

Учреждение образования
«Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»

Т.С. Онискевич

ЛЕКЦИИ ПО ОСНОВАМ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

(ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПСИХОЛОГИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ)

Брест
БрГУ имени А.С. Пушкина
2017



Начало

Содержание



Страница 1 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

УДК 51+378(075)
ББК 22+74.58
О 58

*Рекомендовано редакционно-издательским советом Учреждения образования
«Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»*

Рецензенты:

кандидат физико-математических наук, доцент
кафедры методик дошкольного образования БрГУ им. А.С. Пушкина»

Т.С. Будько

Доктор технических наук, профессор,
инженер-математик, зав. кафедрой «Основы строительства и
строительная физика» Белостокского технического университета

В.А. Езерский

Онискевич, Т.С.

Лекции по основам высшей математики: для студентов психологических специальностей / Т.С. Онискевич; Брест. гос. ун-т имени А.С. Пушкина. – Брест: Изд-во БрГУ им. А.С. Пушкина, 2016. – 83 с.

Лекционный курс содержит необходимый для сдачи экзамена по основам высшей математики материал, адаптированный в соответствии со спецификой гуманитарной специальности «Психология». Удобная форма подачи материала, специально подобранные примеры, интеллект-карты по отдельным темам, а также вопросы для самоконтроля в конце каждой главы содействуют осознанному усвоению и эффективному повторению программы курса.



Начало

Содержание



Страница 2 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

Пособие предназначено для студентов психологических специальностей университетов.

УДК 51+378(075)

ББК 22+74.58

©Онискевич Т.С. 2017

©УО «Брестский государственный университет
имени А.С. Пушкина», 2017



Начало

Содержание



Страница 3 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

СОДЕРЖАНИЕ

Глава 1 ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ	6
1.1. Основные понятия	6
1.2. Операции над множествами	8
1.3. Бинарные отношения	14
1.4. Элементы теории множеств в анализе психологических явлений	18
Глава 2 ЭЛЕМЕНТЫ ЛОГИКИ ВЫСКАЗЫВАНИЙ	22
2.1. Высказывания и операции над ними	22
2.2. Формулы и законы логики высказываний	27
2.3. Правила вывода	29
2.4. Кванторы	30
Глава 3 ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ	33
3.1. Основные понятия линейной алгебры	33
3.2. Операции над матрицами	34
3.3. Определители квадратных матриц и их свойства	36
3.4. Системы линейных уравнений. Основные понятия и определения	38
3.5. Решение систем линейных уравнений	40
3.6. Применение элементов линейной алгебры в психологии	45
Глава 4 ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА	48
4.1. Понятие функции	48
4.2. Элементарные функции	52
4.3. Предел функции	56
4.4. Непрерывность функций	58
4.5. Производная	59
4.6. Правила дифференцирования	61
4.7. Таблица производных	62
4.8. Возрастание и убывание функции. Экстремумы функции	63



Начало

Содержание



Страница 4 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

4.9. Неопределённый интеграл	68
4.10. Определённый интеграл	71
4.11. Использование математического анализа в психологии	74
Глава 5 ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ	76
5.1. Случайные события. Их виды	76
5.2. Операции над событиями	77
5.3. Определения вероятности случайного события	79
5.4. Основные теоремы теории вероятностей	82
5.5. Основы комбинаторики	85
5.6. Формула полной вероятности и формула Байеса	90
5.7. Случайные величины. Закон распределения случайной величины	92
5.8. Функция распределения случайной величины. Ее свойства	94
5.9. Формула Бернулли	96
5.10. Формула Пуассона	97
5.11. Числовые характеристики дискретной случайной величины	98
5.12. Непрерывные случайные величины. Плотность распределения	100
5.13. Числовые характеристики непрерывной случайной величины	102
5.14. Применение вероятностных методов в психологии	103
ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ	105
ЛИТЕРАТУРА	106



Начало

Содержание



Страница 5 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть



1.1. Основные понятия

Множество – понятие неопределяемое, используемое для описания совокупностей математических объектов (чисел, точек, функций и т. д.) Основатель теории множеств немецкий математик Георг Кантор выразил эту мысль следующим образом: «Множество есть многое, понимаемое как единое целое».

В математике множества обозначаются большими буквами латинского алфавита $A, B, C, \dots, X, Y, Z$. О предметах, составляющих множество, говорят, что они являются элементами множества. Элементы множеств обозначают малыми буквами латинского алфавита: $a, b, c, \dots, x, y, z$.

Если элемент a принадлежит множеству A , то это записывают: $a \in A$.

Множества могут быть **конечными** и **бесконечными**; конечное множество состоит из конечного числа элементов, бесконечное – из бесконечного их числа.

Пример:

Бесконечные числовые множества:

N – множество натуральных чисел;

Z – множество целых чисел;

Q – множество рациональных чисел;

I – множество иррациональных чисел;

R – множество действительных чисел.

Множества, не содержащие ни одного элемента, называются **пустыми** множествами: $\emptyset$.

Задать множество – значит указать, какие элементы принадлежат множеству, а какие не принадлежат.

Задавать множества можно следующими способами:

1. **Перечислением всех элементов**, из которых состоит множество. Например, $A = \{a, b, c, d, f\}$.

Начало

Содержание



Страница 6 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

2. **Указанием характеристического свойства**, т. е. свойства, которым обладают только элементы данного множества и ни один элемент из другого множества не обладает этим свойством. Пример: C – множество натуральных чисел, не превосходящих десяти, $C = \{x/x \in N, x < 10\}$. Можем также перечислить элементы множества $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
3. **Перечислением первых элементов** множества (перечисление продолжается до тех пор, пока не выявится закономерность получения следующих элементов). Пример: $X = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$, $Y = \{2, 4, 8, 16, \dots\}$.
4. В виде **промежутков на числовой прямой** (используется только для множеств, состоящих из действительных чисел). Примеры таких множеств изображены на рисунках 1.1 и 1.2.

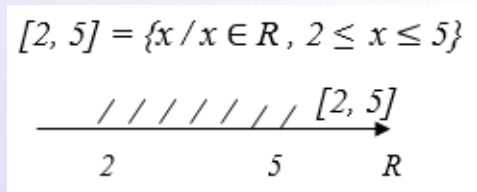


Рисунок 1.1

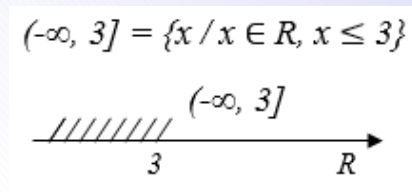


Рисунок 1.2

Множество B называется **подмножеством** множества A , если каждый элемент множества B является элементом множества A . Записывают $B \subset A$.

Пример:

$A = \{a, b, c\}$. Подмножествами множества A являются следующие множества: $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{b, c\}$, $\{a, c\}$, $\{a, b, c\}$, $\emptyset$.

Два множества A и B называются **равными**, если они состоят из одних и тех же элементов.

Множество, в которое включаются все рассматриваемые в данный момент множества, называется **универсальным** U . Например, при решении задач с действи-



Начало

Содержание



Страница 7 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

тельными числами универсальным является множество R , а при рассмотрении множества студентов некоторой группы универсальным будет множество студентов университета.

Наглядно можно изобразить множества с помощью **кругов Эйлера** (**диаграмм Венна**).

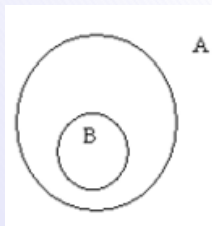


Рисунок 1.3

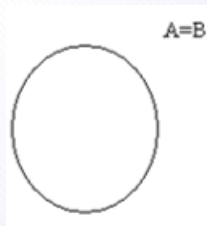


Рисунок 1.4

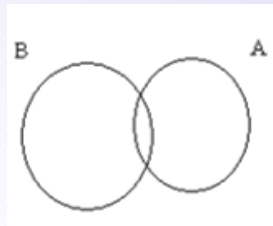


Рисунок 1.5

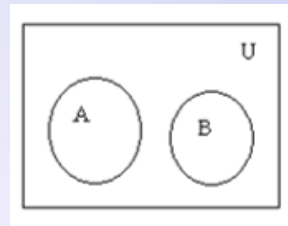


Рисунок 1.6

На **рисунке 1.3** изображены множества A и B , которые находятся в отношении включения ($B \subset A$), на **рисунке 1.4** – в отношении равенства ($A = B$), на **рисунке 1.5** – в отношении пересечения, **рисунк 1.6** показывает универсальное множество U (его принято изображать в виде прямоугольника) и его подмножества A и B .

1.2. Операции над множествами

Пересечением двух множеств A и B называется множество $A \cap B$, которое состоит из элементов, принадлежащих множествам A и B одновременно.

Символическая запись определения: $A \cap B = \{x/x \in A \text{ и } x \in B\}$.

Объединением двух множеств A и B называется множество $A \cup B$, которое состоит из элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A или B .

Символическая запись определения: $A \cup B = \{x/x \in A \text{ или } x \in B\}$.

Разностью множеств A и B называется множество $A \setminus B$, которое состоит



Начало

Содержание



Страница 8 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

из элементов множества A , не принадлежащих множеству B .

Символическая запись определения: $A \setminus B = \{x/x \in A \text{ и } x \notin B\}$.

Дополнением множества B до множества A называется множество B'_A , которое состоит из элементов множества A , не принадлежащих множеству B , при условии, что множество B является подмножеством множества A .

Символическая запись определения: $B'_A = \{x/x \in A, x \notin B, B \subset A\}$.

Примеры:

1. Если $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, то $A \cap B = \{2, 4\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$, $A \setminus B = \{1, 3, 5\}$, $B \setminus A = \{6, 8\}$.
2. Если X – множество любителей психологи, Y – множество любителей математики, то $A \cap B$ – множество людей, любящих и математику, и психологию; $A \cup B$ – множество людей, которые любят хотя бы одну из наук: либо математику, либо психологию, (либо обе науки одновременно).
3. Пусть $A = [0, +\infty)$, $B = \mathbb{R}$. Тогда $A'_B = (-\infty, 0)$.

Графическая иллюстрация данных выше определений показана на рисунках 1.7 – 1.11:

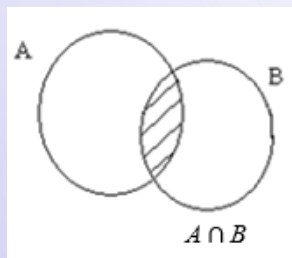


Рисунок 1.7

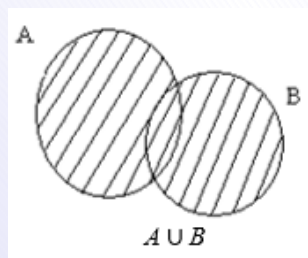


Рисунок 1.8

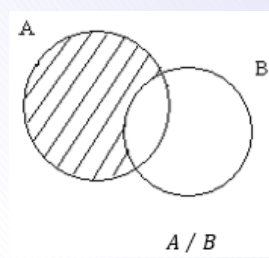


Рисунок 1.9



Начало

Содержание



Страница 9 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

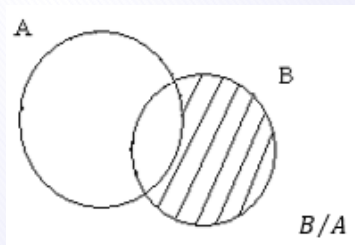


Рисунок 1.10

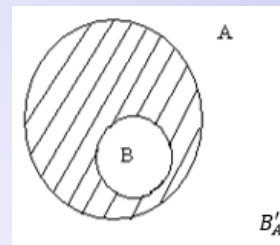


Рисунок 1.11

Свойства операций объединения и пересечения множеств:

1. Коммутативность $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$.
2. Ассоциативность $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
3. Дистрибутивность пересечения относительно объединения $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; дистрибутивность объединения относительно пересечения $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
4. Законы де Моргана $(A \cap B)' = A' \cup B'$, $(A \cup B)' = A' \cap B'$.
5. $A \cap A = A$, $A \cup A = A$.
6. $A \cap U = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$.
7. $A \cup U = U$, $A \cup \emptyset = A$.

Декартовым произведением множеств A и B называется множество $A \times B$, состоящее из всевозможных упорядоченных пар вида (x, y) , где элемент x взят из множества A , а элемент y взят из множества B .

Символическая запись определения: $A \times B = \{(x, y) / x \in A, y \in B\}$.

Если два множества, участвующие в декартовом произведении, равны, то такое декартово произведение называется **декартовым квадратом** множества и обозначается A^2 .



Начало

Содержание



Страница 10 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

Можно найти декартово произведение более двух множеств, например, трех, четырех, и т. д.

Пример:

Пусть $X = \{1, 2, 3\}; Y = \{5, 6\}$.

Тогда $X \times Y = \{(1, 5), (1, 6), (2, 5), (2, 6), (3, 5), (3, 6)\}$.

$X \times X = X^2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$.

$Y \times Y = Y^2 = \{(5, 5), (5, 6), (6, 5), (6, 6)\}$.

Декартовым произведением n множеств $A_1, A_2, \dots, A_n$ называется множество всевозможных **кортежей длины n** , в которых первая компонента (координата) принадлежит множеству A_1 , вторая компонента – множеству A_2 , и т. д., n -я – множеству A_n .

Кортеж длины n – это упорядоченная последовательность n элементов, среди которых могут быть одинаковые. Кортеж длины два – это **упорядоченная пара**, кортеж длины три – **упорядоченная тройка**. Элементы кортежа называются его **компонентами** или **координатами**.

Два кортежа называются **равными**, если их длины равны и соответствующие координаты совпадают.

Символическая запись определения декартова произведения n множеств:

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) / x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots, x_n \in A_n\}.$$

Способы задания декартова произведения двух множеств:

1. С помощью перечисления упорядоченных пар элементов – пример рассмотрен выше.
2. С помощью графа, на котором два элемента, соединенные стрелкой, обозначают упорядоченную пару (**рисунок 1.12**).
3. С помощью графика на координатной плоскости (**рисунок 1.13**).



Начало

Содержание



Страница 11 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

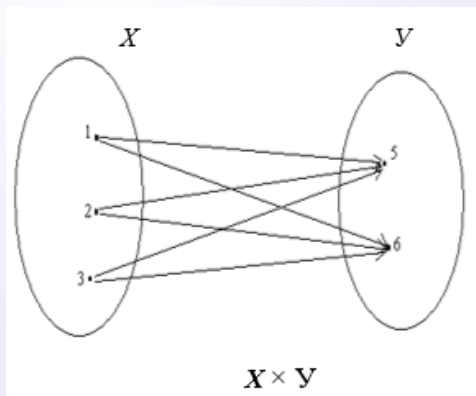


Рисунок 1.12

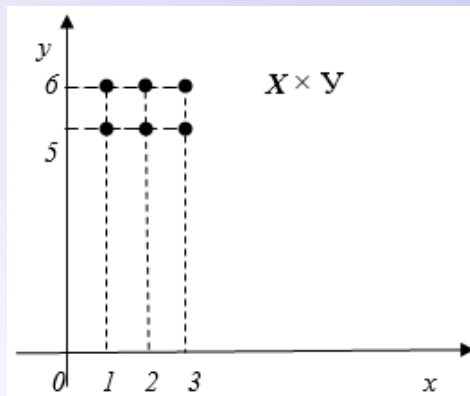


Рисунок 1.13

Количество элементов в объединении $n(A \cup B)$ и декартовом произведении $n(A \times B)$ двух множеств A и B вычисляется соответственно по следующим формулам:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B), \text{ если } A \cap B \neq \emptyset$$

$$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B).$$

Пример:

- Из 50 студентов 20 знают немецкий язык, а 15 – английский. Каким может быть число студентов, знающих оба языка?

Для решения задачи введем обозначения: X – множество всех студентов, A – множество студентов, знающих английский язык, B – множество студентов, знающих немецкий язык, причем $A \subset X$, $B \subset X$. Известно, что $n(X) = 50$, $n(A) = 15$, $n(B) = 20$. Вопрос о числе студентов, знающих оба языка сводится к определению числа элементов в пересечении множеств A и B . Очевидно, что $0 \leq n(A \cap B) \leq 15$.



Начало

Содержание



Страница 12 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

2. В рассмотренном ранее примере для декартова произведения множеств $X = \{1, 2, 3\}$ и $Y = \{5, 6\}$:

$$n(X \times Y) = n(X) \cdot n(Y) = 3 \cdot 2 = 6,$$

$$n(X \times X) = n(X^2) = 3 \cdot 3 = 9,$$

$$n(Y \times Y) = n(Y^2) = 2 \cdot 2 = 4.$$

В дальнейшем мы будем использовать схемы, которые называются интеллект-картами и служат обобщенному представлению изученного материала по конкретной теме. Суть интеллект-карты состоит в схематичном наглядном представлении единиц информации и связей между ними. Каждый студент может вычертить свою интеллект-карту по изученному материалу. Это будет содействовать систематизации и уточнению, а, значит, более осознанному усвоению теоретической и практической информации. Интеллект-карта «Множества и операции над ними» может выглядеть, например, как на [рисунке 1.14](#).



Начало

Содержание



Страница 13 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

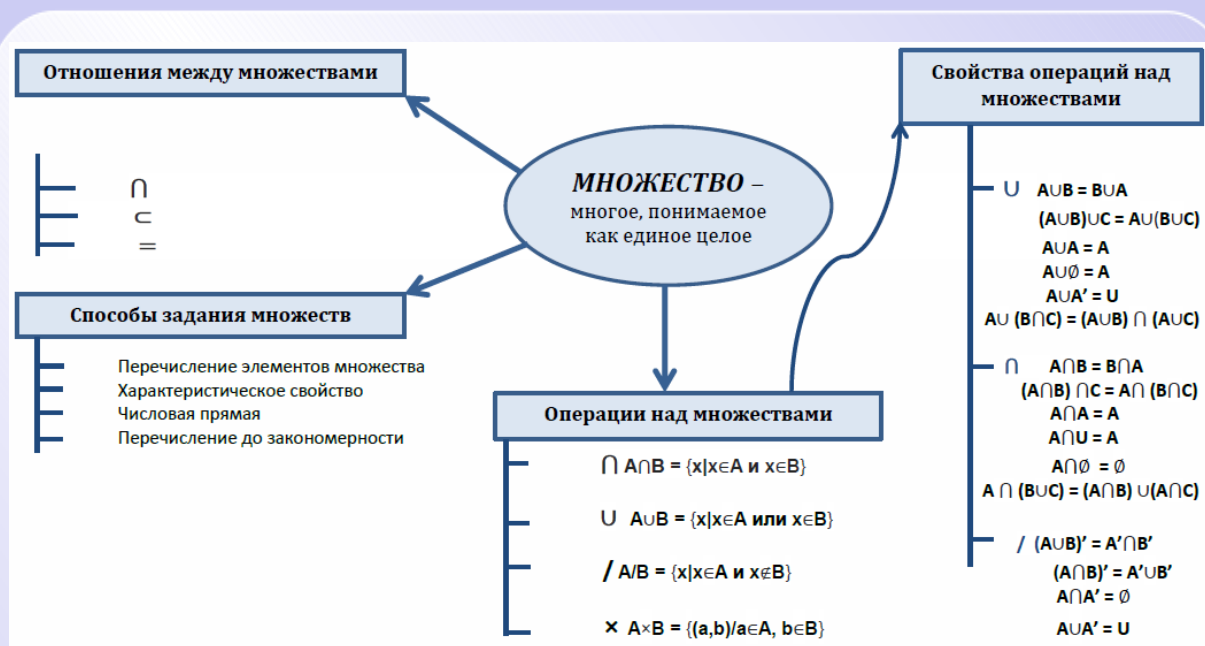


Рисунок 1.14 – Интеллект-карта «Множества и операции над ними»

1.3. Бинарные отношения

Отношением R между множествами X и Y называется некоторое подмножество R декартова произведения $X \times Y$: $R \subset (X \times Y)$. Для пары элементов (x, y) , связанных отношением R , имеет место: $x R y$ или $R(x) = y$.

Множество всех первых элементов пар $R \subset (X \times Y)$ называется *областью определения* отношения R и обозначается $Dom R$:

$$Dom R = \{x \mid \exists y, (x, y) \in R\}.$$

На графе это множество начал всех стрелок.



Начало

Содержание



Страница 14 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

Множество всех вторых элементов пар $R \subset (X \times Y)$ называется **областью значения** отношения R и обозначается ***Im R***:

$$\text{Im } R = \{y \mid \exists x, (x, y) \in R\}.$$

На графе это множество концов всех стрелок.

Бинарное отношение называют **полным**, если для каждой пары (x, y) несовпадающих элементов множества X выполняется $(x R y)$ или $(y R x)$.

Если $a \in X$, то **образом** этого элемента в соответствии R называется множество $R(a)$ всех элементов $y \in Y$, таких, что $a R y$. **Прообразом** элемента $b \in Y$ в том же соответствии назовем множество $R^{-1}(b)$ элементов $x \in X$, таких, что $x R b$. Образ всего множества X есть множество (область) значений – $R(X)$. Прообраз всего множества Y в соответствии R есть область определения этого соответствия, что обозначают $R^{-1}(Y)$.

Пример:

Возьмем множество учеников $X = \{\text{Ваня, Даша, Ира}\}$ и множество типов темперамента $Y = \{\text{сангвиник, холерик, флегматик, меланхолик}\}$. Построим граф отношения R : «Ученик x обладает темпераментом y ».

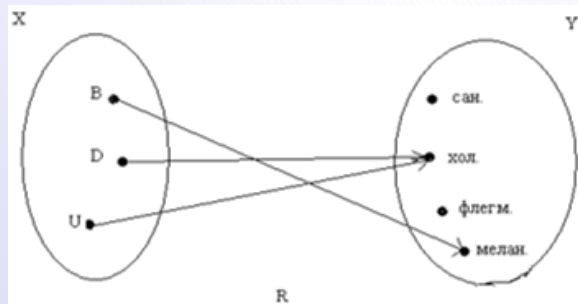


Рисунок 1.15



Начало

Содержание



Страница 15 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть



На **рисунке 1.15**: $R(\text{Ира}) = \{\text{холерик}\}$, $R(\text{Даша}) = \{\text{холерик}\}$, $R(\text{Ваня}) = \{\text{меланхолик}\}$, $R^{-1}(\text{холерик}) = \{\text{Даша}, \text{Ира}\}$, $R^{-1}(\text{меланхолик}) = \{\text{Ваня}\}$, $R^{-1}(\text{сангвиник}) = \emptyset$, $R^{-1}(\text{флегматик}) = \emptyset$. Область определения отношения $R^{-1}(Y) = X = \{\text{Ваня}, \text{Даша}, \text{Ира}\}$, множество значений $R(X) = \{\text{холерик}, \text{меланхолик}\}$.

Если в отношении R образ каждого элемента $x \in X$ или пуст, или содержит лишь один элемент, то R называют **функциональным отношением** или **функцией**. Другими словами, отношение R является функциональным, если из того, что $x R y_1$ и $x R y_2$, можно сделать вывод, что $y_1 = y_2$.

Сформулируем некоторые свойства отношений.

1. Отношение R , заданное на множестве X , называется **рефлексивным**, если каждый элемент $x \in X$ находится в этом отношении сам с собой. Символическая запись: $\forall x \in X : x R x$.
2. Отношение R , заданное на множестве X , называется **антирефлексивным**, если никакой элемент $x \in X$ не находится в отношении R с самим собой. Символическая запись: $\forall x \in X : \neg x R x$.
3. Отношение R , заданное на множестве X , называется **симметричным**, когда для всех $x \in X$, $y \in X$ выполняется: *если $x R y$, то $y R x$* . Символическая запись: $\forall x, y \in X : x R y \Rightarrow y R x$.
4. Отношение R , заданное на множестве X , называется **асимметричным** при условии, что ни для каких $x \in X$, $y \in X$ не выполняется: *если $x R y$, то $y R x$* . Символическая запись: $\forall x, y \in X : \neg (x R y \Rightarrow y R x)$.
5. Отношение R , заданное на множестве X , называется **антисимметричным** при условии, что для $x \in X$, $y \in X$ выполняется: *если $x R y$ и $y R x$, то $x = y$* . Символическая запись: $\forall x, y \in X : (x R y \wedge y R x) \Rightarrow x = y$.
6. Отношение R , заданное на множестве X , называется **транзитивным**, если для $x \in X$, $y \in X$, $z \in X$, выполняется: *если $x R y$ и $y R z$, то $x R z$* . Символическая запись: $\forall x, y, z \in X : (x R y \wedge y R z) \Rightarrow x R z$.

Начало

Содержание



Страница 16 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

Пример:

Рассмотрим отношение R : «учиться в одной группе» на множестве студентов. Проверим выполнение следующих свойств:

- 1) Рефлексивность: для любого студента x выполняется $x R x$, т. е. «студент x учится в одной группе сам с собой» – и.
- 2) Симметричность: для двух студентов x и y выполняется если $x R y$, то $y R x$, т. е. «если студент x учится в одной группе со студентом y , то студент y учится в одной группе со студентом x » – и.
- 3) Транзитивность: для трех студентов x, y, z выполняется: если $x R y$ и $y R z$, то $x R z$, т. е. «если студент x учится в одной группе со студентом y , а студент y учится в одной группе со студентом z , то студенты x и z учатся в одной группе» – и.

Отношение R на множестве X называется **отношением эквивалентности** (или **эквивалентностью**), если оно рефлексивно, симметрично, транзитивно. Рассмотренное в примере отношение «учиться в одной группе» на множестве студентов является отношением эквивалентности.

Отношение R на множестве X называется **отношением толерантности** (**толерантностью**), если оно рефлексивно и симметрично. Примером отношения толерантности может служить отношение «быть знакомым» на множестве людей.

Отношение R на множестве X называется **отношением строгого порядка** (**строгим порядком**), если оно антирефлексивно, асимметрично, транзитивно. Примерами являются отношения «выше», «дальше», «тяжелее».

Отношение R на множестве X называется **отношением нестрогого порядка** (**нестрогим порядком**), если оно рефлексивно, антисимметрично, транзитивно. Примерами являются отношения «не выше», «не меньше», «не больше».

Пример:

Проверить, является ли отношением эквивалентности на множестве всех прямых на плоскости отношение перпендикулярности прямых.



Начало

Содержание



Страница 17 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть



- 1) Рефлексивность. Поскольку никакая прямая из множества всех прямых плоскости не перпендикулярна сама себе $\neg(a \perp a)$, то данное отношение не является рефлексивным.
- 2) Симметричность. Данное отношение является симметричным, поскольку для любых прямых a и b : $a \perp b \Rightarrow b \perp a$.
- 3) Транзитивность. Данное отношение не является транзитивным, т. к. для любых прямых a , b и c : $(a \perp b, b \perp c \Rightarrow a \perp c)$.

Итак, данное бинарное отношение не является отношением эквивалентности (не выполнены условия рефлексивности и транзитивности).

Рассмотренные отношения и их свойства находят применение при составлении тестов, в вопросах голосования и т. д.

1.4. Элементы теории множеств в анализе психологических явлений

Применение в психологии теории множеств связано, во-первых, с психологическими, а, во-вторых, с математическими интерпретациями психологических явлений.

В оценках общественного мнения часто присутствуют три множества: множество S социальных общностей, мнения которых сравниваются между собой; множество M вопросов, на которые должны ответить члены этих общностей; множество K мнений по каждому из вопросов.

Психологическая интерпретация различных явлений необходима в связи с тем, что психика человека определяется многофакторностью жизни, множеством многозначных внешних и внутренних отношений, в которых существует психика. Структура психики является многоуровневой, многоаспектной, а ее проявления в процессе развития и функционирования вариативными и изменчивыми. Эта множественность убеждает в том, что понятие о множестве, мыслимом в виде единого целого, является одним из фундаментальных понятий психологии. Психические образования, такие как личность, индивидуальность, характер, интеллект, психическая норма, отклоне-

Начало

Содержание



Страница 18 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

ния от нормы, проявляют себя множествами психических явлений и поведенческих качеств во множествах ситуаций. Здесь психологи имеют дело с множествами множеств, которые могут быть разбиты на более простые [2, с. 51].

Все психические проявления могут и должны исследоваться сначала в качественном, а затем и в количественном отношении. Количественное выражение психологических исследований – это множества числовых данных. Путем сопоставления этих данных с различными исходными множествами дает возможность получить различные интерпретации исследуемых явлений, среди которых можно выделить подмножества адекватных и неадекватных интерпретаций. Адекватные интерпретации или гипотезы принимаются, неадекватные отбрасываются, недостаточно адекватные корректируются. Таким образом математическая обработка психологических данных позволяет делать выводы в психологических исследованиях.

Очень часто психология использует декартово произведение множеств для моделирования различных психических образований. Например, для качественной интерпретации возможных типов интеллекта по тестам Д. Векслера можно использовать табличное представление возможных типов интеллекта. Типы интеллекта получаются в результате сочетания различных уровней вербального и невербального интеллекта человека. По сути это результат декартового произведения двух множеств, изображенного в виде таблицы (**таблица 1.1**), где по горизонтали расположены уровни вербального, а по вертикали – невербального интеллекта. На главной диагонали получены уровни общего интеллекта [2, с. 190].



Начало

Содержание



Страница 19 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

Таблица 1.1 Интерпретация типов интеллекта по тестам Д. Векслера

	ОВ	В	ХН	Н	СН	ПУ	УД
ОВ	ОВ	ОВ*В	ОВ*ХН	ОВ*Н			
В	В*ОВ	В	В*ХН	В*Н	В*СН		
ХН	ХН*ОВ	ХН*В	ХН	ХН*Н	ХН*СН		
Н	Н*ОВ	Н*В	Н*ХН	Н	Н*СН	Н*ПУ	
СН		СН*В	СН*ХН	СН*Н	СН	СН*ПУ	СН*УД
ПУ				ПУ*Н	ПУ*СН	ПУ	ПУ*УД
УД					УД*СН	УД*ПУ	УД

Условные обозначения, использованные в *таблице 1.1* – уровни интеллекта: ОВ – очень высокий, В – высокий, ХН – хорошая норма, Н – норма, СН – сниженная норма, ПУ – пограничный уровень, УД – умственный дефект.

Теория множеств находит свое применение и в такой сфере психологии, как психодиагностика. В психодиагностике существуют различные теории личности, в которых модели личности могут быть представлены формализованно в виде множеств свойств и отношений между ними. В этом случае личность H – это множество L внешних особенностей поведения или деятельности человека, за которыми скрываются внутренние психические явления, со множеством отношений R между ними: $H = \{L, R\}$, где L и R в различных психологических концепциях интерпретируются по-разному [2, с. 193].



Начало

Содержание



Страница 20 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

Вопросы для самоконтроля:

1. Приведите примеры нескольких известных вам конечных множеств.
2. Попробуйте задать одно из приведенных вами множеств различными способами.
3. Сколько видов отношений между множествами вы знаете? Назовите их.
4. Сколько операций над множествами вы знаете? Назовите их и запишите их обозначения.
5. Используя диаграммы Эйлера-Венна, покажите объединение, пересечение и разность множеств, находящихся в отношениях: а) равенства, б) включения, в) пересечения.
6. Приведите пример отношения, заданного на множестве людей.
7. Выясните, какими свойствами обладает это отношение.
8. Попробуйте построить интеллект-карты операций над множествами.
9. Постройте интеллект-карту свойств бинарных отношений.



Начало

Содержание



Страница 21 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

Глава 2 ЭЛЕМЕНТЫ ЛОГИКИ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

2.1. Высказывания и операции над ними

Повествовательное предложение, о котором можно сказать, истинно оно или ложно, называется **высказыванием**.

Обозначаются высказывания большими буквами латинского алфавита: $A, B, C, \dots, X, Y, Z$. Высказывания бывают **истинными** (*и*) или **ложными** (*л*).

Предложение с одной или несколькими переменными, которое преобразуется в высказывание при подстановке вместо всех переменных их значений, называется **предикатом**. Записывают предикаты так: $A(x)$, $B(x, y)$.

Примеры:

1. «Студент x изучает психологию» – предикат; «Студенты 14 группы изучают психологию» – высказывание.
2. Высказывание A : «Человек – существо мыслящее» – *и*; высказывание B : «Насекомое – существо мыслящее» – *л*.

Высказывание, представляющее собой одно утверждение (истинное или ложное), называется **элементарным (простым) высказыванием**.

Высказывание, образованное из элементарных, называется **составным** или **сложным**.

Образование составного высказывания из элементарных называется **логической операцией**.

Существуют следующие операции над высказываниями: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация и эквиваленция.

Отрицанием высказывания A называется высказывание $\bar{A}$ – «не A », которое является истинным тогда, когда высказывание A ложно, а ложным тогда, когда A истинно.

Набор всевозможных значений истинности для A и $\bar{A}$ отражает **таблица 2.1**, называемая **таблицей истинности**.



Начало

Содержание



Страница 22 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

Таблица 2.1 – Таблица истинности для отрицания

A	$\bar{A}$	$\bar{\bar{A}}$
И	Л	И
Л	И	Л

Отрицание любого высказывания можно построить с помощью слов: «неверно, что». Поскольку $\bar{A}$ – высказывание, то можно построить его отрицание $\bar{\bar{A}}$ – двойное отрицание. Очевидно, что $A = \bar{\bar{A}}$ (см. [таблицу 2.1](#)).

Конъюнкцией двух высказываний A и B называется составное высказывание $A \wedge B$ ($A \& B$) – « A и B », которое истинно в том, и только в том случае, когда оба высказывания A и B истинны. Набор всевозможных значений истинности конъюнкции показан в [таблице 2.2](#):

Таблица 2.2 – Таблица истинности для конъюнкции

A	B	$A \wedge B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	Л

Дизъюнкцией двух высказываний A и B называется составное высказывание $A \vee B$ – « A или B », которое является истинным тогда и только тогда, когда хотя бы одно из высказываний A или B истинно. Таблица истинности дизъюнкции – [таблица 2.3](#):



Начало

Содержание



Страница 23 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

Таблица 2.3 – Таблица истинности для дизъюнкции

A	B	$A \vee B$
И	И	И
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	Л

Импликацией двух высказываний A и B называют составное высказывание $A \Rightarrow B$ ($A \rightarrow B$), ($A \supset B$) «если A , то B », которое ложно тогда и только тогда, когда первое высказывание, т. е. A , истинно, а B ложно. Таблица истинности импликации – **таблица 2.4**:

Таблица 2.4 – Таблица истинности для импликации

A	B	$A \Rightarrow B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

Эквиваленцией двух высказываний A и B называется составное высказывание $A \Leftrightarrow B$ ($A \leftrightarrow B$) – « A тогда и только тогда, когда B », которое является истинным в том и только в том случае, когда оба высказывания одновременно либо истинны, либо ложны. Таблица истинности эквиваленции – **таблица 2.5**:



Начало

Содержание



Страница 24 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

Таблица 2.5 – Таблица истинности для эквиваленции

A	B	$A \Leftrightarrow B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	И

Следует сделать оговорку, что в математике логические операции не учитывают смысл высказываний; они рассматриваются как объекты, обладающие единственным свойством – быть истинными и ложными.

Примеры:

1. Высказывание A : «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина был основан в 1945 году»; высказывание $\bar{A}$: «Неверно, что Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина был основан в 1945 году».
2. Высказывание A : «Студент добросовестно готовился к экзамену», высказывание B : «Студент сдал экзамен отлично», высказывание $A \wedge B$: «Студент добросовестно готовился к экзамену и сдал его отлично».
3. $A \wedge B$: «Число 30 двузначное и четное».
4. Высказывание A : «Фестиваль «Славянский базар» проводится в Витебске», высказывание B : «Брест – самый западный город Беларуси», высказывание $A \vee B$: «Славянский базар» проводится в Витебске или Брест – самый западный город Беларуси».
5. $A \vee B$: « $13 \leq 23$ ».
6. $A \Rightarrow B$: «Если число 30 двузначное, то оно четное».
7. Высказывание A : «Треугольник ABC является прямоугольным», высказывание B : «Квадрат одной стороны треугольника равен сумме квадратов двух



Начало

Содержание



Страница 25 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть



других его сторон», высказывание $A \Leftrightarrow B$: «Треугольник ABC является прямоугольным тогда и только тогда, когда квадрат одной стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон».

8. $A \Leftrightarrow B$: «Стать хорошим психологом можно тогда и только тогда, когда овладеешь математическими методами».

Интеллект-карта по логике высказываний может выглядеть, например, следующим образом (рисунок 2.1):



Рисунок 2.1 – Интеллект-карта «Логика высказываний»

Начало

Содержание



Страница 26 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть



2.2. Формулы и законы логики высказываний

Логической формулой, или **формулой логики высказываний** называется предложение, составленное из элементарных (простых) высказываний ($A, B, C, \dots, X, Y, Z$), знаков логических операций ($\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$) и скобок.

Алгоритм получения формулы из высказывания (формализации):

- 1) выделить все элементарные высказывания и логические операции, образующие данное составное высказывание;
- 2) заменить их соответствующими буквами и символами;
- 3) расставить скобки в соответствии со смыслом данного высказывания.

Пример:

Дано предложение: «Если человек доброжелателен и контактен, то с ним легко общаться». Обозначим: A – «Человек является доброжелательным», B – «Человек является контактным», C – «С человеком легко общаться». Формула будет такой: $(A \wedge B) \Rightarrow C$.

Логические операции выполняются в следующей последовательности: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$. Это позволяет упрощать запись, избавляясь от лишних скобок. Например, вместо формулы $((A \wedge B) \vee (\bar{A} \vee \bar{B})) \Rightarrow (\bar{A} \vee \bar{B})$ можно записать $A \wedge B \vee \bar{A} \vee \bar{B} \Rightarrow \bar{A} \vee \bar{B}$.

Способ «вычисления истинности» логических формул – построение таблицы истинности.

Пример:

Построить таблицу истинности для формулы $\bar{A} \vee \bar{B} \Rightarrow B$.

A	B	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$\bar{A} \vee \bar{B}$	$\bar{A} \vee \bar{B} \Rightarrow B$
И	И	Л	Л	Л	И
И	Л	Л	И	И	Л
Л	И	И	Л	И	И
Л	Л	И	И	И	Л

Начало

Содержание



Страница 27 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

Если формула содержит три переменных, то для нее будет 8 различных наборов значений истинности. Если в формуле n переменных, то различных наборов значений истинности будет 2^n .

Две логические формулы называются **равносильными**, если их таблицы истинности совпадают.

В логике высказываний существуют следующие равносильности или **законы логики**, связанные с законами мышления:

- I. $A \equiv A$ – закон тождества;
- II. $A \wedge \bar{A} \equiv \text{Л}$ – закон противоречия;
- III. $A \vee \bar{A} \equiv \text{И}$ – закон исключенного третьего;
- IV. $A \equiv \bar{\bar{A}}$ – снятие отрицания;
- V. $A \wedge A \equiv A$; $A \vee A \equiv A$;
- VI. $A \wedge B \equiv B \wedge A$; $A \vee B \equiv B \vee A$ – коммутативность;
- VII. $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$; $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$ – ассоциативность;
- VIII. $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$; $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ – дистрибутивность;
- IX. $\overline{A \wedge B} \equiv \bar{A} \vee \bar{B}$; $\overline{A \vee B} \equiv \bar{A} \wedge \bar{B}$ – законы Де Моргана;
- X. $A \wedge \text{И} \equiv A$; $A \vee \text{Л} \equiv A$;
- XI. $A \wedge \text{Л} \equiv \text{Л}$; $A \vee \text{И} \equiv \text{И}$;
- XII. $A \wedge (A \vee B) \equiv A$; $A \vee (A \wedge B) \equiv A$;
- XIII. $(A \vee B) \wedge (\bar{A} \vee \bar{B}) \equiv \bar{B}$; $(A \wedge B) \vee (\bar{A} \wedge \bar{B}) \equiv \bar{B}$;;
- XIV. $A \Rightarrow B \equiv \bar{A} \vee B$; $A \Rightarrow B \equiv \overline{A \wedge \bar{B}}$ – замена импликации.

Доказать эти законы можно с помощью таблиц истинности.

Логическая формула называется **тождественно истинной** или **тавтологией**, если она принимает только значение «и» при любом наборе значений истинности входящих в нее переменных.



Начало

Содержание



Страница 28 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

Логическая формула называется **тождественно ложной**, или **противоречием**, если она принимает только значение «л» при любом наборе значений истинности входящих в нее переменных.

Логическая формула называется **выполнимой**, если в таблице истинности есть и значения «л», и значения «и».

Тождественно истинные и тождественно ложные формулы играют важную роль в математической логике, так как являются моделями для многих задач. Так, тождественно истинные формулы используются при построении логических выводов одних утверждений из других, тождественно ложные – при анализе совместности утверждений. Аксиомы, теоремы, статьи законодательства – примеры тождественно истинных высказываний.

Логика является незаменимой в психологических исследованиях, где проводится оценка выдвигаемых гипотез (предположений) на предмет их истинности или ложности, которая осуществляется на основе статистических критериев.

2.3. Правила вывода

Рассуждения в математике проводятся по правилам, которые носят название **правил вывода**. Правила вывода лежат в основе дедуктивных рассуждений. Дедукция – это способ рассуждения от общего к частному. Наиболее часто применяются следующие правила вывода:

- I. Правило заключения (ПЗ) $\frac{A \rightarrow B, A}{B}$;
- II. Правило отрицания (ПО) $\frac{A \rightarrow B, \bar{B}}{\bar{A}}$;
- III. Правило силлогизма (ПС) $\frac{A \rightarrow B, B \rightarrow C}{A \rightarrow C}$;
- IV. Правило контрапозиции (ПК) $\frac{A \rightarrow B}{B \rightarrow A}$;
- V. Правило объединения заключений (ПОЗ) $\frac{A \rightarrow B, A \rightarrow C}{A \rightarrow B \wedge C}$;
- VI. Правило объединения посылок (ПОП) $\frac{A \rightarrow C, B \rightarrow C}{A \vee B \rightarrow C}$;



Начало

Содержание



Страница 29 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

VII. Правило доказательства от противного (ПДП) $\frac{\bar{A} \rightarrow B, \bar{A} \rightarrow \bar{B}}{A}$.

Над чертой записывают посылки, под чертой – заключение. Каждое из этих правил можно записать в виде логической формулы, если соединить посылки знаком логической конъюнкции, а посылки и заключение знаком импликации. Напомним, что доказываются логические формулы с использованием таблиц истинности. Например, правило заключения в виде логической формулы записывается так: $((A \rightarrow B) \wedge A) \rightarrow B$. Доказать это правило, а также все остальные предлагаем самостоятельно.

2.4. Кванторы

Известно, что при подстановке в предикат $P(x)$ вместо переменной x некоторого ее значения $x = a$, предикат обращается в высказывание $P(a)$. Это не единственный способ обратить предикат в высказывание. Предикат можно обратить в высказывание и путем операции, называемой «применение кванторов» или «навешивание кванторов».

Кванторами (от лат. «*quantum*» – сколько) называются специальные математические знаки, заменяющие слова. Различают два основных вида кванторов: **квантор общности** $\forall$ (заменяющий слова «любой», «каждый», «всякий») и **квантор существования** $\exists$ (заменяющий слова «существует», «некоторые», «найдется»).

Пусть на множестве X задан предикат $P(x)$. Поставив перед ним квантор общности, получим высказывание: $(\forall x \in X) P(x)$ (для всех $x \in X$ выполняется $P(x)$). Оно истинно тогда и только тогда, когда для всех элементов из множества X высказывания $P(x)$ истинны.

Если поставить перед $P(x)$ квантор существования, получим высказывание $((\exists x \in X) P(x))$ (существует такое $x \in X$, для которого выполняется $P(x)$). Это высказывание истинно тогда, когда хотя бы для одного элемента из множества X высказывание $P(x)$ истинно.



Начало

Содержание



Страница 30 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

Примеры:

1. $(\forall x \in X) P(x)$: «всякое натуральное число четно» – л.
2. $(\exists x \in X) P(x)$: «существуют натуральные числа, являющиеся четными» – и.

Построить отрицание высказывания с кванторами можно следующими способами:

1 способ. Перед высказыванием с квантором употребить выражение «неверно, что...».

2 способ. Квантор общности (существования) заменить на квантор существования (общности), а предикат заменить его отрицанием.

В результате получим следующие высказывания:

$$\overline{(\forall x \in X) P(x)} = (\exists x \in X) \overline{P(x)};$$

$$\overline{(\exists x \in X) P(x)} = (\forall x \in X) \overline{P(x)};.$$

Примеры:

1. Построим отрицание высказывания «Всякий человек x имеет брата» (л). Запишем данное высказывание в виде формулы $(\forall x \in X) P(x)$. Отрицание высказывания первым способом: $\overline{(\forall x \in X) P(x)}$ – «Неверно, что каждый человек имеет брата» (и). Второй способ: $(\exists x \in X) \overline{P(x)}$ – «Существуют люди, не имеющие брата» (и).
2. Построим отрицание высказывания «Существуют числа, кратные пяти» (и). Запишем данное высказывание в виде формулы $(\exists x \in X) P(x)$. Отрицание высказывания первым способом: $\overline{(\exists x \in X) P(x)}$ – «Неверно, что существуют числа, кратные пяти» (л). Второй способ: $(\forall x \in X) \overline{P(x)}$ – «Все числа не кратны пяти» (л).

Вопросы для самоконтроля:

1. Назовите отличия высказывания от предиката.



Начало

Содержание



Страница 31 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

2. Сколько существует операций над высказываниями? Назовите их и запишите их обозначения.
3. Постройте таблицы истинности для всех логических операций.
4. Начертите интеллект-карту «Логические операции над высказываниями».
5. Приведите пример составного высказывания, которое затем преобразуйте в логическую формулу.
6. Составьте таблицу истинности для полученной формулы.
7. Какие вы знаете правила вывода? Для чего они используются?
8. Приведите примеры рассуждений по правилам вывода.
9. Приведите примеры высказываний с кванторами. Постройте отрицание каждого из высказываний.



Начало

Содержание



Страница 32 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть



3.1. Основные понятия линейной алгебры

Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов.

Элементами матрицы называются числа, составляющие матрицу.

Матрицы обозначаются прописными (заглавными) буквами латинского алфавита, например, $A, B, C, \dots$ или иначе $A = (a), B = (b)$. Для обозначения элементов матрицы используются строчные буквы с двойной индексацией: a_{ij} , где i – номер строки, j – номер столбца. Матрица размера $m \times n$ имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Равными называются матрицы $A = (a)$ и $B = (b)$ одинакового размера, если они совпадают поэлементно, т. е. $a_{ij} = b_{ij}$ для любых $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$.

Примеры:

1. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ элементами являются: $a_{11} = 0, a_{12} = 1, a_{13} = -3, a_{21} = 1, a_{22} = 2, a_{23} = -2$.
2. Для матриц C и B $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C \neq B$, так как элементы $a_{12} = 2$ и $b_{12} = -1$ не совпадают.

Матрицей-строкой называется матрица, состоящая из одной строки.

Матрицей-столбцом называется матрица, состоящая из одного столбца.

Квадратной матрицей порядка n называется матрица, у которой число строк равно числу столбцов и равно n .

Начало

Содержание



Страница 33 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

Диагональной называется матрица, у которой все недиагональные элементы равны 0.

Главную диагональ квадратной матрицы порядка n образуют элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \text{диагональная матрица третьего порядка.}$$

Единичной называется диагональная матрица, у которой все диагональные элементы равны 1, остальные нули. Например, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица

третьего порядка. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \neq E$.

3.2. Операции над матрицами

1. Умножение матрицы на число

Произведением матрицы A на число λ называется матрица $B = \lambda A$, элементы которой $b_{ij} = \lambda a_{ij}$, где $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$.

Пример:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1) & 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 4 & 2 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 8 & 14 \end{pmatrix}.$$

2. Сложение матриц

Суммой двух матриц A и B одинакового размера $m \times n$ называется матрица $C = A + B$, элементы которой $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ для $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$ (т. е. матрицы складываются поэлементно).



Начало

Содержание



Страница 34 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

Пример:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+0 & 2+3 \\ 5+1 & 4+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 6 & 11 \end{pmatrix}.$$

3. Произведение матриц

Произведение матрицы A на матрицу B определено, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй. **Произведением матрицы A размера $m \times n$ и матрицы B размера $n \times k$** называется такая матрица C размера $m \times k$, каждый элемент которой равен сумме произведений элементов i -й строки матрицы A на соответствующие элементы j -го столбца матрицы B , т. е. $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$.

Пример: Пусть $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, тогда

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 & 3 \cdot 3 + (-2) \cdot (-1) \\ 0 \cdot 2 + 4 \cdot 1 & 0 \cdot 3 + 4 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + 3 \cdot 0 & 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 4 \\ 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 0 & 1 \cdot (-2) + (-1) \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Как видно из примера, не всегда $A \cdot B = B \cdot A$.

При умножении матриц единичная матрица E играет роль единицы, т. е. $AE = EA = A$ для любой квадратной матрицы A того же порядка, что и матрица E .

Пример:

$$\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & 7 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \\ (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 0 & (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$



Начало

Содержание



Страница 35 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть



3.3. Определители квадратных матриц и их свойства

Для каждой квадратной матрицы A вводится число $\det A = |A|$, называемое ее **определителем**.

Для матрицы первого порядка определитель $|A|$ равен ее элементу a_{11} .

Для матрицы второго порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ определитель вычисляется по формуле (3.1):

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \quad (3.1)$$

Пример:

$$\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 7 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) = 14 + 3 = 17.$$

Для матрицы третьего порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ определитель вычисляется по формуле:

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}. \quad (3.2)$$

Знаки, с которыми слагаемые входят в формулу (3.2), легко запомнить, пользуясь схемой (рисунок 3.1), которая называется **правилом треугольника** или **правилом Саррюса** (для знака «плюс» основания равнобедренных треугольников параллельны главной диагонали, для знака «минус» параллельны побочной диагонали).

Начало

Содержание



Страница 36 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

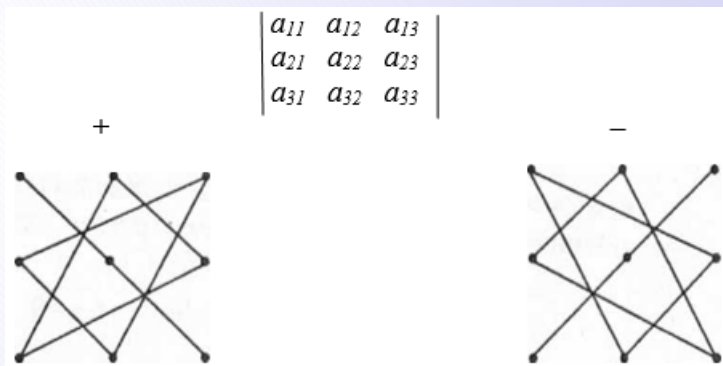


Рисунок 3.1 – Правило Саррюса

Пример: Для матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 6 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ найдём $|A|$, пользуясь правилом Саррюса:

$$|A| = (-1) \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot (-2) \cdot 6 + 0 \cdot (-3) \cdot 3 - 6 \cdot 4 \cdot 3 - 0 \cdot 2 \cdot 5 - (-3) \cdot (-2) \cdot (-1) = -20 - 24 + 0 - 72 - 0 + 6 = -110.$$

Свойства определителей:

1. Если какая-либо строка (столбец) матрицы состоит из одних нулей, то ее определитель равен нулю.
2. Если все элементы какой-либо строки (столбца) матрицы умножить на число, то ее определитель умножится на это число.
3. При перестановке двух строк (столбцов) матрицы ее определитель меняет знак на противоположный.
4. Если матрица содержит две одинаковые строки (столбца), то ее определитель равен нулю.



Начало

Содержание



Страница 37 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

5. Если элементы двух строк (столбцов) матрицы пропорциональны, то ее определитель равен нулю.
6. Определитель матрицы не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) прибавить элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число.
7. Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению их определителей: $|C| = |A| \cdot |B|$, где $C = A \cdot B$.



3.4. Системы линейных уравнений. Основные понятия и определения

Системой линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \dots, x_n$ называется система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2; \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots &\dots; \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{cases} \quad (3.3)$$

где a_{ij} , ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) – произвольные числа, называемые *коэффициентами при неизвестных*, b_i ($i = 1, 2, \dots, m$) – *свободными членами* уравнений.

Решением системы (3.3) называется такая совокупность n чисел $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, что при подстановке их в систему каждое уравнение системы обращается в тождество.

Совместной называется система уравнений, имеющая хотя бы одно решение.

Несовместной называется система уравнений, не имеющая решений.

Определенной называется совместная система уравнений, имеющая единственное решение.

Начало

Содержание



Страница 38 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

Неопределенной называется совместная система уравнений, имеющая более одного решения.

Пример:

Система уравнений $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3; \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$ совместная и определенная, так как имеет единственное решение $(1, 1)$.

Система уравнений $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3; \\ 4x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases}$ имеет множество решений $(x_1 = c, x_2 = 3 - 2c, \text{ где } c - \text{любое число})$.

Система уравнений $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3; \\ 4x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$ несовместная.

Равносильными или **эквивалентными** называются системы уравнений, имеющие одно и то же множество решений.

Элементарными преобразованиями системы (3.3) называются:

- 1) умножение уравнения системы на число $\lambda \neq 0$;
- 2) умножение уравнения системы на любое число λ и прибавление полученного произведения к другому уравнению системы;
- 3) вычеркивание из системы нулевого уравнения $(0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = 0)$;
- 4) перестановка двух уравнений системы.

Справедлива следующая **теорема**:

Элементарные преобразования системы уравнений преобразуют систему в ей эквивалентную.



Начало

Содержание



Страница 39 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть



3.5. Решение систем линейных уравнений

1. Правило Крамера

Предположим, что выполнены два условия: 1) матрица системы A является квадратной, 2) ее определитель $\Delta = |A| \neq 0$. Тогда решение системы является единственным и находится по **формулам Крамера**:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.4)$$

где Δ – определитель матрицы, полученной из системы (3.3),

Δ_i – определитель матрицы, полученной из матрицы системы заменой i -го столбца столбцом свободных членов.

Пример:

Решим методом Крамера систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2; \\ x_2 - x_3 = 0; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

Здесь $\Delta = |A| = 2$,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 2.$$

По формулам (3.4) имеем: $x_1 = 1; x_2 = 1; x_3 = 1$.

Начало

Содержание



Страница 40 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

2. Метод Гаусса

Метод Гаусса заключается в том, что элементарные преобразования совершают не над уравнениями системы (3.3), а над матрицами, составленными из коэффициентов при неизвестных, и свободных членов. Для системы (3.3) запишем *расширенную матрицу*, последний столбец которой состоит из свободных членов:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

С помощью элементарных преобразований строк приведем расширенную матрицу к такому виду, чтобы в последней строке матрицы все числа, кроме n -го, были равны нулю. Система линейных уравнений, соответствующая этой матрице, будет эквивалентна исходной. Затем из последнего уравнения системы, соответствующей преобразованной матрице, находим x_n . Все остальные решения могут быть найдены последовательно, начиная с последнего уравнения.

Проиллюстрируем метод Гаусса на примерах с различными видами систем.

Примеры:

1) Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + 12x_3 + 6x_4 = 6 \\ 4x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 = 1 \end{cases}$$

Составим матрицу из коэффициентов при неизвестных и свободных членах (вертикальной чертой отделён столбец из свободных членов). Затем преобразуем её, умножив первую строку поочерёдно на (-1) , (-4) , (-2) и прибавив соответственно



Начало

Содержание



Страница 41 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

ко второй, третьей, четвёртой строкам. В результате получим из первоначальной матрицы преобразованную:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 12 & 6 & 6 \\ 4 & 4 & -4 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 8 & -3 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 8 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -20 & -9 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -3 \end{array}\right).$$

Второй матрице соответствует система уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 2 \\ -2x_2 + 8x_3 + 3x_4 = 4 \\ -20x_3 - 9x_4 = -8 \\ -9x_4 = -3 \end{cases}$$

Решая последовательно все уравнения системы, начиная с последнего, получим:

$$x_4 = \frac{1}{3};$$

$$20x_3 = 8 - 9x_4; 20x_3 = 8 - 3; 20x_3 = 5; x_3 = \frac{5}{20} = \frac{1}{4};$$

$$2x_2 = 8x_3 + 3x_4 - 4; 2x_2 = 8 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{3} - 4; 2x_2 = -1; x_2 = -\frac{1}{2};$$

$$x_1 = 2 - x_2 - 4x_3 - 3x_4; x_1 = 2 + \frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{1}{4} - 3 \cdot \frac{1}{3}; x_1 = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -\frac{1}{2}, x_3 = \frac{1}{4}, x_4 = \frac{1}{3}$.



Начало

Содержание



Страница 42 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

2) Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 5x_1 + 4x_3 + 2x_4 = 12 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 6x_4 = -1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 4 & 2 & 12 \\ 3 & 4 & -2 & 6 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & -1 & -3 & -10 \\ 0 & -5 & -1 & -3 & -13 \\ 0 & 1 & -5 & 3 & -16 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & -1 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -5 & 3 & -16 \end{array} \right).$$

Первую строку матрицы последовательно умножили на (-2) , (-5) , (-3) и сложили соответственно со второй, третьей и четвертой строками. На втором шаге из третьей строки вычли вторую. В результате получаем, что система несовместна, т. к. уравнение, соответствующее третьей строке матрицы:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = -3,$$

не имеет решения.

3) Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 2 \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 7 \\ 7x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 6x_4 = 6 \end{cases}$$



Начало

Содержание



Страница 43 из 106

Назад

На весь экран

Закрыть

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -2 & | & 2 \\ 2 & -4 & -3 & 6 & | & 7 \\ 7 & 5 & 6 & -6 & | & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & | & -1 \\ 0 & -6 & -5 & 8 & | & 5 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & | & -1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 5 & | & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 5 & | & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Получаем систему
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_3 - 5x_4 = -8 \end{cases}$$

Из последнего уравнения выражаем $x_3 = \frac{5}{2}x_4 - 4$ и подставляем во второе уравнение

$$2x_2 = 1 - x_3 + x_4 = 1 - \frac{5}{2}x_4 + 4 + x_4 = 5 - \frac{3}{2}x_4;$$

откуда $x_2 = \frac{5}{2} - \frac{3}{4}x_4$.

И, наконец, из первого уравнения получаем:

$$x_1 = 1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1 - \frac{5}{2} + \frac{3}{4}x_4 + 4 + x_4 = \frac{5}{2} - \frac{3}{4}x_4;$$

$$x_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{4}x_4,$$

где x_4 – свободное неизвестное, оно может принимать любые действительные значения.

Таким образом, система имеет бесконечное множество решений.



Начало

Содержание



Страница 44 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

3.6. Применение элементов линейной алгебры в психологии

Матрицы являются незаменимым средством описания многомерных объектов. Многомерную матрицу легко изобразить на плоскости как в целом, так и по частям. Этим обеспечивается своеобразная «символическая» наглядность матричных описаний в психологии.

Например, для психодиагностики социальных общностей малого объема (из нескольких человек) – так называемых «малых групп», социопсихолог Дж. Морено предложил использовать социоматрицы и социограммы, являющиеся элементами метода социометрии [2, с. 203].

Социоматрица – это квадратная помеченная матрица, в строках и столбцах которой обозначены члены группы, а элементами матрицы являются условно обозначенные отношения влечения (1 или +) либо отвращения (0 или –). По преобладанию определенных элементов в матрице можно количественно определить степень эмоциональной связности, разобщенности или даже враждебности между членами одной или нескольких групп, выделить лидеров и отверженных, друзей и врагов, недругов. Для наглядного представления служат социограммы – графы, эквивалентные социоматрицам (рисунок 3.2).



Начало

Содержание



Страница 45 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

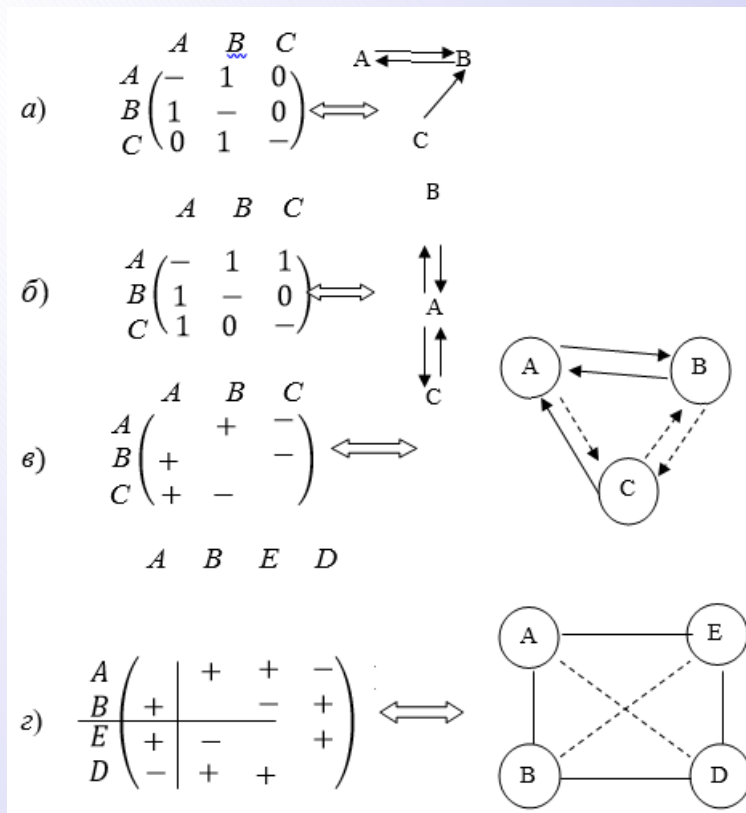


Рисунок 3.2 – Примеры социоматриц и эквивалентных им социограмм

На **рисунке 3.2** изображены: а, в – друзья и отверженный, б – эмоциональный лидер; А, В, С – члены малой группы; г – внутригрупповые и межгрупповые отношения на персональном уровне: А, В – члены одной, Е, D – члены другой группы.



Начало

Содержание



Страница 46 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

Вопросы для самоконтроля:

1. Запишите матрицу размера $m \times n$, диагональную матрицу, единичную матрицу, две квадратные матрицы второго порядка.
2. Для записанных вами квадратных матриц найдите их сумму и произведение.
3. Проверьте, коммутативно ли произведение матриц.
4. Постройте интеллект-карты «Виды матриц», «Операции над матрицами».
5. Запишите определитель квадратной матрицы второго порядка.
6. Запишите квадратную матрицу третьего порядка и вычислите ее определитель.
7. Запишите систему m линейных уравнений с n неизвестными.
8. Запишите расширенную матрицу, соответствующую этой системе.
9. Назовите условия применимости формул Крамера.
10. В чем состоит суть метода Гаусса?



Начало

Содержание



Страница 47 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

4.1. Понятие функции

Понятие функции было введено в **главе 1, раздел 1.3**. Рассмотрим частный случай этого понятия, а именно **числовые функции**, которые определены на множестве, состоящем из действительных чисел.

Функция – это соответствие (закон), согласно которому каждому значению переменной x из некоторого множества X отвечает одно вполне определенное число y . Функция записывается в виде $y = f(x)$, число x называется **аргументом**, а y – **значением** функции. Множество X называется **областью определения** функции. Соответствующие значения y образуют **множество значений** функции.

Функции можно задавать:

- а) аналитически с помощью формул;
- б) таблицами;
- в) графически.

Примеры:

1. Аналитический способ: $y = x^3 + 2$; $y = \sin^2 x$.
2. Табличный способ: таблицы составляются по данным экспериментального изучения связи между двумя величинами, например, в результате измерения влажности воздуха в различные часы дня (**таблица 4.1**). В этой таблице φ определена как функция t .

Таблица 4.1 – Зависимость влажности воздуха от времени

Время (t), ч	9	10	11	12	13	14	15
Влажность (φ), %	89	87	86	85	83	82	80

3. Графический способ заключается в следующем: в прямоугольной системе координат задается некоторое множество точек $M(x, y)$, и при этом никакие две



Начало

Содержание



Страница 48 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

точки не лежат на одной прямой, параллельной оси Oy . Это множество точек определяет функцию $y = f(x)$. Абсциссы точек являются значениями аргумента, ординаты – значениями функции (рисунок 4.1).

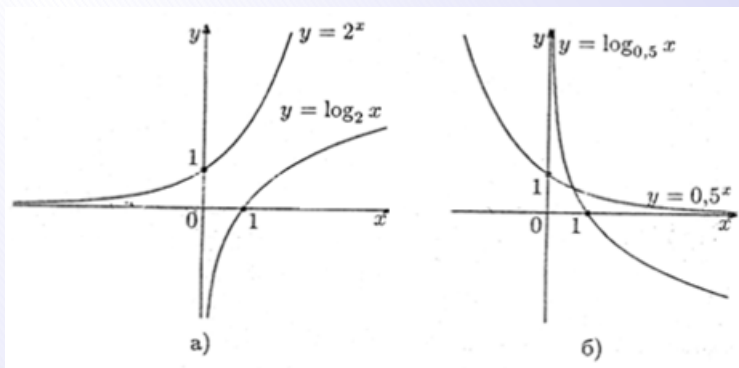


Рисунок 4.1

Функция называется **возрастающей**, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции; функция **убывающая**, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции. Иначе это можно записать так: функция $y = f(x)$ называется **возрастающей** (**убывающей**) на промежутке X , если для любых $x_1, x_2 \in X, x_2 > x_1$ верно неравенство

$$f(x_2) > f(x_1) \text{ (} f(x_2) < f(x_1) \text{)}$$

Возрастающая (рисунок 4.1a) и убывающая (рисунок 4.1б) функции называются **монотонными**.

Примеры:

Возрастающими являются функции:

– площадь S квадрата, зависящая от его стороны a : $S = a^2$;



Начало

Содержание



Страница 49 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть



– численность народонаселения в городе Энске с течением времени при условии, что рождаемость выше смертности: $y = 50000e^{t/32}$, где $e \approx 2,7$;

– путь, пройденный телом, в зависимости от времени движения: $S = t + 2t^2$.

Убывающими являются такие функции:

– время проезда от Минска до Бреста по железной дороге в зависимости от скорости: $t = \frac{340}{v}$;

– число больных гриппом в городе Энске с течением времени в данный зимний период при ежедневном контроле, если прирост выздоровевших больше прироста заболевших: $y = 20000e^{-t/10}$.

Функция **четная**, если $y(-x) = y(x)$, и **нечетная**, если $y(-x) = -y(x)$ для любого x из области определения функции. Например, $y = \cos x$ – четная функция, а $y = \sin x$ – нечетная (рисунок 4.2). Функция $y = 2^x$ не является как четной, так и нечетной, поскольку $2^{-x} \neq 2^x$ и $2^{-x} \neq -2^x$.

Функция является **периодической** с периодом T , если для любого значения аргумента $y(x + T) = y(x)$, т. е. функция повторяет свои значения через данный промежуток T . Периодическими являются, например, функции $y = \sin x$, $y = \cos x$ (рисунок 4.2).

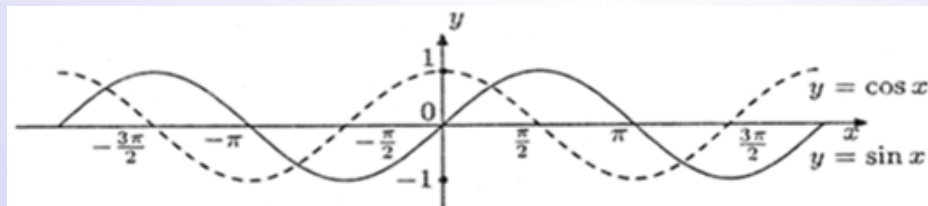


Рисунок 4.2

Функция **ограничена**, если $|f(x)| \leq M$ для некоторого действительного числа $M > 0$ и для любого значения x из области определения функции. Функции

Начало

Содержание



Страница 50 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

$y = \cos x$ и $y = \sin x$ – ограниченные функции, поскольку выполняется: $|\sin x| \leq 1$ и $|\cos x| \leq 1$.

Нулями функции называются значения аргумента, обращающие функцию в ноль. Например, нулями функции $y = x^2 - 4$ являются значения $x_1 = 2$ и $x_2 = -2$.

Пример:

График зависимости между стимулом и реакцией [1, с. 109] изображен на [рисунке 4.3](#).



Рисунок 4.3 – График зависимости между стимулом и реакцией

Проанализируем этот график. Рассмотренная функция возрастает до точки перенасыщения, а далее стремительно убывает. Она ограничена, поскольку изменяется от нулевого значения до максимального, определенного точкой перенасыщения. Функция непериодическая, ноль функции при $x = 0$.

Пусть имеются две функции $y = f(x)$ и $\zeta = \varphi(y)$. Тогда для тех x , для которых значения $y = f(x)$ принадлежат области определения функции $\varphi(y)$, можно определить функцию $\zeta = \varphi(f(x))$. Эта функция называется **сложной функцией** или **композицией функций** f и φ и обозначается

$$\zeta = (\varphi \circ f)(x).$$



Начало

Содержание



Страница 51 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

Пример:

Для функций $y = -x^2 + 4$, $\zeta = 2y - 2$ их композицией будет функция $\zeta = 2(-x^2 + 4) - 2 = -2x^2 + 6$.

4.2. Элементарные функции

В **таблице 4.2** приведен перечень известных из школьного курса функций и их графиков. Эти функции называются **основными элементарными функциями**.

Элементарными функциями называются функции, которые можно получить из основных элементарных функций (перечисленных в **таблице 4.2**) с помощью алгебраических операций и композиций функций.

Примеры:

1. Функция

$$y = \frac{\sqrt{x} \sin^2 x}{(\sqrt[3]{x} + 5)^3} + \sqrt{\lg^3 x - 1}$$

является элементарной, так как она получена с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления и образования сложной функции.

2. Функция $y = |x|$ (**рисунок 4.4**) является примером неэлементарной функции.

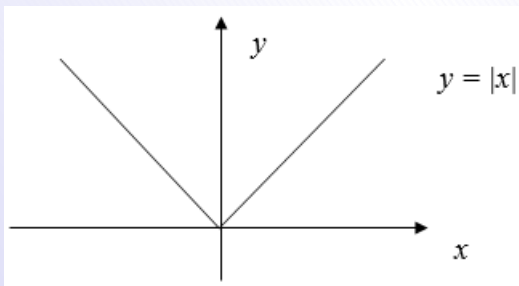


Рисунок 4.4 – График функции $y = |x|$



Начало

Содержание



Страница 52 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

Таблица 4.2 – Основные элементарные функции

Аналитическое задание	Область определения X	Область значений Y	График
1. Степенная функция			
$y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$, если n нечетно; $[0; +\infty)$, если n четно	
$y = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, если n нечетно; $[0; +\infty)$, если n четно	
$y = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$	$(-\infty; +\infty)$, если n нечетно; $[0; +\infty)$, если n четно	$(-\infty; +\infty)$, если n нечетно; $[0; +\infty)$, если n четно	



Начало

Содержание



Страница 53 из 106

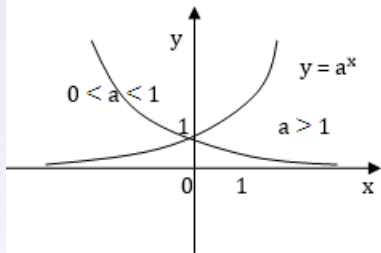
Назад

На весь экран

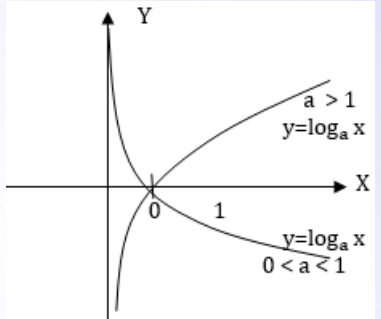
Заккрыть

Аналитическое задание	Область определения X	Область значений Y	График
-----------------------	-------------------------	----------------------	--------

2. Показательная функция

$y = a^x$	$(0; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	
-----------	----------------	----------------------	--

3. Логарифмическая функция

$y = \log_a x,$ $a > 0,$ $a \neq 1$	$(0; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	
---	----------------	----------------------	--



Начало

Содержание



Страница 54 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть



Аналитическое задание	Область определения X	Область значений Y	График
-----------------------	-------------------------	----------------------	--------

4. Тригонометрические функции

$y = \sin x$	$(-\infty; +\infty)$	$[-1, 1]$	
$y = \cos x$	$(-\infty; +\infty)$	$[-1, 1]$	
$y = \operatorname{tg} x$	$(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n),$ $n \in \mathbb{Z}$	$(-\infty; +\infty)$	

Начало

Содержание



Страница 55 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть



4.3. Предел функции

Понятие предела является математическим выражением факта одновременного стремления двух связанных величин к некоторым значениям.

Примеры:

- ✓ если вы читаете литературу со скоростью 60 страниц в час, то при стремлении времени чтения к двум часам число прочитанных страниц будет стремиться к 120;
- ✓ если количество рекламных вставок равно 30 в час, то при приближении времени просмотра телепередачи к трем часам число реклам будет приближаться к 90;
- ✓ вы усиленно работаете над своим характером, чтобы быть похожим на Васю, который нравится Марине, а она нравится вам; тогда, если вы станете похожим на Васю, степень благосклонности Марины к вам будет почти такой же, как и к Васе [1, с. 112].

Понятие предела является одним из основных в математике. Рассмотрим любую функцию, например, $y = x^3$; зададим любое значение x , к примеру, $x = 2$. Возьмём последовательность чисел x , близких к числу 2, и вычислим значения $y_i = x_i^3$. Один из вариантов последовательностей чисел x_i и y_i приведен в **таблице 4.3**:

Таблица 4.3 – Последовательность чисел $y_i = x_i^3$

x	1,96	1,97	1,98	1,99	2	2,01	2,02	2,03	2,04
y	7,53	7,64	7,76	7,88	8	8,12	8,24	8,36	8,49

Приведенная в таблице последовательность чисел имеет следующую закономерность: чем меньше число x отличается от числа 2, тем меньше соответствующее значение y отличается от числа 8. Другими словами, при стремлении числа x к

Начало

Содержание



Страница 56 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

2 число y стремится к 8, какие бы последовательности чисел x_i и $y_i = x_i^3$ мы ни рассматривали.

Число A называется **пределом** функции $y = f(x)$ при стремлении x к a (или в точке $x = a$), если для всех значений x ($x \neq a$), сколь угодно мало отличающихся от a , соответствующие значения y сколь угодно мало отличаются от A .

Число A – **предел функции** $y = f(x)$ при $x \rightarrow a$ (рисунок 4.5), если для любого положительного числа ε можно указать такое положительное число δ , зависящее от ε , что для всех x , удовлетворяющих неравенству $0 < |x - a| < \delta$, имеет место неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Символическая запись: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$.

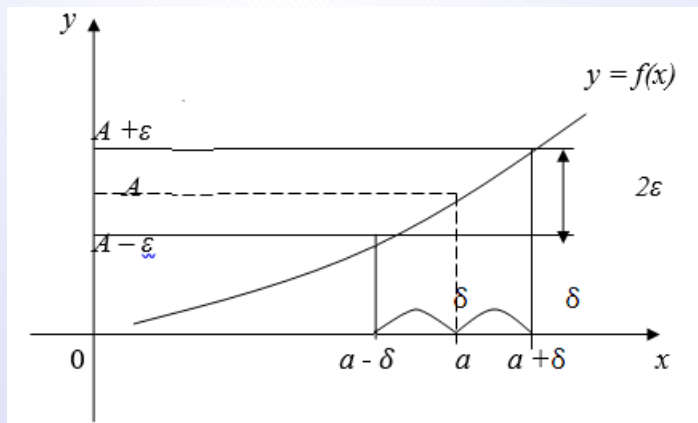


Рисунок 4.5 – Определение предела функции

Пример:

Предел функции $y = x^2$ в точке $x = 2$ равен 4. Записываем: $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$.



Начало

Содержание



Страница 57 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть



4.4. Непрерывность функций

С пределом функции тесно связана ее непрерывность, означающая малое изменение функции при малом изменении аргумента.

Пусть функция $f(x)$ определена при некотором значении x_0 и в некотором интервале с центром в x_0 (т. е. в окрестности x_0). Очевидно, что при $x = x_0$ функция имеет значение $y = f(x_0)$, а при $x = x_0 + \Delta x$ значение функции $y = f(x_0 + \Delta x)$. Приращение функции равно

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Функция $y = f(x)$ называется **непрерывной в точке** x_0 , если она определена в самой этой точке и некоторой ее окрестности и

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0, \text{ либо иначе } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Это условие непрерывности используется при вычислении пределов, а именно: если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 , то при вычислении ее предела в этой точке нужно подставить в функцию вместо аргумента x значение x_0 .

Примеры:

1. $\lim_{x \rightarrow 2} e^{3x+2} = e^8$;
2. $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x + 2x^2 - 3 \cos 4x) = -3$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. Всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке, в которой она определена.

Если функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке некоторого интервала (a, b) , то говорят, что функция **непрерывна на этом интервале**. Если функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке интервала (a, b) и непрерывна на концах интервала соответственно справа и слева, то говорят, что $f(x)$ **непрерывна на отрезке** $[a, b]$.

Начало

Содержание



Страница 58 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

Непрерывность играет большую роль в природе и в обществе.

Примеры:

- ✓ Непрерывность в природе: известно, что рост и развитие организма происходит непрерывно, испытывая малые изменения за малый промежуток времени. Представьте, что было бы, например, с шестилетним ребенком, если бы вдруг за один день его рост увеличился на 10 см. Это была бы катастрофа для всего организма, ведь за кратчайший срок изменилась бы деятельность всех органов и систем.
- ✓ Непрерывность в обществе: постепенное (непрерывное) развитие дает возможность осуществлять прогноз и корректировку, учитывая огромное множество различных факторов; при больших скачках (разрывах) в развитии возможны социально-экономические взрывы (дефолты, революции).
- ✓ Один из важнейших вопросов психологии: можно ли повлиять на характер человека? Ответ будет положительным, если соответствующая работа осуществляется медленно и постепенно, а скачки, связанные с разрывами различных психических процессов, могут привести к негативным последствиям [1, с. 120].

4.5. Производная

Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна в некоторой окрестности точки x . Тогда приращению Δx независимой переменной x соответствует приращение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Однако более важным для исследования свойств функции является не само приращение Δy , а относительное приращение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Производной функции $y = f(x)$ в точке x называется предел относительного приращения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \rightarrow 0$. Этот предел обозначается

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Дифференцируемой называется функция, которая имеет производную.



Начало

Содержание



Страница 59 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

Дифференцированием называется операция нахождения производной.

Геометрический смысл производной

Рассмотрим график некоторой функции (рисунок 4.6). Касательная прямая к графику в точке $(x, f(x))$ образует с осью Ox угол α , для которого $\operatorname{tg} \alpha = f'(x)$.

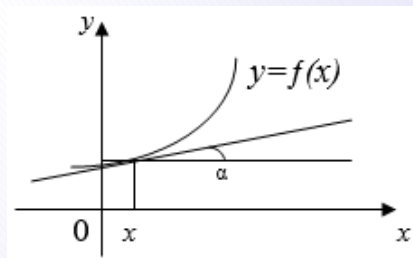


Рисунок 4.6 – Геометрический смысл производной

Физический смысл производной

Пусть $S(t)$ – путь, пройденный материальной точкой за время t . Тогда $\Delta S(t) = S(t + \Delta t) - S(t)$ – участок пути, проходимый за время Δt . Отношение $\frac{\Delta S(t)}{\Delta t}$ есть средняя скорость на участке $\Delta S(t)$ пути, а

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S(t)}{\Delta t} = S'(t) = V(t)$$

есть **мгновенная скорость** точки в момент времени t .

Если же $V(t)$ – скорость в точке t , то $\frac{\Delta V(t)}{\Delta t}$ есть среднее ускорение на участке времени Δt , а

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V(t)}{\Delta t} = V'(t) = a(t)$$



Начало

Содержание



Страница 60 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

есть **ускорение в момент времени t** .

Таким образом, вторая производная от пути

$$a(t) = V'(t) = (S'(t))' = S''(t)$$

есть ускорение в момент времени t .

В общем случае, если $y(t)$ описывает произвольный процесс, разворачивающийся во времени, то $y'(t)$ есть скорость этого процесса. Для функции с аргументом x , не обязательно обозначающим время, отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ – средняя скорость изменения y относительно изменения x , а $y'(x)$ – мгновенная скорость изменения y .

Пример:

Пусть некоторый физиологический процесс описывается формулой $y = 4t^3 + 5t^2 - 3t$. Найти скорость в момент времени $t = 2$.

$$V(t) = y'(t) = 12t^2 + 10t - 3; y'(2) = 12 \cdot 2^2 + 10 \cdot 2 - 3 = 65 \text{ ед. скорости.}$$

4.6. Правила дифференцирования

1. Производная постоянной равна 0, т. е. $c' = 0$.
2. Производная аргумента равна 1, т. е. $x' = 1$.

В следующих правилах будем полагать, что $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – дифференцируемые функции.

3. Производная алгебраической суммы функций равна сумме производных этих функций, т. е.

$$(u \pm v)' = u' \pm v'.$$

4. Производная произведения двух функций равна:

$$(uv)' = u'v + v'u.$$



Начало

Содержание



Страница 61 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

5. Постоянный множитель можно выносить за знак производной:

$$(cu)' = cu'.$$

6. Производная частного двух функций вычисляется по формуле:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2},$$

(при условии, что $v \neq 0$).

7. Производная сложной функции.

Пусть заданы функции $y = f(x)$ и $z = g(y)$, для которых определена сложная функция $z = g(f(x))$. Тогда, если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 , а функция $z = g(y)$ дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$, то производная сложной функции $z = (g \circ f)(x)$ в точке x_0 вычисляется по формуле:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0)$$

8. Производная обратной функции

Если для функции $y = f(x)$ существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$ и производная $f'(x_0)$ существует, то производная обратной функции в точке $y_0 = f(x_0)$ вычисляется по формуле:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

4.7. Таблица производных

Все основные элементарные функции являются дифференцируемыми и имеют производные, приведенные в **таблице 4.4**.



Начало

Содержание



Страница 62 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

Таблица 4.4 – Производные основных элементарных функций

Функция y	Производная y'	Функция y	Производная y'
c	0	a^x	$a^x \ln a$
x	1	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$u + v$	$u' + v'$	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$u \cdot v$	$u'v + v'u$	$\sin x$	$\cos x$
cu	cu'	$\cos x$	$-\sin x$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - v'u}{v^2}$	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
x^n	nx^{n-1}	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
e^x	e^x	$g(f(x))$	$g'(f(x)) \cdot f'(x)$

4.8. Возрастание и убывание функции. Экстремумы функции

Функция $y = f(x)$ называется **возрастающей** (**убывающей**) на промежутке X , если для любых $x_1, x_2 \in X, x_2 > x_1$, верно неравенство

$$f(x_2) > f(x_1) \quad (f(x_2) < f(x_1)).$$

Сформулируем достаточные условия возрастания и убывания функции: если



Начало

Содержание



Страница 63 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть



производная дифференцируемой функции положительная (отрицательная) внутри некоторого промежутка X , то функция возрастает (убывает) на этом промежутке.

Точкой максимума функции $y = f(x)$ называется такая точка x_0 , что в некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство

$$f(x) \leq f(x_0).$$

Точкой минимума функции $y = f(x)$ называется такая точка x_1 , что в некоторой окрестности точки x_1 выполняется неравенство

$$f(x) \geq f(x_1).$$

Максимумом и **минимумом** функции называются значения функции в точках x_0 (точка максимума) и x_1 (точка минимума). Максимум и минимум функции объединяются общим названием **экстремума** функции.

На **рисунке 4.7**: x_1, x_2, x_3, x_4 – точки экстремумов, а m и M – наименьшее и наибольшее значения функции.

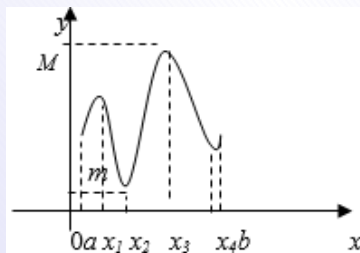


Рисунок 4.7 – Наибольшее и наименьшее значения функции

Следует заметить, что определенные выше максимум и минимум функции не обязательно являются ее наибольшим и наименьшим значениями на отрезке $[a, b]$,

Начало

Содержание



Страница 64 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

в связи с чем они называются локальными максимумами и минимумами. Локальных максимумов и минимумов может быть много, в то время как наибольшее и наименьшее значения функции равны конкретным числам M и m .

Необходимое условие экстремума

Если в точке x_0 дифференцируемая функция $y = f(x)$ имеет экстремум, то производная функции в этой точке равна нулю, т. е. $f'(x_0) = 0$.

Функция может иметь экстремум и в точках, в которых она не дифференцируема. Так, например, функция $y = |x|$ имеет экстремум (минимум) в точке $x = 0$, но не дифференцируема в ней (рисунок 4.8, а). Функция $y = \sqrt[3]{x^2}$ также имеет в точке $x = 0$ минимум (рисунок 4.8, б), но производная ее в этой точке не существует. Поэтому **необходимое условие экстремума** может быть сформулировано следующим образом: для того, чтобы функция $y = f(x)$ имела экстремум в точке x_0 , необходимо, чтобы ее производная в этой точке равнялась нулю или не существовала, т. е. чтобы точка x_0 была критической.

Это условие не является достаточным, что показывает пример, приведенный на рисунке 4.8, в.

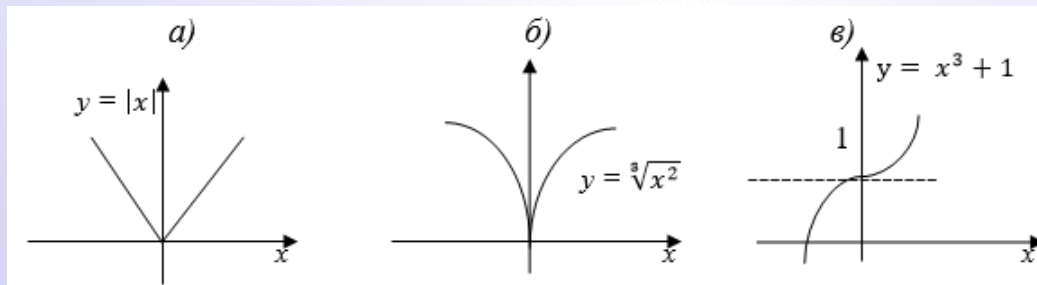


Рисунок 4.8 – Необходимое условие экстремума



Начало

Содержание



Страница 65 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

Достаточные условия экстремума

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в δ -окрестности точки x_0 . Тогда, если в этой точке производная меняет знак, имеет место локальный экстремум.

Действительно, если в левой половине δ -окрестности производная больше 0, то в ней функция возрастает. Если при этом в правой половине δ -окрестности производная меньше 0, то в ней функция убывает. Таким образом, если в стационарной точке x_0 производная функции меняет знак с плюса на минус, то x_0 является точкой максимума. Точно так же если производная меняет знак с минуса на плюс, то x_0 – точка минимума (рисунок 4.9).

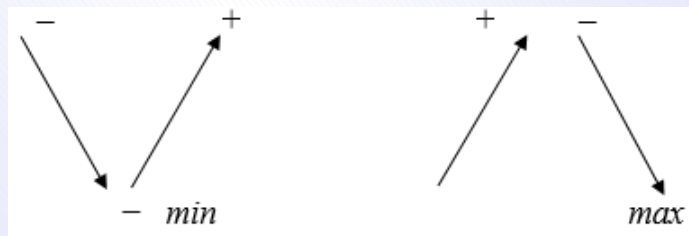


Рисунок 4.9 – Точки минимума и максимума

Нахождение наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на отрезке

Для того, чтобы найти наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции на отрезке $[a, b]$, необходимо:

1. Найти критические точки на этом отрезке.
2. Подсчитать значения в этих точках и на концах отрезка.
3. Выбрать из найденных значений наибольшее и наименьшее.



Начало

Содержание



Страница 66 из 106

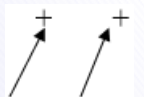
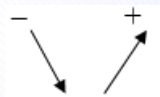
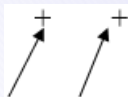
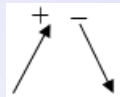
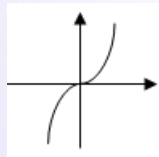
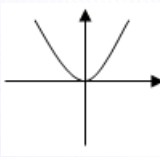
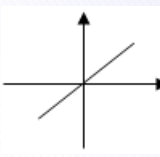
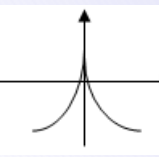
Назад

На весь экран

Заккрыть

Примеры: 1. Исследуем на экстремум следующие функции: $x^3, x^2, x, 1 - x^{2/3}$.
Решение представим в виде таблицы (таблица 4.5).

Таблица 4.5 – Исследование на экстремум некоторых функций

$f(x)$	x^3	x^2	x	$1 - x^{2/3}$
$f'(x)$	$3x^2$	$2x$	1	$-\frac{2}{3}x^{-1/3}$
Критическая точка x_0	0	0	Нет	0
$f'(x_0)$	0	0	1	Не существует
Знак $f'(x_0)$ (лев., прав.)				
Экстремум	Нет	min	Нет	max
График				

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 3x + 1$ на отрезке $[-2, 2]$.

Находим производную функции $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1$.

$$f(-1) = 3, f(1) = -1, f(-2) = -1, f(2) = 3.$$

Итак, $f(2)=f(-1)=3$ – наибольшее, а $f(1)=f(-2) = -1$ – наименьшее значение.



Начало

Содержание



Страница 67 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть



4.9. Неопределённый интеграл

Первообразная и неопределённый интеграл

Обратной операцией для дифференцирования функции является нахождение её первообразной.

Первообразной для функции $y = f(x)$ называется такая функция $F(x)$, что $F' = f(x)$ для всех x из области определения $f(x)$.

Пример:

Для функции $y = 3x^2$ первообразной является функция $F(x) = x^3$, а также функция $F_1(x) = x^3 + 5$.

Как видно из примера, первообразная не определяется однозначно.

Если две функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$ являются первообразными для одной и той же функции $f(x)$, то их разность $F_1(x) - F_2(x) = C = \text{const}$ (является постоянной функцией). Отсюда следует, что множество всех первообразных для данной функции $f(x)$ состоит из функций, отличающихся друг от друга на постоянную.

Неопределённым интегралом от функции $f(x)$ называется совокупность всех первообразных этой функции.

Неопределённый интеграл от функции $f(x)$ обозначается

$$\int f(x)dx.$$

Если функция $F(x)$ является одной из первообразных для $f(x)$, то

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Функция $f(x)$ называется **подынтегральной функцией**, а выражение $f(x)dx$ **подынтегральным выражением**.

Начало

Содержание



Страница 68 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

Пример:

$$\int 3x^2 dx = x^3 + C.$$

где C – произвольная постоянная.

Достаточным условием существования неопределённого интеграла от функции $f(x)$ является непрерывность этой функции.

Свойства неопределённого интеграла

1. Производная неопределённого интеграла (т. е. каждой его составляющей первообразной функции) равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x) dx \right)' = f(x).$$

2. Дифференциал от неопределённого интеграла (т. е. от каждой его составляющей первообразной функции) равен подынтегральному выражению:

$$d \left(\int f(x) dx \right) = f(x) dx.$$

3. Неопределённый интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

4. Постоянный множитель можно выносить из-под знака неопределённого интеграла:

$$\int a f(x) dx = a \int f(x) dx.$$



Начало

Содержание



Страница 69 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

5. Неопределённый интеграл от алгебраической суммы функции равен алгебраической сумме неопределённых интегралов от слагаемых:

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx.$$

6. Если $\int f(x) dx = F(x) + c$, то $\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + c$.

Таблица основных интегралов

1. $\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C$, где $a \neq -1$.
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$.
3. $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C$, где $a > 0, a \neq 1$.
4. $\int e^x dx = e^x + C$.
5. $\int \cos x dx = \sin x + C$.
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.
8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$.
10. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$.
11. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$.
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C$.

Примеры:

1. $\int (\sin x + e^2) dx = -\cos x + e^2 x + C$.
2. $\int \frac{dx}{5 \sin^2 x} = -\frac{1}{5} \operatorname{ctg} x + C$.
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-1/2} dx = 2x^{1/2} + C = 2\sqrt{x} + C$.



Начало

Содержание



Страница 70 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть



4.10. Определённый интеграл

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$. Разобьём отрезок $[a, b]$ на n частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. На каждом из полученных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, 2, \dots, n$) возьмем некоторую точку c_i .

Интегральной суммой функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется сумма

$$S_n = f(c_1)(x_1 - x_0) + f(c_2)(x_2 - x_1) + \dots + f(c_n)(x_n - x_{n-1}),$$

или

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i,$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Обозначим наибольшую из длин Δx_i через λ .

Определённым интегралом функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$, который обозначается $\int_a^b f(x)dx$, называется предел интегральных сумм

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i. \quad (4.1)$$

Таким образом,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i.$$

Интегрируемой называется функция, для которой существует предел, обозначенный (4.1). Из условия $\lambda \rightarrow 0$ следует, что $n \rightarrow \infty$. Числа a и b называются **пределами интегрирования**. Функция $f(x)$ носит название **подынтегральной функции**.

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то определённый интеграл $\int_a^b f(x)dx$ существует.

Начало

Содержание



Страница 71 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

Пример:

Пусть $y = A$ – постоянная функция на отрезке $[a, b]$. Тогда интегральная сумма имеет вид:

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = A \sum_{i=1}^n \Delta x_i = A(b - a).$$

Она зависит от способа разбиения отрезка на части и

$$\int_a^b A dx = A(b - a).$$

Полученное число равно площади заштрихованного прямоугольника на [рисунке 4.10](#).

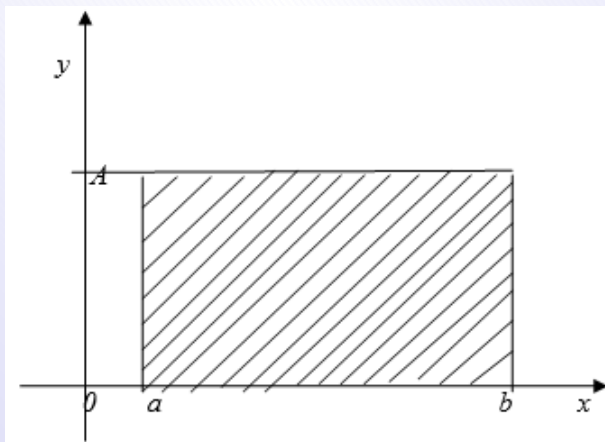


Рисунок 4.10 – Геометрическая интерпретация определенного интеграла



Начало

Содержание



Страница 72 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

Свойства определённого интеграла

1. $\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx$, где α – произвольное число.
2. $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$.
3. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$, где $a < c < b$.
4. $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$, $a > b$.
5. Если для всех $x \in [a, b]$ выполняется $f(x) \leq g(x)$, то

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

6. Для $x \geq a$ производная определённого интеграла $\int_a^x f(t) dt$ равна значению подынтегральной функции в точке x :

$$\left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x).$$

7. Теорема о среднем: если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то существует точка $c \in [a, b]$, такая, что

$$\int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b - a).$$

8. Оценка модуля интеграла: если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$



Начало

Содержание



Страница 73 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

9. Формула Ньютона-Лейбница (связывает неопределённый и определённый интегралы): если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а функция $F(x)$ – какая-либо её первообразная (т. е. $F'(x) = f(x)$), то

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Пример:

$$\int_0^2 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_0^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{0^4}{4} = 4.$$

4.11. Использование математического анализа в психологии

Понятие функции и производное от него понятие функциональной схемы и функционирования тех или иных психических процессов, психики в целом, широко применяется в психологии. Для описания различных психических процессов необходимы многие элементарные функции – от константы до экспоненциальной и гиперболической функций. К числу психологических констант можно отнести время, затраченное человеком на выполнение элементарной арифметической операции (сложение, умножение, вычитание, деление в пределах одного десятичного разряда, а также перенос из разряда в разряд), – в уме без записи или с записью результата. Это время составляет приблизительно 1 сек. [2, с. 73].

Линейная функция широко применяется для построения психометрических шкал. Например, как было показано В.И. Николаевым, латентное время реакции испытуемого линейно зависит от количества информации, перерабатываемой испытуемым в эксперименте: $y = a_1x + a_0$, причем $a_0 = 0$, $a_1 = 0,03$ бит/с [2, с. 74].

Известный психофизический закон Г.Т. Фехнера $R = a \cdot \ln S + b$ выражается линейной зависимостью ощущения R от натурального логарифма интенсивности



Начало

Содержание



Страница 74 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

стимула S , a и b – константы, определяемые психологическими и физическими условиями опыта.

Показательная функция с основанием e $y = e^x = \exp[x]$ (экспонента) использовалась еще И.Ф. Гербартом для описания временной динамики представлений. Экспоненциальная функция применяется также для описания законов вероятностных распределений и эмпирических зависимостей в психологии.

Любая прогнозная модель в психологическом прогнозировании является моделью случайного процесса как случайной функции, аргументом которой служит время.

Вопросы для самоконтроля:

1. Сформулируйте определение функции.
2. Назовите способы задания функции.
3. Вычертите интеллект-карту «Функция».
4. Приведите примеры известных вам элементарных функций. Назовите область определения каждой из них.
5. Сформулируйте определение предела функции в точке.
6. Дайте определение производной функции в точке.
7. Каков геометрический и физический смысл производной?
8. Запишите восемь правил дифференцирования.
9. Дайте определения возрастающей функции, убывающей функции, экстремума функции, наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке.
10. Сформулируйте определение и свойства неопределенного и определенного интеграла.



Начало

Содержание



Страница 75 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

Глава 5 ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

5.1. Случайные события. Их виды

Предметом теории вероятностей является анализ закономерностей в случайных явлениях. Одной из важнейших сфер приложения теории вероятностей является психология. Практическое значение вероятностных методов состоит в том, что они позволяют по известным характеристикам простых случайных явлений прогнозировать характеристики более сложных явлений.

Пространством элементарных событий называют множество Ω взаимоисключающих исходов эксперимента такое, что каждый интересующий результат эксперимента может быть однозначно описан с помощью элементов этого множества. Элементы множества Ω называются **элементарными** событиями и обозначаются ω : $\Omega = \{\omega\}$. Элементарные события нельзя разложить на составляющие их события.

Событием называется исход испытания. Это понятие является первичным в теории вероятностей. События обозначаются большими латинскими буквами $A, B, C \subseteq \Omega$. Любое событие A из пространства Ω можно составить из элементарных событий.

Среди событий различают достоверное и невозможное события. **Достоверное событие** – это такое событие Ω , которое всегда происходит. **Невозможное событие** $\emptyset$ – это событие, которое не может произойти.

Примеры событий: A – выпадение орла при бросании монеты, B – выигрыш в лотерею, C – реакция испытуемого на раздражитель и т. д.

Два события называются **совместными**, если появление одного из них не исключает появления другого в данном опыте. Два события называются **несовместными** в данном опыте, если они одновременно не могут произойти.

Несколько событий образуют **полную группу**, если: 1) они попарно несовместны; 2) в результате испытаний обязательно произойдет хотя бы одно из них.



Начало

Содержание



Страница 76 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

Примеры:

В опыте с бросанием игральной кости (кубика) элементарными событиями являются выпадения чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6. Они образуют полную группу. В этом же опыте событиями являются выпадения четного или нечетного числа.

Совместные события в этом опыте – выпадение четного числа и числа, делящегося на 3 (выпадение числа 6 фиксирует появление того и другого события). Несовместными событиями здесь являются выпадение числа 5 и четного числа.

5.2. Операции над событиями

Если событие A обязательно произойдет при появлении события B , то говорят, что событие B является **частным случаем** события A . Этот факт обозначается $B \subset A$. В терминах элементарных событий это означает, что каждое элементарное событие, входящее в B , входит также и в A .

События A и B называют **равными**, если они состоят из одних и тех же элементарных событий. В данном опыте равные события могут появиться или не появиться вместе. В этом случае $A \subset B$ и $B \subset A$.

Суммой (объединением) событий A и B называется такое событие $C = A + B$ ($A \cup B$), которое означает наступление хотя бы одного из них (либо A , либо B , либо A и B одновременно).

Произведением (пересечением) событий A и B называется событие C , состоящее в совместном наступлении события A и события B , и обозначается $C = A \cdot B$ ($A \cap B$).

Событие $\bar{A}$ называется **противоположным** событию A , если оно выполняется тогда, когда не выполняется событие A .

Разностью событий A и B называется событие, состоящее в наступлении A и не наступлении B . Разность обозначается $A - B$ ($A \setminus B$).

Примеры:



Начало

Содержание



Страница 77 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть



1. Пусть производится выбор одного из чисел от 1 до 30. Пусть событие B означает выбор четного числа, событие A – выбор числа, кратного 4. Тогда $A \subset B$, т. к. каждое число, кратное 4, является четным.
2. Пусть производится выбор одного из чисел от 1 до 30. Если событие B – выбор числа, кратного 5, а событие A – выбор числа, оканчивающегося цифрами 0 или 5, то $A = B$.
3. Пусть при выборе одного из чисел от 1 до 10 событие A означает выбор четного числа. Значит, $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, т. е. событие A состоит из элементарных событий – выборов одного из чисел 2, 4, 6, 8, 10. Событие B – выбор числа, кратного 3. $B = \{3, 6, 9\}$, т. е. событие B состоит из элементарных событий – выборов одного из чисел 3, 6, 9. Тогда событие $A + B$ означает выбор числа, кратного или 2, или 3 (при этом не исключается, что число кратно и 2, и 3), т. е. $A + B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}$. Событие $A \cdot B = \{6\}$ и означает выбор числа, кратного числам 2 и 3 одновременно.

Действия над событиями можно наглядно представить как операции над множествами. При этом события представляются подмножествами универсального множества Ω . С помощью диаграмм Эйлера-Венна это изображено на [рисунке 5.1](#).

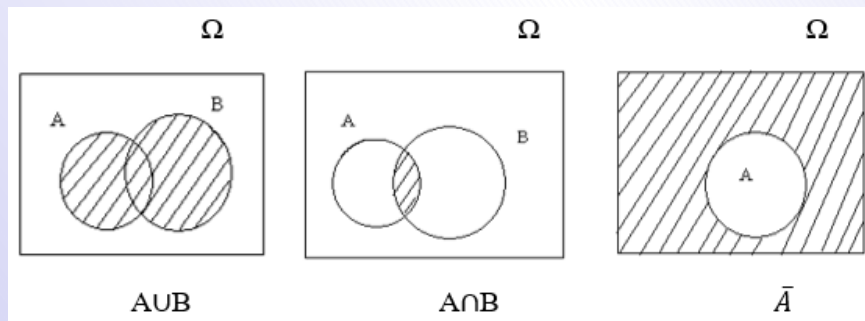


Рисунок 5.1 – Графическая иллюстрация операций над событиями

Начало

Содержание



Страница 78 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

Свойства операций над событиями

1. $\bar{\bar{A}} = A$.
2. $A + B = B + A, A \cdot B = B \cdot A$ – коммутативность.
3. $(A + B) + C = A + (B + C), (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ – ассоциативность.
4. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ – дистрибутивность.
5. $\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}, \overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$ – аналог законов Де Моргана.
6. $A + A = A, A \cdot A = A$.
7. $A + \emptyset = A, A \cdot \Omega = A$.
8. $A + \Omega = \Omega, A \cdot \emptyset = \emptyset$.
9. $A \cdot \bar{A} = \emptyset, A + \bar{A} = \Omega$.

Используя операции над событиями, можем сформулировать определение полной группы событий (см. п. 5.1) следующим образом.

События A и B образуют **полную группу**, если выполняются условия:

- 1) $A \cdot B = \emptyset$;
- 2) $A + B = \Omega$.

5.3. Определения вероятности случайного события

Если имеем дело со случайными событиями, то невозможно предсказать заранее исход того или иного опыта. Однако при исследовании большого количества одинаковых испытаний обнаруживаются определенные закономерности, которые можно описать, используя понятие вероятности.

Под вероятностью события понимается некоторая числовая характеристика возможности наступления этого события. Существуют различные подходы к определению вероятности. Приведем два определения.



Начало

Содержание



Страница 79 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

Классическое определение вероятности

Классической схемой, или **схемой случаев**, называется испытание, в котором: 1) число элементарных исходов конечно; 2) все они равновозможны.

Случай ω называется **благоприятным** некоторому событию A , если его появление влечет наступление события A (т. е. ω входит в число элементов, составляющих A). Например, при бросании игральной кости возможны шесть случаев, при этом событию A – появлению нечетного числа очков – благоприятны лишь три случая: выпадение 1, 3, 5 и неблагоприятны остальные три.

Классической вероятностью события A называется отношение числа m случаев, благоприятных событию A , к числу n всех случаев:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Из определения следуют **свойства вероятности**:

1. Значение вероятности заключено между нулем и единицей:

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

2. Вероятность невозможного события равна нулю:

$$P(\emptyset) = 0.$$

3. Вероятность достоверного события равна единице:

$$P(\Omega) = 1.$$

Пусть пространство Ω состоит из n элементарных событий $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$. Тогда для каждого ω_i благоприятным исходом будет только само ω_i , и для него $m = 1$. Поэтому

$$P(\omega_i) = \frac{m}{n} = \frac{1}{n}.$$



Начало

Содержание



Страница 80 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

Таким образом, если в классической схеме пространство Ω состоит из n элементарных равновозможных событий, то вероятность каждого из них равна $1/n$.

Примеры:

1. В опыте с бросанием игральной кости число всех исходов n равно 6 и все они равновозможны. Пусть событие A означает появление нечетного числа. Тогда для этого события благоприятными исходами будут появления чисел 1, 3, 5. Их количество m равно 3. Поэтому вероятность события A равна $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
2. В книге 250 страниц. Какова вероятность того, что мы откроем книгу на странице с номером, кратным 10?

Пусть событие A : «Номер открытой страницы есть число, кратное 10». Согласно классическому определению вероятности, $P(A) = \frac{m}{n}$, где n – число всех возможных случаев, m – число случаев, благоприятных событию. Число n всех равновозможных случаев, образующих полную группу, равно 250. Найдем число случаев, благоприятных событию, т. е. число страниц с номером, кратным 10. Его можно вычислить, пользуясь тем, что номер нужной страницы имеет вид $10m$, где m – натуральное число, причем $0 \leq 10m \leq 250$. Откуда находим $m \leq \frac{250}{10} = 25$. Подставив полученные числа в формулу классического определения вероятности, получим:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{25}{250} = \frac{1}{10} = 0,1.$$

Статистическое определение вероятности

Пусть было проведено N испытаний, в каждом из которых могло появиться некоторое событие A . Появление события A было зафиксировано M раз. Вероятность



Начало

Содержание



Страница 81 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

события A оценивается **относительной частотой** (частотью) появления события A , которая представляет собой отношение числа событий, в которых появилось событие A , к общему числу событий: $\frac{M}{N}$.

Многочисленные эксперименты такого рода показывают, что при больших N отношение M/N , называемое частотью, остается примерно постоянным.

В статистическом определении **вероятностью** события A называется постоянная величина, которая является предельным значением частотей при неограниченном возрастании числа N :

$$P(A) \approx \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M}{N}.$$

Пример:

Английский ученый Пирсон произвел 23 000 бросаний монеты [3, с. 8]. При этом герб появился 11 512 раз. Значит, относительная частота появления герба равна: $\frac{11512}{23000} = 0,5005 \approx 0,5$. Этот пример показывает, что за вероятность появления герба можно взять число 0,5.

5.4. Основные теоремы теории вероятностей

Теоремы сложения

Теорема 1. Вероятность суммы несовместных событий A и B равна сумме их вероятностей:

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \quad (5.1)$$

Теорема 2. Вероятность суммы совместных событий A и B равна сумме их вероятностей без вероятности их совместного появления:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B). \quad (5.2)$$

Теорема 3. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$



Начало

Содержание



Страница 82 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

Примеры:

1. Пусть пространством событий является множество чисел $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, в котором все числа – элементарные события – равновозможны, вероятность каждого из них равна $1/10$. Пусть $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, тогда A и B несовместны и сумма событий $A+B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Найдем $P(A) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$, $P(B) = \frac{3}{10}$, $P(A+B) = \frac{7}{10}$.

Проверим результат вычисления по формуле (5.1): $P(A+B) = \frac{2}{5} + \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$.

2. Пусть пространством событий является множество чисел $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, в котором все числа – элементарные события – равновозможны, вероятность каждого из них равна $1/10$. Пусть $A = \{2, 3, 5, 7, 10\}$, $B = \{2, 5, 6, 8, 9\}$. Тогда получим: $A \cdot B = \{2, 5\}$, $A+B = \{2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$; $P(A) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, $P(A \cdot B) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$, $P(A+B) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$.

По формуле (5.2): $P(A+B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$.

3. Пусть в группе из 27 туристов 17 человек владеют английским языком, 6 – французским, а 2 – обоими языками. Найти вероятность того, что случайно выбранный из группы турист владеет по крайней мере одним из этих языков [3, с. 13].

Введем событие A : «выбранный турист владеет английским», B : «выбранный турист владеет французским». Тогда событие $A+B$ означает, что турист владеет хотя бы одним из этих языков. По условию задачи, $P(A) = \frac{17}{27}$, $P(B) = \frac{6}{27}$, $P(A \cdot B) = \frac{2}{27}$.

По формуле (5.2) имеем:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = \frac{17}{27} + \frac{6}{27} - \frac{2}{27} = \frac{21}{27} = \frac{7}{9}$$



Начало

Содержание



Страница 83 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

Условная вероятность и теоремы умножения

Событие A называется **зависимым** от события B , если вероятность события A меняется в зависимости от того, произошло событие B или нет. Вероятность события A , вычисленная при условии, что произошло событие B , называется **условной вероятностью** события A и обозначается $P_B(A)$ (или $P(A/B)$), говорят: «вероятность события A при условии B ».

Условная вероятность $P_B(A)$ определяется формулой (при $P(B) > 0$)

$$P_B(A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}.$$

Пример:

В рассмотренном выше **примере 2** $P(A \cdot B) = 1/5$, $P(B) = 1/2$, поэтому условная вероятность равна $P_B(A) = \frac{1/5}{1/2} = \frac{2}{5}$.

Эту же вероятность можно найти непосредственно по определению. В состав события B входят 5 чисел, только 2 из чисел, входящих в A , входят также и в B . По формуле классической вероятности $P_B(A) = \frac{2}{5}$.

События A и B называются **независимыми**, если $P_B(A) = P(A)$, т. е. вероятность события A не зависит от того, произошло ли событие B .

На основании рассмотренной формулы условной вероятности можно доказать **теоремы умножения вероятностей**:

Теорема 4. Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого при условии, что первое произошло:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B), \text{ при } P(A) > 0 \text{ или} \\ P(A \cdot B) = P(B) \cdot P_B(A), \text{ при } P(B) > 0$$



Начало

Содержание



Страница 84 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

Теорема 5. Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению их вероятностей:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

Часто последнее соотношение используют как определение независимых событий: события называют **независимыми**, если вероятность их произведения равна произведению вероятностей.

Примеры:

1. Пусть события A и B несовместны и $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$. Это значит, что $P(A) \cdot P(B) \neq 0$. Найдем $P(A) \cdot P(B) = P(\emptyset) = 0$. Поэтому $P(A \cdot B) \neq P(A) \cdot P(B)$. Это означает, что несовместные события A и B зависимы.
2. Пусть событие A влечет за собой событие B , т. е. $A \subset B$, и $P(B) \neq 1$. Тогда $A \cdot B = A$, и $P(A \cdot B) = P(A)$. Поэтому $P(A \cdot B) \neq P(A) \cdot P(B)$. Это означает, что если $A \subset B$, то события A и B – зависимы.

5.5. Основы комбинаторики

Комбинаторика – раздел математики, в котором изучаются способы подсчета числа элементов в конечных множествах. Формулы комбинаторики используют при непосредственном вычислении вероятностей.

Сформулируем несколько определений.

Упорядоченным называется множество, в котором учитывается порядок следования элементов. Так, например, множества $\{a, b, c\}$ и $\{a, c, b\}$ есть различные упорядоченные множества.

Кортежем длины k называется упорядоченная последовательность, состоящая из k элементов, в которой известно, какой элемент за каким следует и сколько раз повторяется (см. п. 1.3). Основное отличие кортежа от упорядоченного множества состоит в том, что элементы кортежа могут повторяться. Кортежи записываются в



Начало

Содержание



Страница 85 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

круглых скобках $(a_1, a_2, \dots, a_k)$. Напомним, что элементы кортежа называются его компонентами или координатами.

Сформулируем **основные правила комбинаторики**.

1. Правило суммы

Пусть из множества X элемент a_1 можно выбрать n_1 способами, элемент a_2 – другими n_2 способами и т. д., элемент a_k – n_k способами, отличными от предыдущих. Тогда выбор одного из элементов a_1 , или a_2 , или и т. д., a_k можно произвести

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_k \text{ способами.}$$

2. Правило произведения

Пусть X – некоторое множество, из которого выбор элемента a_1 можно осуществить n_1 способами, после этого выбор элемента a_2 можно осуществить n_2 способами и т. д., наконец, элемент a_k можно выбрать n_k способами. Тогда одновременный выбор элементов $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ в указанном порядке можно осуществить

$$n = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k \text{ способами.}$$

Пример:

Пусть в продаже имеется 17 видов авторучек и 5 видов блокнотов. Тогда выбор одной принадлежности (или авторучки, или блокнота) можно сделать 22 способами ($17 + 5 = 22$). Выбрать же две принадлежности (авторучку и блокнот) можно 85 способами ($17 \cdot 5 = 85$).

3. Основные комбинации и формулы для подсчета их числа

Основными комбинациями, рассматриваемыми в комбинаторике, являются комбинации без повторений и с повторениями. Это перестановки, размещения и сочетания.



Начало

Содержание



Страница 86 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть



Пусть некоторое множество X состоит из n элементов. Будем переставлять элементы этого множества всевозможными способами, оставляя неизменным их число и меняя лишь их порядок. Получим различные упорядоченные множества, составленные из n элементов множества X . Каждая из полученных комбинаций (в т. ч. и первоначальная) носит название **перестановки**. Общее число перестановок из n элементов обозначается P_n и вычисляется по формуле:

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n,$$

где $n!$ («эн факториал») – это произведение всех натуральных чисел от 1 до n , т.е. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$. Следует отметить, что $0! = 1$.

Каждое упорядоченное подмножество n -элементного множества X , состоящее из k элементов, называется **размещением из n элементов по k элементов**. Через A_n^k обозначают число всех размещений из n элементов по k (читается: « A из n по k »). Для числа размещений справедлива формула:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n - k)!} = n(n - 1)(n - 2) \dots (n - (k - 1)).$$

Кортеж длины k , составленный из элементов n -элементного множества X , называют **размещением с повторениями из n элементов по k** . Число таких кортежей обозначают $\overline{A_n^k}$ и вычисляют по формуле:

$$\overline{A_n^k} = n^k.$$

Сочетанием из n элементов по k элементов называется каждое неупорядоченное k -элементное подмножество множества X , состоящего из n элементов. Число всех сочетаний из n элементов по k элементов обозначается C_n^k (« C («цэ») из n по k »). Для числа сочетаний справедливы формулы:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n - k)!} = \frac{n(n - 1) \dots (n - k + 1)}{k!}.$$

[Начало](#)[Содержание](#)[Страница 87 из 106](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Заккрыть](#)

При решении комбинаторных задач важным является правильный выбор нужной комбинации и соответствующей формулы для подсчета числа комбинаций. Полезной при этом может быть интеллект-карта (рисунок 5.2):

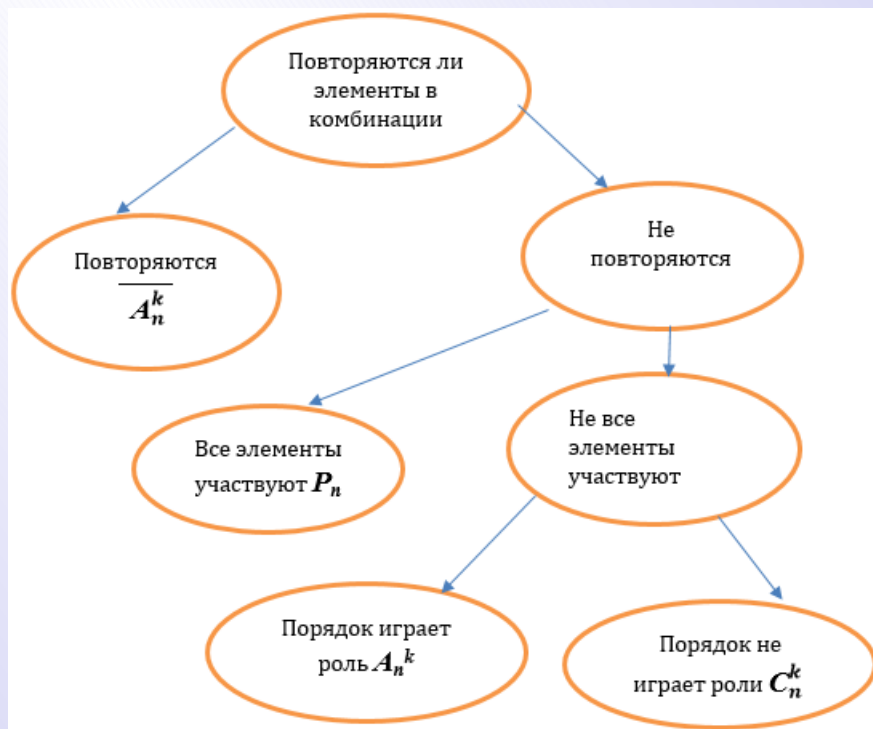


Рисунок 5.2 – Основные комбинации и условия их применения

Примеры:

1. Пусть в группе 25 студентов. Сколькими способами могут быть выбраны из этой группы три делегата на конференцию?



Начало

Содержание



Страница 88 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

Последовательность выбора делегатов не играет роли, поэтому здесь необходимо составить из имеющихся 25 элементов множества студентов различные трехэлементные подмножества. Это сочетания из 25 по 3:

$$C_{25}^3 = \frac{25!}{3!(25-3)!} = \frac{25!}{3! \cdot 22!} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 2300.$$

2. Сколько существует способов распределения призовых мест на олимпиаде среди 25 участников? Необходимо составить различные упорядоченные трехэлементные подмножества из элементов 25-элементного множества. Это размещения без повторений из 25 по 3:

$$A_{25}^3 = \frac{25!}{(25-3)!} = \frac{25!}{22!} = 25 \cdot 24 \cdot 23 = 13800.$$

3. Сколькими способами можно составить список из 25 студентов?

В задаче необходимо найти число различных упорядоченных множеств из 25 элементов, т.е. число перестановок из 25 элементов:

$$P_{25} = 25!$$

4. Сколькими способами группе студентов из 25 человек могут быть выставлены экзаменационные оценки в ведомости, если известно, что неудовлетворительной оценки не получил никто?

Все удовлетворительные оценки – это 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Их семь. Значит, необходимо составить различные кортежи длины 25 из элементов семиэлементного множества. Число таких кортежей – это число размещений с повторениями из семи элементов по 25:

$$\overline{A}_7^{25} = 7^{25}.$$



Начало

Содержание



Страница 89 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть



5.6. Формула полной вероятности и формула Байеса

Рассмотрим n попарно несовместных событий $H_1, H_2, \dots, H_n$. Они образуют **полную группу событий**, если они попарно несовместны, а их сумма является достоверным событием, т. е.

$$H_i \cdot H_j = \emptyset \text{ при } i \neq j \text{ и } H_1 + H_2 + \dots + H_n = \Omega.$$

Такие события называются **гипотезами**.

Простейшим примером полной группы событий является произвольное событие A и ему противоположное $\bar{A}$. По теореме сложения вероятностей, для полной группы событий справедливы равенства:

1) $P(H_i \cdot H_j) = 0$;

2) $P\left(\sum_{i=1}^n H_i\right) = \sum_{i=1}^n P(H_i) = P(H_1) + P(H_2) + \dots + P(H_n) = 1$.

Примеры:

- Пусть $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Рассмотрим события $H_1 = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $H_2 = \{1, 3\}$, $H_3 = \{5, 7, 9\}$. Они попарно несовместны, т. е. $H_1 \cdot H_2 = \emptyset$, $H_2 \cdot H_3 = \emptyset$, $H_1 \cdot H_3 = \emptyset$, а их сумма является достоверным событием $H_1 + H_2 + H_3 = \Omega$. Значит, H_1, H_2, H_3 составляют полную группу событий. Для них $P(H_1) = 5/10$, $P(H_2) = 2/10$, $P(H_3) = 3/10$, т. е. сумма их вероятностей равна 1.
- В лесу растут деревья, среди которых 60 % берез, 10 % елей, и 30 % сосен. [3, с. 16]. Случайным образом выбирается для замера одно из деревьев. Обозначим гипотезы: H_1 – «выбранное дерево – береза», H_2 – «выбранное дерево – ель», H_3 – «выбранное дерево – сосна». Тогда события H_1, H_2, H_3 – попарно несовместны, $P(H_1) = 0,6$, $P(H_2) = 0,1$, $P(H_3) = 0,3$. Значит, гипотезы H_1, H_2, H_3 составляют полную группу событий. Сумма их вероятностей равна 1.

Начало

Содержание



Страница 90 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

Пусть события $H_1, H_2, \dots, H_n$ образуют полную группу событий. Тогда для любого события A имеет место **формула полной вероятности**:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) P_{H_i}(A).$$

Пример:

Рассмотрим предыдущий **пример 2**. Пусть при замере диаметра деревьев он оказался больше 15 см для 30 % берез, 40 % елей и 70 % сосен. Введем событие A – «диаметр случайно выбранного дерева больше 15 см». Найдем вероятность этого события. По условию примера, условные вероятности события A равны: $P_{H_1}(A) = 0,3$, $P_{H_2}(A) = 0,4$, $P_{H_3}(A) = 0,7$. Тогда по формуле полной вероятности имеем:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1) P_{H_1}(A) + P(H_2) P_{H_2}(A) + P(H_3) P_{H_3}(A) = \\ &= 0,6 \cdot 0,3 + 0,1 \cdot 0,4 + 0,3 \cdot 0,7 = 0,43. \end{aligned}$$

В формулу полной вероятности входят вероятности $P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_n)$, которые называются **априорными**. Это вероятности гипотез H_i , вычисленные до опыта (*a priori*). Если событие A наступило, то эти вероятности изменяются. Это **апостериорные** условные вероятности, вычисленные после опыта (*a posteriori*) $P_A(H_1), P_A(H_2), \dots, P_A(H_n)$. Они могут быть найдены по **формуле Байеса**:

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}{P(A)} = \frac{P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}{\sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}.$$

Пример:

Пусть в условиях предыдущего примера диаметр случайно выбранного дерева оказался больше 15 см, т. е. событие A наступило. Найти вероятность того, что измеренное дерево – береза. По формуле Байеса:

$$P_A(H_1) = \frac{P(H_1) \cdot P_{H_1}(A)}{P(A)} = \frac{0,6 \cdot 0,3}{0,43} = 0,42.$$



Начало

Содержание



Страница 91 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть



5.7. Случайные величины. Закон распределения случайной величины

Случайной величиной называется величина, которая в результате опыта может принять определенное, но заранее не известное, значение. **Дискретной** называют случайную величину, возможные значения которой есть отдельные числа, которые можно пронумеровать. Например, число участников испытания, количество положительных тестов в психодиагностике.

Непрерывной называется случайная величина, которая может принимать значения из некоторого бесконечного или конечного промежутка, т. е. возможные значения заполняют непрерывно некоторый промежуток. Например, скорость некоторого объекта, ошибка взвешивания на точных весах и т. д.

В психологии имеют дело в основном с дискретными случайными величинами.

Случайные величины обозначаются большими буквами X, Y, Z , а их возможные значения – малыми буквами x, y, z . Запись $X = x$ означает, что случайная величина X приняла значение x , запись $P(X = x)$ означает вероятность того, что X приняла значение x .

Каждое значение дискретной случайной величины появляется с некоторой вероятностью. **Законом распределения** случайной величины называется соответствие между значениями случайной величины и их вероятностями. О случайной величине говорят, что она имеет данный закон распределения. Простейшей формой задания закона распределения является таблица, называемая **рядом распределения**, в которой перечислены возможные значения случайной величины и соответствующие им вероятности (**таблица 5.1**).

Таблица 5.1 – Ряд распределения

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n
p_i	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Начало

Содержание



Страница 92 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

В этой таблице $p_i = P(X = x_i)$ – это вероятность события $(X = x_i)$. Так как в каждом испытании случайная величина X принимает одно и только одно возможное значение, события $X = x_1, X = x_2, \dots, X = x_n$ образуют полную группу, а, значит, сумма вероятностей равна 1:

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

Записанная формула может служить для проверки того, является ли некоторая таблица вида 5.1 законом распределения случайной величины. Используя ряд распределения случайной величины, можем представить данный закон распределения в графической форме. Такой график называется **графиком распределения** или **многоугольником распределения** (рисунок 5.3).

Примеры:

1. Проверить, может ли случайная величина X иметь закон распределения:

x	3	4	5	6	7
p	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Найдем сумму $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 0,1 + 0,2 + 0,3 + 0,3 + 0,1 = 1$.

Ответ: может.

2. Построить график распределения случайной величины из примера 1.

Для построения графика нанесем значения случайной величины x_i на ось Ox , а соответствующие им значения p_i на ось Oy .



Начало

Содержание



Страница 93 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

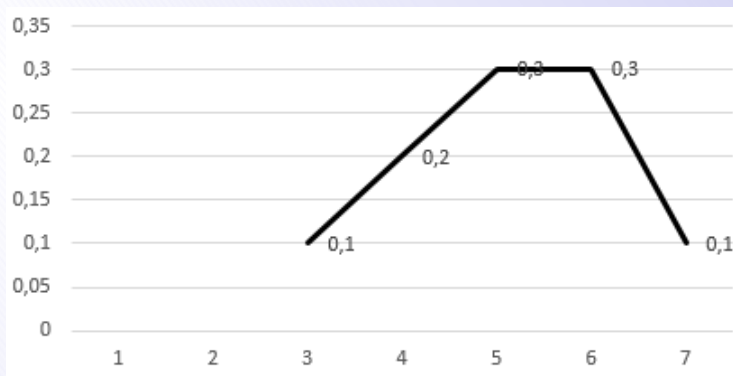


Рисунок 5.3 – Многоугольник распределения

5.8. Функция распределения случайной величины. Ее свойства

Другой формой закона распределения случайной величины является функция распределения $F(x)$, представляющая собой вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x , т. е.

$$F(x) = P(X < x).$$

Функцию распределения иногда называют *интегральной функцией распределения*.

Для дискретной случайной величины X с законом распределения $P = P(X = x_k) = p_k$, $k = 1, 2, \dots$ функция распределения имеет вид

$$F(x) = \sum_{k, x_k < x} p_k,$$

где запись $x_k < x$ означает, что суммируются вероятности тех значений, которые меньше x .



Начало

Содержание



Страница 94 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

Графиком функции распределения дискретной случайной величины является график кусочно-постоянной функции. Скачки функции $F(x)$ в точках разрыва $x = x_k$ равны вероятностям этих значений $p_k = P(X = x_k)$. Сумма всех скачков равна 1.

Пример:

Построить график функции распределения для случайной величины **предыдущего примера**.

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{k, x_k < x} p_k.$$

При $x \leq 3$, очевидно, $F(x) = 0$;

при $3 < x \leq 4$ $F(x) = p_1 = 0,1$;

при $4 < x \leq 5$ $F(x) = p_1 + p_2 = 0,1 + 0,2 = 0,3$;

при $5 < x \leq 6$ $F(x) = p_1 + p_2 + p_3 = 0,1 + 0,2 + 0,3 = 0,6$;

при $6 < x \leq 7$ $F(x) = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0,1 + 0,2 + 0,3 + 0,3 = 0,9$;

при $x > 7$ $F(x) = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1$.

График функции распределения $F(x)$ изображен на **рисунке 5.4**.

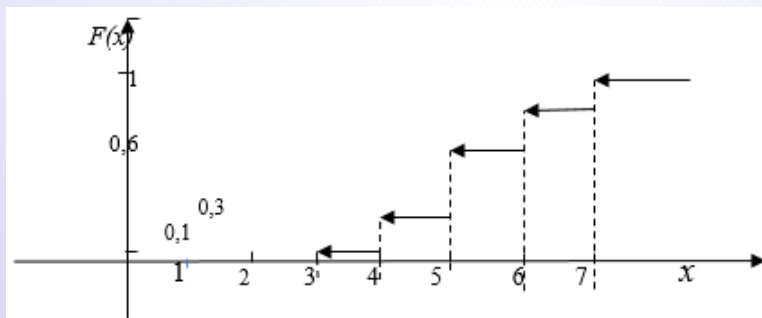


Рисунок 5.4 – График функции распределения



Начало

Содержание



Страница 95 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

Функция распределения любой случайной величины обладает следующими **свойствами**:

1. Множество значений функции $F(x)$ находится на отрезке $[0; 1]$:

$$0 \leq F(x) \leq 1.$$

2. Функция $F(x)$ не убывает, т. е. если $x_2 > x_1$, то $F(x_2) \geq F(x_1)$.

3. Если все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу $(a; b)$, то $F(x) = 0$ при $x \leq a$, $F(x) = 1$ при $x > b$.

4. Для $F(x)$ выполняются предельные соотношения:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1.$$

5. Функция распределения непрерывна слева.

6. Если $x_2 > x_1$, то $F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 \leq X < x_2)$.

В случае, когда $x_1 = a$ и $x_2 = b$, получим: $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$, т. е. вероятность принятия случайной величиной значения на промежутке $[a; b)$ равна приращению функции распределения на этом промежутке.

5.9. Формула Бернулли

Опыты называются **независимыми**, если вероятность исхода каждого опыта не зависит от того, какие исходы имели другие опыты. Пусть проводятся n независимых опытов, в результате которых может появиться событие A с вероятностью p и не появиться с вероятностью q , причем $p + q = 1$. Такая схема называется **схемой Бернулли**.

Пусть X – число появлений события A в n испытаниях Бернулли. Тогда вероятность того, что в серии из n независимых испытаний событие A появится ровно k



Начало

Содержание



Страница 96 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

раз $(X = k)$ вычисляется по **формуле Бернулли**:

$$P_n(k) = P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Пример:

Вероятность попадания в мишень для конкретного стрелка равна 0,7. Какова вероятность того, что из 10 выстрелов будет 4 попадания в мишень?

Воспользуемся формулой Бернулли при $k = 4$, $n = 10$, $p = 0,7$. Искомая вероятность равна

$$P(X = 4) = C_{10}^4 \cdot 0,7^4 \cdot 0,3^6 = \frac{10!}{4! \cdot 6!} \cdot 0,7^4 \cdot 0,3^6 = 0,0367.$$

В n испытаниях Бернулли **наивероятнейшее число k_0 появления события A** определяется неравенством

$$(n + 1)p - 1 \leq k_0 < (n + 1)p.$$

Пример:

Всхожесть семян некоторого растения имеет вероятность 0,8. Найти наиболее вероятное число проросших семян из 7 посеянных.

По формуле $8 \cdot 0,8 - 1 \leq k_0 < 8 \cdot 0,8$, поэтому $k_0 = 6$.

5.10. Формула Пуассона

Если в схеме испытаний Бернулли число испытаний n велико, вероятность p события A в одном испытании мала, а произведение $\lambda = np$ не превосходит 20, то вероятность $P_n(m)$ того, что событие A появится ровно в m испытаниях, находится по приближенной **формуле Пуассона**:

$$P(X = m) \cong \frac{e^{-\lambda} \lambda^m}{m!} = p(m), m = 0, 1, \dots, n.$$



Начало

Содержание



Страница 97 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

Значения $p(m)$ имеются в таблицах значений функции Пуассона.

Пример:

В ходе проверки случайным образом отбирается 10 счетов. Найти вероятность того, что обнаружится один счет с ошибкой, если в среднем 3 % счетов содержат ошибки.

Для решения задачи используем формулу Пуассона, в которой $n = 10$, $p = 0,03$, $\lambda = np = 0,3$. Имеем

$$P(X = 1) \approx \frac{e^{-0,3}(0,3)^1}{1!}.$$

По таблицам значений функции Пуассона находим $P(X = 1) \approx 0,2223$.

5.11. Числовые характеристики дискретной случайной величины

Математическое ожидание MX дискретной случайной величины X определяется формулой

$$MX = \sum_i x_i p_i,$$

и имеет смысл среднего значения случайной величины.

Если число значений случайной величины конечно и равно n , а вероятности $p_n = \frac{1}{n}$, то MX совпадает с обычным средним значением величин $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$MX = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k.$$

Математическое ожидание обладает следующими свойствами:

1. $MC = C$, где $C = const$;
2. $M(CX) = C \cdot MX$, где $C = const$;
3. $M(X \pm Y) = MX \pm MY$, для любых X и Y ;
4. $M(X \cdot Y) = MX \cdot MY$, если X и Y независимы.



Начало

Содержание



Страница 98 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть



Смысл математического ожидания состоит в том, что среднее арифметическое наблюдаемых значений случайной величины при увеличении числа опытов будет приближаться к ее математическому ожиданию.

Для оценки **степени рассеивания** значений случайной величины вокруг ее среднего значения вводится понятие дисперсии.

Дисперсией (DX) называется математическое ожидание квадрата разности $(X - MX)$:

$$DX = M(X - MX)^2 = \sum_k (x_k - MX)^2 p_k.$$

Для вычисления дисперсии обычно используют более удобную формулу

$$DX = MX^2 - (MX)^2.$$

Свойства дисперсии:

1. $DC = 0$, где $C = const$;
2. $D(CX) = C^2 DX$, где $C = const$;
3. $D(X \pm Y) = DX + DY$, если X и Y независимы.

Средним квадратическим отклонением называется величина

$$\sigma X = \sqrt{DX},$$

которая также является мерой рассеивания случайной величины X .

Пример:

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X для **примера из п. 5.7**.

По формуле математического ожидания имеем:

$$MX = 3 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,2 + 5 \cdot 0,3 + 6 \cdot 0,3 + 7 \cdot 0,1 = 5,1.$$

Начало

Содержание



Страница 99 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

Для вычисления дисперсии сначала найдем

$$MX^2 = 3^2 \cdot 0,1 + 4^2 \cdot 0,2 + 5^2 \cdot 0,3 + 6^2 \cdot 0,3 + 7^2 \cdot 0,1 = 27,3.$$

По формуле дисперсии находим

$$DX = MX^2 - (MX)^2 = 27,3 - (5,1)^2 = 1,29.$$

Тогда $\sigma X = \sqrt{1,29} \cong 1,14$.

5.12. Непрерывные случайные величины. Плотность распределения

Непрерывной называется случайная величина X , если ее функция распределения непрерывна.

Распределением непрерывной случайной величины называется совокупность вероятностей $P(a \leq X \leq b)$ для любых действительных чисел a и b .

Распределение непрерывной случайной величины однозначно определяется ее функцией распределения $F(x)$, т. к.

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a).$$

Если X – непрерывная случайная величина, то вероятность того, что она примет одно, заданное определенное значение α , равна нулю:

$$P(X = \alpha) = 0.$$

Все свойства функции распределения дискретных случайных величин выполняются и для функций распределения непрерывных случайных величин.

Плотностью распределения вероятностей случайной величины X в точке x называется предел отношения вероятности попадания значений этой величины в интервал $(x; x + \Delta x)$ к длине Δx отрезка $[x; x + \Delta x]$, при стремлении Δx к нулю:

$$p(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x}.$$



Начало

Содержание



Страница 100 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

График функции $p(x)$ (плотности распределения) называется **кривой распределения**.

Справедливо следующее равенство

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt.$$

Если случайная величина X имеет плотность, то она является непрерывной случайной величиной.

Плотность $p(x)$ однозначно определяет распределение случайной величины, поскольку вероятность попадания значений случайной величины X в интервал $(a; b)$ равна определенному интегралу от плотности распределения $p(x)$:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b p(x) dx.$$

Плотность распределения обладает следующими **свойствами**:

1. Плотность распределения $p(x)$ – неотрицательная функция, т. е. $p(x) \geq 0$.
2. Из определения плотности следует, что $F'(x) = p(x)$, так что, если $F(x)$ дифференцируема, то она имеет плотность.
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = F(+\infty) = 1$.

Если все возможные значения принадлежат отрезку $[a; b]$, то

$$\int_a^b p(x) dx = 1,$$

т. к. $p(x) = 0$ вне этого отрезка.

Пример:



Начало

Содержание



Страница 101 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

Плотность вероятности случайной величины X задана функцией

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0 \\ \frac{x}{2}, & \text{при } 0 < x \leq 2 \\ 0, & \text{при } x > 2 \end{cases}.$$

Найти вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение из интервала $(1; 2)$.

$$P(1 < X < 2) = \int_1^2 \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{4} \Big|_1^2 = \frac{2^2}{4} - \frac{1^2}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0,75.$$

5.13. Числовые характеристики непрерывной случайной величины

Математическое ожидание MX непрерывной случайной величины, имеющей плотность, определяется формулой

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx,$$

а **дисперсия** – формулой

$$DX = M(X - MX)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - MX)^2 p(x) dx.$$

Для вычисления дисперсии также верна формула, справедливая для дискретной случайной величины:

$$DX = MX^2 - (MX)^2,$$

откуда для непрерывной случайной величины получаем

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx - (MX)^2.$$



Начало

Содержание



Страница 102 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

Величина $\sigma X = \sqrt{DX}$ называется *средним квадратическим отклонением* случайной величины.

Все свойства математического ожидания и дисперсии для дискретных случайных величин переносятся и на случай непрерывных случайных величин.

5.14. Применение вероятностных методов в психологии

Применение вероятностных методов в различных областях психологии является очень широким и разносторонним. Приведем лишь несколько примеров.

Чаще всего психология имеет дело со случайными величинами. Психические явления следует считать случайными. Вариативность, случайная или закономерная изменчивость – наиболее часто встречающиеся в психологических явлениях категории. Большинство психических процессов случайны, поскольку непредсказуемо изменчивы, вариативны и многообразны из-за сочетания многочисленных внутренних и внешних причин и обстоятельств. Любая прогнозная модель в психологии прогнозирования является моделью случайного процесса как случайной функции, аргументом которой является время.

В психологии труда используется оценка времени реакции водителей. Время реакции человека является случайной величиной, которая характеризуется двумя параметрами: математическим ожиданием и дисперсией. Для того, чтобы установить факт влияния на время реакции, например, такого фактора, как утомление, нужно сравнить два условных распределения – до утомления водителя и после утомления (т. е. состояния человека отдохнувшего и уставшего).

При верификации гипотез составляются матрицы условных распределений и тех ошибок, которые совершает испытуемый. При этом используются априорные вероятности гипотез, которые апостериори уточняются с помощью формул Байеса.

В математической статистике существуют критерии, с помощью которых на основе сравнения дисперсий двух распределений можно сделать выводы об истинности



Начало

Содержание



Страница 103 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

или ложности психологических гипотез. Это F -критерий (или критерий Фишера-Снедекора) для сравнения двух дисперсий и G -критерий Кохрана для сравнения нескольких дисперсий.

Таким образом, теоретико-вероятностные и математико-статистические методы и модели являются неотъемлемой частью психологического исследования и психологии как науки.

Вопросы для самоконтроля:

1. Постройте интеллект-карты «Случайные события. Их виды», «Действия над событиями», «Вероятность случайного события».
2. Вспомните основные правила комбинаторики.
3. Дайте определения основных комбинаций. Запишите формулы для их подсчета.
4. Сформулируйте основные теоремы теории вероятностей
5. Дайте определение полной группы событий. Докажите, что события A и $\bar{A}$ образуют полную группу.
6. Дайте определение случайной величины, назовите виды случайных величин.
7. Что такое закон распределения случайной величины, ряд распределения, многоугольник распределения.
8. Как проверить, задает ли некоторая таблица закон распределения случайной величины?
9. Назовите основные числовые характеристики дискретной случайной величины. Запишите формулы для их подсчета.
10. Начертите интеллект-карту «Числовые характеристики дискретной случайной величины».



Начало

Содержание



Страница 104 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

Для закрепления материала пройдите [тестовые задания](#) по курсу «Основы высшей математики»



Начало

Содержание



Страница 105 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть

ЛИТЕРАТУРА

1. Ганичева, А.В. Математика для психологов / А.В. Ганичева, В.П. Козлов. – М. : Аспект Пресс, 2005. – 238 с.
2. Суходольский, Г.В. Математическая психология / Г.В. Суходольский. – Харьков : Гуманитар. центр, 2006. – 358 с.
3. Белько, И.В. Высшая математика для экономистов. III семестр: экспресс-курс / И.В. Белько, К.К. Кузьмич. – М. : Новое знание, 2007. – 144 с.
4. Гусак, А.А. Теория вероятностей : справ. пособие к решению задач / А.А. Гусак, Е.А. Бричикова. – Минск : ТетраСистемс, 2009. – 288 с.
5. Булдык, Г.М. Руководство к решению задач и упражнений по теории вероятностей и математической статистике: Для практической и самостоятельной работы студентов экономических специальностей / Г.М. Булдык. – Минск : ФУАинформ, 2009. – 228 с.



Начало

Содержание



Страница 106 из 106

Назад

На весь экран

Заккрыть