(4 - 9 \frac{|x|}{r} \cos(\varphi - t) + 6 \frac{|x|^2}{r^2} \cos^2(\varphi - t) - \frac{|x|^3}{r^3} \cos^3(\varphi - t) \right) \left(-2|x| \frac{\partial}{\partial r^2} (r) \cos(\varphi - t) + 1 \right)}{(|x|^2 - 2|x|r \cos(\varphi - t) + r^2)^4} = \\
&= \frac{\frac{9}{2} \frac{|x|}{r^3} \cos(\varphi - t) - 6 \frac{|x|^2}{r^4} \cos^2(\varphi - t) + \frac{3}{2} \frac{|x|^3}{r^5} \cos^3(\varphi - t)}{2(|x|^2 - 2|x|r \cos(\varphi - t) + r^2)^3} - \\
&- \frac{3}{2} \frac{\left(4 - 9 \frac{|x|}{r} \cos(\varphi - t) + 6 \frac{|x|^2}{r^2} \cos^2(\varphi - t) - \frac{|x|^3}{r^3} \cos^3(\varphi - t) \right) \left(-\frac{|x|}{r} \cos(\varphi - t) + 1 \right)}{(|x|^2 - 2|x|r \cos(\varphi - t) + r^2)^4} = \\
&= -\frac{3}{4} \left(\frac{8 - 29 \frac{|x|}{r} \cos(\varphi - t) + 40 \frac{|x|^2}{r^2} \cos^2(\varphi - t) - 6 \frac{|x|^3}{r^3} \cos^3(\varphi - t) - 20 \frac{|x|^3}{r^3} \cos^3(\varphi - t)}{(|x|^2 - 2|x|r \cos(\varphi - t) + r^2)^4} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{8 \frac{|x|^4}{r^4} \cos^2(\varphi - t) - \frac{|x|^5}{r^5} \cos(\varphi - t)}{(|x|^2 - 2|x|r \cos(\varphi - t) + r^2)^4} \right). \tag{7}
\end{aligned}$$

Подставляя найденные производные (5)–(7) в (4) и положив $r = 1$, $|x| = r$, получим решение задачи Дирихле для 4-гармонического уравнения $\Delta^4 u = 0$ в единичном круге при заданных граничных условиях $u|_{r=1} = g_0$, $\frac{\partial u}{\partial r}|_{r=1} = g_1$, $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}|_{r=1} = g_2$, $\frac{\partial^3 u}{\partial r^3}|_{r=1} = g_3$:

$$\begin{aligned}
u(re^{i\varphi}) &= \frac{(1-r^2)^4}{16\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[8 - 29r \cos(\varphi - t) + 40r^2 \cos^2(\varphi - t) - 6r^3 \cos^3(\varphi - t) - 20r^3 \cos^3(\varphi - t) + \right. \\
&\quad \left. + 8r^4 \cos^2(\varphi - t) - r^5 \cos(\varphi - t) \right] \frac{g_0(e^{it}) dt}{(r^2 - 2r \cos(\varphi - t) + 1)^4} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{(1-r^2)^4}{8\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{4-9r\cos(\varphi-t)+6r^2\cos^2(\varphi-t)-r^3\cos(\varphi-t)}{(r^2-2r\cos(\varphi-t)+1)^3} g_1(e^{it}) dt + \\
& + \frac{(1-r^2)^4}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r\cos(\varphi-t)}{(r^2-2r\cos(\varphi-t)+1)^2} g_2(e^{it}) dt - \frac{(1-r^2)^4}{12\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{g_3(e^{it})}{r^2-2r\cos(\varphi-t)+1} dt.
\end{aligned}
\tag{8}$$

Замечание. Следует отметить, что если в формуле (3) положить $n=2$, то при $m=1$ получим гармонический интеграл Пуассона [2–10]), при $m=2$ – бигармонический интеграл Пуассона [11–16], и если $m=3$ – тригармонический интеграл Пуассона [17].

Поэтому величину

$$\begin{aligned}
P_4(r, \varphi) = & \frac{(1-r^2)^4}{16\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [8-29r\cos(\varphi-t)+40r^2\cos^2(\varphi-t)-6r^3\cos(\varphi-t)-20r^3\cos^3(\varphi-t)+ \\
& + 8r^4\cos^2(\varphi-t)-r^5\cos(\varphi-t)] \frac{g_0(e^{it}) dt}{(r^2-2r\cos(\varphi-t)+1)^4},
\end{aligned}
\tag{9}$$

аналогично вышеупомянутому замечанию, будем называть 4-гармоническим интегралом Пуассона.

Пусть, далее, $g_0(e^{it}) = f(t)$. В результате замены переменной в (9) будем иметь:

$$\begin{aligned}
P_4(r, f, x) = & \frac{(1-r^2)^4}{16\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) [8-29r\cos t + 40r^2\cos^2 t - 6r^3\cos t - 20r^3\cos^3 t + \\
& + 8r^4\cos^2 t - r^5\cos t] \frac{dt}{(r^2-2r\cos t+1)^4}
\end{aligned}$$

или

$$P_4(r, f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) K_4(r, t) dt,$$

где $K_4(r, t)$ – ядро 4-гармонического интеграла Пуассона, имеющее вид

$$K_4(r, t) = \frac{(1-r^2)^4}{16} \frac{8-29r\cos t + 40r^2\cos^2 t - 6r^3\cos t - 20r^3\cos^3 t + 8r^4\cos^2 t - r^5\cos t}{(1-2r\cos t+r^2)^4}. \tag{10}$$

Для ядра $K_4(r, t)$ справедливо представление:

$$K_4(r, t) = \frac{(1-r^2)^2}{4} \left(\frac{5(1-r^2)}{8} p(r, t) + \frac{5-11r^2}{8} p^2(r, t) + \frac{1-2r^2}{2} p^3(r, t) + \frac{1-r^2}{4} p^4(r, t) \right), \tag{11}$$

где

$$p(r, t) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}. \tag{12}$$

Действительно,

$$8-29r\cos t + 40r^2\cos^2 t - 6r^3\cos t - 20r^3\cos^3 t + 8r^4\cos^2 t - r^5\cos t =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{5}{2} (1 + 3r^2 + 3r^4 + r^6 - 6r \cos t - 12r^3 \cos t - 6r^5 \cos t + 12r^2 \cos^2 t + 12r^4 \cos^2 t - 8r^3 \cos^3 t) + \\
&+ \frac{1}{2} (11 - 15r^2 - 15r^4 - 5r^6 - 28r \cos t - 48r^3 \cos t + 28r^5 \cos t + 20r^2 \cos^2 t - 44r^4 \cos^2 t) = \\
&= \frac{5}{2} (1 - 2r \cos t + r^2)^3 + \frac{1}{2} ((5 - 11r^2)(1 + 2r^2 + r^4 - 4r \cos t - 4r^3 \cos t + 4r^2 \cos^2 t) + \\
&\quad + 2(3 - 7r^2 + r^4 + 3r^6 - 4r \cos t + 12r^3 \cos t - 8r^5 \cos t)) = \frac{5}{2} (1 - 2r \cos t + r^2)^3 + \\
&+ \frac{1}{2} (5 - 11r^2)(1 - 2r \cos t + r^2)^2 + 2(1 - 3r^2 + 2r^4)(1 - 2r \cos t + r^2) + (1 - r^2)^3. \quad (13)
\end{aligned}$$

Подставляя (13) в (10), будем иметь

$$\begin{aligned}
K_4(r, t) &= \frac{(1-r^2)^4}{16} \left(\frac{5}{2(1-2r \cos t + r^2)} + \frac{5-11r^2}{2(1-2r \cos t + r^2)^2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{2(1-r^2)(1-2r^2)}{(1-2r \cos t + r^2)^3} + \frac{(1-r^2)^3}{(1-2r \cos t + r^2)^4} \right) = \\
&= \frac{(1-r^2)^2}{4} \left(\frac{5(1-r^2)}{8} \frac{1-r^2}{1-2r \cos t + r^2} + \frac{5-11r^2}{8} \frac{(1-r^2)^2}{(1-2r \cos t + r^2)^2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1-2r^2}{2} \frac{(1-r^2)^3}{(1-2r \cos t + r^2)^3} + \frac{1-r^2}{4} \frac{(1-r^2)^4}{(1-2r \cos t + r^2)^4} \right).
\end{aligned}$$

Откуда учитывая (12), получим формулу (11).

Разложив в ряд Фурье величины $p(r, t)$, $p^2(r, t)$, $p^3(r, t)$, $p^4(r, t)$, можно получить ряд Фурье для ядра $K_4(r, t)$.

Для нахождения коэффициентов a_k воспользуемся формулой (3.616.7) из [18]:

$$\int_0^\pi \frac{\cos kt}{(1-2r \cos t + r^2)^m} dt = \frac{r^{2m+k-2} \pi}{(1-r^2)^{2m-1}} \sum_{n=0}^{m-1} \binom{m+k-1}{n} \binom{2m-n-2}{m-1} \left(\frac{1-r^2}{r^2} \right)^n, \quad [r^2 < 1].$$

Поскольку $p(r, t) = \frac{1-r^2}{1-2r \cos t + r^2}$, $p^2(r, t)$, $p^3(r, t)$, $p^4(r, t)$ – четные функции относительно t , то $b_k = 0$ для $\forall k \in N$.

Тогда

$$S[p(r, t)] = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos kt,$$

$$S[p^2(r, t)] = \frac{1+r^2}{1-r^2} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1+r^2}{1-r^2} + k \right) r^k \cos kt,$$

$$S[p^3(r, t)] = \frac{1 + 4r^2 + r^4}{(1 - r^2)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2(1 + 4r^2 + r^4)}{(1 - r^2)^2} + \frac{3 + 3r^2}{1 - r^2} k + k^2 \right] r^k \cos kt,$$

$$S[p^4(r, t)] = \frac{1 + 9r^2 + 9r^4 + r^6}{(1 - r^2)^3} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2(1 + 9r^2 + 9r^4 + r^6)}{(1 - r^2)^3} + \frac{11 + 38r^2 + 11r^4}{3(1 - r^2)^2} k + \frac{2 + 2r^2}{1 - r^2} k^2 + \frac{k^3}{3} \right] r^k \cos kt.$$

Подставляя найденные разложения в (11), окончательно получим:

$$S[K_4(r, t)] = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(1 - r^2)(6 + 3(1 - r^2) + 2(1 - r^2)^2)}{12} k + \right.$$

$$\left. + \frac{(2 - r^2)(1 - r^2)^2}{8} k^2 + \frac{(1 - r^2)^3}{48} k^3 \right) r^k \cos kt -$$

ряд Фурье для ядра 4-гармонического интеграла Пуассона.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gonzales, L. Über das Randverhalten des Poisson-Integrals der polyharmonischen Gleichung / L. Gonzales, E. Keller, G. Wildenhain // *Mathematische Nachrichten*. – 1980. – 95. – S. 157–164.
2. Натансон, В.П. О порядке приближения непрерывной 2π -периодической функции при помощи ее интеграла Пуассона / В.П. Натансон // *Докл. АН СССР*. – 1950. – 72, № 1 – С. 11–14.
3. Тимман, А.Ф. Точная оценка остатка при приближении периодических дифференцируемых функций интегралами Пуассона / А.Ф. Тиман // *Докл. АН СССР*. – 1950. – 74, № 1 – С. 17–20.
4. Штарк, Э.Л. Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонения функций из $Lip 1$ от их сингулярного интеграла Абеля-Пуассона / Э.Л. Штарк // *Мат. заметки*. – 1973. – 13, № 1. – С. 21–28.
5. Фалалеев, Л.П. О приближении функций обобщенными операторами Абеля-Пуассона / Л.П. Фалалеев // *Сибирский матем. журнал*. – 2001. – 42, № 4. – С. 926–936.
6. Zhyhallo, K.M. Complete Asymptotics of the Deviation of a Class of Differentiable Functions from the Set of Their Harmonic Poisson Integrals / K.M. Zhyhallo, Yu.I. Kharkevych // *Ukr. Math. Journal*. – 2002. – 54, № 1. – P. 51–63.
7. Kharkevych, Yu.I. Approximation of (ψ, β) -differentiable Functions Defined on the Real Axis by Abel-Poisson Operators / Yu.I. Kharkevych, T.V. Zhyhallo // *Ukr. Math. Journal*. – 2005. – 57, № 8. – P. 1297–1315.
8. Zhyhallo, K.M. Approximation of conjugate differentiable functions by their Abel-Poisson integrals / K.M. Zhyhallo, Yu.I. Kharkevych // *Ukr. Math. Journal*. – 2009. – 61, № 1. – P. 86–98.
9. Zhyhallo, T.V. Approximation of (ψ, β) -differentiable functions by Poisson integrals in the uniform metric / T.V. Zhyhallo, Yu.I. Kharkevych // *Ukr. Math. Journal*. – 2009. – 61, № 11. – P. 1757–1779.

10. Zhyhallo, T.V. Approximation of functions from the class C_{ψ}^{β} by Poisson integrals in the uniform metric / T.V. Zhyhallo, Yu.I. Kharkevych // Ukr. Math. Journal. – 2009. – 61, № 12. – P. 1893–1914.
11. Каниев, С. Об уклонении бигармонических в круге функций от их граничных значений / С. Каниев // Докл. АН СССР. – 1963. – 153, № 5. – С. 995–998.
12. Фалалеев, Л.П. Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонений функций из Lip_1 от одного сингулярного интеграла / Л.П. Фалалеев // Теоремы вложения и их приложения (Материалы всесоюз. симп.). – Алма-Ата : Наука КазССР, 1976. – С. 163–167.
13. Zhyhallo, K.M. Approximation of Differentiable Periodic Functions by Their Biharmonic Poisson Integrals / K.M. Zhyhallo, Yu.I. Kharkevych // Ukr. Math. Journal. – 2002. – 54, 9. – P. 1462–1470.
14. Kharkevych, Yu.I. Asymptotics of the values of approximations in the mean for classes of differentiable functions by using biharmonic Poisson integrals / Yu.I. Kharkevych, I.V. Kal'chuk // Ukr. Math. Journal. – 2007. – 59, № 8. – P. 1224–1237.
15. Kharkevych, Yu.I. Approximation of functions from the class by Poisson biharmonic operators in the uniform metric / Yu.I. Kharkevych, T.V. Zhyhallo // Ukr. Math. Journal. – 2008. – 60, № 5. – P. 769–798.
16. Zhyhallo, K.M. Approximation of conjugate differentiable functions by biharmonic Poisson integrals / K.M. Zhyhallo, Yu.I. Kharkevych // Ukr. Math. Journal. – 2009. – 61, № 3. – P. 399–413.
17. Zhyhallo, K.M. On the Approximation of Functions of the Hölder Class by Triharmonic Poisson Integrals / K.M. Zhyhallo, Yu.I. Kharkevych // Ukr. Math. Journal. – 2001. – 53, № 6. – P. 1012–1018.
18. Градштейн, И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик – М. : Физматиз, 1963. – 1100 с.

I.V. Kalchuk, R.O. Makovij, A.O. Zadorozhnyi, I.P. Priymas. 4-harmonic Poisson Integral as the Solution of Boundary-Value Problem

In the work we consider the Dirichlet problem for 4-harmonic equation $\Delta^4 u = 0$. We will call the solution of this problem 4-harmonic Poisson Integral, which is of certain interest in the theory of approximation of function. The decomposition of the core of 4-harmonic Poisson Integral in Fourier series was found.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 10.05.2011 г.

УДК 004.6

А.А. Козинский, В.В. Охримчук

РЕАЛИЗАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОГРАММНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ УЧЕТОМ ВОЕННООБЯЗАННЫХ

Работа посвящена созданию модели автоматизированной программной системы управления учетом военнообязанных. Освещено решение следующих задач: создание инфологической модели базы данных, масштабирование текстовых полей печатных форм, построение элементов интерфейса, справочников, системы поиска и отображения информации, сетевого пользовательского интерфейса. Значительное внимание уделено элементам технического задания, выбору программных средств реализации моделей системы управления. Объектом автоматизации системы «Учет военнообязанных» является комплекс задач по постановке военнообязанных на учет, созданию извещений о постановке на учет для пересылки по месту прежнего учета, формирование команд и др. Описаны фрагменты программных кодов, реализующих решение поставленных задач, скриншоты диалоговых страниц.

В 2011 году перед авторами была поставлена задача создания автоматизированной системы управления учетом военнообязанных. Заказчиком выступил Брестский городской военный комиссариат. Специфика ожидаемого решения определялась тем, что программная система (ПС) на всех этапах проектирования оперирует данными, которые непосредственно для разработчиков не могут быть конкретизированы. Всю информацию базы данных, как правило, составляют сведения, не подлежащих разглашению. Другими словами, разработчики имеют дело только с абстрактными данными и моделями их обработки. Конкретное наполнение информационной системы и обработка данных в соответствии с поставленной задачей выполняется работниками военкомата. Такие условия разработки налагают дополнительные требования к надежности системы, ее структуре и интерфейсу, обеспечению защиты информации от несанкционированного доступа, к сетевому доступу пользователей.

В настоящей работе представлено краткое описание основных этапов моделирования программной системы управления учетом военнообязанных. Их изложение представляет интерес, во-первых, как поэтапное описание реализации математической модели системы управления, во-вторых, как задача, требующая применения нестандартных решений, моделей и средств современных технологий программирования.

Дадим общее описание предметной области, являющееся компонентом технического задания по созданию системы управления.

Объектом автоматизации системы «Учет военнообязанных» является комплекс задач по постановке военнообязанных на учет, созданию извещений о постановке на учет для пересылки по месту прежнего учета, формирование команд, формирование основных составов команд с разбиением по группам (литерам), формирование организационного ядра на базе основного состава команд, формирование резервного состава команд, формирование предварительных пунктов сбора военнообязанных (ППСВ), формирование повесток о сборах на ППСВ с учетом временных интервалов сбора, формирование участков оповещения, формирование маршрутов оповещения для участков, формирование мобилизационных предписаний, формирование приписных карт, формирование именных списков. Цель автоматизации – сокращение большого объема ручных трудозатрат для ведения информации и отчетных документов по решению комплекса задач учета военнообязанных, задач формирования команд,

участков, маршрутов, учетных карточек, приписных карт, мобилизационных предписаний, извещений, повесток, алфавитных карточек, именных списков. Все вышеперечисленные компоненты системы дают представление об объеме документов, подлежащих обработке и, соответственно, доле труда. Большая часть такого труда выполняется сотрудниками военкомата без применения средств автоматизации. Организационная структура объекта автоматизации представлена военным комиссаром, отделом учета военнообязанных, ППСВ, участками оповещения, маршрутами.

Фрагмент описания функционирования объекта приведен ниже. Военнообязанный (ВО) становится на учет. Для него заполняются Учетная карточка (УК), Алфавитная карточка (АК), извещение. По параметрам трех разрядов учета (Первый: солдаты и сержанты от постановки на учет до 35 лет, мужчины-прапорщики до 45 лет; Второй: от 35 лет + 1 день до 45 лет, мужчины-прапорщики до 50 лет; Третий: от 45 лет + 1 день до 50 лет, мужчины-прапорщики до 55 лет, женщины до 45 лет (солдаты и сержанты), женщины-прапорщики до 50 лет). Для уточнения разрядов автоматизированная система содержит компонент «Разбиение ВО по разрядам» с фиксацией трех разрядов и свойств-фильтров по параметрам (пол, точный возраст (интервально), звания (перечисление), должности (перечисление), особые отметки).

Данный фрагмент технического задания, в силу ограниченности объема статьи, дает лишь начальное представление о содержании системы управления и части решаемых задач. Подробное описание предметной области выполнено в тексте технического задания.

Программная система управления «Учет военнообязанных» предназначена для автоматизации решения следующих задач:

1. Ввод данных с использованием клавиатуры, отображение на дисплее сведений о военнообязанных в виде форм стандартного учета, сохранение данных на носителе, чтение данных с носителя, реализация стандартных запросов к базам данных с целью получения статистических сведений о военнообязанных, записанных средствами программной системы учета военнообязанных.

2. Обращение к данным средствами, предоставляемыми технологиями клиент-сервер.

3. Защита хранимых данных средствами криптографии, которая осуществляется на уровне авторизации пользователей, хранения данных, защиты управляющего кода системы управления базой данных.

4. Разграничение прав доступа на уровни доступа (описание уровней приведено в техническом задании).

Условиями функционирования программной системы учета военнообязанных является сетевая вычислительная система, состоящая из сервера, работающего под управлением операционной системы (Microsoft либо Linux) с установленным программным обеспечением (сервер Apache, MySQL, PHP), протоколами Ipv4, Ipv6, IPX, TCP и стандартных браузеров-клиентов [1–3].

Персонал, сопровождающий ПС ВО на сервере и клиенте должен владеть навыками установки и настройки сетевого программного обеспечения для сервера Apache, MySQL, PHP, протоколов Ipv4, Ipv6, IPX, TCP.

К пользователям программной системы учета военнообязанных предъявляются следующие требования: владение навыками ведения диалога средствами операционной системы; наличие навыков внесения и редактирования записей базы данных с использованием экранных форм; умение использовать средства СУБД для формулирования запросов; навыки работы с браузером.

Описание предметной области, фрагмент которого приведен выше, позволило представить для нее информационно-логическую модель базы данных.

Примерный перечень сущностей, определенный на начальном этапе разработки, следующий: Военнообязанный, Команда, ППСВ, военно-учетные специальности, Должности, Участок, Маршрут.

На основании проектирования сущностей и связей выполнено информационно-логическое моделирование предметной области [4].

На основании проектирования сущностей и связей выполнено информационно-логическое моделирование предметной области (рисунок 1) и моделирование системы управления данными.

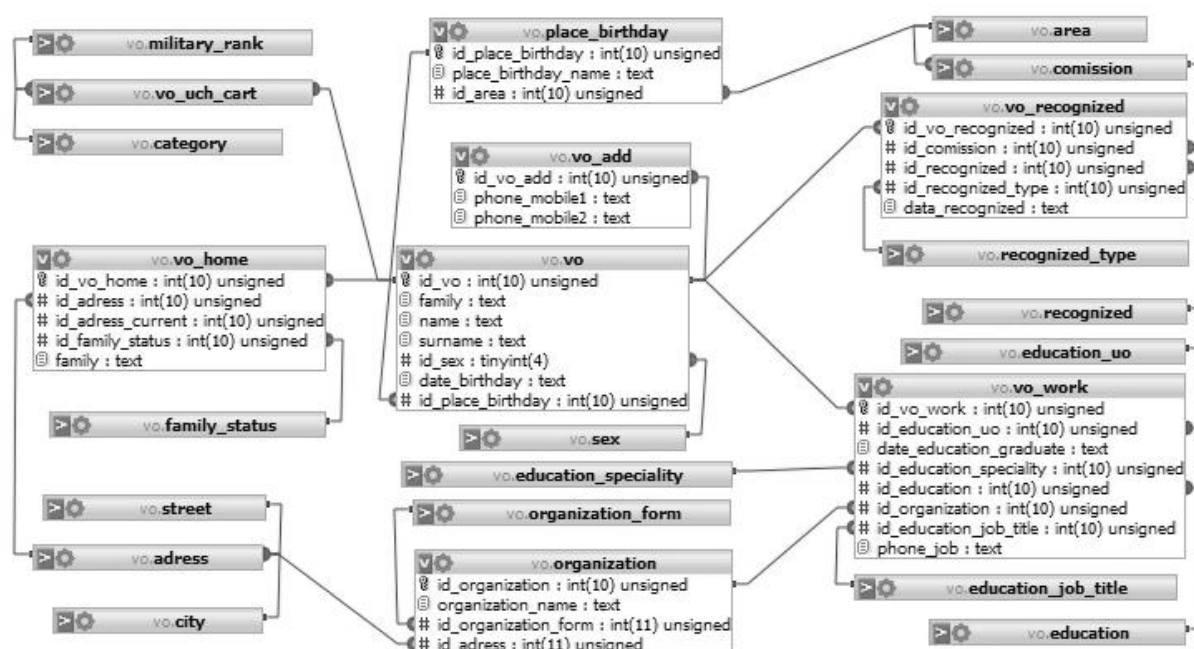


Рисунок 1 – Фрагмент инфологической модели предметной области
«Учет военнообязанных»

Инфологическое моделирование выполнено средствами phpMyAdmin. Выбор программного обеспечения объясняется полной совместимостью с используемой базой данных MySQL и условиями распространения. Такая совместимость позволила легко перейти от инфологической модели базы данных к даталогической.

Модель системы управления, выполненная средствами phpMyAdmin, представлена на рисунке 2.

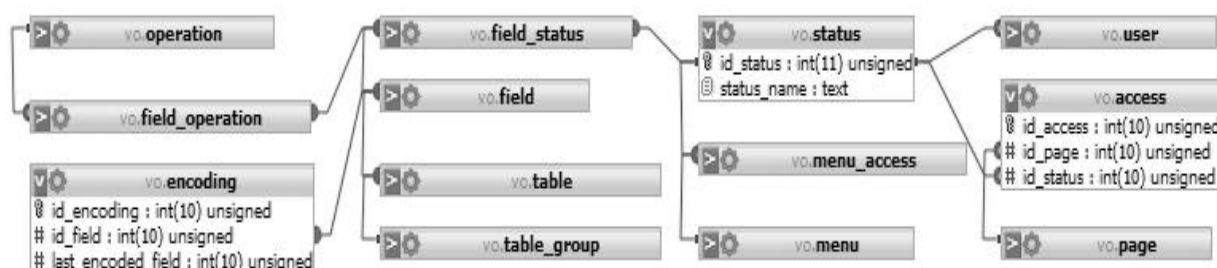


Рисунок 2 – Модель системы управления

Приведем сокращенный перечень основных и сопутствующих задач для автоматизации на основе базы данных, а также некоторые фрагменты их решения. Основными задачами являлись: формирование списочного состава команд с разбиением по составам и литерам, формирование ППСВ, формирование участков на основе адресных данных о ВО, формирование маршрутов на основе адресных данных об участках и адресов ВО, формирование именных списков. Сопутствующими задачами определены: поиск продублированных данных о ВО в форме визуального контроля по совпадающим фамилии, имени, отчеству с выводом для проверки дополнительных сведений (дата рождения, адрес места жительства, другие сведения по выбору), масштабирование данных для вывода в поле формы ограниченного размера. Число экземпляров форм, требующих обработки, пропорционально мощности базы данных. Число печатных форм на каждого военнообязанного более десяти. Предварительная экспертная оценка показала, что мощность базы данных составляет около 100 тысяч записей.

Входная информация для системы представлена стандартными печатными формами. Фрагмент одной из форм, реализованных в системе, приведен на рисунке 3.

Год рождения	<u>1980</u>					Степень годности
(18.) № ВУС	Код должности	УЧЕТНАЯ КАРТОЧКА				Г
100	915	к военному билету серии № <u>НБ 1047628</u>				
(фамилия, имя, отчество)		(10.) Военное звание	<u>рядовой</u>	ПРЕДНАЗНАЧЕН:		
<u>Иванов</u>		(16.) Категория учета	1	№ команды и литер по ВУС	Р00000А	
<u>Иван</u>				100		
<u>Иванович</u>		(17.) Группа учета	ОПС		на воинскую должность	стрелок
Число, месяц, год рождения			(18.) Состав	В/звание по штату		
14 07 1980					солдаты	
(1.) Место рождения			(19.) Наимен. воинск. должности и ВУС (долж. квалифик.)	№ маршрута		<u>рядовой</u>
<u>г. Брест</u>						
<u>Брестская обл.</u>					<u>10/1284 10/2154</u>	

Рисунок 3 – Фрагмент учетной карточки

Сложность автоматизированного заполнения такого рода форм (фиксированный размер и сложная разметка) состоит в невозможности априорно определить занимаемое место для вывода данных. Использование мелких шрифтов на электронной форме затрудняет чтение информации и эстетическое представление. Решение проблемы было построено с использованием Java Script Фреймворка jQuery. С его помощью реализована возможность динамического масштабирования записей на электронной форме на стороне клиента (для наглядности на рисунке 3 масштабируемые данные подчеркнуты). Фрагмент скрипт-кода для масштабирования приведен ниже.

```
Фрагмент 1 – jQuery код для масштабирования
// jQuery методы для вписывания данных в формы
$(document).ready(function () {
    var minFontSize = 8;
    var minLineHeight = 7;

    // Уменьшение размеров текста чтобы не выходило за внешний
    // контейнер
    $('data').each(
        function() {
            var cont = $(this).parent().parent();
            if (cont.hasClass('dcont'))
                cont = cont.parent();
            var width = cont.width();
            var height = cont.height();
            // Уменьшаем по ширине
            while (($(this).width() > width - 2) || ($(this).height() > height + 1)) {
                var newFontSize = $(this).css('font-size');
                newFontSize = newFontSize.replace("px", "") - 1;
                $(this).css('font-size', newFontSize + 'px');
                if (newFontSize <= minFontSize) {
                    $(this).css('width', width + 'px');
                    break;
                }
            }

            // Уменьшаем отступы между строками
            if (height > 0)
                while ($(this).height() > height) {
                    var newLineHeight = $(this).css('line-height');
                    newLineHeight = newLineHeight.replace("px", "") - 1;
                    $(this).css('line-height', newLineHeight + 'px');
                    if (newLineHeight <= minLineHeight) {
                        $(this).css('height', height + 'px');
                        break;
                    }
                }
            $(this).css('position', 'static');
        });
});
```

В ПС ВО присутствуют несколько десятков взаимосвязанных справочных таблиц. Проектирование интерфейса их взаимодействия представляло интерес при разработке системы управления учетом военнообязанных. Для обработки справочников реализована удобная и эффективная система, которая предоставляет навигацию, поиск и сортировку по записям и полям данных.

Внешний вид диалоговой среды системы предоставлен на рисунках 4, 5.

 Справочники | Учёт военнообязанных

Данные ВО Справочники Выходные документы Настройки Права доступа Выход

Таблицы **street (Улицы) [699]**

Страницы: ← 1 2 3 4 ... 9 10 11 12 13 14 15 ... 32 33 34 35 →

	id_street	street_name		
address (Адрес)				
area (Области)	221	ЖАСМИНОВАЯ		
category (Категории)	222	ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНАЯ		
city (Города)	223	ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНЫЙ, ПЕР		
comission (Комиссия)	224	ЖИТНИЙ, ПЕР		
education (Образование)	225	ЖИТНЯЯ		
	226	ЖИТОМИРСКАЯ		

Рисунок 4 – Диалог. Взаимодействие со справочниками

 Права доступа | Учёт военнообязанных

Данные ВО Справочники Настройки Права доступа Выход

Параметры	Администратор	Военный комиссар	Секретарь	Гость
Главная	☒	☒	☒	☒
Пользователи	☒	☐	☐	☐
Справочники	☒	☒	☐	☐
Настройки	☒	☒	☒	☐
Права доступа	☒	☐	☐	☐
Данные о военнообязанных	☒	☒	☒	☐
Выходные документы	☒	☒	☒	☐
Таблицы	☒	☐	☐	☐
Импорт данных	☒	☐	☐	☐

Copyright © 2009-2011. Валерий Охримчук

Рисунок 5 – Диалог. Редактирование доступа на страницы в зависимости от статуса пользователя

В ходе проектирования широко используется работа со списками. Многие из списков имеют большой размер, что затрудняет поиск и существенно замедляет взаимодействие. Пример такого списка содержит форма для редактирования информации о военнообязанном (рисунок 6). Для эффективной работы со списками форм используется расширенный поиск и оптимальная загрузка справочников (фрагмент 2). Для решения указанных задач применены технологии:

1) AJAX (для динамического обращения к серверу). Позволяет в описываемой системе управления выполнять загрузку только необходимого фрагмента страницы при обращении к серверу, тогда как «стандартные средства» HTML производят полную перезагрузку при любом ее изменении.

2) JSON. Представляет собой усовершенствованную технологию объектного подхода. Дает возможность эффективно организовывать передачу данных между сервером и клиентом.

3) jQuery, Java Script, Фреймворк, позволяющий облегчить работу с элементами HTML страниц [6].

Общая информация | Учётная карточка | Предназначение | Прохождение военной службы | Другие данные | Воинский учёт | Особые отметки

Иванов Иван Иванович 01.02.1960

Общая информация

Фамилия	Иванов
Имя	Иван
Отчество	Иванович
Пол	Мужской
Дата рождения	01.02.1960
(1.) Место рождения	Брест
(2.) Образование	Брестское ПТУ 65
В каком году	1999
(3.) Основная гражданская специальность	ист
Место работы	программист
Должность	системотехник
	юрист

Сохранить

Рисунок 6 – Форма для редактирования информации о военнообязанном

Фрагмент 2 – Программный код динамической загрузки справочников

// jQuery методы для работы со списками

\$(document).ready(function () {

 // Загрузка содержимого в div

 load = function (element) {

 if (element.attr('value-last') != element.attr('value')) {

 element.attr('value-last', element.attr('value'));

 var listContainer = element.parent().parent();

 var listEditContainer = listContainer.find('.listEditContainer');

 var listEdit = listContainer.find('.listEdit');

 var listDiv = listContainer.find('.listDiv');

 // Загрузка выпадающего списка

 \$.getJSON("inc/ajax_json.php",

 {

 table : element.attr('table'),

 field : element.attr('field'),

 value : element.attr('value')

 },

 function(data) {

 listDiv.html("");

 // Добавление данных на страницу

 \$.each(data, function(key, val) {

 listDiv.append('<div class="listResult" id="' + element.attr('field') +

val.id + "'> + val.content + '</div>');

 });

 // Подсвечивание результатов при наведении мышки

```

        listContainer.find('.listResult').hover(
            function() {
                listDiv.find('.listResult.select').removeClass('select');
                $(this).addClass('select');
            });
        // Обработка нажатий
        listContainer.find('.listResult').bind('click',
            function() {
                listEdit.attr('value', $(this).text());
                load(element);
                element.focus();
            });
    });
}
};
});

```

Специфика сведений, представленных в базе данных системы, требует защиты информации от несанкционированного доступа. Для защиты используется класс Encoding, программный код которого приведен во фрагменте 3.

Фрагмент 3 – PHP код класса кодирования

```

<?php
// Кодирование
class Encoding
{
    // Закодированные поля
    private $field_code = array();

    // Загружена таблица или нет
    private $field_code_load = array();

    private $gamma = "";

    public $key;
    public $temp_table;

    // Функция шифрования
    function encode($input, $code = 1) {
        if ($code)
            return base64_encode($this->xorShipher($input, $this->key));
        return $this->xorShipher(base64_decode($input), $this->key);
    }
    // Алгоритм шифрования
    function xorShipher($string, $password) {
        $str_len = strlen($string);
        while (strlen($this->gamma) < $str_len)
        {
            $seq = pack("H*", sha1($this->gamma . $password));
            $this->gamma .= substr($seq, 0, 8);
        }
    }
}

```



```

    }
    return $string ^ $this->gamma;
}

// Кодирование записи $record из таблицы $table, если $code = 0 -
раскодирование
// Метод кодирует необходимые значения ассоциируемого массива
function encode_record($table, $record, $code)
{
    global $mysql;
    // загружаем если не загружена
    if (!isset($this->field_code_load[$table])) {
        $this->field_code_load[$table] = 1;
        $id_table = $this->temp_table->load_id_table($table);
        $field_arr = $mysql->get_array_from_query("SELECT * FROM `field`
WHERE `id_table` = {$id_table} AND `field_code` = 1");
        if (null != $field_arr)
            foreach ($field_arr as $field)
                $this->field_code[$table][] = $field['field_name'];
    }
    // пробегаем по всем полям и перекодируем необходимые
    if (isset($this->field_code[$table]))
        foreach ($this->field_code[$table] as $field)
            $record[$field] = $this->encode($record[$field], $code);
    return $record;
}
}

```

В приведенном коде используется метод шифрования данных xorShipher, основанный на алгоритме гаммирования [5].

Программная система «Учет военнообязанных» предназначена для эксплуатации в сетевой системе, состоящей из сервера под управлением ОС Linux или Windows и клиентов с установленным Браузером IE, Opera, Firefox. Обслуживание ПС ВО обеспечивается персоналом, имеющим навыки работы на сетевом ПО под управлением ОС Linux (Windows), Квалификация обслуживающего персонала требует выполнения операций по установке и конфигурированию сетевого ПО. Выполнение основных операций редактирования базы данных обеспечивается персоналом, имеющим навыки работы с оконными приложениями на уровне оператора ЭВМ.

Приведенное описание этапов создания системы «Учет военнообязанных» дает представление об использованных математических моделях, технологиях и средствах, которые повышают эффективность работы программистов. В настоящее время готовится внедрение и испытание системы «Учет военнообязанных».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. HTTP-сервер Apache [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://apache.com/>. – Дата доступа: 20.08.2011.
2. Язык серверных скриптов PHP [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://php.net/>. – Дата доступа: 21.08.2011.

3. Свободная система управления базами данных MySQL [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://mysql.com/>. – Дата доступа: 21.08.2011.
4. Дейт, К. Дж. Введение в системы базы данных. К. Дж. Дейт. – 7-е изд., пер. с англ. – М. : Издательский дом «Вильямс», 2001. – 1072 с.
5. Ховард, М. Защищённый код / М. Ховард, Д. Лебланк. – 2-е изд., испр., пер. с англ. – М. : Издательский дом «Русская Редакция», 2004. – 704 с.
6. Java Script jQuery [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://jquery.com/>. – Дата доступа: 22.08.2011.

A.A. Kazinski, V.V. Akhrymchuk. Realization of Mathematical Model of a Software System of Management of the Account of Persons Liable for Military Service

The topic of the present work is devoted to creation of models of automated software management system of the account of persons liable for military service. In the work of the sanctified by the decision of the following tasks: creation of инфологической database model, the scaling of the text fields in the printed form, construction of the interface elements, directories, search systems, and display information network user interface. Considerable attention is given to the elements of technical tasks, software choice of models of management systems. The object of automation system «the Account of persons liable for military service» is a complex task of setting the persons liable for military service on account of, the creation of the notice of registration for delivery at the place of the former accounting, formation of groups and others. The article describes the fragments of program code, implementing the decision of the set tasks, screenshots dialog pages.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 04.10.2011 г.

УДК 519.6 + 517.983.54

О.В. Матысик, В.И. Басин

НЕЯВНАЯ ИТЕРАЦИОННАЯ ПРОЦЕДУРА И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ МОДЕЛЬНОЙ НЕКОРРЕКТНОЙ ЗАДАЧИ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В гильбертовом пространстве для решения операторного уравнения первого рода с положительным ограниченным и самосопряженным оператором изучается неявный итерационный метод. Для предложенного метода обосновано применение правила останова по невязке, что делает рассматриваемый итерационный метод эффективным и тогда, когда нет сведений об истокообразной представимости точного решения. Рассматриваемым методом решена численная модельная некорректная задача в виде уравнения Фредгольма первого рода.

1. Постановка задачи

В действительном гильбертовом пространстве H исследуется операторное уравнение I рода

$$Ax = y, \quad (1)$$

где A – положительный ограниченный и самосопряженный оператор, для которого нуль не является собственным значением, однако принадлежит спектру оператора A , и, следовательно, задача некорректна. Пусть $y \in R(A)$, т.е. при точной правой части y уравнение (1) имеет единственное решение x . Для отыскания этого решения применяется неявная итерационная процедура

$$(E + \alpha A)x_{n+1} = (E - \alpha A)x_n + 2\alpha y, \quad x_0 = 0. \quad (2)$$

Предлагаемая схема является аналогом метода второго порядка $y_{m+1} - y_m = \frac{h}{2}(y'_{m+1} + y'_m)$ для обыкновенного дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ [1, с. 180].

В случае приближенной правой части y_δ , $(\|y - y_\delta\| \leq \delta)$ соответствующие методу (2) итерации примут вид

$$(E + \alpha A)x_{n+1,\delta} = (E - \alpha A)x_{n,\delta} + 2\alpha y_\delta, \quad x_{0,\delta} = 0. \quad (3)$$

Ниже, как обычно, под сходимостью метода (3) понимается утверждение о том, что приближения (3) сколь угодно близко подходят к точному решению уравнения при достаточно малых δ и $n\delta$ и достаточно больших n .

2. Сходимость метода в случае априорного выбора числа итераций

Методы (2)–(3) впервые были предложены в работе [2], в которой показана сходимость обоих методов (2) и (3) при условии $\alpha > 0$ и получена оценка погрешности в предположении, что решение является истокообразно представимым с некоторым показателем $s > 0$. В статье [2] доказана

Т е о р е м а 1. Если $x = A^s z$, $s > 0$, и $\alpha > 0$, то справедлива оценка

$$\|x - x_{n,\delta}\| \leq s^s (2n\alpha e)^{-s} \|z\| + 2n\alpha\delta.$$

Отсюда при $n_{\text{опт}} = s\alpha^{-1}2^{-1}e^{-\frac{s}{s+1}}\delta^{-\frac{1}{s+1}}\|z\|^{\frac{1}{s+1}}$ получаем неравенство $\|x - x_{n,\delta}\|_{\text{опт}} \leq (1+s)e^{-\frac{s}{s+1}}\delta^{-\frac{s}{s+1}}\|z\|^{\frac{1}{s+1}}$. Порядок последней оценки оптимален в классе задач с истокообразно представимыми решениями [3].

Очевидно, что оптимальная оценка погрешности не зависит от параметра α , но от него зависит $n_{\text{опт}}$. Так как на α нет ограничений сверху ($\alpha > 0$), то можно α выбрать так, чтобы $n_{\text{опт}} = 1$. Для этого достаточно взять $\alpha_{\text{опт}} = 2^{-1}se^{-s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)}\delta^{-1/(s+1)}$. Таким образом, неявный метод (3) позволяет получить решение уже на первых шагах итераций.

3. Правило останова по невязке

Для решения уравнения (1) с ограниченным положительным и самосопряжённым оператором применяется метод итераций (3). Покажем возможность применения для этого метода правила останова по невязке [3–5].

Определим момент m останова итерационного процесса (3) условием

$$\left. \begin{aligned} \|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| &> \varepsilon, (n < m) \\ \|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| &\leq \varepsilon, \end{aligned} \right\} \quad \varepsilon = b\delta, b > 1. \quad (4)$$

Предполагается, что при начальном приближении $x_{0,\delta}$ невязка достаточно велика, больше уровня останова ε , т. е. $\|Ax_{0,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon$. Справедливы

Теорема 2. Пусть $A = A^* \geq 0$, $\|A\| \leq M$ и пусть момент останова $m = m(\delta)$ в методе (3) выбирается по правилу (4). Тогда $x_{m,\delta} \rightarrow x$ при $\delta \rightarrow 0$.

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2 и пусть $x = A^s z$, $s > 0$. Тогда справедливы оценки $m \leq 1 + \frac{s+1}{4\alpha} \left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta} \right]^{1/(s+1)}$,

$$\|x_{m,\delta} - x\| \leq [(b+1)\delta]^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)} + 2\alpha \left\{ 1 + \frac{s+1}{4\alpha} \left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta} \right]^{1/(s+1)} \right\} \delta. \quad (5)$$

Замечание 1. Порядок оценки (5) есть $O(\delta^{s/(s+1)})$ и, как следует из [3], он оптимален в классе задач с истокопредставимыми решениями.

Замечание 2. Используемое в формулировке теоремы 3 предположение порядка $s > 0$ истокопредставимости точного решения не потребуется на практике, так как оно не содержится в правиле останова (4). И тем не менее в теореме 3 утверждается, что будет автоматически выбрано количество итераций m , обеспечивающих оптимальный порядок погрешности. Но даже если истокопредставимость точного решения отсутствует, останов по невязке (4), как показывает теорема 2, обеспечивает сходимость метода, т.е. его регуляризующие свойства.

4. Численный модельный пример

4.1 Формулировка и описание алгоритма решения модельной задачи

Задача. Решаем в пространстве $L_2(0,1)$ модельную задачу в виде уравнения

$$\int_0^1 K(t,s) x(s) ds = y(t), \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (6)$$

с симметричным положительным ядром $K(t,s) = \begin{cases} t(1-s), & 0 \leq t \leq s \leq 1, \\ s(1-t), & 0 \leq s \leq t \leq 1, \end{cases}$ точной правой частью $y(t) = \frac{t(t-1)(t^2-t-1)}{12}$ и точным решением $x(t) = t(1-t)$.

Обычно на практике мы не знаем точной функции $y(t)$, а вместо нее известны значения приближенной функции $\tilde{y}(t)$ в некотором числе точек с определенной, часто известной погрешностью δ , и по этим приближенным данным требуется приближенно найти решение. Чтобы имитировать эту ситуацию, будем считать заданными значения $\tilde{y}_i$, $i = \overline{1, m}$, полученные следующим образом: $\tilde{y}_i = [y(t_i) \cdot 10^k + 0,5] / 10^k$, где $y(t_i)$ – значения функции $y(t)$ в точках $t_i = ih$, $i = \overline{1, m}$, $h = 1/m$. Квадратные скобки означают целую часть числа и $k = 4$. При $k = 4$ величина погрешности $\delta = 10^{-4}$. Действительно, имеем

$$\int_0^1 [y(t) - \tilde{y}(t)]^2 dt \approx \sum_{i=1}^m [y(t_i) - \tilde{y}_i]^2 h \leq mh(10^{-k})^2 = 10^{-2k}.$$

Заменим интеграл в уравнении (6) квадратурной суммой, например, по формуле правых прямоугольников с узлами $s_j = jh$, $j = \overline{1, m}$, $h = 1/m$, т. е. $\int_0^1 K(t,s)x(s)ds \approx \sum_{j=1}^m K(t, s_j)hx_j$. Тогда получим равенство $\sum_{j=1}^m K(t, s_j)hx_j + \rho_m(t) = y(t)$, где $\rho_m(t)$ – остаток квадратурной замены. Записав последнее равенство в точках $t_i = ih$, $i = \overline{1, m}$, получим уравнения $\sum_{j=1}^m K(t_i, s_j)hx_j + \rho_m(t_i) = y(t_i)$, $i = \overline{1, m}$. Отбросив теперь остаточный член, получим линейную алгебраическую систему уравнений относительно приближенного решения

$$\sum_{j=1}^m K(t_i, s_j)hx_j = \tilde{y}_i, \quad i = \overline{1, m}. \quad (7)$$

Выберем для определённости $m = 32$ и будем решать систему (7) методом итераций (3), который в дискретной форме запишется

$$x_i^{(n+1)} + \alpha \sum_{j=1}^m K(t_i, s_j)x_j^{(n+1)}h = x_i^{(n)} - \alpha \sum_{j=1}^m K(t_i, s_j)x_j^{(n)}h + 2\alpha\tilde{y}_i, \quad i = \overline{1, m}. \quad (8)$$

При решении задачи итерационным методом (3) вычислялись:

$$\|Ax^{(n)} - \tilde{y}\|_m = \left\{ \sum_{i=1}^m \left[\sum_{j=1}^m K(t_i, s_j) h x_j^{(n)} - \tilde{y}_i \right]^2 h \right\}^{1/2} - \text{дискретная норма невязки,}$$

$$\|x^{(n)}\|_m = \left\{ \sum_{i=1}^m [x_i^{(n)}]^2 h \right\}^{1/2} - \text{норма приближённого решения и дискретная норма разности}$$

$$\text{между точным и приближённым решениями } \|x - x^{(n)}\|_m = \left\{ \sum_{i=1}^m [x(t_i) - x_i^{(n)}]^2 h \right\}^{1/2}.$$

Оператор, описанный выше интегральным уравнением, непрерывен, взаимнооднозначен и аддитивен. Задача была решена методом (3) при $\delta = 10^{-4}$. Результаты счёта приведены в таблице 1 (ввиду симметрии приведена лишь половина таблицы). Для решения предложенной задачи сведений об истокорпредставимости точного решения не потребовалось, так как здесь воспользовались правилом останова по невязке (4), выбрав уровень останова $\varepsilon = 1,5\delta$. Пример счёта показал, что для достижения оптимальной точности методом итераций (3) при $\alpha = 9$ требуется только одна итерация, что соответствует результатам раздела 2. На рисунке 1 изображены графики точного решения и приближённого решения, полученного методом (3) при $\delta = 10^{-4}$.

4.2 Результат работы программы

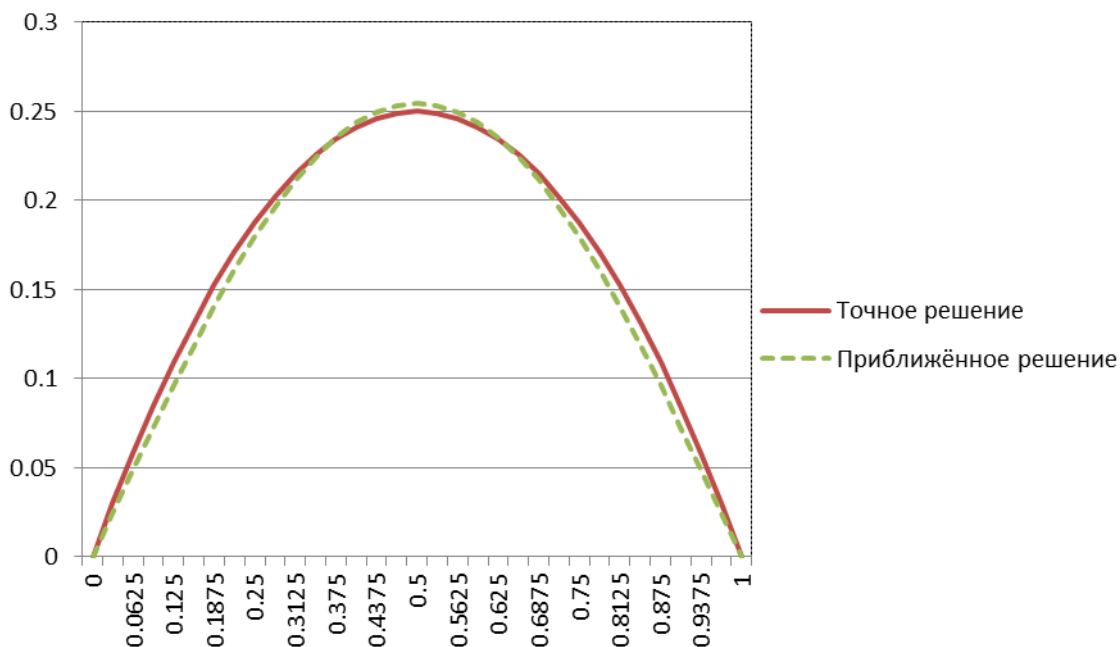


Рисунок 1

Таблица 1

Узлы t_i	Правые части $y(t_i)$	Точное решение $x(t_i)$	Приближённое решение, полученное методом (3)
			$\delta = 10^{-4}$
0	0	0	0
0.0312	0.00259	0.03027	0.02429
0.0625	0.00517	0.05859	0.04865
0.0937	0.00768	0.08496	0.07275
0.125	0.01011	0.10938	0.09629
0.1562	0.01243	0.13184	0.11898
0.1875	0.01463	0.15234	0.14056
0.2187	0.01668	0.17089	0.1608
0.2500	0.01855	0.1875	0.17948
0.2812	0.02025	0.20215	0.19641
0.3125	0.02175	0.21484	0.21142
0.3437	0.02304	0.22559	0.22437
0.375	0.02411	0.23438	0.23514
0.4062	0.02495	0.24121	0.24361
0.4375	0.02555	0.24609	0.24972
0.4687	0.02591	0.24902	0.25341
0.5000	0.02604	0.25000	0.25464
$\ Ax^{(n)} - \tilde{y}\ _m$			0.00015
$\ x^{(n)}\ _m$			0.17972
$\ x - x^{(n)}\ _m$			0.00798

4.3 Исходный код программы (на языке C#)

Вспомогательные классы Matrix и Vector:

```
using System;
using MTask.CoreClass;
namespace Helpers.Classes
{
    public class Matrix
    {
        private int _height, _width;
        private double[,] data;
        private double[] t;
        public int Height { get { return _height; } }
        public int Width { get { return _width; } }
        public double[,] Data { get { return data; } set { data = value; } }
        public Matrix(int height, int width)
        {
            _height = height; _width = width;
            data = new double[_height, _width];
        }
        private int getFirstNonZero(int RowNum)
        {

```

```

    for (int i = 0; i < _width; i++)
        if (Data[RowNum, i] != 0) return i;
    return _width;
}
private void Sort(Vector temp)
{
    t = new double[_width];
    for (int i = 0; i < _height - 1; i++)
        for (int j = i + 1; j < _height; j++)
            if (getFirstNonZero(i) > getFirstNonZero(j))
            {
                for (int h = 0; h < _width; h++) t[h] = Data[i, h];
                for (int h = 0; h < _width; h++) Data[i, h] = Data[j, h];
                for (int h = 0; h < _width; h++) Data[j, h] = t[h];
                double t1 = temp.Data[i];
                temp.Data[i] = temp.Data[j];
                temp.Data[j] = t1;
            }
}
private void ToStage(Vector temp)
{
    double alpha;
    for (int i = 0; i < _height; i++)
    {
        if (Data[i, i] == 0) continue;
        for (int j = i + 1; j < _height; j++)
        {
            if (Data[j, i] == 0) continue;
            alpha = Data[j, i] / Data[i, i];
            for (int h = 0; h < _width; h++)
                Data[j, h] -= Data[i, h] * alpha;
            temp.Data[j] -= temp.Data[i] * alpha;
            Data[j, i] = 0;
        }
        Sort(temp);
    }
    Sort(temp);
}
public void CopyFrom(Matrix m)
{
    Data = new double[m._height, m._width];
    _height = m._height; _width = m._width;
    for (int i = 0; i < m._height; i++)
        for (int j = 0; j < m._width; j++)
            Data[i, j] = m.Data[i, j];
}
public Vector GetSolution(Vector b)
{
    Vector res = new Vector();
    Vector temp = new Vector();
    temp.CopyFrom(b);
    ToStage(temp);
    if (Data[_height - 1, _width - 1] == 0)
        res.Data[_width - 1] = 0;
}

```



```

else
    res.Data[_width - 1] = temp.Data[_width - 1] /
        Data[_height - 1, _width - 1];
for (int i = _height - 2; i >= 0; i--)
{
    if (Data[i, i] == 0)
        res.Data[i] = 0; continue;
    double sum = 0;
    for (int j = i + 1; j < _width; j++)
        sum += Data[i, j] * res.Data[j];
    temp.Data[i] -= sum;
    res.Data[i] = temp.Data[i] / Data[i, i];
}
return res;
}
}
}
public class Vector
{
    private int _dimension;
    private double[] data;
    public int Dimension { get { return _dimension; } }
    public double[] Data { get { return data; } set { data = value; } }
    public Vector(int dimension)
    {
        _dimension = dimension;
        data = new double[dimension];
    }
    public Vector()
    {
        _dimension = Core.M;
        data = new double[Core.M];
    }
    public void CopyFrom(Vector w)
    {
        this._dimension = w._dimension;
        for (int i = 0; i < _dimension; i++)
            this.Data[i] = w.Data[i];
    }
}
}
}

```

Вспомогательный класс Core (класс, решающий поставленную задачу):

```

using System;
using Helpers.Classes;
namespace MTask.CoreClass
{
    public class Core
    {
        private double h;
        private Matrix K, Z;
        private double n1, n2, n3;
        private int iterations;
        private Vector solution, v1, v2, y, x0;
        public const int M = 32, k = 4;
        public const double alpha = 9, a = 0, b = 1, delta = 1e-4, eps = 1.5 * delta;
    }
}

```

```

public double Norm1 { get { return n1; } }
public double Norm2 { get { return n2; } }
public double Norm3 { get { return n3; } }
public Vector PreciselySolution { get { return v2; } }
public Vector Solution { get { return solution; } }
public int TotalIterations { get { return iterations; } }
public Core()
{
    v1 = new Vector(); v2 = new Vector(); x0 = new Vector();
    y = new Vector(); solution = new Vector();
    K = new Matrix(M, M);
}
private void GetMatrix()
{
    for (int i = 0; i < M; i++) v1.Data[i] = i * h;
    for (int i = 0; i < M; i++)
        for (int j = 0; j < M; j++)
            K.Data[i, j] = GetK(v1.Data[i], v1.Data[j]);
}
private double GetPoint(int i)
{
    return i * h;
}
public double GetY(int i)
{
    double f = GetPoint(i);
    return f * (f - 1) * (f * f - f - 1) / 12;
}
private double GetK(double t, double s)
{
    if (t <= s) return t * (1 - s);
    if (s <= t) return s * (1 - t);
    return 0;
}
private Vector GetRightPart(Vector xn)
{
    Vector res = new Vector();
    for (int k = 0; k < M; k++)
    {
        double t1 = GetY(k);
        double t2 = 0;
        for (int j = 0; j < M; j++) t2 += K.Data[k, j] * xn.Data[j] * h;
        res.Data[k] = xn.Data[k] - alpha * t2 + 2 * alpha * t1;
    }
    return res;
}
public double GetQ(Vector v)
{
    double sum = 0;
    for (int i = 0; i < M; i++)
    {
        double t = 0;
        for (int j = 0; j < M; j++)
            t += K.Data[i, j] * h * v.Data[j];
    }
}

```

```

        t -= (GetY(i) * Math.Pow(10, k) + 0.5) / Math.Pow(10, k);
        t *= t;
        t *= h;
        sum += t;
    }
    return Math.Sqrt(sum);
}
public void Solve()
{
    h = (b - a) / M;
    iterations = 0;
    x0 = new Vector();
    solution = new Vector();
    GetMatrix();
    Z = new Matrix(M, M);
    for (int i = 0; i < M; i++)
    {
        double t0 = 1 + alpha * K.Data[i, 0] * h;
        Z.Data[i, i] = t0;
        for (int j = 0; j < M; j++)
        {
            if (i == j) continue;
            Z.Data[i, j] = alpha * K.Data[i, j] * h;
        }
    }
    Vector bb = GetRightPart(x0);
    solution = Z.GetSolution(bb);
    n1 = GetQ(solution);
    for (int i = 0; i < M; i++)
        v2.Data[i] = GetPoint(i) * (1 - GetPoint(i));
    double t = 0;
    for (int i = 0; i < M; i++)
        t += solution.Data[i] * solution.Data[i] * h;
    n2 = Math.Sqrt(t); t = 0;
    for (int i = 0; i < M; i++)
        t += (v2.Data[i] - solution.Data[i]) *
            (v2.Data[i] - solution.Data[i]) * h;
    n3 = Math.Sqrt(t);
}
}
}
}

```

Главный класс программы:

```

using System;
using MTask.CoreClass;
namespace MTask
{
    class Program
    {
        static void Main(string[] args)
        {
            Core core = new Core();
            core.Solve();
            Console.WriteLine("Precisely solution: ");
            for (int i = 0; i < 32; i++)

```

```

    Console.WriteLine("x" + i + ": " + core.PreciselySolution.Data[i]);
    Console.WriteLine();
    Console.WriteLine("Approximately solution: ");
    for (int i = 0; i < 32; i++)
        Console.WriteLine("x" + i + ": " + core.Solution.Data[i]);
    Console.WriteLine();
    Console.WriteLine("Total iterations: ");
    Console.WriteLine(core.TotalIterations);
    Console.WriteLine();
    Console.WriteLine("Norm: ");
    Console.WriteLine(core.Norm1);
    Console.WriteLine(core.Norm2);
    Console.WriteLine(core.Norm3);
    Console.WriteLine();
    Console.WriteLine("Ti");
    for (int i = 0; i < 17; i++)
        Console.WriteLine((Core.b - Core.a) / Core.M * (i));
    Console.WriteLine();
    Console.WriteLine("Yi");
    for (int i = 0; i < 17; i++)
        Console.WriteLine(core.GetY(i));
    }
}
}

```

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бабушка, Н. Численные процессы решения дифференциальных уравнений / Н. Бабушка, Э. Витасик, М. Прагер. – М. : Наука, 1969. – 368 с.
2. Лисковец, О.А. Об одном итеративном методе решения уравнений I-го рода / О.А. Лисковец, В.Ф. Савчук // Вопросы прикл. математики: сб. ст. / СО АН СССР. – Иркутск, 1975. – С. 31–35.
3. Вайникко, Г.М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г.М. Вайникко, А.Ю. Веретенников. – М. : Наука, 1986. – 178 с.
4. Емелин, И.В. К теории некорректных задач / И.В. Емелин, М.А. Красносельский // Доклады АН СССР. – 1979. – Т.244, № 4. – С. 805–808.
5. Матысик, О.В. О регуляризации операторных уравнений в гильбертовом пространстве / О.В. Матысик // Доклады НАН Беларуси. – 2005. – Т. 49, № 3. – С. 38–43.

O.V. Matysik, V.I. Basin. Implicite Iteration Procedure and its Application for Decision the Model Incorrect Problems in the Hilbert Space

In the Hilbert space for solving operator equations of type I with affirmative limited and self-conjugate operator the implicite iteration method is studied. The application of a rule residual stop for the offered method has been proved, which makes viewed iteration method quite effective even when there are no data about source representability of exact solution. The viewed method solves numerical model incorrect task as equation Fredholm's of one sort.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 20.09.2011 г.

УДК 519.6 + 517.983.54

В.Ф. Савчук, О.В. Матысик

ОБ ОДНОМ ИТЕРАЦИОННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ С САМОСОПРЯЖЕННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

В гильбертовом пространстве для решения операторного уравнения I рода с положительным ограниченным и самосопряженным оператором предлагается неявный итерационный метод. Изучен случай неединственного решения. Показано, что в этом случае итерационный метод сходится к решению с минимальной нормой. Для предложенного метода доказана сходимост в энергетической норме гильбертова пространства, получены априорные оценки погрешности. Использование энергетической нормы позволяет сделать метод эффективным и тогда, когда нет сведений об истокообразной представимости точного решения уравнения.

1. Постановка задачи

Будем рассматривать в гильбертовом пространстве H уравнение

$$Ax = y \quad (1)$$

с ограниченным положительным самосопряженным оператором A , для которого нуль является собственным значением оператора A (случай неединственного решения уравнения (1)). Предположим, что при точной правой части y решение (неединственное) уравнения (1) существует. Будем искать его при помощи неявного итерационного метода

$$(E + \alpha^2 A^{2k})x_{n+1} = (E - \alpha A^k)^2 x_n + 2\alpha A^{k-1}y, \quad x_0 = 0, \quad k \in N. \quad (2)$$

2. Сходимость метода в случае неединственного решения

Обозначим через $N(A) = \{x \in H \mid Ax = 0\}$, $M(A)$ – ортогональное дополнение ядра $N(A)$ до H . Пусть $P(A)x$ – проекция $x \in H$ на $N(A)$, и $\Pi(A)x$ – проекция $x \in H$ на $M(A)$. Справедлива

Теорема 1. Пусть $A = A^* \geq 0$, $\|A\| \leq M$, $y \in H$, $\alpha > 0$, тогда для итерационного метода (2) верны следующие утверждения:

а) $Ax_n \rightarrow \Pi(A)y$, $\|Ax_n - y\| \rightarrow I(A, y) = \inf_{x \in H} \|Ax - y\|$;

б) итерационный метод (2) сходится тогда и только тогда, когда уравнение $Ax = \Pi(A)y$ разрешимо. В последнем случае $x_n \rightarrow P(A)x_0 + x^*$, где x^* – минимальное решение.

Доказательство

Применим оператор A к (2), получим

$$A(E + \alpha^2 A^{2k})x_n = A(E - \alpha A^k)^2 x_{n-1} + 2\alpha A^k y, \quad \text{где } y = P(A)y + \Pi(A)y.$$

Так как $AP(A)y = 0$, то получим $A(E + \alpha^2 A^{2k})x_n = A(E - \alpha A^k)^2 x_{n-1} + 2\alpha A^k \Pi(A)y$,

отсюда $(E + \alpha^2 A^{2k})(Ax_n - \Pi(A)y) = (E - \alpha A^k)^2 (Ax_{n-1} - \Pi(A)y)$. Обозначим

$Ax_n - \Pi(A)y = v_n$, $v_n \in M(A)$, тогда $(E + \alpha^2 A^{2k})v_n = (E - \alpha A^k)^2 v_{n-1}$. Отсюда

$v_n = (E + \alpha^2 A^{2k})^{-1} (E - \alpha A^k)^2 v_{n-1}$, следовательно, $v_n = (E + \alpha^2 A^{2k})^{-n} (E - \alpha A^k)^{2n} v_0$.
Имеем $A \geq 0$ и A положителен в $M(A)$, т.е. $(Ax, x) > 0 \quad \forall x \in M(A)$. Так как $\alpha > 0$, то $\|(E + \alpha^2 A^{2k})^{-1} (E - \alpha A^k)^2\| \leq 1$. Поэтому справедлива цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} \|v_n\| &= \|(E + \alpha^2 A^{2k})^{-n} (E - \alpha A^k)^{2n} v_0\| = \left\| \int_0^{\|A\|} \frac{(1 - \alpha \lambda^k)^{2n}}{(1 + \alpha^2 \lambda^{2k})^n} dE_\lambda v_0 \right\| \leq \\ &\leq \left\| \int_0^\varepsilon \frac{(1 - \alpha \lambda^k)^{2n}}{(1 + \alpha^2 \lambda^{2k})^n} dE_\lambda v_0 \right\| + \left\| \int_\varepsilon^{\|A\|} \frac{(1 - \alpha \lambda^k)^{2n}}{(1 + \alpha^2 \lambda^{2k})^n} dE_\lambda v_0 \right\| \leq \\ &\leq \left\| \int_0^\varepsilon dE_\lambda v_0 \right\| + q^n(\varepsilon) \left\| \int_\varepsilon^{\|A\|} dE_\lambda v_0 \right\| = \|E_\varepsilon v_0\| + q^n(\varepsilon) \|v_0\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty, \quad \varepsilon \rightarrow 0$. Здесь $\left| \frac{(1 - \alpha \lambda^k)^2}{1 + \alpha^2 \lambda^{2k}} \right| \leq q(\varepsilon) < 1$ при $\lambda \in [\varepsilon, \|A\|]$. Следовательно,

$v_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$, откуда $Ax_n \rightarrow P(A)y$ и $P(A)y \in A(H)$. Отсюда $\|Ax_n - y\| \rightarrow \|P(A)y - y\| = \|P(A)y\| = I(A, y) [1-2]$. Итак, утверждение а) доказано.

Докажем б). Пусть процесс (2) сходится. Покажем, что уравнение $Ax = P(A)y$ разрешимо. Из сходимости $\{x_n\} \in H$ к $z \in H$ и из а) следует, что $Ax_n \rightarrow Az = P(A)y$, следовательно, $P(A)y \in A(H)$ и уравнение $P(A)y = Ax$ разрешимо.

Пусть теперь $P(A)y \in A(H)$ (уравнение $P(A)y = Ax$ разрешимо), следовательно, $P(A)y = Ax^*$, где x^* – минимальное решение уравнения $Ax = y$ (оно единственно в $M(A)$). Тогда (2) примет вид:

$$\begin{aligned} (E + \alpha^2 A^{2k})x_n &= (E - \alpha A^k)^2 x_{n-1} + 2\alpha A^{k-1} P(A)y = \\ &= (E - \alpha A^k)^2 x_{n-1} + 2\alpha A^k x^* = (E + \alpha^2 A^{2k})x_{n-1} - \\ &- 2\alpha A^k x_{n-1} + 2\alpha A^k x^* = (E + \alpha^2 A^{2k})x_{n-1} + 2\alpha A^k (x^* - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Отсюда $x_n = x_{n-1} + 2\alpha A^k (E + \alpha^2 A^{2k})^{-1} (x^* - x_{n-1})$. Последнее равенство разобьем на два: $P(A)x_n = P(A)x_{n-1} + 2\alpha (E + \alpha^2 A^{2k})^{-1} A^k P(A)(x^* - x_{n-1}) = P(A)x_{n-1} = P(A)x_0$.

$$\begin{aligned} P(A)x_n &= P(A)x_{n-1} + 2\alpha (E + \alpha^2 A^{2k})^{-1} A^k P(A)(x^* - x_{n-1}) = \\ &= P(A)x_{n-1} + 2\alpha (E + \alpha^2 A^{2k})^{-1} A^k (P(A)x^* - P(A)x_{n-1}) = \\ &= P(A)x_{n-1} + 2\alpha (E + \alpha^2 A^{2k})^{-1} A^k (x^* - P(A)x_{n-1}), \end{aligned}$$

так как $x^* \in M(A)$. Обозначим $\omega_n = P(A)x_{n-1} - x^*$, тогда из

равенства $П(A)x_n - x^* = П(A)x_{n-1} - x^* + 2\alpha(E + \alpha^2 A^{2k})^{-1} A^k (x^* - П(A)x_{n-1})$ получим $\omega_n = \omega_{n-1} - 2\alpha(E + \alpha^2 A^{2k})^{-1} A^k \omega_{n-1} = (E + \alpha^2 A^{2k})^{-1} (E - \alpha A^k)^2 \omega_n$ и, аналогично υ_n , можно показать, что $\omega_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Таким образом, $П(A)x_n \rightarrow x^*$. Отсюда $x_n \rightarrow P(A)x_n + П(A)x_n \rightarrow P(A)x_0 + x^*$. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Так как у нас $x_0 = 0$, то $x_n \rightarrow x^*$, т.е. итерационный метод (2) сходится к нормальному решению, т.е. к решению с минимальной нормой.

3. Сходимость метода в энергетической норме

Ниже предполагается, что нуль не является собственным значением оператора A , следовательно, уравнение (1) имеет единственное решение. Однако нуль принадлежит спектру оператора A , поэтому задача (1) неустойчива и, значит, некорректна. Для отыскания её решения используем метод (2). Правую часть уравнения (1), как это обычно бывает на практике, считаем известной приближенно, т.е. вместо y известно δ – приближение y_δ , $\|y - y_\delta\| \leq \delta$. Тогда итерационный процесс (2) запишется в виде

$$(E + \alpha^2 A^{2k})x_{n+1,\delta} = (E - \alpha A^k)^2 x_{n,\delta} + 2\alpha A^{k-1} y_\delta, x_{0,\delta} = 0, k \in N. \quad (3)$$

Сходимость процессов (2) и (3) в исходной норме гильбертова пространства H была рассмотрена в статье [3]. Там показано, что предложенный неявный метод (3) сходится при условии $\alpha > 0$, если число итераций n выбирать в зависимости от уровня погрешности δ так, чтобы $n^{1/k} \delta \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$. В предположении, что точное решение уравнение (1) истокообразно представимо, получены априорные оценки погрешности и априорный момент останова. В случае, когда нет сведений об истокообразной представимости точного решения, затруднительно получить априорные оценки погрешности и априорный момент останова. И тем не менее метод (3) можно сделать вполне эффективным, если воспользоваться энергетической нормой гильбертова пространства $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$, где $x \in H$ [4–5]. Покажем сходимость метода (3) в энергетической норме гильбертова пространства и получим для него в энергетической норме априорные оценки.

Рассмотрим разность:

$$x - x_{n,\delta} = (x - x_n) + (x_n - x_{n,\delta}). \quad (4)$$

Запишем первое слагаемое в виде:

$$x - x_n = A^{-1} (E + \alpha^2 A^{2k})^{-n} (E - \alpha A^k)^{2n} y = (E + \alpha^2 A^{2k})^{-n} (E - \alpha A^k)^{2n} x.$$

Как было показано в [3], $x - x_n$ бесконечно мало в исходной норме гильбертова пространства H при $n \rightarrow \infty$, но скорость сходимости при этом может быть сколь угодно малой, и для её оценки делалось предположение об истокообразной представимости точного решения. При использовании энергетической нормы нам это дополнительное предположение не понадобится. Действительно, с помощью

интегрального представления самосопряженного оператора $A = \int_0^M \lambda dE_\lambda$, где $M = \|A\|$

и E_λ – соответствующая спектральная функция, имеем

$$\begin{aligned}\|x - x_n\|_A^2 &= \left(A(E + \alpha^2 A^{2k})^{-n} (E - \alpha A^k)^{2n} x, (E + \alpha^2 A^{2k})^{-n} (E - \alpha A^k)^{2n} x \right) = \\ &= \int_0^M \lambda (1 - \alpha \lambda^k)^{4n} (1 + \alpha^2 \lambda^{2k})^{-2n} d(E_\lambda x, x).\end{aligned}$$

Для оценки интересующей нас нормы найдем максимум подынтегральной функции

$$f(\lambda) = \lambda \frac{(1 - \alpha \lambda^k)^{4n}}{(1 + \alpha^2 \lambda^{2k})^{2n}} \quad \text{при } \lambda \in [0, M]. \quad \text{Функция } f(\lambda) \text{ – частный случай при } s = 1$$

функций, оцененных в [3]. Там показано, что при условии $\alpha > 0$

$$\max_{\lambda \in [0, M]} |f(\lambda)| \leq (4kn\alpha e)^{-1/k}. \quad \text{Следовательно, справедлива оценка}$$

$\|x - x_n\|_A^2 \leq (4kn\alpha e)^{-1/k} \|x\|^2$. Отсюда $\|x - x_n\|_A \leq (4kn\alpha e)^{-1/(2k)} \|x\|$. Таким образом, переход к энергетической норме как бы заменяет предположение об истокорпредставимости порядка $s = 1/2$ для точного решения.

Оценим второе слагаемое в (4). Как показано в [3], справедливо равенство:

$$x_n - x_{n,\delta} = A^{-1} \left[E - (E + \alpha^2 A^{2k})^{-n} (E - \alpha A^k)^{2n} \right] (y - y_\delta).$$

Воспользовавшись интегральным представлением самосопряженного оператора,

$$\text{получим } \|x_n - x_{n,\delta}\|_A^2 = \int_0^M \lambda^{-1} \left[1 - \frac{(1 - \alpha \lambda^k)^{2n}}{(1 + \alpha^2 \lambda^{2k})^n} \right]^2 d(E_\lambda (y - y_\delta), y - y_\delta).$$

Обозначим через $g(\lambda) = \lambda^{-1} \left[1 - \frac{(1 - \alpha \lambda^k)^{2n}}{(1 + \alpha^2 \lambda^{2k})^n} \right]^2$ подынтегральную функцию, а через

$$g_1(\lambda) = \lambda^{-1} \left[1 - \frac{(1 - \alpha \lambda^k)^{2n}}{(1 + \alpha^2 \lambda^{2k})^n} \right], \quad \text{тогда } g(\lambda) = g_1(\lambda) \left[1 - \frac{(1 - \alpha \lambda^k)^{2n}}{(1 + \alpha^2 \lambda^{2k})^n} \right]. \quad \text{Функция } g_1(\lambda) \text{ была}$$

оценена в [3]. Там показано, что при условии $\alpha > 0$ $g_1(\lambda) \leq 2k(n\alpha)^{1/k}$. При этом же

$$\text{условии имеем } \left| \frac{(1 - \alpha \lambda^k)^2}{1 + \alpha^2 \lambda^{2k}} \right| \leq 1, \quad \forall \lambda \in [0, M], \quad \text{поэтому } 1 - \frac{(1 - \alpha \lambda^k)^{2n}}{(1 + \alpha^2 \lambda^{2k})^n} \leq 2, \quad \text{откуда}$$

$$g(\lambda) \leq 4k(n\alpha)^{1/k}. \quad \text{Таким образом, } \|x_n - x_{n,\delta}\|_A^2 \leq 4k(n\alpha)^{1/k} \delta^2, \quad \text{отсюда}$$

$$\|x_n - x_{n,\delta}\|_A \leq 2k^{1/2} (n\alpha)^{1/(2k)} \delta, \quad n \geq 1. \quad \text{Поскольку}$$

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A \leq \|x - x_n\|_A + \|x_n - x_{n,\delta}\|_A \leq \|x - x_n\|_A + 2k^{1/2} (n\alpha)^{1/(2k)} \delta$$

и $\|x - x_n\|_A \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, то для сходимости $\|x - x_{n,\delta}\|_A \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ достаточно, чтобы

$n^{1/(2k)}\delta \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0$. Итак, доказана

Теорема 2. При условии $\alpha > 0$ итерационный метод (3) сходится в энергетической норме гильбертова пространства, если число итераций n выбирать из условия $n^{1/(2k)}\delta \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0$.

Запишем теперь общую оценку погрешности для метода (3) в энергетической норме

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A \leq (4kn\alpha e)^{-1/(2k)} \|x\| + 2k^{1/2} (n\alpha)^{1/(2k)} \delta, \quad n \geq 1. \quad (5)$$

Оптимизируем оценку (5) по n . Для этого при заданном δ найдем такое значение числа итераций n , при котором оценка погрешности становится минимальной. Приравняв нулю производную по n от правой части неравенства (5), получим

$$n_{\text{опт}} = 2^{-(k+1)} k^{-(k+1)/2} \alpha^{-1} e^{-1/2} \delta^{-k} \|x\|^k. \quad (6)$$

Подставив $n_{\text{опт}}$ в оценку (5), найдем её оптимальное значение

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A^{\text{опт}} \leq 2^{(3k-1)/(2k)} k^{(k-1)/(4k)} e^{-1/(4k)} \delta^{1/2} \|x\|^{1/2}. \quad (7)$$

Таким образом, справедлива

Теорема 3. Оптимальная оценка погрешности для метода (3) при условии $\alpha > 0$ в энергетической норме имеет вид (7) и получается при $n_{\text{опт}}$ из (6).

Замечание 2. Из неравенства (7) вытекает, что оптимальная оценка погрешности не зависит от параметра α . Но $n_{\text{опт}}$ зависит от α , и поскольку на α нет ограничений сверху ($\alpha > 0$), то за счет выбора α можно получить $n_{\text{опт}} = 1$, т.е. оптимальная оценка погрешности будет достигаться уже на первом шаге итераций. Для этого достаточно взять $\alpha_{\text{опт}} = 2^{-(k+1)} k^{-(k+1)/2} e^{-1/2} \delta^{-k} \|x\|^k$.

Рассмотрим вопрос о том, когда из сходимости в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства H . Очевидно, для этого достаточно, чтобы при некотором фиксированном ε , ($0 < \varepsilon < \|A\|$) было:

$$P_\varepsilon x = 0, \quad P_\varepsilon x_{n,\delta} = 0, \quad \text{где } P_\varepsilon = \int_0^\varepsilon \lambda dE_\lambda.$$

Так как $x_{n,\delta} = A^{-1} \left[E - (E + \alpha^2 A^{2k})^{-n} (E - \alpha A^k)^{2n} \right] y_\delta$, то для выполнения последнего из указанных условий должно выполняться условие $P_\varepsilon y_\delta = 0$. Таким образом, если решение x и приближенная правая часть y_δ таковы, что $P_\varepsilon x = 0$ и $P_\varepsilon y_\delta = 0$, то из сходимости $x_{n,\delta}$ к x в энергетической норме вытекает сходимость в исходной норме гильбертова пространства H , и, следовательно, для сходимости в исходной норме пространства H не требуется истокпредставимость точного решения.

Аналогично тому, как показано в разделе 2, изложенный метод в энергетической норме пригоден и в случае неединственного решения уравнения (1) ($\lambda = 0$ — собственное значение оператора). Тогда он обеспечивает сходимость в энергетической норме к минимальному решению.

Для решения уравнений с несамосопряженным или неположительным, но ограниченным оператором A следует перейти к уравнению $A^*Ax = A^*y$. Тогда при приближенном элементе y_δ метод (3) примет вид

$$\left(E + \alpha^2 (A^*A)^{2k}\right) x_{n+1,\delta} = \left(E - \alpha (A^*A)^k\right)^2 x_{n,\delta} + 2\alpha (A^*A)^{k-1} A^* y_\delta, \quad x_{0,\delta} = 0, \quad k \in N.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bialy, H. Iterative Behandlung linearer Funktionsgleichungen / H. Bialy // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1959. – Vol. 4, № 2. – P. 166–176.
2. Савчук, В.Ф. Об одном неявном итеративном методе решения операторных уравнений / В.Ф. Савчук, О.В. Матысик // Доклады НАН Беларуси. – 2005. – Т. 49, № 4. – С. 38–42.
3. Матысик, О.В. О приближенном решении операторных уравнений I рода / О.В. Матысик, В.Ф. Савчук // Веснік Брэскага ун-та. Сер. 4 «Фізіка. Матэматыка». – 2011. – № 1. – С. 93–101.
4. Лисковец, О.А. Сходимость в энергетической норме итеративного метода для уравнений 1-го рода / О.А. Лисковец, В.Ф. Савчук // Известия АН БССР. Серия физ.-матем. наук. – 1976. – № 2. – С. 19–23.
5. Савчук, В.Ф. Неявная итерационная процедура решения операторных уравнений в гильбертовом пространстве / В.Ф. Савчук, О.В. Матысик // Доклады НАН Беларуси. – 2006. – Т. 50, № 5. – С. 37–42.

V.F. Savchuk, O.V. Matysik. About Iteration Method Decision of the Incorrect Problems with Self-Adjoined Operator

In the Hilbert space for solving operator equations of type I with affirmative limited and self-conjugate operator the implicate iteration method is proposed. The case of non-uniqueness of solving operator equation is investigated. It is shown, that in this case the iteration method converges to the decision with the minimal norm. In energy norm of Hilbert space for the proposed method convergence is proved and apriori estimations of this method error have been received. The use of energy norm allows making a method quite effective even when there are no data about source representability of exact solution of the equation.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 19.09.2011 г.

УДК 517.9

Г.П. Степанюк, А.В. Чичурин**ОБ ОДНОМ УСЛОВИИ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ
ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО
УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА**

Для линейного дифференциального уравнения четвертого порядка, коэффициенты которого удовлетворяют трем условиям, приводится метод интегрирования в квадратурах. Рассмотрены три примера, иллюстрирующие приведенный метод. Для выбранных начальных условий построена графическая интерпретация искомых частных решений.

Введение

В работе [1, с. 161] при исследовании линейных дифференциальных уравнений четвертого порядка

$$y^{(IV)} + p(x)y''' + q(x)y'' + r(x)y' + s(x)y = 0 \quad (1)$$

с коэффициентами, которые удовлетворяют условиям

$$p' = \frac{2}{3}q - \frac{1}{4}p^2, \quad q' = \frac{3}{2}r - \frac{1}{4}pq, \quad r' = 4s - \frac{1}{4}pr, \quad (2)$$

было получено нелинейное дифференциальное уравнение четвертого порядка вида

$$20 \cdot (8i^3 - 15i^2 + 12i \cdot i'') \cdot i^{(IV)} - 280 \cdot i'''^2 + 20 \cdot (42i' \cdot i'' - 56i^2 i') \cdot i''' + 504i'''^3 + \\ + 192i^2 \cdot i''^2 + (448i^4 + 2040i \cdot i^2) \cdot i'' - 1275i^4 - 560i^3 \cdot i^2 + 64i^6 = 0. \quad (3)$$

В работах [2; 3] для уравнения (3) были найдены одно- и двухпараметрические семейства решений, которые могут быть переписаны следующим образом:

$$i = -\frac{256}{(c-8x)^2}, \quad (4)$$

$$i = -\frac{27}{2(c-3x)^2}, \quad (5)$$

$$i = \frac{-4x^2 + cx + 2d - \frac{3c^2}{32}}{\left(x^2 - \frac{cx}{4} + d\right)^2}, \quad (6)$$

$$i = -\frac{25(75x^2 - 50cx + 19c^2 + 32cd + 24d^2)}{2(c^2 - 25x^2 - 25dx + 3cd - 4d^2)^2}, \quad (7)$$

где c, d – параметры.

Приведем еще одно однопараметрическое семейство решений уравнения (3):

$$i = \frac{72x(2c - 3x^3)}{(c + 12x^3)^2}, \quad (8)$$

где c – параметр.

В данной статье покажем, как для приведенных семейств решений (4)–(8) построить уравнения (1)–(2) и их проинтегрировать.

Для отыскания общего решения уравнения (1), (2) (коэффициенты $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$, $s(x)$ заданы) будем использовать метод, следующий из алгоритма, изложенного в работах [2; 3], а именно:

1. По известной функции $i(x)$, которая будет иметь вид (4)–(8), всегда удается найти функцию $\xi(x)$ как общее решение уравнения Шварца

$$\frac{\xi'''}{\xi'} - \frac{3}{2} \left(\frac{\xi''}{\xi'} \right)^2 = i(x). \quad (9)$$

2. Затем найдем решение y_1 уравнения (1), (2) в виде

$$y_1 = \exp \left(- \int \frac{k_0(x)}{k_1(x)} dx \right), \quad (10)$$

где (согласно работе [4]) имеем следующие коэффициенты

$$\begin{aligned} k_0(x) = & (320i^3 + 144i^2p^2 + 24ip^4 - 384i^2q - 128ip^2q + 144iq^2 + \\ & + 4p^2q^2 - 16q^3 + 80ipr - 12p^3r + 56pqr - 72r^2 - 320is - 24p^2s + 64qs + \\ & + 60p^3i' - 240pqi' + 480ri' - 600(i')^2 + 576i^2p' + 72ip^2p' - 272iqp' - \\ & - 12p^2qp' + 40q^2p' - 2prp' - 96sp' + 180pi'p' + 144ip'^2 - 24qp'^2 + \\ & + 80ipq' + 12p^3q' - 40pqq' + 48rq' - 240i'q' + 24pp'q' - 160ir' - 12p^2r' + \\ & + 32qr' - 48p'r' + 480ii'' + 36p^2i'' - 96qi'' + 144p'i'' - 120ipp'' - 12pqp'' + \\ & + 72rp'' - 120i'p'' - 48q'p'' + 160iq'' + 12p^2q'' - 32qq'' + 48p'q'')\xi'' + \\ & + (160i^3p + 16i^2p^3 + 32i^2pq + 16ip^3q - 56ipq^2 - 448i^2r - 56ip^2r + 256iqr + \\ & + 4p^2qr - 16q^2r + 12pr^2 - 160ips - 36p^3s + 128pqs - 192rs + 320i^2i' + 96ip^2i' + \\ & + 12p^4i' - 256iqi' - 24p^2qi' - 48q^2i' + 960si' - 300pi'^2 + 48i^2pp' + 24ipqp' - \\ & - 224irp' - 12p^2rp' + 40qrp' - 48psp' + 384ii'p' + 36p^2i'p' + 24qi'p' - 24rp'^2 + \\ & + 72i'p'^2 + 320i^2q' + 24ip^2q' - 64iqq' + 96ip'q' + 80ipr' + 12p^3r' - 40pqr' + \\ & + 48rr' - 240i'r' + 24pp'r' - 640is' - 48p^2s' + 128qs' - 192p's' + 240ipi'' + \\ & + 24p^3i'' - 72pqi'' + 48ri'' - 240i'i'' + 72pp'i'' - 32i^2p'' - 80iqp'' - 12prp'' + 192sp'' - \\ & - 60pi'p'' - 48r'p'' - 48i''p'' + 160ir'' + 12p^2r'' - 32qr'' + 48p'r'' + 160ii^{(3)} + \\ & + 12p^2i^{(3)} - 32qi^{(3)} + 48p'i^{(3)})\xi', \\ k_1(x) = & 8\xi'(80i^3 + 12i^2(3p^2 - 8q + 12p') + 3p^3(q' - r + 5i') + p(q(14r - 10(6i' + q') - 3p'') - \\ & - 3p'(r - 15i' - 2q')) + 2i(3p^4 + p^2(9p' - 16q) + 5p(2(r + q') - 3p'') + \\ & + 2(9q^2 - 17qp' + 9p'^2 - 10(2s + r' - 3i'' - q'')) + p^2(q^2 - 6s - 3qp' - 3r' + 9i'' + 3q'') - \\ & - 2(3(3r - 5i' - 2q')(r - 5i' - p'') + (2q - 3p')(q^2 - 4s - qp' - 2r' + 6i'' + 2q'')))). \end{aligned}$$

3. Умножим функцию (10) на функцию $\xi(x)$ и получим (согласно [2; 3]) общее решение уравнения (1), (2).

Пусть функция $i(x)$ имеет вид (4). Общее решение уравнения (9) есть

$$\xi(x) = \frac{C_2}{1152C_1(1 + 48C_1(c - 8x)^3)} + C_3, \quad (11)$$

где C_i ($i = \overline{1,3}$) – произвольные постоянные.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Уравнение (1) с коэффициентами, удовлетворяющими условиям (2) для функции $i(x)$ вида (4), имеет общее решение

$$y = \xi(x) \cdot y_1(x), \quad (12)$$

где функции $\xi(x)$ и $y_1(x)$ определяются соотношениями (11) и (10).

Доказательство теоремы 1 следует из замен (12), (9) и уравнения (3), которое было получено для коэффициентных соотношений (2). ■

Рассмотрим теперь случай, когда функция $i(x)$ имеет вид (6). Тогда общее решение уравнения (9) есть

$$\xi(x) = C_3 - \frac{C_2}{6(8x^3 - 3cx^2 + 24dx + 3C_1)}, \quad (13)$$

где C_i ($i = \overline{1,3}$) – произвольные постоянные.

Теорема 2. Уравнение (1) с коэффициентами, удовлетворяющими условиям (2) для функции $i(x)$ вида (6), имеет общее решение (12), где функции $\xi(x)$ и $y_1(x)$ определяются соотношениями (13) и (10).

Замечание 1. Функция $\xi(x)$ вида (11) и функция $\xi(x)$ вида (13) могут быть получены одна из другой путем переобозначения постоянных.

Замечание 2. Рассматривая функции $i(x)$ вида (5), (7), (8), мы получаем функции $\xi(x)$, которые также можно привести к виду (11).

Примеры

Пример 1. Пусть функция $p(x)$ имеет вид

$$p(x) = ax, \quad (14)$$

где a параметр. Подставляя (14) в коэффициентные соотношения (2), последовательно найдем остальные коэффициенты уравнения (1):

$$q(x) = \frac{3}{8}(4a + a^2x^2), \quad r(x) = \frac{1}{16}(12a^2x + a^3x^3), \quad s(x) = \frac{1}{256}(48a^2 + 24a^3x^2 + a^4x^4). \quad (15)$$

Зная вид коэффициентов (14), (15) для уравнения (1), найдем из соотношения (11) соответствующее решение y_1 :

$$y_1 = -e^{-ax^2/8}(48C_1(c - 8x)^3 + 1). \quad (16)$$

Подставляя равенства (11) и (16) в формулу (12) и переобозначая комбинации произвольных постоянных, найдем общее решение уравнения (1) с коэффициентами (14), (15) в виде

$$y = C_1 e^{-ax^2/8} + C_2 x e^{-ax^2/8} + C_3 x^2 e^{-ax^2/8} + C_4 x^3 e^{-ax^2/8},$$

где C_i ($i = \overline{1,4}$) – произвольные постоянные.

Пример 2. Пусть функция $p(x)$ имеет вид

$$p(x) = a \sin x, \quad (17)$$

где a параметр. Подставляя (17) в соотношения (2), последовательно найдем

$$q(x) = \frac{3}{8}(4a \cos x + a^2 \sin x^2), \quad r(x) = \frac{1}{16}(12a^2 \cos x \sin x - 16a \sin x + a^3 \sin^3 x),$$

$$s(x) = \frac{1}{256}(48a^2 \cos^2 x - 64a \cos x - 64a^2 \sin^2 x + 24a^3 \cos x \sin^2 x + a^4 \sin^4 x). \quad (18)$$

Зная вид коэффициентов (17), (18) для уравнения (1), найдем из соотношения (10) соответствующее решение y_1 :

$$y_1 = -e^{a \cos x/4}(48C_1(c - 8x)^3 + 1). \quad (19)$$

Подставляя равенства (11) и (19) в формулу (12) и переобозначая комбинации произвольных постоянных, найдем общее решение уравнения (1), (17), (18) в виде

$$y = C_1 e^{a \cos x / 4} + C_2 x e^{a \cos x / 4} + C_3 x^2 e^{a \cos x / 4} + C_4 x^3 e^{a \cos x / 4},$$

где C_i ($i = \overline{1,4}$) – произвольные постоянные.

Пример 3. Пусть функция $p(x)$ имеет вид

$$p(x) = a J_1(x), \quad (20)$$

где a параметр, $J_1(x)$ – функция Бесселя первого рода при $n=1$. Подставляя (20) в соотношения (2), последовательно найдем

$$q(x) = \frac{3}{8} (2a J_0(x) + a^2 J_1^2(x) - 2a J_2(x)),$$

$$r(x) = \frac{1}{16} (6a^2 J_0(x) J_1(x) - 12a J_1(x) + a^3 J_1^3(x) - 6a^2 J_1(x) J_2(x) + 4a J_3(x)), \quad (21)$$

$$s(x) = \frac{1}{256} (12a^2 J_0^2(x) - 24a J_0(x) - 48a^2 J_1^2(x) + 12a^3 J_0(x) J_1^2(x) + a^4 J_1^4(x) +$$

$$+ 32a J_2(x) - 24a^2 J_0(x) J_2(x) - 12a^3 J_2(x) J_1^2(x) + 12a^2 J_2^2(x) + 16a^2 J_1(x) J_3(x) - 8a J_4(x)).$$

Зная вид коэффициентов (20), (21) для уравнения (1), найдем из соотношения (10) соответствующее решение y_1 :

$$y_1 = -e^{\frac{1}{4}a(J_0(x)-1)} (48C_1(c-8x)^3 + 1). \quad (22)$$

Подставляя равенства (11) и (22) в формулу (12) и переобозначая комбинации произвольных постоянных, найдем общее решение уравнения (1) с коэффициентами (20), (21) в виде

$$y = C_1 e^{\frac{1}{4}a(J_0(x)-1)} + C_2 x e^{\frac{1}{4}a(J_0(x)-1)} + C_3 x^2 e^{\frac{1}{4}a(J_0(x)-1)} + C_4 x^3 e^{\frac{1}{4}a(J_0(x)-1)},$$

где C_i ($i = \overline{1,4}$) – произвольные постоянные.

Воспользовавшись общим решением (22), приведем вид интегральных кривых, соответствующих частным решениям, в которых произвольные постоянные C_i ($i = \overline{1,4}$) равны соответственно следующим наборам чисел (2;0;1;0), (0;2;0;-1/10), (1;-1;1/10;0), (1;2;1;-1/10) (рисунок)

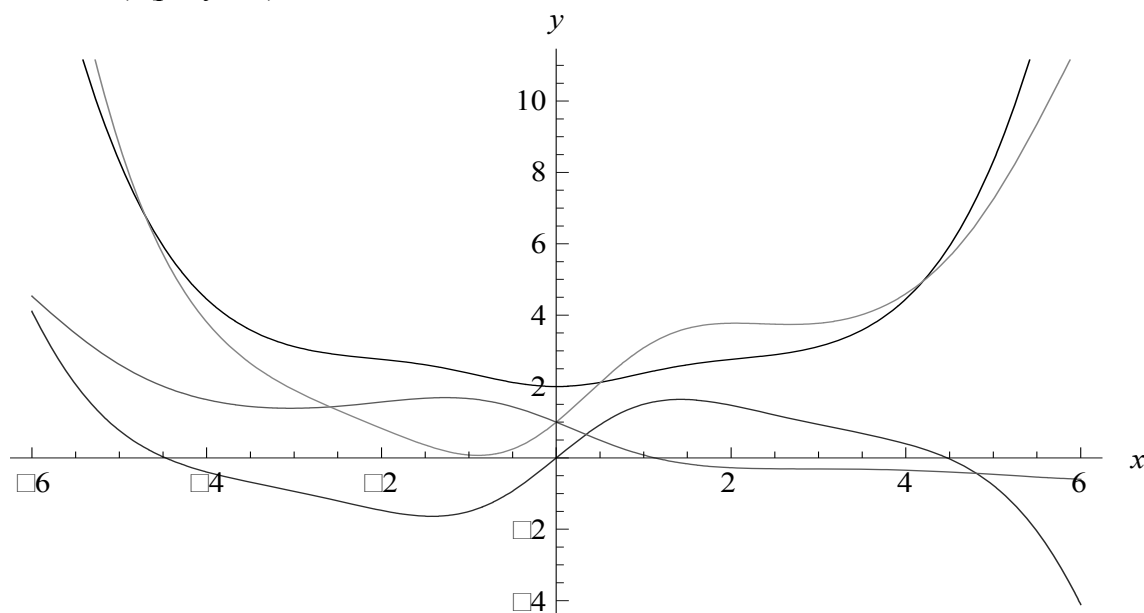


Рисунок – Графики четырех частных решений, полученных из общего решения (22)

Замечание 3. Рассматривая примеры 1–3, где в качестве функции $i(x)$ берется одна из функций вида (5)–(8), мы получаем частные решения y_1 , которые можно привести соответственно к виду (16), (19) или (22). При этом коэффициенты уравнения (1) будут иметь вид (14)–(15), (17)–(18) или (20)–(21).

Замечание 4. Семейства решений (4)–(7) содержатся среди функций вида

$$\frac{P_2(x)}{(Q_2(x))^2}, \quad (23)$$

где P_2, Q_2 – многочлены второй степени. Семейство решений (8) является новым и не принадлежит семейству функций вида (23).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лукашевич, Н.А. Дифференциальные уравнения первого порядка / Н.А. Лукашевич, А.В. Чичурин – Минск : БГУ, 1999. – 210 с.
2. Чичурин, А.В. Об одном нелинейном уравнении четвертого порядка с постоянными коэффициентами / А.В. Чичурин // Веснік Брэсцкага ўн-та. – 2000. – № 4. – С. 33–38.
3. Чичурин, А.В. Уравнение Шази и линейные дифференциальные уравнения класса Фукса / А.В. Чичурин – М. : РУДН, 2003.
4. Chichurin, A. To the theory of the 4th order linear differential equations./A. Chichurin, N. Lukashevich // Proceedings of the «Computer Algebra Systems in Teaching and Research» international conference, January 31 February 3, 2007, Siedlce, Siedlce Wydawnictwo Akademii Podlaskiej, Poland. – 2007. – P. 47–51.

G.P. Stepanjuk, A.V. Chichurin. About One Condition of Integrability of the Linear Differential Equation of the Fourth Order

The method of integration in quadratures for the linear differential equation of the fourth order, coefficients of which satisfy three conditions, is considered. We build three examples which illustrate the using method. For the given initial conditions the graphics of the partial solutions are built.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 14.09.2011 г.

ЗВЕСТКІ АБ АЎТАРАХ

Андрусевіч П.П. – аспірант кафедры тэарэтычнай фізікі фізічнага факультэта Беларускага дзяржаўнага ўніверсітэта

Аўсіюк А.М. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, старшы выкладчык кафедры агульнай фізікі і методыкі выкладання фізікі Мазырскага дзяржаўнага педагагічнага ўніверсітэта імя І.П. Шамякіна

Ахрымчук В.В. – студэнт матэматычнага факультэта Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Бародзіч А.М. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, асістэнт кафедры алгебры і геаметрыі Гомельскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Ф. Скарыны

Бародзіч Р.В. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт, начальнік навукова-даследчага сектара Гомельскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Ф. Скарыны

Басін У.І. – студэнт матэматычнага факультэта Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Века В.У. – студэнтка фізіка-матэматычнага факультэта Мазырскага дзяржаўнага педагагічнага ўніверсітэта імя І.П. Шамякіна

Задарожны А.А. – студэнт матэматычнага факультэта Валынскага нацыянальнага ўніверсітэта імя Лесі Українкі (г. Луцк, Украіна)

Зайонц Ю. – доктар навук Каталіцкага ўніверсітэта ў Любліне, прафесар, рэктар Дзяржаўнай вышэйшай прафесійнай школы ў г. Хелм (Польшча), дацэнт ўніверсітэта ў Йёенсуу (Фінляндыя)

Казінскі А.А. – кандыдат педагагічных навук, дацэнт, дацэнт кафедры інфарматыкі і прыкладной матэматыкі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Кальчук І.У. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры матэматычнага аналізу Валынскага нацыянальнага ўніверсітэта імя Лесі Українкі (г. Луцк, Украіна)

Ліўпа В.А. – доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар, прафесар кафедры тэарэтычнай фізікі Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Я. Купалы

Макавій Р.А. – аспірант 1-га года навучання кафедры дыферэнцыяльных ураўненняў і матэматычнага аналізу Валынскага нацыянальнага ўніверсітэта імя Лесі Українкі (г. Луцк, Украіна)

Матысік А.В. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт, загадчык кафедры алгебры і геаметрыі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Нікіцін А.В. – кандыдат тэхнічных навук, дацэнт, загадчык кафедры тэарэтычнай фізікі Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Я. Купалы

Нярода М.У. – кандыдат тэхнічных навук, дацэнт, загадчык кафедры тэхналогіі машынабудавання Баранавіцкага дзяржаўнага ўніверсітэта

Прыймас І.П. – студэнтка матэматычнага факультэта Валынскага нацыянальнага ўніверсітэта імя Лесі Українкі (г. Луцк, Украіна)

Равінскі А.Ф. – доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар, загадчык кафедры агульнай фізікі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна, прафесар тэхнічнага ўніверсітэта ў Беластоку (Польшча)

Сарасек С.І. – інжынер Рэсурснага цэнтра «СКІФ» Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Я. Купалы

Саўчук В.Ф. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт, загадчык кафедры інфарматыкі і прыкладной матэматыкі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Секяржыцкі С.С. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт, дацэнт кафедры тэарэтычнай фізікі і астраноміі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Селькін М.В. – доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар, прафесар кафедры вышэйшай матэматыкі Гомельскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Ф. Скарыны

Серы А.І. – асістэнт кафедры тэарэтычнай фізікі і астраноміі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Стражаў В.І. – доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар кафедры тэарэтычнай фізікі фізічнага факультэта Беларускага дзяржаўнага ўніверсітэта

Сцепанюк Г.П. – аспірант кафедры матэматычнага аналізу Валынскага нацыянальнага ўніверсітэта імя Лесі Українкі (г. Луцк, Украіна)

Сцепанюк Т.А. – студэнтка матэматычнага факультэта Валынскага нацыянальнага ўніверсітэта імя Лесі Українкі (г. Луцк, Украіна)

Харкевіч Ю.І. – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт, загадчык кафедры дыферэнцыяльных ураўненняў і матэматычнага аналізу Валынскага нацыянальнага ўніверсітэта імя Лесі Українкі (г. Луцк, Украіна)

Цыаненка Н.М. – выкладчык кафедры камп'ютарных інфармацыйных тэхналогій Баранавіцкага дзяржаўнага ўніверсітэта

Чычурын А.В. – доктар фізіка-матэматычных навук (Украіна), дацэнт, загадчык кафедры матэматычнага аналізу і дыферэнцыяльных ураўненняў Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

Да ведама аўтараў

Рэдкалегія часопіса разглядае рукапісы толькі тых артыкулаў, якія адпавядаюць навуковаму профілю выдання, нідзе не апублікаваныя і не перададзеныя ў іншыя рэдакцыі.

Артыкулы прадстаўляюцца на беларускай ці рускай мовах у двух экзэмплярах аб'ёмам ад 0,35 да 0,5 друкарскага аркуша, у электронным варыянце ў фармаце Microsoft Word for Windows (*.doc; *.rtf) і павінны быць аформлены ў адпаведнасці з наступнымі патрабаваннямі:

- папера фармату А4 (21×29,7 см);
- палі: зверху – 2,8 см, справа, знізу, злева – 2,5 см;
- шрыфт – гарнітура Times New Roman;
- кегль – 12 pt.;
- міжрадковы інтэрвал – адзінары;
- двукоссе парнае «...»;
- абзац: водступ першага радка 1,25 см;
- выраўноўванне тэксту па шырыні.

Максімальныя лінейныя памеры табліц і малюнкаў не павінны перавышаць 15×23 см або 23×15 см. Усе графічныя аб'екты, што ўваходзяць у склад аднаго малюнка, павінны быць згрупаваны паміж сабой. Фатаграфіі ў друк не прымаюцца. Размернасць усіх велічынь, якія выкарыстоўваюцца ў тэксце, павінна адпавядаць Міжнароднай сістэме адзінак вымярэння (СВ). Забараняюцца скарачэнні слоў, акрамя агульнапрынятых.

Спіс цытуемай літаратуры павінен быць аформлены паводле ДАСТА 7.1-2003 і размешчаны ў канцы тэксту. Спасылкі на крыніцы ў артыкуле нумаруюцца адпаведна парадку цытавання. Парадкавыя нумары спасылак падаюцца ў квадратных дужках (напрыклад: [1, с. 32], [2, с. 52–54]). Забараняецца выкарыстанне канцавых зносак.

Артыкул уключае наступныя элементы па парадку:

- УДК;
- ініцыялы і прозвішча аўтара (аўтараў);
- назва друкуемага матэрыялу;
- анатацыя ў аб'ёме ад 100 да 150 слоў на мове артыкула (кегль – 10 pt.);
- асноўны тэкст з табліцамі, графікамі і іншымі ілюстрацыйнымі матэрыяламі, структураваны ў адпаведнасці з патрабаваннямі ВАК да навуковых артыкулаў, якія друкуюцца ў выданнях, уключаных у спіс навуковых выданняў для апублікавання вынікаў дысертацыйных даследаванняў;
- бібліяграфічныя спісы да артыкула ў адпаведнасці з ДАСТАм 7.1-2003;
- рэзюмэ на англійскай мове (кегль – 10 pt.) з перакладам прозвішча і ініцыялаў аўтара (аўтараў) і назвы друкуемага матэрыялу.

Да рукапісу артыкула абавязкова дадаюцца:

- звесткі пра аўтара на *беларускай* мове (прозвішча, імя, імя па бацьку поўнасю, вучоная ступень і званне, месца працы (вучобы) і пасада, хатні адрас і тэлефон);
- для аспірантаў і суіскальнікаў – звесткі аб навуковых кіраўніках;
- рэкамендацыя калегіяльнага органа ўстановы (падраздзялення), дзе працуе (вучыцца) аўтар;
- рэкамендацыя знешняга рэцэнзента;
- экспертнае заключэнне.

Рэдакцыйная калегія часопіса праводзіць экспертызу атрыманых дакументаў і робіць дадатковае рэцэнзаваанне артыкулаў. Рукапісы, аформленыя не ў адпаведнасці з выкладзенымі правіламі, рэдкалегіяй не разглядаюцца.

Карэктары *М.М. Аляшчэня, К.А. Зуева, Л.М. Калілец, Ж.М. Селюжыцкая*
Камп'ютэрнае макетаванне *А.Я. Кулай, С.М. Мініч*

Подписано в печать 17.11.2011. Формат 60×84/8. Бумага офсетная.
Гарнитура Таймс. Ризография. Усл. печ. л. 15,81. Уч.-изд. л. 13,40.
Тираж 100 экз. Заказ № 605.

Издатель и полиграфическое исполнение
УО «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина».
ЛИ № 02330/277 от 08.04.2009.
224016, Брест, ул. Мицкевича, 28.