

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»

Исследование операций

*Электронный курс лекций
для студентов физико-математического факультета*

Брест
БрГУ имени А.С. Пушкина
2015



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 1 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

Авторы:

Берлин Татьяна Сергеевна – преподаватель кафедры прикладной математики и технологий программирования

Кот Елена Степановна – преподаватель кафедры прикладной математики и технологий программирования

Рецензенты:

Будько Александр Евгеньевич – проректор по науке и экономике УО «БрГУ имени А.С. Пушкина», кандидат физико–математических наук, доцент

Парфомук Сергей Иванович – заведующий кафедрой информатики и прикладной математики УО «БрГТУ», кандидат технических наук, доцент

Электронный курс лекций написан в соответствии с действующей типовой программой по дисциплине «Исследование операций» и ставит своей целью облегчить самостоятельную работу студентов с теоретическим материалом при подготовке к лекциям, практическим занятиям и экзамену. Предназначено для студентов специальностей 1-31 03 03-01 «Прикладная математика» и 1-31 03 06-01 «Экономическая кибернетика» физико-математического факультета.



*Кафедра
ПМ и ТП*

Начало

Содержание



Страница 2 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	4
Лекция 1 Предмет и цель исследования операций	6
1.1 Задачи исследования операций	8
1.2 Основные определения исследования операций	12
Лекция 2 Построение математической модели задачи. Прямые и обратные задачи	19
Лекция 3 Выбор решения в условиях неопределенности	29
Лекция 4 Многокритериальные задачи	43
4.1 Матричные игры с нулевой суммой	57
4.2 Чистые и смешанные стратегии. Их свойства	63
4.3 Смешанные стратегии	65
Лекция 5 Методы решения матричных игр	72
Лекция 6 Статистические игры	79
Лекция 7 Понятие линейного программирования	90
7.1 Формы записи задачи линейного программирования	91



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 3 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

7.2 Преобразование задачи линейного программирования к линейной форме	94
Лекция 8 Существование решения задачи линейного программирования и способы его нахождения	99
Лекция 9 Двойственные задачи	111
9.1 Критерий Канторовича и первая теорема двойственности .	112
9.2 Вторая и третья теорема двойственности	117
Лекция 10 Алгоритм нахождения опорного решения	123
Лекция 11 Алгоритм нахождения оптимального решения	132
Лекция 12 Устойчивость оптимального решения	144
12.1 Варьирование ресурсов	145
12.2 Варьирование целевой функцией	146
Лекция 13 Симплекс-метод	149
Лекция 14 Транспортная задача	157
Лекция 15 Задача о назначениях. Венгерский метод	171
Лекция 16 Задача коммивояжера	180



*Кафедра
ПМ и ТП*

Начало

Содержание



Страница 4 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

16.1 Метод ветвей и границ	184
Лекция 17 Программирование на сетях	203
17.1 Основные понятия теории графов	203
17.2 Упорядочивание вершин графа	210
17.3 Алгоритм Фалкерсона. Упорядочение дуг графа	213
Лекция 18 Потоки на сетях	215
18.1 Разрез на сети. Теорема Форда-Фалкерсона	215
18.2 Постановка и алгоритм задачи о максимальном потоке	220
18.3 Приложения задачи о максимальном потоке	222
18.3.1 Задача о потоке минимальной стоимости	223
Лекция 19 Общие сведения о теории расписаний	230
19.1 Определение задачи теории расписаний	230
19.2 Классификация задач теории расписаний	233
Лекция 20 Одноприборные задачи теории расписаний	236
Лекция 21 Минимизация суммарного запаздывания $1 \sum T_j$	240
21.1 Точный алгоритм решения задачи $1 \sum T_j$	240
21.2 n-приборные задачи ТР. Постановка задачи, ограничения	248
Лекция 22 Решение задач теории расписания	252



*Кафедра
ПМ и ТП*

Начало

Содержание



Страница 5 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

22.1 Комбинаторный подход	252
22.2 Эвристические и вероятностные методы	253
Лекция 23 Алгоритм Джонсона для двух машин	256
Лекция 24 Задачи теории массового обслуживания. Классификация задач	258
Лекция 25 Задачи теории массового обслуживания. Задача Эрланга	264
Лекция 26 Схема гибели и размножения. Формула Литтла	272
26.1 Схема гибели и размножения	272
26.2 Формула Литтла	276
26.3 Статическая детерминированная модель управления запасами без дефицита	280
Тесты	288
Литература	289
Глоссарий	291



*Кафедра
ПМ и ТП*

Начало

Содержание



Страница 6 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

Предисловие

Исследование операций – прикладная математическая дисциплина, которая занимается разработкой и применением методов нахождения **оптимальных решений** по управлению операциями в сложных системах. Исследование операций является одной из основных дисциплин, необходимых для подготовки специалистов, работающих в различных областях народного хозяйства.

Настоящий электронный курс лекций предназначен для студентов специальностей 1-31 03 03-01 «Прикладная математика» и 1-31 03 06-01 «Экономическая кибернетика» физико-математического факультета. Он написан в соответствии с действующей типовой программой по дисциплине «Исследование операций». Электронное издание содержит 26 лекций, в которых рассматриваются все разделы учебной программы по данной дисциплине: принятие решений и элементы теории игр, линейные модели, сетевые модели, вероятностные модели, задачи оптимального упорядочения.

Многие темы содержат примеры решения практических задач. В электронном пособии студент может так же пройти тесты по некоторым темам и оценить уровень своих знаний. При недостаточно высокой оценке, студент может воспользоваться пособием для заполнения пробелов в обучении посредством чтения соответствующей лекции, либо воспользовавшись глоссарием для поиска интересующего его термина.



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 7 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

Материал построен таким образом, чтобы студенты не только познакомились с теоретическим материалом, но и смогли применить его на практике. Курс лекций ставит своей целью облегчить самостоятельную работу студентов с теоретическим материалом при подготовке к лекциям, лабораторным занятиям и экзамену.



*Кафедра
ПМ и ТП*

Начало

Содержание



Страница 8 из 293

Назад

На весь экран

Закрыть

ЛЕКЦИЯ 1

Предмет и цель исследования операций

Потребности практики вызвали к жизни специальные научные методы, которые удобно объединять под названием **«исследование операций»** (ИО). Под этим термином мы будем понимать *применение математических, количественных методов для обоснования решений во всех областях целенаправленной человеческой деятельности.*

Поясним, что понимается под «решением». Пусть предпринимается какое-то мероприятие, направленное к достижению определенной цели. У лица (или группы лиц), организующего мероприятие, всегда имеется какая-то свобода выбора: оно может организовать его тем или другим способом, например, выбрать образцы техники, которые будут применены, так или иначе распределить имеющиеся средства и т. д. «Решение» это и есть какой-то выбор из ряда возможностей, имеющих у организатора. Решения бывают плохими и хорошими, продуманными и скороспелыми, обоснованными и произвольными.

Значит ли это, что, принимая подобные решения, мы занимаемся «исследованием операций»? Нет, не значит. Исследование операций начинается тогда, когда для обоснования решений применяется тот или другой математический аппарат.

Эти решения — гораздо сложнее, а главное, от них очень многое зависит. Неправильный их выбор может отразиться на деловой жизни целого



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 9 из 293

Назад

На весь экран

Закрыть

города. Конечно, и в этом случае при выборе решения можно действовать интуитивно, опираясь на опыт и здравый смысл (так оно нередко и делается). Но гораздо разумнее будут решения, если они подкреплены математическими расчетами. Эти предварительные расчеты помогут избежать длительного и дорогостоящего поиска нужного решения «на ощупь».

Возьмем еще более яркий пример. Пусть речь идет о каком-то очень крупномасштабном мероприятии — скажем, об отведении части стока северных рек в засушливые зоны. Допустимо ли здесь произвольное, «волевое» решение, могущее привести к серьезным отрицательным последствиям, или же необходима серия предварительных расчетов по математическим моделям? Думается, что здесь двух мнений быть не может — необходимость тщательных, многосторонних расчетов очевидна.

«Семь раз примерь, один — отрежь», — говорит пословица. Исследование операций как раз и есть своеобразное математическое «приммирование» будущих решений, позволяющее экономить время, силы и материальные средства, избегать серьезных ошибок, на которых уже нельзя «учиться» (слишком дорого это обходится).

Чем сложнее, дороже, масштабнее планируемое мероприятие, тем менее допустимы в нем «волевые» решения и тем важнее становятся научные методы, позволяющие заранее оценить последствия каждого.

Как уже говорилось, это — сравнительно молодая наука (хотя понятие «молодости» в научном мире относительно; многие, едва возникшие



*Кафедра
ПМ и ТП*

Начало

Содержание



Страница 10 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

науки «истлевают на корню», так и не найдя приложений). Впервые название «исследование операций» появилось в годы второй мировой войны, когда в вооруженных силах некоторых стран (США, Англии) были сформированы специальные группы научных работников (физиков, математиков, инженеров), в задачу которых входила подготовка проектов решений для командующих боевыми действиями. Эти решения касались главным образом боевого применения оружия и распределения сил и средств по различным объектам. Подобного рода задачами (правда, под иными названиями) занимались и ранее, в частности, в нашей стране. В дальнейшем исследование операций расширило область своих применений на самые разные области практики: промышленность, сельское хозяйство, строительство, торговля, бытовое обслуживание, транспорт, связь, здравоохранение, охрана природы и т. д. Сегодня трудно назвать такую область практики, где бы не применялись, в том или другом виде, математические модели и методы исследования операций.

1.1 Задачи исследования операций

Чтобы познакомиться со спецификой этой науки, рассмотрим ряд типичных для нее задач. Эти задачи, намеренно взятые из самых разных областей практики, несмотря на некоторую упрощенность постановки, дают все же понятие о том, каков предмет и каковы цели исследования операций.



*Кафедра
ПМ и ТП*

Начало

Содержание



Страница 11 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

1. План снабжения предприятий. Имеется ряд предприятий, потребляющих известные виды сырья, и есть ряд сырьевых баз, которые могут поставлять это сырье предприятиям. Базы связаны с предприятиями какими-то путями сообщения (железнодорожными, водными, автомобильными, воздушными) со своими тарифами. Требуется разработать такой план снабжения предприятий сырьем (с какой базы, в каком количестве и какое сырье доставляется), чтобы потребности в сырье были обеспечены при минимальных расходах на перевозки.

2. Постройка участка магистрали. Сооружается участок железнодорожной магистрали. В нашем распоряжении — определенное количество средств: людей, строительных машин, ремонтных мастерских, грузовых автомобилей и т. д. Требуется спланировать строительство (т. е. назначить очередность работ, распределить машины и людей по участкам пути, обеспечить ремонтные работы) так, чтобы оно было завершено в минимально возможный срок.

3. Продажа сезонных товаров. Для реализации определенной массы сезонных товаров создается **сеть** временных торговых точек. Требуется выбрать разумным образом: число точек, их размещение, товарные запасы и количество персонала на каждой из них так, чтобы обеспечить максимальную экономическую эффективность распродажи.

4. Снегозащита дорог. В условиях Крайнего Севера метели, заносы снегом дороги, представляют серьезную помеху движению. Любой перерыв движения приводит к экономическим потерям. Существует



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 12 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

ряд возможных способов снегозащиты (профиль дороги, защитные щиты и т. д.), каждый из которых требует известных затрат на сооружение и эксплуатацию. Известны господствующие направления ветров, есть данные о частоте и интенсивности снегопадов. Требуется разработать наиболее эффективные экономически средства снегозащиты (какую из дорог, как и чем, защищать?) с учетом потерь, связанных с заносами.

5. Противолодочный рейд. Известно, что в некотором районе морского театра военных действий находится подводная лодка противника. Группа самолетов противолодочной обороны получила задание: разыскать, обнаружить и уничтожить лодку. Требуется рационально организовать **операцию** (рейд): выбрать маршруты самолетов, высоту полета, способ атаки так, чтобы с максимальной уверенностью обеспечить выполнение боевого задания.

6. Выборочный контроль продукции. Завод выпускает определенного вида изделия. Для обеспечения их высокого качества организуется система выборочного контроля. Требуется разумно организовать контроль (т. е. выбрать размер контрольной **партии**, набор тестов, правила браковки и т. д.) так, чтобы обеспечить заданный уровень качества при минимальных расходах на контроль.

7. Медицинское обследование. Известно, что в каком-то районе обнаружены случаи опасного заболевания. С целью выявления заболевших (или носителей инфекции) организуется медицинское обследование жителей района. На это выделены материальные средства, оборудова-



Кафедра
ММ и ТП

Начало

Содержание



Страница 13 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

ние, медицинский персонал. Требуется разработать такой план обследования (число медпунктов, их размещение, последовательность осмотров специалистами, виды анализов и т. д.), который позволит выявить, по возможности, максимальный процент заболевших и носителей инфекции.

8. Библиотечное обслуживание. Крупная библиотека обслуживает запросы, поступающие от абонентов. В фондах библиотеки имеются книги, пользующиеся повышенным спросом, книги, на которые требования поступают реже и, наконец, книги, почти никогда не запрашиваемые. Имеется ряд возможностей распределения книг по стеллажам и хранилищам, а также по диспетчеризации запросов с обращениями в другие библиотеки. Нужно разработать такую систему библиотечного обслуживания, при которой запросы абонентов удовлетворяются в максимальной мере.

Знакомясь с приведенными выше примерами, можно заметить, что не для всех из них на практике применяются математические методы обоснования решений; в некоторых случаях решения принимаются по старинке, на глаз. Однако с течением времени доля задач, где для выбора решения применяются математические методы, постоянно растет



*Кафедра
ПМ и ТП*

Начало

Содержание



Страница 14 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

1.2 Основные определения исследования операций

Операцией называется всякое мероприятие (система действий), объединенное единым замыслом и направленное к достижению какой-то цели (все мероприятия, рассмотренные в пунктах 1 — 8, являются «операциями»).

Операция есть всегда управляемое мероприятие, т. е. от нас зависит, каким способом выбрать некоторые параметры, характеризующие её организацию. «Организация» здесь понимается в широком смысле слова, включая набор технических средств, применяемых в операции.

Всякий определенный выбор зависящих от нас параметров называется решением. Решения могут быть удачными и неудачными, разумными и неразумными. Оптимальными называются решения, по тем или другим признакам предпочтительные перед другими. Цель исследования операций — предварительное количественное обоснование оптимальных решений.

Те параметры, совокупность которых образует решение, называются элементами решения. В качестве элементов решения могут фигурировать различные числа, векторы, функции, физические признаки и т. д. Например, если составляется план перевозок однородных грузов из пунктов отправления $A_1, A_2, \dots, A_m$ в пункты назначения $B_1, B_2, \dots, B_n$, то элементами решения будут числа x_{ij} , показывающие, какое количество груза будет отправлено из 1-го пункта отправления A_i в j -й пункт



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 15 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

назначения B_j . Совокупность чисел $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}, x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mn}$ образует решение.

В простейших задачах **исследования операций** количество элементов решения может быть сравнительно невелико. Но в большинстве задач, имеющих практическое значение, число элементов решения очень велико, в чем читатель может убедиться, попытавшись самостоятельно выделить и «назвать по имени» элементы решения в примерах 1 — 8 предыдущего параграфа. Для упрощения мы будем всю совокупность элементов решения обозначать одной буквой x и говорить «решение x ».

Кроме элементов решения, которыми мы, в каких-то пределах, можем распоряжаться, в любой задаче исследования операций имеются еще и заданные, «дисциплинирующие» условия, которые фиксированы с самого начала и нарушены быть не могут (например, грузоподъемность машины; размер планового задания;

весовые характеристики оборудования и т. п.). В частности, к таким условиям относятся средства (материальные, технические, людские), которыми мы вправе распоряжаться, и иные ограничения, налагаемые на решение. В своей совокупности они формируют так называемое «множество возможных решений».

Обозначим это множество опять-таки одной буквой X , а тот факт, что решение x принадлежит этому множеству, будем записывать в виде формулы: $x \in X$ (читается: элемент x входит в множество X).

Речь идет о том, чтобы в множестве возможных решений X выде-



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 16 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

лить те решения x (иногда — одно, а чаще — целую область решений), которые с той или другой точки зрения эффективнее (удачнее, предпочтительнее) других. Чтобы сравнивать между собой по эффективности разные решения, нужно иметь какой-то количественный критерий, так называемый показатель эффективности (его часто называют «целевой функцией»). Этот показатель выбирается так, чтобы он отражал целевую направленность операции. «Лучшим» будет считаться то решение, которое в максимальной степени способствует достижению поставленной цели. Чтобы выбрать, «назвать по имени» показатель эффективности W , нужно, прежде всего, спросить себя: чего мы хотим, к чему стремимся, предпринимая операцию? Выбирая решение, мы, естественно, предпочтем такое, которое обращает показатель эффективности W в максимум (или же в минимум). Например, доход от операции хотелось бы обратить в максимум; если же показателем эффективности являются затраты, их желательно обратить в минимум. Если показатель эффективности желательно максимизировать, мы это будем записывать в виде $W \Rightarrow \max$, а если минимизировать — $W \Rightarrow \min$.

Очень часто выполнение операции сопровождается действием случайных факторов («капризы» погоды, колебания спроса и предложения, отказы технических устройств и т. д.). В таких случаях обычно в качестве показателя эффективности берется не сама величина, которую хотелось бы максимизировать (минимизировать), а ее среднее значение (математическое ожидание).



Кафедра ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 17 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

В некоторых случаях бывает, что операция, сопровождаемая случайными факторами, преследует какую-то вполне определенную цель A , которая может быть только достигнута полностью или совсем не достигнута (схема «да—нет»), и никакие промежуточные результаты нас не интересуют. Тогда в качестве показателя эффективности выбирается вероятность достижения этой цели $P(A)$. Например, если ведется стрельба по какому-то объекту с неизменным условием уничтожить его, то показателем эффективности будет вероятность уничтожения объекта. Неправильный выбор показателя эффективности очень опасен. Операции, организованные под углом зрения неудачно выбранного критерия, могут привести к неоправданным затратам и потерям (вспомним хотя бы пресловутый «вал» в качестве основного критерия оценки хозяйственной деятельности предприятий).

1. План снабжения предприятий. Задача операции — обеспечить снабжение сырьем при минимальных расходах на перевозки. Показатель эффективности R — суммарные расходы на перевозки сырья за единицу времени, например, месяц ($R \Rightarrow \min$).

2. Постройка участка магистрали. Требуется так спланировать строительство, чтобы закончить его как можно скорее. Естественным показателем эффективности было бы время завершения стройки, если бы оно не было связано со случайными факторами (отказы техники, задержки в выполнении отдельных работ). Поэтому в качестве показателя эффективности можно выбрать среднее ожидаемое время T окончания



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 18 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

стройки ($R \implies \min$).

3. Продажа сезонных товаров. В качестве показателя эффективности можно взять среднюю ожидаемую прибыль Π от реализации товаров за сезон ($\Pi \implies \max$).

4. Снегозащита дорог. Речь идет о наиболее выгодном экономически плане снегозащиты, поэтому в качестве показателя эффективности можно выбрать средние за единицу времени (например, за год) расходы R на содержание и эксплуатацию дорог, включая расходы, связанные как с сооружением защитных устройств, так и с расчисткой дорог и задержками транспорта ($R \implies \min$).

5. Противолодочный рейд. Так как рейд имеет вполне определенную цель A — уничтожение лодки, то в качестве показателя эффективности следует выбрать вероятность $P(A)$ того, что лодка будет уничтожена.

6. Выборочный контроль продукции. Естественный показатель эффективности, подсказанный формулировкой задачи, это средние ожидаемые расходы R на контроль за единицу времени, при условии, что система контроля обеспечивает заданный уровень качества, например, средний процент брака не выше заданного ($R \implies \min$).

7. Медицинское обследование. В качестве показателя эффективности можно выбрать средний процент (долю) Q больных и носителей инфекции, которых удалось выявить ($Q \implies \max$).

8. Библиотечное обслуживание. В формулировке задачи созна-



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 19 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

тельно допущена некоторая нечеткость: неясно, что значит «наилучшее обслуживание абонентов» или «удовлетворение их запросов в максимальной мере». Если о качестве обслуживания судить по времени, которое запросивший книгу абонент ждет ее получения, то в качестве показателя эффективности можно взять среднее время T ожидания книги читателем, подавшим на нее заявку ($T \Rightarrow \min$). Можно подойти к вопросу и с несколько иных позиций, выбрав в качестве показателя эффективности среднее число M книг, выданных за единицу времени ($M \Rightarrow \max$).

Рассмотренные примеры специально подобраны настолько простыми, чтобы выбор показателя эффективности был сравнительно нетруден и прямо диктовался словесной формулировкой задачи, ее (почти всегда) однозначной целевой направленностью. Однако на практике это далеко не всегда бывает так. В этом читатель может убедиться, попытавшись, например, выбрать показатель эффективности работы городского транспорта. Что взять в качестве такого показателя? Среднюю скорость передвижения пассажиров по городу? Или среднее число перевезенных пассажиров? Или среднее количество километров, которое придется пройти пешком человеку, которого транспорт не может доставить к нужному месту? Тут есть над чем поразмыслить!

К сожалению, в большинстве задач, имеющих практическое значение, выбор показателя эффективности не прост и решается неоднозначно. Для сколько-нибудь сложной задачи типично положение, когда эф-



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 20 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

фективность операции не может быть исчерпывающим образом охарактеризована одним единственным числом — на помощь ему приходится привлекать другие.



*Кафедра
ПМ и ТП*

Начало

Содержание



Страница 21 из 293

Назад

На весь экран

Закрыть

ЛЕКЦИЯ 2

Построение математической модели задачи. Прямые и обратные задачи

Для применения количественных методов исследования в любой области всегда требуется какая-то математическая модель. При построении модели реальное явление (в нашем случае — операция) неизбежно упрощается, схематизируется, и эта схема («макет» явления) описывается с помощью того или другого математического аппарата. Чем удачнее будет подобрана математическая модель, чем лучше она будет отражать характерные черты явления, тем успешнее будет исследование и полезнее — вытекающие из него рекомендации.

Общих способов построения математических моделей не существует. В каждом конкретном случае модель выбирается исходя из вида операции, ее целевой направленности, с учетом задачи исследования (какие параметры требуется определить и влияние каких факторов отразить). Необходимо также в каждом конкретном случае соразмерять точность и подробность модели: а) с той точностью, с которой нам нужно знать решение, и б) с той информацией, которой мы располагаем или можем приобрести. Если исходные данные, нужные для расчетов, известны неточно, то, очевидно, нет смысла входить в тонкости, строить очень подробную модель и тратить время (свое и машинное) на тонкую и точную оптимизацию решения. К сожалению, этим принципом часто



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 22 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

пренебрегают и выбирают для описания явлений слишком подробные модели.

Математическая модель должна отражать важнейшие черты явления, все существенные факторы, от которых в основном зависит успех операции. Вместе с тем, модель должна быть по возможности простой, не «засоренной» массой мелких, второстепенных факторов: их учет усложняет математический анализ и делает труднообозримыми результаты исследования. Две опасности всегда подстерегают составителя модели: первая — увязнуть в подробностях («из-за деревьев не увидеть леса») и вторая — слишком огрубить явление («выплеснуть вместе с водой и ребенка»). Искусство строить математические модели есть именно искусство, и опыт в нем приобретается постепенно.

Поскольку математическая модель не вытекает с непреложностью из описания задачи, всегда полезно не верить слепо ни одной модели, а сличать результаты, полученные по разным моделям, устраивать как бы «спор моделей». При этом одну и ту же задачу решают не один раз, а несколько, пользуясь разной системой допущений, разным аппаратом, разными моделями. Если научные выводы от модели к модели меняются мало — это серьезный аргумент в пользу объективности исследования. Если они существенно расходятся, надо пересмотреть концепции, положенные в основу различных моделей, посмотреть, какая из них более адекватна действительности, в случае надобности — поставить контрольный эксперимент. Характерным для исследования операций явля-



*Кафедра
ПМ и ТП*

Начало

Содержание



Страница 23 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

ется также повторное обращение к модели (после того, как первый тур расчетов уже проведен) для внесения в модель коррективов.

Создание математической модели — самая важная и ответственная часть исследования, требующая глубокого знания не столько математики, сколько существа моделируемых явлений. Как правило, «чистые» математики (без помощи специалистов в той области, к которой относится задача) с построением модели справляются плохо. В центре внимания у них оказывается математический аппарат с его тонкостями, а не реальная практическая задача.

Опыт показывает, что самые удачные модели создаются специалистами в данной области практики, получившими, в дополнение к основной, глубокую математическую подготовку, или же коллективами, объединяющими практиков-специалистов и математиков. Большую пользу приносят консультации, даваемые математиком, хорошо знающим исследование операций, практикам — инженерам, биологам, медикам и др., встречающимся в своей работе с необходимостью научного обоснования решений. От таких консультаций выигрывают не только практики, но и сам математик, знакомящийся с реальными задачами из самых разных областей. Для решения таких задач ему нередко приходится пополнять свое образование, а также развивать, обобщать и модифицировать известные ему методы.

При построении математической модели может быть (в зависимости от вида операции, задач исследования и точности исходных данных) ис-



*Кафедра
ПМ и ТП*

Начало

Содержание



Страница 24 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

пользован математический аппарат различной сложности. В самых простых случаях явление описывается простыми, алгебраическими уравнениями. В более сложных, когда требуется рассмотреть явление в динамике, применяется аппарат дифференциальных уравнений (обыкновенных или с частными производными). В наиболее сложных случаях, когда развитие операции, и ее исход зависят от большого числа сложно переплетающихся между собой случайных факторов, аналитические методы вообще отказываются служить, и применяется метод статистического моделирования (Монте-Карло). В первом, грубом приближении идею этого метода можно описать так: процесс развития операции, со всеми сопровождающими его случайностями, как бы «копируется», воспроизводится на машине (ЭВМ).

В исследовании операций широко применяются как аналитические, так и статистические модели. Каждый из этих типов имеет свои преимущества и недостатки. Аналитические модели более грубы, учитывают меньшее число факторов, всегда требуют каких-то допущений и упрощений. Зато результаты расчета по ним легче обозримы, отчетливее отражают присущие явлению основные закономерности. А, главное, аналитические модели больше приспособлены для поиска оптимальных решений.

Статистические модели, по сравнению с аналитическими, более точны и подробны, не требуют столь грубых допущений, позволяют учесть большое (в теории — неограниченно большое) число факторов. Но и у



*Кафедра
ПМ и ТП*

Начало

Содержание



Страница 25 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

них — свои недостатки: громоздкость, плохая обозримость, большой расход машинного времени, а главное, крайняя трудность поиска оптимальных решений, которые приходится искать «на ощупь», путем догадок и проб.

В заключение скажем несколько слов о так называемом «имитационном» моделировании. Оно применяется к процессам, в ход которых может время от времени вмешиваться человеческая воля. Человек (или группа людей), руководящий операцией, может, в зависимости от сложившейся обстановки, принимать те или другие решения, подобно тому, как шахматист, глядя на доску, выбирает свой очередной ход. Затем приводится в действие математическая модель, которая показывает, какое ожидается изменение обстановки в ответ на это решение и к каким последствиям оно приведет спустя некоторое время. Следующее «текущее решение» принимается уже с учетом реальной новой обстановки и т. д. В результате многократного повторения такой процедуры руководитель как бы «набирает опыт», учится на своих и чужих ошибках и постепенно выучивается принимать правильные решения — если не оптимальные, то почти оптимальные. Такие процедуры, известные под названием «деловых игр», стали за последнее время очень популярными и, несомненно, полезны в деле подготовки управляющих кадров.

Задачи исследования операций делятся на две категории: а) **прямые** и б) **обратные**. Прямые задачи отвечают на вопрос: что будет, если в заданных условиях мы примем какое-то решение $x \in X$? В частности,



*Кафедра
ПМ и ТП*

Начало

Содержание



Страница 26 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

чему будет равен, при данном решении x , выбранный показатель эффективности W (или же ряд таких показателей)?

Для решения такой задачи строится математическая модель, позволяющая выразить один или несколько показателей эффективности через заданные условия и элементы решения.

Обратные задачи отвечают на вопрос: как выбрать решение x для того, чтобы показатель эффективности W обратился в максимум?

Естественно, прямые задачи проще обратных. Очевидно также, что для решения обратной задачи, прежде всего надо уметь решать прямую. Для некоторых типов операций прямая задача решается настолько просто, что ею специально не занимаются. Для других типов **операций** построение математических моделей и вычисление показателя (показателей) эффективности само по себе далеко не тривиально (так, например, обстоит дело с прямыми задачами теории массового обслуживания).

Остановимся несколько подробнее на обратных задачах. Если число возможных вариантов решения, образующих множество X , невелико, то можно попросту вычислить величину W для каждого из них, сравнить между собой полученные значения и непосредственно указать один или несколько оптимальных вариантов, для которых W достигает максимума. Такой способ нахождения оптимального решения называется «простым перебором». Однако, когда число возможных вариантов решения, образующих множество X , велико, поиск среди них оптимального «вслепую», простым перебором, затруднителен, а зачастую практически



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 27 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

невозможен. В этих случаях применяются методы «направленного перебора», обладающие той общей особенностью, что оптимальное решение находится рядом последовательных «попыток» или «приближений», из которых каждое последующее приближает нас к искомому оптимальному.

Сейчас мы ограничимся постановкой задачи оптимизации решения (обратной задачи исследования операций) в самой общей форме.

Пусть имеется некоторая операция O , на успех которой мы можем в какой-то мере влиять, выбирая тем или другим способом решение x (напомним, что x — не число, а целая группа параметров). Пусть эффективность операции характеризуется одним показателем $W \Rightarrow \max$.

Возьмем самый простой, так называемый «детерминированный» случай, когда все условия операции полностью известны заранее, т. е. не содержат неопределенности. Тогда все факторы, от которых зависит успех операции, делятся на две группы:

- 1) заданные, заранее известные факторы (условия выполнения операции), которые мы для краткости обозначим одной буквой α ;
- 2) зависящие от нас элементы решения, образующие в своей совокупности решение x .

Заметим, что первая группа факторов содержит, в частности, и ограничения, налагаемые на решение, т. е. определяет область возможных решений X .

Показатель эффективности W зависит от обеих групп факторов. Это



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 28 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

мы запишем в виде формулы:

$$W = W(\alpha, x) \quad (2.1)$$

При рассмотрении формулы (2.1) не надо забывать, что как x , так и α в общем случае — не числа, а совокупности чисел (векторы), функции и т. д. В числе заданных условий к обычно присутствуют ограничения, налагаемые на элементы решения, имеющие вид равенств или неравенств. Будем считать, что вид зависимости (2.1) нам известен, т. е. **прямая задача** решена. Тогда **обратная** задача формулируется следующим образом. *При заданном комплексе условий α найти такое решение $x = x^*$, которое обращает показатель эффективности W в максимум.*

Этот максимум мы обозначим:

$$W^* = \max_{x \in X} W(\alpha, x) \quad (2.2)$$

Формула (2.2) читается так: W^* есть максимальное значение $W^* = \max_{x \in X} W(\alpha, x)$, взятое по всем решениям, входящим в множество возможных решений X .

К формулам такого типа надо привыкать. Они понадобятся в дальнейшем.

Итак, перед нами — типичная Математическая Задача нахождения максимума функции или функционала.



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 29 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

Эта задача принадлежит к классу так называемых «вариационных задач», хорошо разработанных в математике. Самые простые из таких задач («задачи на максимум и минимум») знакомы каждому инженеру. Чтобы найти максимум или минимум (короче, «экстремум») функции многих аргументов, надо продифференцировать ее по всем аргументам (в данном случае — элементам решения), приравнять производные нулю и решить полученную систему уравнений. Казалось бы, чего проще? А вот этот классический метод как раз в исследовании операций имеет весьма ограниченное применение. Во-первых, когда аргументов много, задача решения системы уравнений зачастую оказывается не проще, а сложнее, чем непосредственный поиск экстремума. Во-вторых, когда на элементы решения наложены ограничения, экстремум часто достигается не в точке, где производные равны нулю (такой точки может вообще не быть), а где-то на границе области X . Возникают все специфические трудности так называемой «многомерной вариационной задачи при ограничениях», иной раз непосильной по своей сложности даже для современных ЭВМ. Кроме того, в некоторых задачах функция W вообще не имеет производных (например, задана только для целочисленных значений аргументов). Все это делает задачу поиска экстремума далеко не такой простой, как она кажется с первого взгляда.

Метод поиска экстремума и связанного с ним оптимального решения x^* должен всегда выбираться исходя из особенностей функции W и вида ограничений, накладываемых на решение. Например, если функция



*Кафедра
ПМ и ТП*

Начало

Содержание



Страница 30 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

W линейно зависит от элементов решения $x_1, x_2, \dots$, а ограничения, налагаемые на $x_1, x_2, \dots$, имеют вид линейных равенств или неравенств, возникает ставшая классической задача **линейного программирования**, которая решается сравнительно простыми, а главное, стандартными методами. Если функция W выпукла, применяются специальные методы выпуклого программирования.

Таким образом, задача нахождения оптимального решения в простейшем, детерминированном случае есть чисто математическая задача, принадлежащая к классу вариационных (при отсутствии или наличии ограничений), которая может представить вычислительные, но не принципиальные трудности. Не так обстоит дело в случае, когда задача содержит элемент неопределенности.



*Кафедра
ПМ и ТП*

Начало

Содержание



Страница 31 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

ЛЕКЦИЯ 3

Выбор решения в условиях неопределенности

В предыдущем параграфе мы рассмотрели обратную задачу **исследования операций** в детерминированном случае, когда показатель эффективности W зависит только от двух групп факторов: заданных, заранее известных α и элементов решения x . Реальные задачи исследования операций чаще всего содержат помимо этих двух групп еще одну — неизвестные факторы, которые в совокупности мы обозначим одной буквой ξ . Итак, показатель эффективности W зависит от всех трех групп факторов:

$$W = W(\alpha, x, \xi) \quad (3.1)$$

Так как величина W зависит от неизвестных факторов ξ то даже при заданных α и x она уже не может быть вычислена, остается неопределенной. Задача поиска **оптимального решения** тоже теряет определенность. Ведь не можем же мы максимизировать неизвестную величину W ! И все-таки нас не покидает желание сделать эту неизвестную величину по возможности максимальной. Ведь добиваются же успеха люди в условиях, когда не вся обстановка ясна? Иногда добиваются. Переводя сказанное на математический язык, поставим перед собой следующую задачу.



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 32 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

При заданных условиях α , с учетом неизвестных факторов ξ , найти такое решение $x \in X$, которое, по возможности, обеспечивает максимальное значение показателя эффективности W .

Это уже другая, не чисто математическая задача (недаром в ее формулировке сделана оговорка «по возможности»). Наличие неопределенных факторов ξ переводит задачу в новое качество: она превращается в задачу о выборе решения в условиях неопределенности.

Задача принятия решения в условиях неопределенности на каждом шагу встречается нам в жизни. Например, мы собрались путешествовать, и укладываем в чемодан вещи. Размеры и вес чемодана, а также имеющийся у нас набор вещей заданы (условия α), погода в районе путешествия заранее неизвестна (условия ξ). Какие предметы одежды (x) надо взять с собой? Эта задача, внешне сходная с задачами исследования операций, конечно, решается нами без всякой математики (незачем «стрелять из пушек по воробьям»), но все же не без опоры на некоторые статистические данные, скажем, о вероятной погоде в районе путешествия, а также собственной склонности к простудам; нечто вроде оптимизации решения, сознательно или бессознательно, мы производим. Любопытно, что разные люди при этом, по-видимому, пользуются разными показателями эффективности. Если молодой человек, скорее всего, стремится максимизировать сумму приятных впечатлений (оставим в стороне вопрос о том, как ее оценить количественно), то пожилой путешественник, пожалуй, предпочтет минимизировать вероятность забо-



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 33 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

левания...

Теперь возьмем более серьезную задачу. Планируется ассортимент товаров для распродажи на ярмарке. Желательно было бы максимизировать прибыль. Однако заранее неизвестно ни количество покупателей, которые придут на ярмарку, ни потребности каждого из них. Как быть? Неопределенность налицо, а принимать решение нужно!

Другой пример: проектируется система сооружений, оберегающих район от паводков. Ни моменты их наступления, ни размеры заранее неизвестны. А проектировать все-таки нужно, и никакая неопределенность не избавит нас от этой обязанности...

Наконец, еще более сложная задача: разрабатывается план развития вооружения на несколько лет вперед. Неизвестны ни конкретный противник, ни вооружение, которым он будет располагать. А решение принимать надо!

У читателя может возникнуть вопрос: неужели можно классифицировать неопределенности по «родам» и «сортам»? Оказывается, можно.

Прежде всего, рассмотрим наиболее благоприятный для исследования, так сказать, «доброкачественный» вид неопределенности. Это случай, когда неизвестные факторы ξ представляют собой обычные объекты изучения теории вероятностей — случайные величины (или случайные функции), статистические характеристики которых нам известны или в принципе могут быть получены к нужному сроку. Такие задачи исследования операций мы будем называть стохастическими задачами,



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 34 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

а присущую им неопределенность — стохастической неопределенностью.

Приведем пример стохастической задачи исследования операций. Пусть организуется или реорганизуется работа столовой с целью повысить ее пропускную способность. Нам в точности неизвестно, какое количество посетителей придет в нее за рабочий день, когда именно они будут появляться, какие блюда заказывать и сколько времени будет продолжаться обслуживание каждого из них. Однако характеристики этих случайных величин, если сейчас еще не находятся в нашем распоряжении, могут быть получены статистическим путем.

Первое, что приходит в голову: а нельзя ли заменить случайные факторы ξ их средними значениями (математическими ожиданиями)? Тогда задача становится детерминированной и может быть решена обычными методами.

Что и говорить — прием соблазнительный и в некоторых случаях даже оправданный. Ведь на практике, решая большинство задач физики, механики, техники, мы сплошь и рядом им пользуемся, пренебрегая случайностью ряда параметров (теплоемкость, индуктивность, коэффициент трения) и заменяя их средними значениями. Весь вопрос в том, насколько случайны эти параметры: если они мало отклоняются от своих математических ожиданий, так поступать можно и нужно. Так же обстоит дело и в исследовании операций: есть задачи, в которых случайностью можно пренебречь. Например, если мы составляем план снабжения группы предприятий сырьем (см. пример 1 § 1), можно в пер-



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 35 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

вом приближении пренебречь, скажем, случайностью фактической производительности источников сырья (если, разумеется, его производство хорошо налажено). Тот же прием — пренебречь случайностью и заменить все входящие в задачу случайные величины их математическими ожиданиями — будет уже опрометчивым, если влияние случайности па интересующий нас исход **операции** существенно. Возьмем самый грубый пример: пусть мы ведем обстрел какой-то цели, стремясь, во что бы то пи стало попасть в нее. Производится несколько выстрелов. Давайте, заменим все случайные координаты точек попадания их математическим ожиданием — центром цели. Получится, что любой выстрел с гарантией попадет в цель, что заведомо неверно. Другой, менее очевидный, пример: планируется работа ремонтной мастерской, обслуживающей автотобазу. Пренебрежем случайностью момента появления неисправности (т. е. заменим случайное время безотказной работы машины его математическим ожиданием) и случайностью времени выполнения ремонта. И что же окажется? Мастерская, работа которой спланирована без учета случайности, попросту не будет справляться со своей задачей (в этом мы убедимся в главе 6). Встречаются (и очень часто) операции, в которые случайность входит по существу, и свести задачу к детерминированной не удастся.

Итак, рассмотрим такую операцию O , где факторы ξ «существенно случайны» и заметно влияют на показатель эффективности W , который тоже «существенно случаен».



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 36 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

Возникает мысль: надо взять в качестве показателя эффективности среднее значение (математическое ожидание) этой случайной величины $W = M[W]$ и выбрать такое решение x , при котором этот усредненный по условиям показатель обращается в максимум:

$$\bar{W} = M[W(\alpha, x, \xi)] \quad (3.2)$$

А как же с элементом неопределенности? Конечно, в какой-то мере он сохраняется. Эффективность каждой отдельной операции, проводимой при конкретных значениях случайных факторов ξ , может сильно отличаться от ожидаемой как в большую, так, к сожалению, и в меньшую сторону. Нас может утешить то, что, оптимизируя операцию «в среднем», мы, в конечном счете, после многих ее повторений выиграем больше, чем, если бы совсем не пользовались расчетом.

Итак, мы вкратце рассмотрели случай «доброкачественной» (стохастической) неопределенности и в общих чертах осветили вопрос об оптимизации решения в таких задачах. Но это, как говорится, цветочки, ягодки будут впереди! Стохастическая неопределенность — это почти определенность, если только известны вероятностные характеристики входящих в задачу случайных факторов. Гораздо хуже обстоит дело, когда неизвестные факторы ξ не могут быть изучены и описаны статистическими методами. Это бывает в двух случаях: либо а) распределение вероятностей для параметров 1 в принципе существует, но к моменту принятия решения не может быть получено, либо б) распределение ве-



*Кафедра
ПМ и ТП*

Начало

Содержание



Страница 37 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

роятностей для параметров ξ вообще не существует.

Пример ситуации типа а): проектируется информационно - вычислительная система (ИВС), предназначенная для обслуживания каких-то случайных потоков требований (запросов). Вероятностные характеристики этих потоков требований в принципе могли бы быть получены из статистики, если бы данная ИВС (или аналогичная ей) уже существовала и функционировала достаточно долгое время. Но к моменту создания проекта такой информации нет, а решение принимать надо! Как быть?

Разумеется, можно заранее (из умозрительных соображений) задать-ся какими-то характеристиками случайных факторов ξ оптимизировать решение x на этой основе (просто «в среднем» или при стохастических ограничениях) и остановиться на нем. Это будет, безусловно, лучше, чем выбрать решение наобум, но не намного лучше. Гораздо разумнее будет применить следующий прием: оставить некоторые элементы решения x свободными, изменяемыми. Затем выбрать для начала какой-то вариант решения, зная заведомо, что он не самый лучший, и пустить систему в ход, а потом, по мере накопления опыта, целенаправленно изменять свободные параметры решения, добиваясь того, чтобы эффективность не уменьшалась, а увеличивалась. Такие совершенствующиеся в процессе применения алгоритмы управления называются адаптивными. Преимущество адаптивных алгоритмов в том, что они не только избавляют нас от предварительного сбора статистики, но и перестраиваются в ответ на изменение обстановки. По мере накопления опыта такой алгоритм



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 38 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

постепенно улучшается, подобно тому, как живой человек «учится на ошибках».

Теперь обратимся к самому трудному и неприятному случаю **а)**, когда у неопределенных факторов ξ вообще не существует вероятностных характеристик; другими словами, когда их нельзя считать «случайными» в обычном смысле слова.

Поясняем: под термином «случайное явление» в теории вероятностей принято понимать явление, относящееся к классу повторяемых и, главное, обладающее свойством статистической устойчивости. При повторении однородных опытов, исход которых случаен, их средние характеристики проявляют тенденцию к устойчивости, стабилизируются. Частоты событий приближаются к их вероятностям, средние арифметические — к математическим ожиданиям. Если много раз бросать монету, частота появления герба постепенно стабилизируется, перестает быть случайной; если много раз взвешивать на аналитических весах одно и то же тело, средний результат перестает колебаться, выравнивается. Это пример доброкачественной, стохастической неопределенности.

Однако бывает неопределенность и нестохастического вида, которую мы условно назовем «дурной неопределенностью». Несмотря на то, что факторы t заранее неизвестны, не имеет смысла говорить об их «законах распределения» или других вероятностных характеристиках.

Пример: допустим, планируется некая торгово-промышленная операция, успех которой зависит от того, юбки какой длины ξ будут носить



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 39 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

женщины через два года. Распределение вероятностей для величины ξ в принципе не может быть получено ни из каких статистических данных. Даже если рассмотреть великое множество опытов (годов), начиная с тех отдаленных времен, когда женщины впервые надели юбки, и в каждом из них зарегистрировать величину ξ , это вряд ли поможет нам в нашем прогнозе. Вероятностное распределение величины ξ попросту не существует, так как не существует массива однородных опытов, где она обладала бы должной устойчивостью. Налицо случай «дурной неопределенности».

Как же все-таки быть в таких случаях? Отказаться вообще от применения математических методов и выбрать решение «волевым» образом? Нет, этого делать не стоит. Некоторую пользу предварительные расчеты могут принести даже в таких скверных условиях.

Давайте поразмышляем на эту тему. Пусть выбирается решение x в какой-то операции O , условия которой содержат «дурную неопределенность» — параметры ξ , относительно которых никаких сведений мы не имеем, а можем делать лишь предположения. Попробуем все же решить задачу.

Первое, что приходит в голову: а ну-ка, зададимся какими-то, более или менее правдоподобными, значениями параметров ξ . Тогда задача перейдет в категорию детерминированных и может быть решена обычными методами (детерминированный случай, со всеми его трудностями, представляется нам теперь чуть ли не «курортом»!).



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 40 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

Нет, радоваться рано. Допустим, что, затратив много усилий и времени (своего и машинного), мы это сделали. Ну и что? Будет ли найденное решение хорошим для других условий ξ . Как правило, нет. Поэтому ценность его — сугубо ограниченная. В данном случае разумно будет выбрать не решение x , оптимальное для каких-то условий ξ , а некое компромиссное решение, которое, не будучи оптимальным, может быть, ни для каких условий, будет все же приемлемым в целом их диапазоне.

В настоящее время полноценной научной теории компромисса не существует, хотя некоторые попытки в этом направлении в теории игр и статистических решений делаются. Обычно окончательный выбор компромиссного решения осуществляется человеком. Опираясь на предварительные расчеты, в ходе которых решается большое число **прямых задач** исследования операций для разных условий ξ и разных вариантов решения x , он может оценить сильные и слабые стороны каждого варианта и на этой основе сделать выбор. Для этого необязательно (хотя иногда и любопытно) знать точный «условный» оптимум для каждой совокупности условий ξ . Математические вариационные методы в данном случае отступают на задний план.

Подчеркнем еще одну полезную функцию предварительных математических расчетов в задачах с «дурной неопределенностью»: они помогают заранее отбросить те решения $x \in X$, которые при любых условиях ξ уступают другим, т. е. оказываются неконкурентоспособными. В ряде случаев это помогает существенно сузить множество X , иногда — свести



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 41 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

его к небольшому числу вариантов, которые легко могут быть просмотрены и оценены человеком в поисках удачного компромисса.

При рассмотрении задач исследования операций с «дурной неопределенностью» всегда полезно сталкивать в споре разные подходы, разные точки зрения. Среди последних надо отметить одну, часто применяемую в силу своей математической определенности, которую можно назвать «позицией крайнего пессимизма». Она сводится к тому, что, принимая решение в условиях «дурной неопределенности», надо всегда рассчитывать на худшее и принимать то решение, которое дает максимальный эффект в наихудших условиях. Если в этих условиях мы получаем выигрыш $W = \bar{W}$, то можно гарантировать, что в любых других он будет не меньше («принцип гарантированного результата»). Этот подход привлекателен тем, что дает четкую постановку задачи оптимизации и возможность ее решения корректными математическими методами. Но он оправдан далеко не всегда. Область его применения — по преимуществу так называемые «конфликтные ситуации», в которых условия зависят от сознательно действующего лица («разумного противника»), отвечающего на любое наше решение наихудшим для нас образом. В более нейтральных ситуациях принцип «гарантированного выигрыша» не является единственно возможным, но может быть рассмотрен наряду с другими. Пользуясь им, нельзя забывать, что эта точка зрения — крайняя, что на ее основе можно выбрать только очень осторожное, «перестраховочное» решение, которое не всегда будет разумным. Во-



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 42 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

образите себе, например, военачальника, который всякое свое решение будет принимать исходя из гипотезы, что его противник необычайно умен, хитер и изворотлив и на каждое его действие немедленно ответит наихудшим для него образом. Вряд ли такому военачальнику будет сопутствовать удача! Напротив, в любой конкретной ситуации нужно стараться угадать, в чем слаб и «глуп» противник, и стараться «обвести его вокруг пальца». Тем менее уместен крайне пессимистический подход в ситуациях, где стороне, принимающей решение, не противостоят никакие враждебные силы. Расчеты, основанные на точке зрения «крайнего пессимизма», всегда должны корректироваться разумной долей оптимизма. Вряд ли стоит становиться и на противоположную точку зрения — крайнего или «залихватского» оптимизма, но известная доля риска при принятии решения все же должна присутствовать. Нельзя также забывать о том, что любое решение, принятое в условиях «дурной неопределенности», — неизбежно плохое решение, и вряд ли стоит обосновывать его с помощью тонких и кропотливых расчетов. Скорее следует подумать о том, откуда можно было бы взять недостающую информацию. Здесь все способы хороши — лишь бы прояснить положение.

Упомянем в этой связи об одном довольно оригинальном методе, не пользующемся любовью в среде чистых математиков, но тем не менее полезном, а иногда — единственно возможном. Речь идет о так называемом методе экспертных оценок. Он часто применяется в задачах, связанных с прогнозированием в условиях дурной неопределенности (например, в



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 43 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

футурологии). Грубо говоря, идея метода сводится к следующему: собирается коллектив сведущих, компетентных в данной области людей, и каждому из них предлагается ответить на какой-то вопрос (например, назвать срок, когда будет совершено то или другое открытие, или оценить вероятность того или другого события). Затем полученные ответы обрабатываются наподобие статистического материала. Результаты обработки, разумеется, сохраняют субъективный характер, но в гораздо меньшей степени, чем, если бы мнение высказывал один эксперт («ум хорошо, а два — лучше»). Подобного рода экспертные оценки для неизвестных условий могут быть применены и при решении задач **исследования операций** с дурной неопределенностью. Каждый из экспертов на глаз оценивает степень правдоподобия различных вариантов условий 1, приписывая им какие-то субъективные вероятности. Несмотря на субъективный характер оценок каждого эксперта, усредняя оценки целого коллектива, можно получить нечто более объективное и полезное (кстати, оценки разных экспертов расходятся не так сильно, как можно было бы ожидать). Таким образом, задача с дурной неопределенностью как бы сводится к обычной стохастической задаче. Разумеется, к полученным отсюда выводам не надо относиться слишком доверчиво, но наряду с другими результатами, вытекающими из других точек зрения, но все же могут помочь при выборе решения.

Наконец, сделаем одно общее замечание. При обосновании решения в условиях неопределенности, что бы мы ни делали, элемент неопреде-



*Кафедра
ПМ и ТП*

Начало

Содержание



Страница 44 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

ленности, «гадательности» сохраняется. Поэтому нельзя предъявлять к точности решений слишком высокие требования. Вместо того чтобы указать одно-единственное, в точности «оптимальное» (с какой-то точки зрения) решение, лучше выделить целую область «приемлемых» решений, которые оказываются несущественно хуже других, какой бы точкой зрения мы ни пользовались. В пределах этой области и должны производить свой окончательный выбор ответственные за это люди. Исследователь, предлагая им рекомендации по выбору решения, всегда должен одновременно указывать точки зрения, из которых вытекают те или другие рекомендации.



*Кафедра
ПМ и ТП*

Начало

Содержание



Страница 45 из 293

Назад

На весь экран

Закрыть

ЛЕКЦИЯ 4

Многокритериальные задачи

Несмотря на ряд существенных трудностей, связанных с неопределенностью, мы до сих пор рассматривали только самые простые случаи, когда ясен критерий, по которому производится оценка эффективности, и требуется обратить в максимум (минимум) один-единственный показатель W . К сожалению, на практике такие задачи, где критерий оценки однозначно диктуется целевой направленностью **операции**, встречаются не так уж часто — преимущественно при рассмотрении небольших по масштабу и скромных по значению мероприятий. А когда идет речь о крупномасштабных, сложных операциях, затрагивающих разнообразные интересы их организаторов и общества в целом, то их эффективность, как правило, не может быть полностью охарактеризована с помощью одного-единственного показателя эффективности W . На помощь ему приходится привлекать другие, дополнительные. Такие задачи исследования операций называются многокритериальными.

Рассмотрим пример такой задачи. Организуется оборона важного объекта от воздушных налетов. В нашем распоряжении — какие-то средства противовоздушной обороны, которые надо разумным образом разместить вокруг объекта, организовать их взаимодействие, распределить между ними цели, назначить боезапас и т. д. Допустим, что каждый из самолетов противника, участвующих в налете, является потенциальным



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 46 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

носителем мощного поражающего средства, которое, будучи применено по объекту, гарантирует его уничтожение. Тогда главная задача операции — не допустить к объекту ни одного самолета, а естественный показатель эффективности — вероятность W того, что ни один самолет не прорвется к объекту. Но единственный ли это важный для нас показатель? Безусловно, нет. При одной и той же вероятности W мы предпочтем все-таки решение, при котором будет погибать в среднем побольше самолетов противника. Отсюда второй показатель эффективности M — среднее число пораженных целей, который нам тоже хотелось бы максимизировать. Кроме того, нам далеко не все равно, каковы будут наши собственные боевые потери — еще один критерий, который хотелось бы минимизировать. Желательно было бы, кроме того, сделать поменьше средний расход боеприпасов R , и т. д.

Другой пример — на этот раз из совершенно мирной области. Организуется (или реорганизуется) работа промышленного предприятия. Под углом зрения какого критерия надо выбирать решение? С одной стороны, нам хотелось бы обратить в максимум валовый объем продукции V . Желательно также было бы получить максимальный чистый доход D . Что касается себестоимости S , то ее хотелось бы обратить в минимум, а производительность труда — в максимум. При обдумывании задачи может возникнуть еще ряд дополнительных критериев.

Такая множественность показателей эффективности, из которых одни желательно обратить в максимум, а другие — в минимум, характер-



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 47 из 293

Назад

На весь экран

Закрыть

на для любой сколько-нибудь сложной задачи исследования операций. Предлагаем читателю в виде упражнения попытаться сформулировать ряд критериев, по которым будет оцениваться работа автобусного парка. Подумайте о том, какой из них, с вашей точки зрения, является главным (теснее всего связанным с целевой направленностью операции), а остальные (дополнительные) расположите в порядке убывающей важности. На этом примере можно убедиться в том, что а) ни один из показателей не может быть выбран в качестве единственного и б) формулировка системы показателей — не такая уж простая задача... И сами показатели, и их упорядоченность по важности зависят от того, с точки зрения, чьих интересов оптимизируется решение.

Итак, типичной для крупномасштабной задачи исследования операций является многокритериальность — наличие ряда количественных показателей $W_1, W_2, \dots$, одни из которых желательно обратить в максимум, другие — в минимум («чтобы и волки были сыты, и овцы целы»).

Спрашивается, можно ли найти решение, одновременно удовлетворяющее всем этим требованиям? Со всей откровенностью ответим: нет. Решение, обращающее в максимум один какой-то показатель, как правило, не обращает ни в максимум, ни в минимум другие. Поэтому часто применяемая формулировка: «достигнуть максимального эффекта при минимальных затратах» представляет собой не более чем фразу и при научном анализе должна быть отброшена.

Как же быть в случае, если все же приходится оценивать эффектив-



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 48 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

ность операции по нескольким показателям?

Люди, малоискушенные в исследовании операции, обычно торопятся свести многокритериальную задачу к однокритериальной: составляют какую-то функцию от всех показателей и рассматривают ее как один, «обобщенный» показатель, по которому и оптимизируется решение. Часто такой обобщенный показатель имеет вид дроби, в числителе которой стоят все величины, увеличение которых желательно, а в знаменателе — то, увеличение которых нежелательно. Например, продуктивность и доход — в числителе, время выполнения и расходы — в знаменателе и т. д.

Такой способ объединения нескольких показателей в один не может быть рекомендован, и вот почему: он основан на неявном допущении, что недостаток в одном показателе всегда может быть скомпенсирован за счет другого; например, малая продуктивность — за счет низкой стоимости и т. д. Это, как правило, несправедливо.

Вспомним «критерий для оценки человека», полушутя-полусерьезно предложенный когда-то Львом Толстым. Он имеет вид дроби, в числителе которой стоят действительные достоинства человека, а в знаменателе — его мнение о себе. С первого взгляда такой подход может показаться логичным. Но представим себе человека, почти совсем не имеющего достоинств, по совсем не обладающего самомнением. По критерию Л. Н. Толстого такой человек должен иметь бесконечно большую ценность, с чем уж никак согласиться нельзя.



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 49 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

К подобным парадоксальным выводам может привести (и нередко приводит) пользование показателем в виде дроби, где, как говорят, все, что «за здоровье», — в числителе, все, что «за упокой», — в знаменателе.

Нередко применяется и другой, чуть более замысловатый, способ составления «обобщенного показателя эффективности» — он представляет собой «взвешенную сумму» частных показателей, в которую каждый из них W_i входит с каким-то «весом» a_i , отражающим его важность:

$$W = a_1 W_1 + a_2 W_2 + \dots \quad (4.1)$$

(для тех показателей, которые желательно увеличить, веса берутся положительными, уменьшить — отрицательными).

При произвольном назначении весов $a_1, a_2, \dots$ этот способ ничем не лучше предыдущего (разве тем, что обобщенный критерий не обращается в бесконечность). Его сторонники ссылаются на то, что и человек, принимая компромиссное решение, тоже мысленно взвешивает все «за» и «против», приписывая больший вес более важным для него факторам. Это, может быть, и так, но, по-видимому, «весовые коэффициенты», с которыми входят в расчет разные показатели, не постоянны, а меняются в зависимости от ситуации.

Поясним это элементарным примером. Человек выходит из дому, чтобы ехать на работу, боится опоздать и размышляет: каким транспортом воспользоваться? Трамвай ходит часто, но идет долго; автобус — быстрее, но с большими интервалами. Можно, конечно, взять такси, но это



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 50 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

обойдется дорого. Есть еще такое решение: часть пути проехать на метро, а затем взять такси. Но на стоянке может не быть машин, а, добираясь до работы со станции метро пешком, он рискует опоздать больше, чем, если бы ехал автобусом. Как ему поступить?

Перед нами типичная (намеренно упрощенная) задача исследования операций с двумя критериями (показателями). Первый — среднее ожидаемое время опоздания T , которое хотелось бы сделать минимальным. Второй — ожидаемая стоимость проезда S ; ее тоже желательно сделать минимальной. Но эти два требования, как мы знаем, несовместимы, поэтому человек должен принять компромиссное, приемлемое по обоим критериям, решение. Возможно, он при этом подсознательно взвешивает все «за» и «против», пользуясь чем-то вроде обобщенного показателя:

$$W = a_1T + a_2S \implies \min \quad (4.2)$$

Но беда в том, что весовые коэффициенты a_1, a_2 никак нельзя считать постоянными. Они зависят как от самих величин T и S , так и от обстановки. Например, если человек недавно уже получил выговор за опоздание, коэффициент при T у него, вероятно, увеличится, а на другой день после полочки, вероятно, уменьшится коэффициент при S . Если же назначать (как это обычно и делается) веса a_1, a_2 произвольно, то, по существу, столь же произвольным будет и вытекающее из них «оптимальное» решение.

Здесь мы встречаемся с очень типичным для подобных ситуаций



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 51 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

приемом — «переносом произвола из одной инстанции в другую». Простой выбор компромиссного решения на основе мысленного сопоставления всех «за» и «против» каждого решения кажется слишком произвольным, недостаточно «научным». А вот маневрирование с формулой, включающей (пусть столь же произвольно назначенные) коэффициенты $a_1, a_2, \dots$ — совсем другое дело. Это уже «наука»! По существу же никакой науки тут нет, и нечего обманывать самих себя.

«Гони природу в дверь — она влетит в окно». Нечего надеяться полностью, избавиться от субъективности в задачах, связанных с выбором решений. Даже в простейших, однокритериальных задачах она неизбежно присутствует, проявляясь хотя бы в выборе показателя эффективности и математической модели явления. Тем более неизбежна субъективность (грубо говоря, произвол) при выборе решения в многокритериальной задаче. Правда, бывают редкие случаи, когда достаточно ознакомиться со значениями всех показателей для каждого варианта, чтобы сразу стало ясно, какой из них выбрать. Представим себе, например, что какой-то вариант решения имеет преимущество над другими по всем показателям; ясно, что именно его следует предпочесть. Но гораздо чаще встречаются случаи, когда с первого взгляда ситуация неясна: один из показателей тянет в одну сторону, другой — в другую. При этом всегда полезно провести дополнительные расчеты, пользуясь, может быть, даже формулами типа (4.1), но, не доверяя им слепо, а сохраняя к ним критическое отношение.



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 52 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

Выходит, что математический аппарат не может нам ничем помочь при решении многокритериальных задач? Отнюдь нет, он может помочь, и очень существенно. Прежде всего, он позволяет решать прямые задачи исследования операций, т. е. для любого решения x находить значения показателей эффективности $W_1, W_2, \dots, W_k$ сколько бы их ни было (кстати, для прямых задач многокритериальность — не помеха). И во-вторых, что особенно важно, он помогает «выбраковать» из множества возможных решений заведомо неудачные, уступающие другим по всем критериям.

Покажем, как это, в принципе, делается. Пусть имеется многокритериальная задача исследования операций с k критериями. $W_1, W_2, \dots, W_k$. Для простоты предположим, что все эти величины желательно максимизировать (как переходить от «минимума» к «максимуму», мы уже знаем). Пусть в составе множества возможных решений есть два решения x_1, x_2 такие, что все критерии $W_1, W_2, \dots, W_k$ для первого решения больше или равны соответствующим критериям для второго решения, причем хотя бы один из них действительно больше. Очевидно, тогда в составе множества нет смысла сохранять решение x_2 , оно вытесняется (или, как говорят, «доминируется») решением x_1 . Ладно, выбросим, решение x_2 как неконкурентоспособное и перейдем к сравнению других по всем критериям. В результате такой процедуры отбрасывания заведомо непригодных, невыгодных решений множество X обычно сильно уменьшается: в нем сохраняются только так называемые эффективные (иначе



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 53 из 293

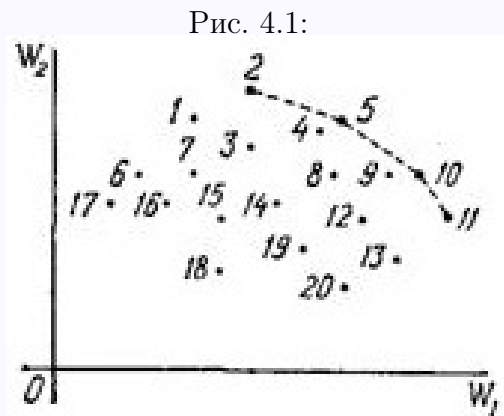
Назад

На весь экран

Заккрыть

«паретовские») решения, характерные тем, что ни для одного из них не существует доминирующего решения.

Проиллюстрируем прием выделения паретовских решений на примере задачи с двумя критериями: W_1 и W_2 (оба требуется максимизировать). Множество состоит из конечного числа n возможных решений $x_1, x_2, \dots, x_n$. Каждому решению соответствуют определенные значения показателей W_1, W_2 ; будем изображать решение точкой на плоскости с координатами W_1, W_2 и занумеруем точки соответственно номеру решения



Очевидно, из всего множества эффективными будут только решения x_2, x_5, x_{10}, x_{11} , лежащие на правой верхней границе области возможных решений (см. жирные точки, соединенные пунктиром, на (рис. 4.1). Для



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 54 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

всякого другого решения существует хотя бы одно доминирующее, для которого либо W_1 , либо W_2 , либо оба больше, чем для данного. И только для решений, лежащих на правой верхней границе, доминирующих не существует.

Когда из множества возможных решений выделены эффективные, «переговоры» могут вестись уже в пределах этого - «эффективного» множества. На (рис. 4.1) его образуют четыре решения: x_2 , x_5 , x_{10} и x_{11} ; из них x_{11} — наилучшее по критерию W_1 , x_2 — по критерию W_2 . Дело лица, принимающего решение, выбрать тот вариант, который для него предпочтителен и «приемлем» по обоим критериям.

Аналогично строится множество эффективных решений и в случае, когда показателей не два, а больше (при числе их, большем трех, геометрическая интерпретация теряет наглядность, но суть дела сохраняется). Множество эффективных решений легче обозримо, чем множество X . Что касается окончательного выбора решения, то он по-прежнему остается прерогативой человека. Только человек, с его непревзойденным умением решать неформальные задачи, принимать так называемые «компромиссные решения» (не строго-оптимальные, но приемлемые по ряду критериев) может взять на себя ответственность за окончательный выбор.

Однако сама процедура выбора решения, будучи повторена неоднократно, может послужить основой для выработки некоторых формальных правил, применяемых уже без участия человека. Речь идет о так



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 55 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

называемых «эвристических» методах выбора решений. Предположим, что опытный человек (или, еще лучше, группа опытных людей) многократно выбирает компромиссное решение в многокритериальной задаче исследования операций, решаемой при разных условиях a . Набирая статистику по результатам выбора, можно, например, разумным образом подобрать значения «весов» $a_1, a_2, \dots$ в формуле. (4.1), в общем случае зависящие от условий » и самих показателей $W_1, W_2, \dots$, и воспользоваться таким обобщенным критерием для выбора решения, на этот раз уже автоматического, без участия человека. На это иногда приходится идти в случаях, когда времени на обдумывание компромиссного решения нет (например, в условиях боевых действий), или же в случае, когда выбор решения передается автоматизированной системе управления (АСУ).

В некоторых случаях очень полезной оказывается процедура выбора решения в так называемом «диалоговом режиме», когда машина, производя расчеты, выдает лицу (лицам), управляющему операцией, значения показателей $W_1, W_2, \dots$, а это лицо, критически оценив ситуацию, вносит изменения в весовые коэффициенты (или иные параметры управляющего алгоритма).

Существует один, часто применяемый способ свести многокритериальную задачу к однокритериальной — это выделить один (главный) показатель W_1 и стремиться его обратить в максимум, а на все остальные $W_2, W_3, \dots$ наложить только некоторые ограничения, потребовав, чтобы они были не меньше каких-то заданных $w_2, w_3, \dots$. Например, при



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 56 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

оптимизации плана работы предприятия можно потребовать, чтобы прибыль была максимальна, план по ассортименту — выполнен или перевыполнен, а себестоимость продукции — не выше заданной. При таком подходе все показатели, кроме одного — главного, переводятся в разряд заданных условий ос. Известный произвол в назначении границ $w_2, w_3, \dots$, разумеется, при этом остается; поправки в эти границы тоже могут быть введены в «диалоговом режиме».

Существует еще один путь построения компромиссного решения, который можно назвать «методом последовательных уступок». Предположим, что показатели $W_1, W_2, \dots$ расположены в порядке убывающей важности. Сначала ищется решение, обращающее в максимум первый (важнейший) показатель $W_1 = W_1^*$. Затем назначается, исходя из практических соображений, с учетом малой точности, с которой нам известны входные данные, некоторая «уступка» ΔW_1 , которую мы согласны сделать для того, чтобы максимизировать второй показатель W_2 . Наложим на показатель W_1 ограничение: потребуем, чтобы он был не меньше, чем $W_1^* \Delta W_1$, и при этом ограничении ищем решение, обращающее в максимум W_2 . Далее снова назначим «уступку» в W_2 , ценой которой можно максимизировать W_3 , и т. д. Такой способ построения компромиссного решения хорош тем, что здесь сразу видно, ценой какой «уступки» в одном показателе приобретается выигрыш в другом и какова величина этого выигрыша.

Так или иначе, при любом способе ее постановки, задача обоснования



Кафедра ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 57 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

решения по нескольким показателям остается не до конца формализованной, и окончательный выбор решения всегда определяется волевым актом «командира» (так можно условно назвать ответственное за выбор лицо). Дело исследователя — предоставить в распоряжение командира данные, помогающие ему делать выбор не «вслепую», а с учетом преимуществ и недостатков каждого варианта решения).

В заключение скажем несколько слов о так называемом «системном подходе» к задачам выбора решений.

В настоящее время в связи с ростом масштабов и сложности **операций** все чаще приходится решать задачи оптимального управления так называемыми «сложными системами», включающими большое число элементов и подсистем и организованными обычно по иерархическому принципу. Например, какая-то отрасль народного хозяйства включает относительно самостоятельные специализированные управления, которые, в свою очередь, имеют в своем подчинении предприятия (фабрики, заводы); каждое предприятие включает подразделения, цеха и проч. Оптимизируя (с точки зрения какого-либо критерия) работу одного звена сложной системы, нельзя забывать о связях, имеющихся между разными звеньями системы, между разными уровнями иерархии. Нельзя вырывать из цепи одно звено и рассматривать его, забывая об остальных.

Простейший пример: пусть, оптимизируя работу заводского цеха, мы добились резкого увеличения объема продукции — это хорошо. Но готовые изделия скапливаются (в лучшем случае — на складах, а в худшем



*Кафедра
ПМ и ТП*

Начало

Содержание



Страница 58 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

— во дворе), а транспортные средства не готовы к вывозу всей этой продукции. Такая ситуация может привести к материальным потерям, сводящим на нет выигрыш за счет увеличения продукции.

Другой пример: стремясь к перевыполнению плана по «валу», фабрика в огромном количестве выпускает изделия, не пользующиеся спросом, быстро переходящие в разряд «уцененных», что, разумеется, тоже ведет к потерям. Все это — результат «несистемного», «локального» планирования.

Какой из этого выход? Разумеется, не в жестком планировании работы всей огромной системы, когда в верхнем звене управления планируется все без исключения, вплоть до гвоздя, забитого в доску в каждом цехе. Это не только невозможно — к этому не надо и стремиться. Разумное управление сложной иерархической системой состоит в том, чтобы каждое вышестоящее звено давало задания нижестоящим не жестко регламентирование, а «в общих чертах», предоставляя им известную инициативу, но, так ставя перед ними цели, чтобы каждое звено, стремясь к своей цели, работало вместе с тем в согласии с интересами вышестоящего звена и системы в целом.

Это, разумеется, легче сказать, чем сделать. Математическая теория больших иерархических систем в настоящее время еще только разрабатывается. Создается математический аппарат, пригодный для описания таких систем, разрабатываются приемы «декомпозиции» больших систем на более удобные в рассмотрении «небольшие» элементы, но дей-



*Кафедра
ПМ и ТП*

Начало

Содержание



Страница 59 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

ственных методов управления такими системами пока не создано. На практике «системный подход» в **исследовании операций** сводится пока что к тому, что каждое звено, работа которого оптимизируется, полезно рассмотреть как часть другой, более обширной системы, и выяснить, как влияет работа данного звена на работу последней.

4.1 Матричные игры с нулевой суммой

Теория игр занимается разработкой рекомендаций по принятию решений в условиях конфликтной ситуации. Конфликтную ситуацию можно представить как игру двух и более игроков, каждый из которых стремится максимально увеличить свой выигрыш.

Игра— это совокупность предварительно оговоренных правил и условий конфликтной ситуации.

Партия— возможная частичная реализация правил игры.

Игрок— это одна из сторон, участвующих в конфликтной ситуации.

Теория игр— это раздел математики, занимающийся выработкой оптимальных правил поведения для каждого игрока.

Стратегия— это совокупность правил, однозначно определяющих последовательность действий игрока в конкретной конфликтной ситуации. Если в данной игре участвуют n игроков $P_1, P_2, \dots, P_n$ то содержание теории игр состоит в том, как должен вести партию i -ый игрок ($i = 1, \bar{n}$) для достижения наиболее благоприятного для себя исхода.



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 60 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

Выигрышем назовем сумму ν_i которую получает в конце каждой партии игрок P_i . При этом подразумевается, что каждый игрок руководствуется только целью максимизации общего выигрыша. Числа ν_i ($i = 1, \bar{n}$) могут быть положительными, отрицательными или равными нулю. Если $\nu_i > 0$, то это соответствует выигрышу i -го игрока, $\nu_i < 0$ — проигрышу, $\nu_i = 0$ — ничейный исход.

Игрой с нулевой суммой называется игра, в которой сумма выигрышей игроков в каждой партии равна 0, т.е. $\sum_{i=1}^n \nu_i = 0$. В этих играх сумма выигрыша переходит от одного партнера к другому, не поступая из внешних источников. Если $\sum_{i=1}^n \nu_i \neq 0$, то такую игру назовем игрой с ненулевой суммой.

Парными называются игры, в которых участвуют два игрока. Игры с большим числом участников называются множественными.

Ходом называется принятие игроком того или иного решения в процессе игры и его реализация. **Ходы** могут быть *личные* и *случайные*. *Личным* называется ход, который выбирается сознательно, а *случайным* — выбираемый с помощью механизма случайного выбора.

В зависимости от количества стратегий игры делятся на **конечные** и бесконечные. *Конечной игрой* называется игра, в которой каждый из игроков имеет конечное число стратегий. Если же хотя бы один из игроков имеет бесконечное число возможных стратегий, то игра называется *бесконечной*. Например, шахматы являются парной конечной игрой.



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 61 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

В дальнейшем будем рассматривать парные конечные игры. Такие игры математически глубоко проработаны и вызывают наибольший интерес, поскольку чаще используются в практических приложениях. В зависимости от взаимоотношений игроков игры делятся на кооперативные, коалиционные и бескоалиционные. Если игроки не имеют права вступать в соглашения, то такая **игра** называется *бескоалиционной*, если же игроки могут вступать в соглашения, создавать коалиции, — *коалиционной*.

Кооперативная игра — это игра, в которой коалиции определены заранее.

Пример 1. Первый игрок P_1 выбирает одну из сторон монеты. Вторым игроком P_2 , не зная выбора первого игрока, так же выбирает одну из сторон. После подбрасывания монеты игрок P_2 платит 1 игроку P_1 , если выбранные стороны монеты совпали и -1 в противном случае. Здесь 1 соответствует выигрышу игроком P_1 одной единицы, а -1 соответственно проигрышу им одной единицы.

Постановку задачи в виде таблицы можно оформить следующим образом:

Стратегии игроков		P_2	
		Орел	Решка
P_1	Орел	1	-1
	Решка	-1	1



Кафедра
ММ и ТП

Начало

Содержание



Страница 62 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

Таким образом условия игры определяются матрицей:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

строки которой соответствуют возможным стратегиям для P_1 , а столбцы — возможным стратегиям для P_2 . Как только P_1 выбирает строку, а P_2 — столбец, партия заканчивается и выигрыш игрока P_1 равен числу, стоящему на пересечении выбранных строки и столбца.

В общем случае матричная игра задается прямоугольной матрицей $A = [a_{ij}]_{m \times n}$. Номер i строки матрицы соответствует номеру стратегии A_i , применяемой игроком P_1 . Номер j столбца соответствует стратегии B_j , применяемой игроком P_2 . Каждый элемент a_{ij} матрицы является действительным числом и представляет собой сумму выигрыша, уплачиваемую игроком P_2 игроку P_1 , если P_1 выбирает стратегию, соответствующую i -й строке, а P_2 выбирает стратегию, соответствующую j -му столбцу.

Матричную игру часто записывают в виде платежной матрицы:

Каждый игрок выбирает наиболее выгодную для себя стратегию, при этом первый игрок выбирает стратегию, которая принесет ему наибольший выигрыш, тогда как второй игрок выбирает стратегию, которая приведет его к минимальному проигрышу. В связи с этим вводят понятия верхней и нижней чистой цены игры.

Нижней чистой ценой игры (максимином) называют число α , опре-



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 63 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

	B_1	...	B_j	...	B_n
A_1	a_{11}	...	a_{1j}	...	a_{1n}
...	...	...	...	...	...
A_j	a_{i1}	...	a_{ij}	...	a_{in}
...	...	...	...	...	...
A_m	a_{m1}	...	a_{mj}	...	a_{mn}

деляемое по формуле:

$$\alpha = \max_i \min_j \quad (4.3)$$

Верхней чистой ценой игры (минимаксом) называют число β , определяемое по формуле:

$$\beta = \min_i \max_j \quad (4.4)$$

Стратегии игроков, соответствующие максимуму (минимуму) называются максиминными (минимаксными).

Пример 2. Найти максиминную и минимаксную стратегии игроков в матричной игре:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 8 & 4 \\ 5 & 1 & 3 & 7 \\ 4 & 6 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$



*Кафедра
ПМ и ТП*

Начало

Содержание



Страница 64 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

Решение. Данную игру представим в виде платежной матрицы

	B_1	B_2	B_3	B_4	α
A_1	2	-3	4	5	-3
A_2	3	7	8	4	3
A_3	5	1	3	7	1
A_4	4	6	2	9	2
β	5	7	8	9	

В соответствии с формулой (4.3) на каждой строке определяем наименьшее число, которое запишем в столбец α_i , это означает, что, какой бы выбор по столбцам ни сделал игрок В, выигрыш игрока А, который свои стратегии выбирает по строкам, в худшем случае составит соответственно -3, 3, 1, 2. Однако игроку А целесообразно выбрать такую стратегию (строку), для которой достигается максимальный выигрыш независимо от того, какой столбец выбрал игрок В, т.е.

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = \max_i a_{ij} = \max(-3, 3, 1, 2) = 3$$

Максиминной стратегией игрока А является $_2$.

Аналогично, пользуясь формулой (4.4), определяем минимаксную стратегию игрока В. Поскольку он выбирает стратегии по столбцам, то какие бы стратегии ни выбирал игрок А, в худшем случае игрок В может проиграть соответственно стратегиям B_1, B_2, B_3, B_4 : 5, 7, 8, 9. Однако



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 65 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

игрок В стремится минимизировать свой проигрыш, а потому выбирает стратегию, соответствующую минимальному из чисел 5, 7, 8, 9, т.е. минимаксу:

$$\beta = \min_i \max_j a_{ij} = \min_i a_{ij} = \min(5, 7, 8, 9) = 5$$

Из платежной матрицы видно, что минимаксной стратегией игрока В является B_1 .

4.2 Чистые и смешанные стратегии. Их свойства

Чистая стратегия A_i ($i = \overline{1, m}$) первого игрока (чистая стратегия B_j ($j = \overline{1, n}$) второго игрока) — это возможный **ход** первого (второго) игрока, выбранный им с вероятностью, равной 1.

Если первый игрок имеет m стратегий, а второй — n стратегий, то для любой пары чистых стратегий первого и второго игроков их соответствующие смешанные стратегии можно представить в виде единичных векторов. Например, для пары стратегий (A_1, B_2) соответствующие смешанные стратегии первого и второго игроков запишутся в виде: $p_1 = (1; 0; \dots; 0)$ и $q_2 = (0; 1; 0; \dots; 0)$. В общем случае для пары стратегий (A_i, B_j) соответствующие смешанные стратегии можно записать в виде:

$$p_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 66 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

где единица стоит на i -м месте, и

$$q_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

где единица стоит на j -м месте.

Теорема 1. В матричной игре нижняя чистая цена игры не превосходит верхнюю чистую цену игры, т.е. $\alpha \leq \beta$.

Если для чистых стратегий (A_i, B_j) j игроков А и В соответственно имеет место равенство $\alpha = \beta$, то пару чистых стратегий называют *седловой точкой матричной игры*, элемент a_{ij} матрицы, стоящей на пересечении i -й строки и j -го столбца — *седловым элементом платежной матрицы*, а число $\nu = \alpha = \beta$ — *чистой ценой игры*.

Пример 1. Найти нижнюю и верхнюю чистые цены, установить наличие седловых точек матричной игры

$$\begin{bmatrix} 9 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 3 & 8 \\ 6 & 3 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

Решение. Определим нижнюю и верхнюю чистые цены игры

$\alpha = \max \alpha_i = \max(5, 1, -4) = 5$ — нижняя чистая цена игры.

$\beta = \min \beta_j = \min(9, 5, 6, 8) = 5$ — верхняя чистая цена игры.

Следовательно $\nu = \alpha = \beta = 5$ — чистая цена игры.

Значит (A_1, B_2) — седловая точка, $a_{12} = 5$ — седловой элемент.



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 67 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i
A_1	9	5	6	7	5
A_2	1	4	3	8	1
A_3	6	3	2	-4	4
β_j	9	5	6	8	

Отклонения игрока А от максиминной стратегии A_1 ведет к уменьшению его выигрыша, а отклонение игрока В от минимаксной стратегии B_2 ведет к увеличению его проигрыша. Иными словами если в матричной игре имеется седловой элемент, то наилучшими для игроков являются максиминная и минимаксная стратегии. Эти стратегии $A_1 B_1$ есть оптимальные чистые стратегии игроков А и В и обозначаются соответственно A_1^* и B_2^* соответственно.

4.3 Смешанные стратегии

Если матричная игра не имеет седловой точки, т.е. $\alpha < \beta$, то решение игры затрудняется. Применение чистых стратегий в таких играх приводит к тому, что выигрыш игрока А не превышает α , а проигрыш игрока В не меньше β . Для игрока А возникает вопрос увеличения выигрыша, а для игрока В - уменьшения проигрыша. Решение находят, применяя смешанные стратегии.

Смешанной стратегией первого игрока называется вектор



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 68 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

$p = (p_i; \dots; p_m)$, где $(i = 1, \dots, m)$ и $\sum_{i=1}^m p_i = 1$. Числа p_i означают вероятность применения первым игроком i -й чистой стратегии. Аналогично дается определение смешанной стратегии q для второго игрока.

Поскольку игроки выбирают свои чистые стратегии случайно и независимо друг от друга, **игра** имеет случайный характер и случайной становится величина выигрыша (проигрыша). В таком случае средняя величина выигрыша является функцией от смешанных стратегий p и q :

$$f(p, q) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} p_i q_j$$

Функция $f(p, q)$ называется платежной функцией матричной игры. Стратегии $p^* = (p_1^*, \dots, p_m^*)$ и $q^* = (q_1^*, \dots, q_n^*)$ называются оптимальными, если для произвольных стратегий $p = (p_1, \dots, p_m)$ и $q = (q_1, \dots, q_n)$ выполняется условие:

$$f(p, q) \leq f(p^*, q) \leq f(p^*, q^*) \quad (4.5)$$

Использование в игре оптимальных смешанных стратегий обеспечивает первому игроку выигрыш, не меньший, чем при использовании им любой другой стратегии p ; второму игроку проигрыш, не больший, чем при использовании им любой другой стратегии q .



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 69 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

Значение платежной матрицы при оптимальных значениях определяет *цену игры*, т.е. $\nu = f(p^*, q^*)$.

Совокупность оптимальных стратегий и цены игры составляет *решение игры*.

Теорема 2. В смешанных стратегиях любая конечная матричная игра имеет седловую точку.

Теорема 3 (критерий оптимальности). Для того чтобы смешанные стратегии $p^* = (p_1^*; \dots; p_m^*)$ и $q^* = (q_1^*; \dots; q_m^*)$ были оптимальными для игроков А и В в игре с матрицей $[a_{ij}]_{m \times n}$ и выигрышем ν , необходимо и достаточно выполнения неравенств:

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} p_j^* \geq \nu \quad (j = \overline{1, n}) \quad (4.6)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} q_j^* \leq \nu \quad (i = \overline{1, m}) \quad (4.7)$$

На основании данной теоремы можно сделать вывод: если игрок А применяет оптимальную смешанную стратегию p^* , а игрок В — любую чистую стратегию B_j , то выигрыш игрока А будет не меньше цены игры ν . Аналогично: если игрок В использует оптимальную смешанную стратегию q^* , а игрок А — любую чистую стратегию A_i , то проигрыш игрока В не превысит цены игры ν .



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 70 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

Чистые стратегии игрока, входящие в его оптимальную смешанную стратегию с вероятностями, отличными от нуля, называются *активными стратегиями игрока*.

Теорема 4. Если один из игроков придерживается своей оптимальной смешанной стратегии, то его выигрыш остается неизменным и равным цене игры независимо от того, какую стратегию применяет другой игрок, если второй игрок не выходит за пределы своих активных стратегий.

На основании данной теоремы решение матричной игры можно упростить, выявив доминирование одних стратегий над другими.

Так, рассматривая стратегию игрока А, сравниваем элементы строк s и t , а именно: a_{sj} с элементами a_{tj} для $j=(\overline{1, n})$. Если $a_{sj} \geq a_{tj}$, то выигрыш игрока А при стратегии A_s будет не меньше, чем при стратегии A_t . В этом случае говорят, что стратегия A_s доминирует над стратегией A_t . Стратегию A_s называют доминирующей, а стратегию A_t — доминируемой.

Поскольку игрок В заинтересован в минимизации проигрыша, доминирующим будет столбец с наименьшими элементами. Например, сравниваем элементы i -го и l -го столбцов. Если все элементы $a_{ir} \geq a_{il}$ ($i = \overline{1, m}$), то игроку В свой выбор выгодно сделать по l -му столбцу. В этом случае стратегия B_l игрока В доминирует над стратегией B_r . Стратегию B_l является доминирующей, а стратегию B_r — доминируемой.

Если в матричной игре имеем строки (столбцы) с одними и теми же



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 71 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

элементами, то такие строки (столбцы), а соответственно и стратегии игроков А и В, называются дублирующими.

И матричной игре доминируемые и дублирующие строки (столбцы) Можно опускать, что не влияет на решение игры.

Теорема 5. Оптимальные смешанные стратегии p^* и q^* игроков А и В $[a_{ij}]_{m \times n}$ с ценой ν будут оптимальными в игре $[ba_{ij} + c]_{m \times n}$ с ценой $\nu' = b\nu + c$, где $b > 0$.

На основании данной теоремы платежную матрицу, имеющую отрицательные числа, можно преобразовать в матрицу с положительными числами.

Пример 2. Выполнить всевозможные упрощения матричной игры

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 5 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 0 & 10 \\ 3 & 5 & 6 & 7 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 0 & 10 \\ 2 & 1 & 3 & 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Вычислить чистую цену игры, если это возможно.

Решение. Поскольку соответствующие элементы второй и четвертой строк матрицы игры равны, т.е. имеем две дублирующие строки, опустим, например, четвертую строку:



Кафедра
ММ и ТП

Начало

Содержание



Страница 72 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 5 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 0 & 10 \\ 3 & 5 & 6 & 7 & 1 & 9 \\ 2 & 1 & 3 & 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Сравним соответствующие элементы столбцов. Элементы первого столбца доминируют над элементами третьего и шестого столбцов, а элементы второго столбца доминируют над соответствующими элементами четвертого столбца. Следовательно, игроку В невыгодно применять стратегии B_3, B_4, B_6 . Опускаем третий, четвертый и шестой столбцы и получаем матрицу вида

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Элементы второй строки меньше соответствующих элементов третьей строки. Следовательно, игроку А невыгодна стратегия 2. Опуская вторую строку, получаем упрощенную матрицу

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$



*Кафедра
ПМ и ТП*

Начало

Содержание



Страница 73 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

Найдем нижнюю чистую цену игры $\alpha = \max \alpha_i = \max(-2, 1, 1) = 1$ и верхнюю чистую цену игры $\beta = \min \beta_j = \min(4, 5, 5) = 4$. Чистую цену игры найти невозможно, т.к. $\alpha \neq \beta$. Если потребуется преобразовать эту матрицу в матрицу с положительными элементами, то, на основании теоремы 5, достаточно прибавить к элементам матрицы, например, число 3.



*Кафедра
ПМ и ТП*

Начало

Содержание



Страница 74 из 293

Назад

На весь экран

Закрыть

ЛЕКЦИЯ 5

Методы решения матричных игр

Во многих областях человеческой деятельности (экономической, военной и т.д.) часто встречается проблема принятия управленческих решений в условиях неопределенности. При этом неопределенность может быть связана как с сознательными действиями конкурента, противника и т.п., так и с другими факторами, влияющими на эффективность решения. Ситуации, в которых эффективность принимаемого одной стороной решения зависит от действий другой стороны, называются *конфликтными*. Конфликт не обязательно предполагает наличие антагонистических противоречий сторон, но всегда связан с определенного рода разногласиями.

Конфликтная ситуация будет *антагонистической*, если увеличение выигрыша одной из сторон на некоторую величину приведет к уменьшению выигрыша другой стороны на такую же величину, и наоборот.

Выработкой рекомендаций по рациональному образу действий участников конфликта занимается математическая теория конфликтных ситуаций — *теория игр*. Возникновение теории игр относится к 1944 г., когда вышла в свет монография Дж. фон Неймана и О. Моргенштерна «Теория игр и экономическое поведение».

В настоящее время **теория игр** бурно развивается. В последние годы, помимо теории антагонистических, неантагонистических (кооператив-



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 75 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

ных), конечных, бесконечных, позиционных и дифференциальных игр, начала развиваться теория рефлексивных игр. *Рефлексивные игры* изучают ситуации с учетом мысленного воспроизведения возможного образа действий и поведения противника. *Дифференциальные игры* изучают задачи преследования управляемого объекта другим управляемым объектом с учетом динамики их поведения; поведение объектов описывается дифференциальными уравнениями.

Игра представляет математическую модель реальной конфликтной ситуации, анализ которой ведется по определенным правилам.

В общем случае правилами игры устанавливаются последовательность ходов, объем информации, которой располагает каждая сторона, о поведении другой стороны и результат (исход) игры. Правила определяют также конец игры, когда некоторая возможная последовательность выборов уже сделана и больше **ходов** делать не разрешается.

В зависимости от числа участников игры подразделяются на парные и множественные. В *парной* игре число участников равно двум, в множественной — более двух. Участники *множественной* игры могут образовывать коалиции (игры в этом случае называются *коалиционными*). Множественная игра обращается в парную, если ее участники образуют две постоянные коалиции.

В данном пособии излагаются основные понятия теории игр и методы их решения на примере конечной парной антагонистической игры, как наиболее простой и теоретически разработанной.



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 76 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

Стороны, участвующие в игре (конфликте), называются *игроками*. В спортивной игре ими могут быть отдельные лица или команды; в военном конфликте — воюющие стороны; в хозяйственной жизни — предприятия, фирмы. Иногда под игроком понимается природа, формирующая условия, в которых необходимо принимать решения.

Стратегией игрока называется совокупность правил, определяющих выбор варианта действий при каждом личном ходе игрока в зависимости от ситуации, сложившейся в процессе игры.

В сложных (многоходовых) задачах теории игр понятия «стратегия» и «вариант возможных действий» существенно отличаются друг от друга. В простых (одноходовых) игровых задачах, когда в каждой **партии** игры игрок может сделать по одному ходу, эти понятия совпадают, а следовательно, совокупность стратегий игрока охватывает все возможные его действия, которые он может предпринять в любой возможной ситуации и при любой возможной фактической информации.

Игра называется *конечной*, если число стратегий игроков конечно, и *бесконечной*, если хотя бы у одного из игроков число стратегий является бесконечным.

Стратегия игрока называется *оптимальной*, если она обеспечивает данному игроку при многократном повторении игры максимально возможный средний выигрыш или минимально возможный средний проигрыш, независимо от поведения противника (могут быть использованы и другие показатели оптимальности).



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 77 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

Выбор одной из предусмотренных правилами игры стратегий и ее осуществление называется *ходом*.

Ходы бывают личные и случайные. Ход называется *личным*, если игрок сознательно выбирает один из возможных вариантов действий и осуществляет его (любой ход в шахматной или шашечной игре). Ход называется *случайным*, если выбор производится не игроком, а каким-либо механизмом случайного выбора (бросание игральной кости или монеты).

Существуют два способа описания игр: позиционный и нормальный. *Позиционный* способ связан с развернутой формой игры и сводится к графу последовательных шагов (дереву игры). *Нормальный* способ заключается в явном представлении совокупности стратегий игроков и платежной функции. *Платежная функция* в игре определяет для каждой совокупности выбранных игроками стратегий выигрыш каждой из сторон. Если в парной игре выигрыш одного игрока равен проигрышу второго, то такую игру принято называть *игрой с нулевой суммой*. В играх с ненулевой суммой выигрыши игроков отличны от нуля.

Парную игру с нулевой суммой удобно исследовать, если она описана в виде так называемой *платежной матрицы* (табл. 5.1). Такую игру называют *матричной*.

В парной игре с ненулевой суммой выигрыш каждого игрока задается своей платежной матрицей. Поэтому такие игры называют *биматричными*.

Рассмотрим конечную игру двух лиц (I и II) с нулевой суммой. Пред-



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 78 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

положим, что игрок I имеет m стратегий (обозначим их $1, 2, \dots, m$), а игрок II (противник) — n стратегий ($1, 2, \dots, n$). Такая игра называется *матричной игрой размерности $m \times n$* .

Пусть игрок I выбрал одну из своих возможных стратегий $i = (1, \bar{m})$, а игрок II, не зная результата выбора игрока I, выбрал стратегию $j = (1, \bar{n})$. Выигрыш игрока I $W_1(i, j)$ и выигрыш $W_2(i, j)$ игрока II в результате выбора стратегий удовлетворяют соотношению $W_1(i, j) + W_2(i, j) = 0$. Отсюда, если положить $W_1(i, j) = \alpha_{ij}$, имеем $W_2(i, j) = -\alpha_{ij}$.

Предположим, что значения α_{ij} нам известны при каждой паре стратегий. Запишем эти значения в виде платежной матрицы (табл. 5.1), строки которой соответствуют стратегиям игрока I, а столбцы — стратегиям игрока II. Каждый положительный элемент α_{ij} матрицы определяет величину выигрыша игрока I и проигрыша игрока II при применении ими соответствующих стратегий. Цель игрока I — максимизировать свой выигрыш, а игрока II — минимизировать свой проигрыш.

Таблица 5.1

I \ II	II		
	1	2	3
1	a_{11}	-1	-2
2	1	0	-1
2	1	0	-1
3	2	1	0



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 79 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

Пример В игре принимают участие игроки I и II. Каждый из игроков может записать, независимо от другого, цифру 1, 2 или 3. Если разность между цифрами, записанными игроками I и II, положительна, то игрок I выигрывает количество очков, равное разности между числами, и наоборот, если разность отрицательна, то выигрывает игрок II. Если же разность между числами равна нулю, то игра заканчивается вничью. Найти платежную матрицу игры.

Таблица 5.2

I \ II	II			
	1	2	...	n
1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...
m	a_{m1}	a_{mj}	...	a_{mn}

Игра состоит из трех личных ходов игроков. У игрока I три стратегии: 1-я — записать цифру 1; 2-я — записать цифру 2; 3-я — записать цифру 3. У игрока II (противника) также три стратегии: 1-я — записать цифру 1; 2-я — записать цифру 2; 3-я — записать цифру 3. Выигрыш игроков при применении ими соответствующих стратегий запишем в виде платежной матрицы (табл. 5.2). Покажем, как получены элементы матрицы. Если игрок I применяет 1-ю стратегию, а игрок II — 3-ю стратегию, то игрок I проигрывает два очка. В платежной матрице этот проигрыш записан



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 80 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

в клетку $(1; 3)$, находящуюся на пересечении первой строки и третьего столбца. Если игрок I применяет 2-ю стратегию, а противник — 1-ю стратегию, то игрок I выигрывает одно очко. В платежной матрице этот выигрыш записан в клетку $(2; 1)$ с положительным знаком. Аналогично получены остальные элементы таблицы.



*Кафедра
ПМ и ТП*

Начало

Содержание



Страница 81 из 293

Назад

На весь экран

Закрыть

ЛЕКЦИЯ 6

Статистические игры

Для управления производственными процессами необходима информация о состоянии объекта управления в условиях его работы. В случае отсутствия достаточно полной информации возникает неопределенность в принятии решения. Причины ее могут быть различными: невозможность получения информации к моменту принятия решения; слишком высокие затраты на получение информации; невозможность устранения неопределенности по причинам объективного характера и т.д. Естественно, по мере совершенствования средств сбора информации, передачи и обработки неопределенность ситуации в момент принятия решения будет уменьшаться.

Существование неустранимой неопределенности связано со случайным характером многих явлений. Например, случайный характер спроса на продукцию делает невозможным точное прогнозирование объема ее выпуска. Принятие решения в этом случае связано с риском. Или, например, прием партии товара для контроля соответствия стандарту также связан с риском. Неопределенность при контроле может быть устранена в случае контроля всего товара, выпускаемого для реализации. Однако это может оказаться слишком дорогостоящим мероприятием.

С целью уменьшения неблагоприятных последствий в каждом конкретном случае следует учитывать степень риска и имеющуюся инфор-



*Кафедра
ПМ и ТП*

Начало

Содержание



Страница 82 из 293

Назад

На весь экран

Закрыть

мацию. И здесь *лицо, принимающее решение* (статистик, далее - игрок), вступает в игровые отношения с некоторым абстрактным лицом, которое условно можно назвать «*природой*». Такого рода ситуации принято называть *играми с природой* или *статистическими играми*. Под природой понимается весь комплекс внешних условий, при которых статистику приходится принимать решение. Игрок должен принимать решение, учитывая, что природа «выбирает» свои стратегии случайно. Вместе с тем, иногда, мы иногда располагаем некоторыми вероятностными характеристиками состояния природы.

Статистические игры представляют собой основную модель теории принятия решений в условиях частичной неопределенности. Любую хозяйственную деятельность человека можно рассматривать как игру с природой. В широком смысле под «природой» будем понимать совокупность неопределенных факторов, влияющих на принимаемые решения.

Задачей игрока является принятие наилучшего решения в каждой конкретной ситуации. Качество этого решения зависит от информированности игрока о ситуации, в которой принимается решение. В случае неопределенности неквалифицированный экономист отказывается принимать решение или принимает его без достаточного обоснования. Хороший экономист умеет использовать даже неполную информацию для обоснования принимаемых решений.

Безразличие природы к игре (выигрышу) и возможность получения игроком дополнительной информации о ее состоянии отличают игру иг-



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 83 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

рока с природой от обычной матричной игры, в которой принимают участие два сознательных игрока.

Множество состояний (стратегий) природы обозначим через Π_j , отдельное состояние — $\Pi_j, \Pi_j \in \Pi (j = \overline{1, n})$. Множество решений (стратегий) игрока обозначим A , отдельное решение — $A_j, A_j \in A (i = \overline{1, m})$.

Во взаимоотношениях с природой игрок может использовать любые из **стратегий** $A_1 \dots A_m$, в зависимости от состояния Π_j природы. К сожалению, игроку неизвестно, какую именно стратегию «выберет» природа. Поэтому, имея ряд стратегий $A_1 \dots A_m$, игрок должен руководствоваться некоторым правилом поведения, с помощью которого он определяет, какую стратегию $A_j \in A$ ему выбрать вне зависимости от того, какая стратегия будет «выбрана» природой. Иными словами, игрок отыскивает оптимальное поведение, которое и будет его оптимальной стратегией. При этом он может пользоваться как чистыми, так и смешанными стратегиями.

Чтобы выразить в количественной форме упомянутое выше некоторое правило поведения игрока, предположим, что есть возможность численно оценить величиной a_{ij} эффективность каждой комбинации (A_j, Π_j) иначе говоря, качество решения A_j . Тем самым будет определена так называемая платежная матрица статистической игры $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, на основе которой в дальнейшем и будут сформулированы «правила поведения» — критерии выбора оптимальной стратегии игрока. Элемент a_{ij} назовем выигрышем игрока, если он использует стратегию A_i при



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 84 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

состоянии природы Π_j .

Т.о. статистические игры образуют специальный класс матричных игр. Решение статистической игры отличается от решения обычной матричной игры, где оба игрока ведут игру сознательно, в упрощении игры. Выявление дублирующих и доминируемых стратегий производится только для стратегий игрока. Стратегии природы опускать нельзя, поскольку неизвестно заранее, какое из своих состояний она реализует.

Иногда при решении статистической игры используется *матрица рисков*. Элементы r_{ij} матрицы рисков равны разности между максимально возможным выигрышем и тем выигрышем, который игрок получит в условиях Π_j , применяя стратегию A_i , т.е. $r_{ij} = \beta_j - a_{ij}$ где $\beta_j = \max_i a_{ij}$.

Оптимальную стратегию игрока можно определить, используя ряд критериев.

Так, при известном распределении вероятностей q_j различных состояний природы Π_j используют *критерий Байеса*. Показателем в этом критерии служит либо величина среднего выигрыша, либо величина среднего риска. По критерию Байеса за оптимальную стратегию принимается либо та чистая стратегия A_i , при которой максимизируется средний выигрыш $\bar{a}_i$, игрока, т.е. обеспечивается $\bar{a} = \max_i \bar{a}_i$ где $\bar{a}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} q_j (i = \overline{1, m})$, либо та чистая стратегия A_i при которой минимизируется средний риск, т.е. обеспечивается $\bar{r} = \min_i \bar{r}_i$, где $\bar{r}_i = \sum_{j=1}^n r_{ij} q_j (i = \overline{1, m})$.



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 85 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

В случае, когда состояния природы равновероятны, для их оценки используют *принцип недостаточного основания Лапласа*, согласно которому все состояния природы полагаются равновероятными, т.е. $q_1 = q_2 = \dots = q_n = 1/n$. Оптимальной считается стратегия, обеспечивающая максимум среднего выигрыша.

Если вероятности состояний природы неизвестны, то для решения статистических игр - выбора оптимальной стратегии игрока - можно использовать несколько критериев.

Максимальный критерий Вальда совпадает с критерием выбора максимальной стратегии, позволяющей получить нижнюю чистую цену игры α в парной игре с **нулевой** суммой. Т.о., по критерию Вальда за оптимальную стратегию принимается та чистая стратегия, которая в наихудших условиях гарантирует максимальный выигрыш, т.е. $\max_i \min_j a_{ij}$

Критерий минимального риска Сэвиджа рекомендует выбирать в качестве оптимальной стратегии ту, при которой величина максимального риска минимизируется, т.е. обеспечивается $\min_i \max_j r_{ij}$

Критерии Вальда и Сэвиджа ориентируют игрока на самые неблагоприятные состояния природы, т.е. выражают пессимистическую оценку ситуации.

Критерий Гурвица является критерием пессимизма-оптимизма. За оптимальную принимается та стратегия, для которой обеспечивается



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 86 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

$\max_i \left(\lambda \min_j a_{ij} + (1 - \lambda) \max_j a_{ij} \right)$, где $0 \leq \lambda \leq 1$. При $\lambda = 0$ имеем критерий крайнего оптимизма, а при $\lambda = 1$ - критерий пессимизма Вальда. В общем случае число λ выбирают исходя из опыта или субъективных соображений.

Решение статистической игры с использованием рассмотренных критериев позволяет игроку более обоснованно выбрать стратегию, которая гарантирует больший выигрыш по сравнению с выигрышем при выборе стратегии игроком интуитивно или исходя из опыта.

Пример. В соответствии со спросом на продукцию в городе планируется построить предприятие по производству этой продукции. Неопределенность спроса в период t приводит к тому, что необходимо рассчитать объем выпускаемой продукции V , который должен быть не меньше уровня спроса S , чтобы не потерять потенциально возможный доход от реализации продукции, а также не должен превышать уровня спроса, так как предприятие будет нести убытки, связанные в основном с уценкой. Предположим, что в течение года по кварталам спрос на выражается величинами 10, 20, 30, 40 тыс. шт. В таком случае и планирующий орган предприятия может принять одно из следующих решений: построить предприятие, которое могло бы удовлетворить спрос потребителей в 10, 20, 30, 40 тыс. шт. Работа подобных предприятий показывает, что предприятие терпит издержки от единицы нереализованной продукции в 5 р., а доход от реализации единицы продукции составляет 15 р.



Кафедра
ММ и ТП

Начало

Содержание



Страница 87 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

Требуется:

1. придать описанной ситуации игровую схему, установить характер игры и выявить ее участников;
2. составить платежную матрицу, вычислив ее элементы;
3. дать обоснованные рекомендации планирующему органу на строительство предприятия, которое могло бы обеспечить спрос потребителей на продукцию.

При изучении работы аналогичных предприятий планирующий орган располагает некоторой дополнительной информацией, снижающей неопределенность ситуации:

1. известны вероятности спроса на данную продукцию по кварталам года: 0,3; 0,2; 0,4; 0,1;
2. спрос на продукцию в каждом квартале равновероятен;
3. о вероятностях спроса на указанную продукцию по кварталам ничего определенного сказать нельзя.

Решение.

Планирующий орган может принять решение построить предприятие, способное удовлетворить спрос потребителей в 10, 20, 30 или 40 тыс. единиц продукции (стратегии A_1, A_2, A_3, A_4).

Второй играющей стороной - природой - будем считать совокупность объективных внешних условий, в которых формируется спрос потребителей. Спрос по кварталам года различен: в первом квартале - 10 тыс. единиц - обозначим это состояние Π_1 ; во втором квартале - 20 тыс. еди-



Кафедра
ММ и ТП

Начало

Содержание



Страница 88 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

ниц - состояние Π_2 ; в третьем квартале - 30 тыс. единиц - состояние Π_3 ; в четвертом квартале - 40 тыс. ед. — состояние Π_4 ;

Описанная ситуация представляет собой статистическую игру.

Рассчитаем элементы платежной матрицы. (табл. 6.1)

Так, в ситуации (A_1, Π_1) элемент a_{11} вычисляется следующим образом.

Плановый орган принимает решение построить предприятие мощностью в 10 тыс. ед., что и соответствует состоянию спроса в 10 тыс. ед. Доход от производства 10 тыс. ед. продукции $a_{11} = 10 \cdot 15 = 150$ тыс. р.

Элемент a_{12} в ситуации (A_2, Π_2) рассчитываем так. Предприятие строится в расчете на выпуск 10 тыс. единиц продукции, а спрос на нее составляет 20 тыс. единиц. Если бы предприятие могло обеспечить этот спрос, то доход составил бы $20 \cdot 15 = 300$ тыс.р. Однако спрос удовлетворяется лишь на 10 тыс. единиц продукции, стало быть, предприятие недополучит доход $10 \cdot 15 = 150$ тыс. р., поэтому элемент $a_{12} = 20 \cdot 15 - 10 \cdot 15 = 150$.

Аналогично определяются и другие элементы таблицы, например элемент a_{31} для ситуации (A_3, B_1) . Предприятие строится в расчете на выпуск 30 тыс. единиц продукции, а спрос на нее составляет 10 тыс. единиц, тогда доход предприятия от реализации 10 тыс. единиц составит $10 \cdot 15 = 150$ тыс. р., а нереализованной продукции (20 тыс. ед.) предприятие терпит издержки $20 \cdot 5 = 100$ тыс. р., поэтому доход предприятия в ситуации (A_3, B_1) составит $a_{31} = 10 \cdot 15 - 20 \cdot 5 = 50$ тыс. р.



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 89 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

Аналогично рассчитываем и остальные элементы платежной матрицы. Для применения критерия Байеса вычисляем средние выигрыши $\overline{a_i}$:

$$\overline{a_1} = 150 \cdot 0,3 + 150 \cdot 0,2 + 150 \cdot 0,4 + 150 \cdot 0,1 = 150.$$

Аналогично $\overline{a_2} = 240$, $\overline{a_3} = 290$, $\overline{a_4} = 260$.

Таблица 6.1

Мощность предприятия, тыс.ед.	Стратегия игрока A_j	Спрос потребителей по кварталам года, тыс.ед.			
		10	20	30	40
		Состояние спроса Π_j			
		$\Pi_1(10)$	$\Pi_2(20)$	$\Pi_3(30)$	$\Pi_4(40)$
10	A_1	150	150	150	150
20	A_2	100	300	300	300
30	A_3	50	250	450	450
40	A_4	0	200	400	600
	q_j	0.3	0.2	0.4	0.1

Оптимальной, по критерию Байеса, является **стратегией** A_3 , поскольку ей соответствует максимальная средняя прибыль

$$\overline{a_3} = \max(150, 240, 290, 260) = 290.$$

По критерию Лапласа, когда $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 1/4$, средние выигрыши равны:



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 90 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

$$\overline{a_1} = \frac{1}{4}(150 + 150 + 150 + 150) = 150, \overline{a_2} = 250, \overline{a_3} = 300, \overline{a_4} = 300.$$

Оптимальными стратегиями по Лапласу являются A_3 и A_4 , так как им соответствует максимальная прибыль, равная 300 тыс. р.

По критерию Вальда оптимальной является стратегия A_1 . для которой прибыль достигает наибольшей величины, равной 150 тыс. р. В самом деле, $\max_i \min_j a_{ij} = (150, 100, 50, 0) = 150$.

Построим матрицу рисков: Таблица 6.2

Мощность предприятия, тыс.ед.	Стратегия игрока A_j	Спрос потребителей по кварталам года, тыс.ед.				$\max_j r_{ij}$
		10	20	30	40	
		Состояние спроса Π_j				
		$\Pi_1(10)$	$\Pi_2(20)$	$\Pi_3(30)$	$\Pi_4(40)$	
10	A_1	0	150	300	450	450
20	A_2	50	0	150	300	300
30	A_3	100	50	0	150	150
40	A_4	150	100	50	0	150

По критерию Сэвиджа оптимальными являются стратегии A_3 и A_4 , для которых в наихудших условиях величина r риска принимает наименьшее значение, равное 150 тыс. р. В самом деле,



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 91 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

$$r = \min_i \max_j r_{ij} = m(450, 300, 150, 150).$$

Таким образом, в результате решения статистической игры по различным критериям чаще других рекомендовалась стратегия A_3 . Следовательно, можно рекомендовать для строительства предприятие мощностью в 30 тыс. единиц продукции. При этом если вероятности спроса известны, прибыль составит 290 тыс. р. при равновероятных условиях спроса 300 тыс. р.



*Кафедра
ПМ и ТП*

Начало

Содержание



Страница 92 из 293

Назад

На весь экран

Закрыть

ЛЕКЦИЯ 7

Понятие линейного программирования

Математическое программирование - область математики, разрабатывающая теорию и численные методы решения многомерных экстремальных задач с ограничениями, т.е. задач на экстремум функции многих переменных с ограничениями на область изменения этих переменных.

Функцию, экстремальное значение которой нужно найти в условиях экономических возможностей, называют *целевой*. Экономические возможности формализуются в виде системы ограничений. Целевая функция и система ограничений составляют математическую модель.

Линейное программирование - это раздел математического программирования, применяемый при разработке методов отыскания экстремума линейных функций нескольких переменных при дополнительных линейных ограничениях, налагаемых на переменные.

По типу решаемых задач эти методы разделяются на *универсальные* и *специальные*. С помощью универсальных методов могут решаться любые задачи линейного программирования. Специальные методы учитывают особенности модели задачи.

Особенностью задач линейного программирования является то, что экстремума целевая функция достигает на границе области допустимых решений. Классические же методы дифференциального исчисления свя-



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 93 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

заны с нахождением экстремумов функции во внутренней точке области допустимых значений. Отсюда возникла необходимость разработки новых методов.

7.1 Формы записи задачи линейного программирования

Общей формой записи задачи линейного программирования называют задачу

$$\max(\min)Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (7.1)$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i (i = \overline{1, m}) \quad (7.2)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i (i = \overline{m_1 + 1, m_2}), \quad (7.3)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i (i = \overline{m_2 + 1, m}), \quad (7.4)$$

$$x_j \geq 0 (j = \overline{1, n_1}) \quad (7.5)$$



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 94 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

x_j - произвольные ($j = \overline{n_1 + 1, n}$),

где c_j, a_{ij}, b_j - заданные действительные числа.

Симметричной формой записи называют задачу

$$\max Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j, \quad (7.6)$$

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j a_{ij} x_j \leq b_j (i = \overline{1, m}) \quad (7.7)$$

$$x_j \geq 0 (j = \overline{1, n}) \quad (7.8)$$

или задачу

$$\min Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (7.9)$$

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j a_{ij} x_j \geq b_j (i = \overline{1, m}) \quad (7.10)$$

$$x_j \geq 0 (j = \overline{1, n}) \quad (7.11)$$

В экономической практике задачи (7.6) - (7.8) или (7.9) - (7.12) встречается наиболее часто.



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 95 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

Канонической формой записи задачи **линейного программирования** называют задачу

$$\min Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (7.12)$$

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j a_{ij} x_j = b_j (i = \overline{1, m}) \quad (7.13)$$

$$x_j \geq 0 (j = \overline{1, n}) \quad (7.14)$$

Матричной формой записи задачи линейного программирования называют задачу

$$\max Z = , AX = B, \geq 0, \quad (7.15)$$

где $C = [c_1 c_2 \dots c_n]$, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$,

Векторной формой записи задачи линейного программирования называют задачу

$$\max Z = ,$$

$$A_1 x_1 + \dots + A_j X_j + \dots + n_n = , \geq ,$$



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 96 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

где $A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$, $A_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$, а - скалярное произведение векторов.

При необходимости задачу минимизации можно заменить задачей максимизации, и наоборот, т.е.

$$\min f(x_1^*, \dots, x_n^*) = -\max(-f(x_1^*, \dots, x_n^*))$$

7.2 Преобразование задачи линейного программирования к линейной форме

Любую задачу **линейного программирования** можно свести к стандартной форме, так называемой «основной задаче линейного программирования»

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (7.16)$$

(ОЗЛП), которая формулируется так: найти неотрицательные значения переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, которые удовлетворяли бы условиям - ра-



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 97 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

венствам и обращали бы в максимум линейную функцию этих переменных:

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \implies \max \quad (7.17)$$

Убедимся в этом. Во-первых, случай, когда L надо обратить не в максимум, а и минимум, легко сводится к предыдущему, если попросту изменить знак L на обратный (максимизировать не L , а $L' = -L$). Кроме того, от любых условий-неравенств можно перейти к условиям-равенствам ценой введения некоторых новых «дополнительных» переменных. Покажем, как это делается, на конкретном примере.

Пусть требуется найти неотрицательные значения переменных x_1, x_2, x_3 , удовлетворяющие ограничениям-неравенствам

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 4 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq 10 \end{cases} \quad (7.18)$$

и обращающие в максимум линейную функцию от этих переменных:

$$L = 4x_1 - x_2 + 2x_3 \implies \max \quad (7.19)$$

Начнем с того, что приведем условия (7.18) к стандартной форме,



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 98 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

так, чтобы знак неравенства был $\geq$, а справа стоял нуль. Получим:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 4 \geq 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 10 \geq 0 \end{cases} \quad (7.20)$$

А теперь обозначим правые части неравенств (7.20) соответственно через y_1, y_2 :

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 4 \geq y_1 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 10 \geq y_2 \end{cases} \quad (7.21)$$

Из условий (7.20) и (7.21) видно, что новые переменные y_1, y_2 также должны быть неотрицательными.

Какая же теперь перед нами стоит задача? Найти неотрицательные значения переменных x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 такие, чтобы они удовлетворяли условиям-равенствам (7.21) и обращали в максимум линейную функцию этих переменных (то, что в L не входят дополнительные переменные y_1, y_2 , неважно: можно считать, что они входят, но с нулевыми коэффициентами). Перед нами — основная задача **линейного программирования** (ОЗЛП). Переход к ней от первоначальной задачи с ограничениями-неравенствами (7.18) «куплен» ценой увеличения числа переменных на два (число неравенств).

Возможен и обратный переход: от ОЗЛП к задаче с ограничениями-неравенствами. Пусть перед нами основная задача линейного програм-



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 99 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

мирования с ограничениями-равенствами (7.16). Предположим, что среди этих r равенств линейно независимыми являются $r \leq m$). В линейной алгебре доказывается (см., например, [4]), что максимальное число линейно независимых равенств, связывающих n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, равно n , так что вообще $r \leq n$. В линейной алгебре также доказывается, что систему из r независимых равенств с n переменными $x_1, x_2, \dots, x_n$ всегда можно разрешить относительно каких-то r переменных (называемых «базисными») и выразить их через остальные $k = n - r$ переменных (называемых «свободными»). Свободным переменным можно придавать какие угодно значения, не нарушая условий (7.16). Так вот, для того чтобы перейти от условий-равенств (7.16) к условиям-неравенствам, достаточно разрешить уравнения (7.16) относительно каких-то r базисных переменных, выразить их через свободные, а затем вспомнить, что все переменные должны быть неотрицательными, и записать условия их неотрицательности в виде ограничений-неравенств. А потом «забыть» о базисных переменных и манипулировать только свободными, число которых будет $k = n - r$. При этом надо будет освободить от базисных переменных также и функцию L , подставив в нее их выражения через свободные. Таким образом, при переходе от ОЗЛП к задаче с ограничениями-неравенствами число переменных не увеличивается, а уменьшается на число r независимых условий-равенств в ОЗЛП. Примеров такого перехода мы приводить не будем, предоставляя пытливому читателю самому убедиться в его возможности.



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 100 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

Итак, всякая задача линейного программирования может быть сведена к стандартной форме ОЗЛП. Мы не будем подробно останавливаться на способах решения этой задачи. Им посвящены специальные руководства (например, [4, 5]), они описаны во многих книгах по **исследованию операций** (например, [6, 7]). В следующем параграфе мы изложим только некоторые соображения общего характера относительно существования решения ОЗЛП и способов его нахождения. Никакими расчетными алгоритмами мы заниматься не будем, а отошлем интересующегося читателя к вышеупомянутым руководствам.



*Кафедра
ПМ и ТП*

Начало

Содержание



Страница 101 из 293

Назад

На весь экран

Закрыть

ЛЕКЦИЯ 8

Существование решения задачи линейного программирования и способы его нахождения

Рассмотрим основную задачу линейного программирования (ОЗЛП): найти неотрицательные значения переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, удовлетворяющие m условиям-равенствам:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (8.1)$$

и обращающие в максимум линейную функцию этих переменных:

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \implies \max \quad (8.2)$$

Для простоты предположим, что все условия (8.1) линейно независимы ($r = m$), и будем вести рассуждения в этом предположении).

Назовем допустимым решением ОЗЛП всякую совокупность неотрицательных значений $x_1, x_2, \dots, x_n$, удовлетворяющую условиям (8.1). Оптимальным назовем то из допустимых решений, которое обращает в максимум функцию (8.2). Требуется найти **оптимальное решение**.



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 102 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

Всегда ли эта задача имеет решение? Нет, не всегда. Во-первых, может оказаться, что уравнения (8.1) вообще несовместны (противоречат друг другу).

Если среди условий-равенств (8.1) есть некоторые лишние, вытекающие из других, то это обнаружится автоматически в процессе решения ОЗЛП (см. [4, 6]).

Может оказаться и так, что они совместны, но не в области неотрицательных решений, т. е. не существует ни одной совокупности чисел $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$, удовлетворяющей условиям (8.1). Наконец, может быть и так, что допустимые решения ОЗЛП существуют, но среди них нет оптимального: функция L в области допустимых решений не ограничена сверху. Все эти опасности подстерегают нас, главным образом, в «придуманных», искусственно поставленных задачах, хотя иногда легкомысленное планирование (неполный учет имеющихся ресурсов) приводит к неразрешимым задачам **линейного программирования**.

Чтобы представить себе принципиальную сторону ОЗЛП, обратимся к геометрической интерпретации. Пусть число уравнений m на два меньше числа переменных n ($n - m = k = 2$). Такой частный случай дает возможность геометрической интерпретации ОЗЛП на плоскости.

Мы знаем, что m линейно независимых уравнений (8.1) всегда можно разрешить относительно каких-то m базисных переменных, выразив их через остальные, свободные, число которых равно $n - m = k$ (в нашем случае $k = 2$).



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 103 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

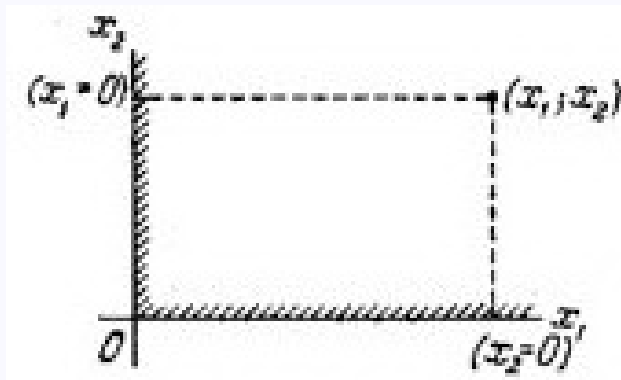


Рис. 8.1:

Предположим, что свободные переменные — это x_1 и x_2 (если это не так, то всегда можно заново перенумеровать переменные), а остальные: $x_3, x_4, \dots, x_n$ — базисные. Тогда вместо m уравнений (8.1) мы получим тоже m уравнений, но записанных в другой форме, разрешенных относительно $x_3, x_4, \dots$:

$$\begin{cases} x_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \beta_3 \\ x_4 = a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + \beta_4 \\ \dots \\ x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \beta_n \end{cases} \quad (8.3)$$

Будем изображать пару значений свободных переменных точкой с координатами x_1, x_2 (рис. 8.1). Так как переменные x_1, x_2 должны быть



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 104 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

неотрицательными, то допустимые значения свободных переменных лежат только выше оси Ox_1 (на которой $x_2 = 0$) и правее оси Ox_2 (на которой $x_1 = 0$). Это мы отметим штриховкой, обозначающей «допустимую» сторону каждой оси.

Теперь построим на плоскости x_1Ox_2 область допустимых решений или же убедимся, что ее не существует. Базисные переменные $x_3, x_4, \dots, x_n$ тоже должны быть неотрицательными и удовлетворять уравнениям (8.3). Каждое такое уравнение ограничивает область допустимых решений.

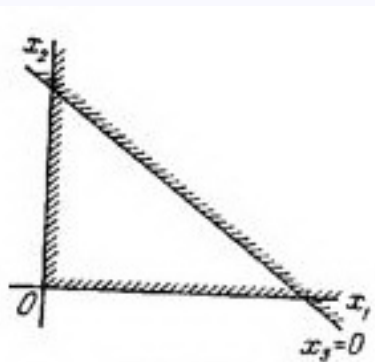


Рис. 8.2:

Действительно, положим: в первом уравнении (8.3) $x_3 = 0$; получим уравнение прямой линии:

$$\alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 - 2 + \beta_3 = 0$$

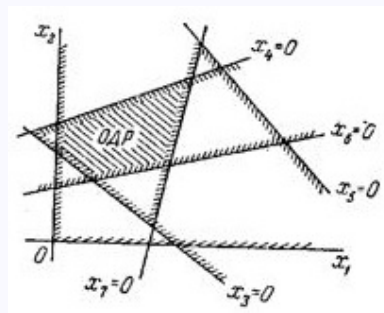


Рис. 8.3:



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 105 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

На этой прямой $x_3 = 0$; по одну сторону от нее $x_3 > 0$, по другую — $x_3 < 0$. Отметим штриховкой ту сторону (полуплоскость), где $x_3 > 0$ (рис. 8.2). Пусть эта сторона оказалась правее и выше прямой $x_3 = 0$. Значит, вся область допустимых решений (ОДР) лежит в первом координатном угле, правее и выше прямой $x_3 = 0$. Аналогично поступим и со всеми остальными условиями (8.3).

Каждое из них изобразится прямой со штриховкой, указывающей «допустимую» полуплоскость, где только и может лежать решение (рис. 8.3).

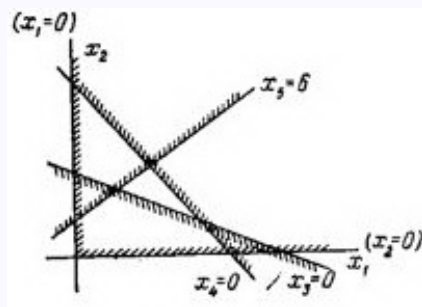


Рис. 8.4:

Таким образом, мы построили n прямых: две оси координат Ox_1 и Ox_2 и $n - 2$ прямых $x_3 = 0, x_4 = 0, \dots, x_n = 0$. Каждая из них определяет «допустимую» полуплоскость, где может лежать решение. Часть первого координатного угла, принадлежащая одновременно всем этим полуплоскостям, и есть ОДР. На рис. 8.3 показан случай, когда ОДР су-



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 106 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

ществует, т. е. система уравнений (8.3) имеет неотрицательные решения. Заметим, что этих решений — бесконечное множество, так как любая пара значений свободных переменных, взятая из ОДР, «годится», а из x_1 и x_2 могут быть определены и базисные переменные.

Может оказаться, что область допустимых решений не существует, и значит, уравнения (8.3) несовместны в области неотрицательных значений. Такой случай показан на рис. 8.4, где нет области, лежащей одновременно по «нужную» сторону от всех прямых. Значит, ОЗЛП не имеет решения.

Предположим, что область допустимых решений существует, и мы ее построили. Как же теперь найти среди них оптимальное?

Для этого дадим геометрическую интерпретацию условию (8.2)

$L \Rightarrow \max$. Подставив выражения (8.3) в формулу (8.2), выразим L через свободные переменные x_1, x_2 . После приведения подобных членов получим:

$$L = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_0 \quad (8.4)$$

где γ_1, γ_2 — какие-то коэффициенты, γ_0 — свободный член, которого в первоначальном виде у функции L не было; теперь, при переходе к переменным x_1, x_2 , он мог и появиться. Однако мы его тут же и отбросим: ведь максимум линейной функции L достигается при тех же значениях x_1, x_2 , что и максимум линейной однородной функции (без свободного



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 107 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

члена):

$$L' = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 \quad (8.5)$$

Посмотрим, как изобразить геометрически условие $L' \Rightarrow m$. Положим сначала $L' = 0$, т.е. $\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 = 0$ и построим на - плоскости $x_1 O x_2$ прямую с таким уравнением; очевидно, он проходит через начало координат (рис. 8.5). Назовем ее «опорной прямой». Если мы будем придавать L' какие-то значения $C_1, C_2, C_3, \dots$, прямая будет перемещаться параллельно самой себе; при перемещении в одну сторону L' будет возрастать, в другую — убывать. Отметим на рис. 8.5 стрелками, поставленными у опорной прямой, то направление, в котором L' возрастает. На рис. 8.5 это оказалось направление «направо — вверх», но могло быть и наоборот: все зависит от коэффициентов γ_1, γ_2 . Теперь изобразим опорную прямую и ОДР на одном чертеже (рис. 8.6). Давайте будем мысленно двигать опорную прямую параллельно самой себе в направлении стрелок (возрастания L') Когда L' достигнет максимума? Очевидно, в точке А (крайней точке ОДР в направлении стрелок). В этой точке свободные переменные принимают оптимальные значения x_1^*, x_2^* а из них можно по формулам (8.3) найти и оптимальные значения всех остальных (базисных) переменных $x_3^*, x_4^*, \dots, x_n^*$. Заметим, что максимум L' достигается в одной из вершин ОДР, где, по крайней мере, две из базисных переменных (в нашем случае это z_5) обращаются в нуль. Могло бы обращаться в нуль и больше базисных переменных, если бы через точку А проходило



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 108 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

более двух прямых $x_i = 0$.

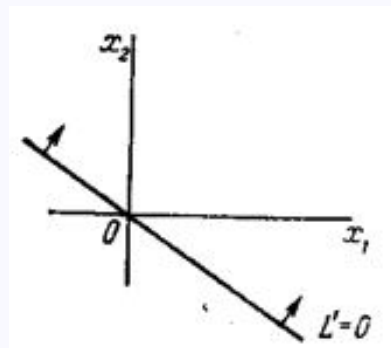


Рис. 8.5:

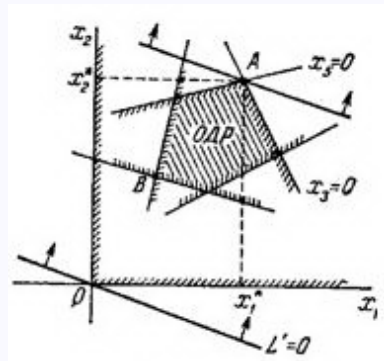


Рис. 8.6:

А может ли оказаться, что **оптимального решения** не существует? Да, может, если в ОДР функция L' (а значит и L) не ограничена сверху. Пример такого ненормального случая показан на **рис. 8.7** (в разумно поставленных задачах обычно такого недоразумения не возникает).

На **рис. 8.6** оптимальное решение существовало и было единственным. А сейчас рассмотрим случай, когда оптимальное решение существует, но не единственно (их бесконечное множество).

Если бы стрелки были направлены иначе («налево — вниз»), то крайней точкой ОДР в направлении стрелок была бы точка В.

Это случай, когда максимум L' достигается не в одной точке А, а на целом отрезке АВ, параллельном опорной прямой (**рис. 8.8**). Такой



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 109 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

случай встречается на практике, но нас он не должен волновать. Все равно и в этом случае максимум U достигается в какой-то из вершин ОДР (4 или B — безразлично), и в поисках оптимального решения можно ограничиться вершинами ОДР.

Итак, мы рассмотрели в геометрической интерпретации случай $n - m = k = 2$ и убедились в следующем: *оптимальное решение* (если оно существует) *всегда достигается в одной из вершин ОДР, в точке, где по крайней мере две из переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ равны нулю.*

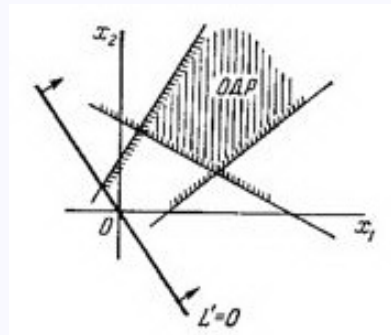


Рис. 8.7:

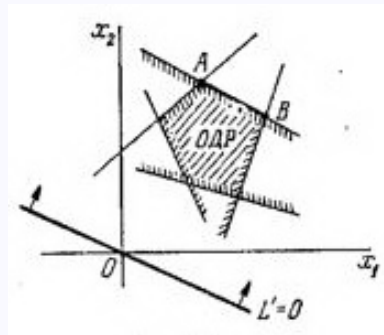


Рис. 8.8:

Оказывается, аналогичное правило справедливо и в случае $n - m = k > 2$ (только геометрическая интерпретация теряет в этом случае свою наглядность). Обойдемся без доказательства, просто сформулируем это правило.

Оптимальное решение ОЗЛП (если оно существует) достигается



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 110 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

при такой совокупности значений переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, где по крайней мере k из них обращаются в нуль, а остальные неотрицательны.

При $k = 2$ такая совокупность значений изображается точкой на плоскости, лежащей в одной из вершин многоугольника допустимых решений (ОДР).

При $k = 3$ ОДР представляет собой уже не многоугольник, а многогранник, и оптимальное решение достигается в одной из его вершин. При $k > 3$ геометрическая интерпретация теряет наглядность, но все же геометрическая терминология остается удобной. Мы будем продолжать говорить о «многограннике допустимых решений» в k -мерном пространстве, а оптимальное решение (если оно существует) будет достигаться в одной из вершин этого многогранника, где, по крайней мере, k переменных равны нулю, а остальные — неотрицательны. Будем для краткости называть такую вершину «опорной точкой», а вытекающее из нее решение — «опорным решением».

Отсюда вытекает идея, лежащая в основе большинства рабочих методов решения ОЗЛП,— идея «последовательных проб». Действительно, попробуем разрешить уравнения (8.1) относительно каких-нибудь m базисных переменных и выразим их через остальные k свободных. Попробуем положить эти свободные переменные равными нулю — авось повезет, наткнемся на опорную точку. Вычислим базисные переменные при нулевых значениях свободных. Если все они оказались неотрицательными, значит, нам повезло, мы сразу же получим допустимое (опорное)



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 111 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

решение, и его остается только оптимизировать. А если нет? Значит, данный выбор свободных и базисных переменных допустимого решения не дает; точка лежит не на границе, а вне ОДР. Что делать? Надо «переразрешить» уравнения относительно каких-то других базисных переменных, но не как попало, а так, чтобы это приближало нас к области допустимых решений (для этого в линейном программировании существуют специальные приемы, на которых мы останавливаться не будем). Пусть, наконец, несколько раз повторив такую процедуру, мы нашли опорное решение ОЗЛП. Bravo! Но это еще не все. Тут надо поставить вопрос: а является ли это решение оптимальным? Выразим функцию L через последние получившиеся свободные переменные и попробуем увеличивать их сверх нуля. Если от этого значение L только уменьшается, значит, нам повезло, и мы нашли **оптимальное решение**, ОЗЛП решена. А если нет? Снова «пере разрешаем» систему уравнений относительно других базисных переменных, и снова не как попало, а так, чтобы, не выходя за пределы допустимых решений, приблизиться к оптимальному. И опять-таки для этого в линейном программировании существуют специальные приемы, гарантирующие, что при каждом новом «пере разрешении» мы будем приближаться к оптимальному решению, а не удаляться от него. На этих приемах мы тоже здесь не будем останавливаться. После конечного числа таких шагов цель будет достигнута — оптимальное решение найдено. А если его не существует? Алгоритм решения ОЗЛП сам покажет вам, что решения нет.



*Кафедра
ПМ и ТП*

Начало

Содержание



Страница 112 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

Читатель, может быть, спросит: только-то и всего? Зачем было придумывать хитрые методы решения ОЗЛП, может быть, надо просто перебрать, одну за другой, все возможные комбинации к свободных переменных, полагая их равными нулю, пока, наконец, не будет найдено оптимальное решение?

Действительно, для простых задач, где число переменных невелико, такой «слепой перебор» может привести к решению, и довольно быстро. Но на практике часто встречаются задачи, в которых число переменных (и наложенных условий) очень велико, порядка сотен и даже тысяч. Для таких задач простой перебор становится практически невозможным: слишком велико число комбинаций свободных и базисных переменных.

Пример: только при $n = 30$ и $m = 10$ число возможных комбинаций свободных переменных с базисными равно $C_{30}^{10} = 30045015$, т. е. свыше 30 миллионов! А эта задача — далеко не из сложных.

Разработанные в теории **линейного программирования** вычислительные методы («симплекс-метод», «двойственный симплекс-метод» и др.) позволяют находить оптимальное решение не «слепым» перебором, а «целенаправленным», с постоянным приближением к решению. Добавим, что современные ЭВМ, как правило, снабжены подпрограммами для решения задач линейного программирования, так что лицу, желающему их решать, нет даже особой надобности обучаться решению таких задач «вручную» — труд крайне неприятный и изнурительный.



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 113 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

ЛЕКЦИЯ 9

Двойственные задачи

С каждой задачей линейного программирования тесно связана другая линейная задача, называемая *двойственной*. Первоначальная задача называется *прямой* или *исходной*. Многие задачи линейного программирования первоначально ставятся в виде прямых или двойственных задач, поэтому говорят о *паре взаимно двойственных задач линейного программирования*, которые имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} &\text{прямая задача} \\ \max Z &= \sum_{j=1}^n c_j x_j, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i (i = \overline{1, m}), \\ x_j &\geq 0 (j = \overline{1, n}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{двойственная задача} \\ \min f &= \sum_{i=1}^m b_i y_i, \\ \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i &\geq c_j (j = \overline{1, n}), \\ y_i &\geq 0 (i = \overline{1, m}). \end{aligned}$$

Рассмотренная пара взаимно двойственных задач может быть экономически интерпретирована, например, так:

Прямая задача: сколько и какой продукции x_j : надо произвести, чтобы при заданных стоимостях единицы продукции c_j объемах имеющихся ресурсов b_i и нормах расхода a_{ij} максимизировать выпуск продукции в стоимостном выражении?



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 114 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

Двойственная задача: какова должна быть оценка единицы каждого из ресурсов y_i , чтобы при заданных величинах b_i, c_j и a_{ij} минимизировать общую оценку затрат на все ресурсы?

Основное неравенство теории двойственности: для любых допустимых планов x и y пары взаимно-двойственных задач справедливо неравенство $z(x) \leq f(y)$. Его экономическое содержание состоит в том, что для любого допустимого плана производства x и любого допустимого вектора оценок ресурсов y общая созданная стоимость не превосходит суммарной оценки ресурсов.

9.1 Критерий Канторовича и первая теорема двойственности

Критерий оптимальности Канторовича (достаточный признак оптимальности): если для некоторых допустимых планов x^* и y^* пары двойственных задач выполняется равенство $z(x^*) = f(y^*)$, то x^* и y^* являются оптимальными планами соответствующих задач. Экономический смысл критерия следующий: план производства x и вектор оценок ресурсов y являются оптимальными, если цена всей произведенной продукции и суммарная оценка ресурсов совпадают.

Теорема существования оптимальных планов пары двойственных задач: для существования оптимального плана любой из пары двойственных задач необходимо и достаточно существование допустимого плана для каждой из них.



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 115 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

Первая теорема двойственности: если одна из двойственных задач имеет оптимальное решение, то и другая имеет оптимальное решение, причем экстремальные значения целевых функций совпадают: $z(x^*) = f(y^*)$ Если одна из двойственных задач неразрешима вследствие неограниченности целевой функции на множестве допустимых решений, то система ограничений другой задачи противоречива.

Экономическое содержание первой теоремы двойственности состоит в следующем: если задача определения оптимального плана, максимизирующего выпуск продукции, разрешима, то разрешима и задача определения оценок ресурсов. Причем цена продукта, полученного в результате реализации оптимального плана, совпадает с суммарной оценкой ресурсов. Совпадение значений целевых функций для соответствующих решений пары двойственных задач достаточны для того, чтобы эти решения были оптимальными. Это значит, что план производства и вектор оценок ресурсов являются оптимальными тогда и только тогда, когда цена производственной продукции и суммарная оценка ресурсов совпадает. Оценки выступают как инструмент балансирования затрат и результатов. Двойственные оценки обладают тем свойством, что они гарантируют рентабельность оптимального плана, т.е. равенства общей оценки продукции и ресурсов, обуславливают убыточность всякого другого плана, отличного от оптимального.

Правила построения двойственной задачи могут быть сформулиро-



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 116 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

ваны следующим образом:

1. Если прямая задача решается на максимум, то двойственная - на минимум, и наоборот.
2. В задаче на максимум имеют место ограничения-неравенства вида $\leq$ а в задаче на минимум - вида $\geq$.
3. Каждому ограничению прямой задачи соответствует переменная двойственной задачи, и наоборот.
4. Матрица системы ограничений двойственной задачи получается из матрицы системы ограничений исходной задачи транспонированием, и наоборот.
5. Свободные члены системы ограничений прямой задачи являются коэффициентами при соответствующих переменных целевой функции двойственной задачи, и наоборот.
6. Если на переменную прямой задачи наложено условие неотрицательности, то соответствующее ограничение двойственной задачи записывается как ограничение-неравенство, если же условие не наложено, то как ограничение-равенство, и наоборот.

Пример. Пусть имеется задача линейного программирования, записанная в произвольной несимметричной форме:

$$\max Z = -12x_1 + 10x_2 - 15x_3 - 11x_4,$$



*Кафедра
ПМ и ТП*

Начало

Содержание



Страница 117 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_4 \geq 3, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_4 \geq -1, \\ x_1 + 3x_3 + 2x_4 \geq 2, \\ -2x_1 + x_2 - 3x_4 = -5, \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, x_4 \geq 0, x_2$ и x_3 - любого знака.

Построить ей двойственную.

Решение. Ограниченная типа $\geq$ сведем к ограничениям вида $\leq$ умножением на -1. Получим

$$\max Z = -12x_1 + 10x_2 - 15x_3 - 11x_4,$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 - x_4 \leq -3, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ -4x_1 + 5x_2 - 2x_4 \leq 1, \\ x_1 - 3x_3 - 2x_4 \leq -2, \\ -2x_1 + x_2 - 3x_4 = -5, \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, x_4 \geq 0, x_2$ и x_3 - любого знака.

Воспользуемся правилами построения двойственной задачи.

Прямая задача решается на максимум, значит двойственная - на минимум (**правило 1**).

В прямой задаче шесть ограничений, поэтому в двойственной задаче шесть переменных (**правило 3**). Используя **правило 5**, запишем целевую функцию.

В двойственной задаче четыре ограничения, так как каждой пере-



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 118 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

менной прямой задачи соответствует ограничение двойственной задачи (правило 3).

Транспонируя матрицу системы ограничений прямой задачи, получаем матрицу системы ограничений двойственной задачи (правило 4)

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & -4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Так как коэффициенты при переменных целевой функции прямой задачи являются соответствующими свободными членами системы ограничений двойственной задачи (правило 5), то получаем вектор свободных членов

$$\begin{bmatrix} -12 \\ 10 \\ -15 \\ -11 \end{bmatrix}$$

На первую и четвертую переменную прямой задачи наложено условие неотрицательности, а на вторую и третью — не наложено, значит первое и четвертое ограничение будет вида $\geq$, а второе и третье — вида $=$ (правило 6).

И, наконец, так как в прямой задаче первое, третье и четвертое —



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 119 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

ограничения-неравенства, а второе и пятое — ограничения-равенства, то на первую, третью и четвертую переменную двойственной задачи накладываются условия неотрицательности, а на вторую и пятую — не накладываются (**правило 6**).

Получили двойственную задачу

$$\begin{aligned} \min f &= -3y_1 + 4y_2 + y_3 - 2y_4 - 5y_5 \\ \begin{cases} -2y_1 + y_2 - 4y_3 + y_4 - 2y_5 &\geq -12, \\ 4y_1 + y_2 + 5y_3 + y_5 &= 10, \\ 2y_2 - y_4 &= -15, \\ -y_1 + 2y_2 - 2y_3 - 2y_4 - 3y_5 &\geq -11, \\ y_1 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0, \end{cases} \end{aligned}$$

y_2 и y_5 — произвольного знака

9.2 Вторая и третья теорема двойственности

Теорема 2. Если какая-то переменная x_j^* ($j = \overline{1, n}$) оптимального решения исходной задачи положительна, то j -е ограничение двойственной задачи ее оптимальным решением обращается в строгое равенство.

Если оптимальное решение исходной задачи обращает какое-то i -е $i = \overline{1, m}$ ограничение в строгое неравенство, то в **оптимальном решении** двойственной задачи переменная u_i равна нулю.

Эта теорема справедлива для задач симметричной двойственной па-



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 120 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

ры. Для задач, заданных в канонической и общей форме, она справедлива только при ограничениях, имеющих вид неравенств, и при неотрицательности переменных.

Чтобы показать справедливость теоремы, рассмотрим взаимосвязь между значениями переменных и ограничениями следующих двойственных задач:

$$f = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, i = \overline{1, m}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, n},$$

$$\tilde{f} = \sum_{i=1}^m b_i u_i \rightarrow \min$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} \geq c_j, j = \overline{1, n}$$

$$u_i \geq 0, i = \overline{1, m},$$

Приведем ограничения-неравенства задач к эквивалентным уравнениям:

для исходной —

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i, i = \overline{1, m}$$

для двойственной —

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} u_j - u_{m+j} = c_j, j = \overline{1, n}$$

Записав условия обеих задач в двойственную таблицу, найдем их оптимальные решения. Пусть после некоторого числа шагов модифициро-



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 121 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

ванных жордановых исключений применительно к прямой задаче найдено оптимальное решение (табл.9.1).

Таблица 9.1

Н.Н	Б.Н.	$u_1 = \dots U_{m+j} = \dots u_{m+n}$	$\tilde{f}$
	Н.Н Б.Н		1
u_{m+1}	$x_1 =$	$(b_{ij})_{m \times n}$	β_1
$\dots$	$\dots$		$\dots$
u_i	$x_{n+i} =$		β_i
$\dots$	$\dots$		$\dots$
u_m	$x_{n+m} =$		β_m
1	$f =$	$q_1 \dots q_j \dots q_n$	Q

Из табл. табл.9.1 видно, что неизвестная x_1 , положительна ($x_1 = \beta_1$). Следовательно, первое ограничение двойственной задачи выполняется как строгое равенство ($u_{m+1} = 0$).

В оптимальном плане двойственной задачи $(m+j)$ и $(m+n)$ -я дополнительные неизвестные положительны $u_{m+j} = q_j$, $u_{m+n} = q_n$. Это значит, что j -е и n -е ограничения выполняются как строгие неравенства. Следовательно, в исходной задаче соответствующие основные неизвестные равны нулю ($x_j = x_n = 0$)

В оптимальном плане исходной задачи дополнительные неизвестные $x_{n+i}x_{n+m}$ положительны ($x_{n+i} = \beta_i, x_{n+m} = \beta_m$), значит, i — — огра-



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 122 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

ничения выполняются как строгие неравенства. Следовательно, в двойственной задаче основные неизвестные $u_i u_m$ равны нулю $u_i = u_m = 0$, так как они являются небазисными.

Пример Найти решение задачи путем графического анализа двойственной.

$$f = -6x_1 - 12x_2 + 3x_3 - x_4 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_4 = 6, \\ -3x_1 + 3x_2 - 2 + x_3 = 12, \end{cases} \quad x_j \geq 0 (j = \overline{1, 4})$$

Запишем условие двойственной задачи:

$$\tilde{f} = 6u_1 + 12u_2 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} 2u_1 - 3u_2 \geq -6, \\ -4u_1 + 3u_2 \geq -12, \\ 3u_1 + u_2 \geq 3, \\ -u_1 \geq -1, \end{cases} \quad u_1, u_2 \text{ —любые.}$$

Графическое решение этой задачи представлено на **рис 9.1**. ОДР системы ограничений является треугольник ABC. Оптимальное решение достигается в точке $(1, 0) \tilde{f}_{\min} = 6$. Этим решением первое и второе ограничения удовлетворяются как строгие неравенства ($2 - 0 = 2 > -6$ и $-4 + 0 = -4 > -12$), следовательно, соответствующие им переменные исходной задачи x_1 и x_2 равны нулю. Тогда, подставляя в исходную систему ограничений значения переменных $x_1 = x_2 = 0$, получаем



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 123 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

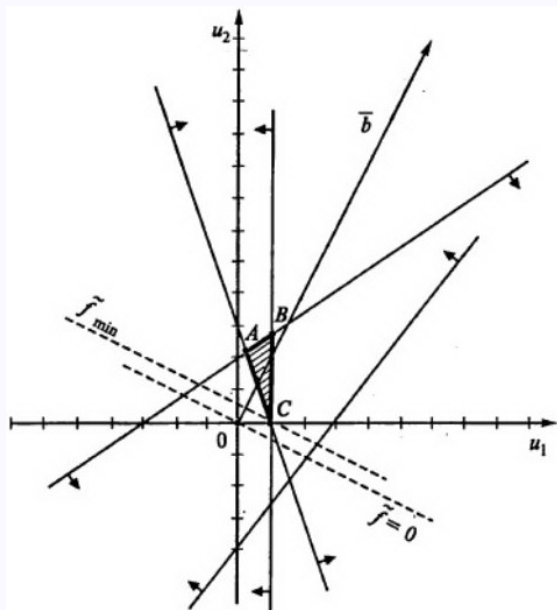


Рис. 9.1:

$$\begin{cases} 3x_3 - x_4 = 6, \\ x_3 = 12, \end{cases}$$

откуда находим, что $x_3 = 12, x_4 = 30$. Следовательно, решение исходной задачи $\bar{x}^* = (0; 0; 12; 30)$. При этом $f_{max} = 3 \cdot 12 - 1 \cdot 30 = 6$. Так как $f_{max} = \tilde{f}_{min} 6$, то вычисления выполнены правильно.

Каждой задаче **линейного программирования** можно определенным образом сопоставить некоторую другую задачу (линейного программи-



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 124 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

рования), называемую двойственной или сопряженной по отношению к исходной или **прямой задаче**.

Третья теорема двойственности или теорема об оценках.

Двойственные оценки показывают приращение функции цели, вызванное малым изменением свободного члена соответствующего ограничения задачи математического программирования, точнее

$$\frac{\partial z(x^*)}{\partial b_i} = y_i^* (i = \overline{1, m}) \quad (9.1)$$

Для этого в равенстве (9.1) дифференциалы заменим приращениями. Получим $\Delta z(x^) \approx y_i^* \Delta b_i$. При $\Delta b_i = 1$ имеем $\Delta z(x^*) \approx y_i^*$. Отсюда величина двойственной оценки численно равна изменению целевой функции при изменении соответствующего свободного члена ограничений на единицу. В прикладных задачах двойственные оценки часто называются скрытыми, теневыми ценами или маргинальными оценками ресурсов.*



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 125 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

ЛЕКЦИЯ 10

Алгоритм нахождения опорного решения

Занесем выражения для ограничений и функции в модифицированную таблицу Жордана. (В дальнейшем такую таблицу будем называть симплексной в соответствии с названием аналитического метода решения задач линейной оптимизации.) Базисные неизвестные (Б.Н.) запишем в левый заглавный столбец, а небазисные неизвестные (Н.Н.) — в верхнюю заглавную строку. Числовые значения правой части системы ограничений запишем в правом столбце таблицы (в столбце свободных членов), в месте пересечения верхней заглавной строки и этого столбца поставим единицу. Коэффициенты при небазисных неизвестных запишем под ними. Функцию запишем в последней строке таблицы. В правой клетке этой строки запишем значение функции ($Z = 0$).

Пусть решение в таблице Жордана неопорное (элемент $b_r < 0$). Чтобы получить опорное решение, воспользуемся правилом преобразования таблиц с помощью модифицированных жордановых исключений, в соответствии с которым элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент и записываются в новой таблице с тем же знаком. Поэтому, чтобы вместо $b_r < 0$ получить число положительное, необходимо, чтобы разрешающий элемент был в данной строке и имел отрицательный знак.

Если же в строке с отрицательным свободным членом нет отрицатель-



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 126 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

ных элементов, то задача не имеет опорного решения, система ограничения задачи несовместна.

Пусть в r -й строке имеются отрицательные элементы a_{r2} и a_{rk} . Если за разрешающий элемент принять $a_{rk} < 0$ или $a_{r2} < 0$ и рассчитать новую таблицу, то гарантировано, что вместо элемента $b_r < 0$ будет положительное число, равное b_r/a_{rk} или b_r/a_{r2} однако в столбце свободных членов вместо положительных элементов может появиться не один, а несколько отрицательных элементов. Чтобы этого не случилось, рекомендуется разрешающий элемент выбирать по наименьшему симплексному отношению, т.е. отношению элементов столбца свободных членов к соответствующим элементам разрешающего столбца. За разрешающий столбец выбирается тот, в котором находится отрицательный элемент в строке с отрицательным свободным членом. В нашем случае за разрешающий столбец можно выбрать 2-й или k -й, так как $a_{r2} < 0$ $a_{rk} < 0$. Выберем за разрешающий столбец k -й. Тогда, обозначив симплексные отношения буквой t , найдем наименьшее из них среди положительных отношений:

$$t = \min \left(\frac{b_1}{a_{1k}}; \dots \frac{b_i}{a_{ik}}; \dots \frac{b_r}{a_{rk}}; \dots \frac{b_m}{a_{mk}} \right) = \frac{b_r}{a_{rk}} > 0.$$

Это отношение определило разрешающую строку и разрешающий элемент a_{rk} . Симплексные отношения удобно рассчитывать в (табл. 10.1).



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 127 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

Рассмотрим теорему о выборе разрешающего элемента.

Теорема. Если разрешающий элемент выбирать по наименьшему симплексному отношению, то вместо свободного члена разрешающей строки в новой симплексной таблице будет всегда число положительное, а остальные элементы столбца свободных членов не меняют знака.

Таблица 10.1

Б.Н \ Н.Н	$-x_1$	$-x_2$	...	$-x_k$	...	$-x_n$	1	$t \geq 0$
$y_1 =$	a_{11}	a_{12}	...	a_{1k}	...	a_{1n}	b_1	b_1/a_{1k}
...	...	...	...	...	...	...	...	...
$y_i =$	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{ik}	...	a_{in}	b_i	b_i/a_{ik}
...	...	...	...	...	...	...	...	...
$y_r =$	a_{r1}	a_{r2}	...	a_{rk}	...	a_{rn}	b_r	b_r/a_{rk}
...	...	...	...	...	...	...	...	...
$y_m =$	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mk}	...	a_{mn}	b_m	b_m/a_{mk}
$Z =$	$-c_1$	$-c_2$	...	$-c_k$	...	$-c_n$	0	

В табл. 10.1. разрешающим выбран элемент a_{rk} , так как

$$\frac{b_r}{a_{rk}} = \min_i \left(\frac{b_i}{a_{ik}} \right) > 0.$$

Доказательство первой части теоремы очевидно, поскольку в новой таблице вместо элемента $b_r < 0$ будет элемент $b_r/a_{rk} > 0$, который как минимальное симплексное отношение определил разрешающий элемент



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 128 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

$$a_{rk} < 0.$$

Докажем вторую часть теоремы, для чет исследуем знак свободного члена b_i .

Вместо b_i , в новой таблице будет элемент b_i^* который рассчитывается по правилу прямоугольника:

$$b_i^* = \frac{b_i a_{rk} - b_k a_{ik}}{a_{rk}} = b_i - \frac{b_r a_{ik}}{a_{rk}} = a_{ik} \left(\frac{b_i}{a_{ik}} - \frac{b_r}{a_{rk}} \right) \quad (10.1)$$

Напомним, что $b_r < 0$, $a_{rk} < 0$ и отношение b_k/a_{rk} — наименьшее. Тогда:

1. Пусть $b_i < 0$ и $a_{ik} < 0$. Подставляя эти значения в выражение (10.1), находим, что $b_i' < 0$.
2. Пусть $b_i < 0$ а $a_{ik} > 0$. В этом случае тоже $b_i' < 0$.
3. Пусть $b_i > 0$ и $a_{ik} > 0$. Исследуя при этих значениях выражение (10.1), находим, что $b_i' > 0$.
4. Пусть $b_i > 0$ а $a_{ik} < 0$. Очевидно, что и в этом случае $b_i' > 0$.
5. При $a_{ik} = 0$, $b_i' < b_i$.

Таким образом, вторая часть теоремы доказана.

Сформулируем алгоритм нахождения опорного решения задачи.

Пусть условия задачи занесены в симплексную таблицу.

1. Просматриваем элементы столбца свободных членов, если все они положительные, то опорное решение найдено и начинается этап нахождения оптимального решения.



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 129 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

2. Если среди элементов столбца свободных членов имеются отрицательные, то выбираем любой из них и, просматривая элементы строки с выбранным отрицательным свободным членом, фиксируем в ней отрицательные элементы. Любой столбец с отрицательным элементом в рассматриваемой строке берем за разрешающий.

Если же в строке с отрицательным свободным членом нет отрицательных элементов, то система ограничений несовместна. Задача решения не имеет.

3. Разрешающую строку находим по наименьшему симплексному отношению.

4. С выделенным разрешающим элементом, находящимся на пересечении разрешающих строки и столбца, рассчитываем новую симплексную таблицу.

Анализ новой таблицы начинаем с пункта 1 алгоритма. Так действуем до тех пор, пока не найдем опорное решение или не убедимся, что его не существует.

Пример Найти опорное решение задачи

$$Z = 4x_1 + x_2 - x_3 \rightarrow \max$$

При ограничениях



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 130 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 \geq 5, \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 \geq 6, \\ -4x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 3, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 3} \end{cases}$$

Приведем систему ограничений к каноническому виду. Умножив первые три ограничения на -1 и добавив к левым частям ограничений неотрицательные дополнительные неизвестные $y_i, i = \overline{1, 4}$, имеем:

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + y_1 = -5, \\ -3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + y_2 = -6, \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 + y_3 = -3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + y_4 = 3, \end{cases}$$

Очевидно, что векторы-столбцы при неизвестных $y_i, i = \overline{1, 4}$, являются единичными и образуют базис в четырехмерном пространстве. Поэтому неизвестные $y_i, i = \overline{1, 4}$, будут базисными. Выразим из системы ограничений базисные неизвестные:

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 5 \geq 0, \\ y_2 = 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 6 \geq 0, \\ y_3 = -4x_1 - x_2 + 2x_3 + 3 \geq 0, \\ y_4 = -x_1 - x_2 - x_3 + 3 \geq 0, \end{cases}$$



*Кафедра
ММ и ТП*

Начало

Содержание



Страница 131 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

Занесем коэффициенты системы ограничений и функции в симплексную таблицу **табл. 10.2**.

Таблица 10.2

Б.Н \ Н.Н	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1	$t \geq 0$
$y_1 =$	-2	3	2	-5	5/2
$y_2 =$	-3	2	4	-6	2
$y_3 =$	4	1	-2	-2	—
$y_4 =$	1	1	1	3	3
$Z =$	-4	-1	1	0	

Решение в **табл. 10.2** неопорное, так как небазисные неизвестные $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, первые три базисные неизвестные меньше нуля:

$$y_1 = -5, y_2 = -6, y_3 = -3, y_4 = 3, Z = 0.$$

Учитывая, что в первой строке с отрицательным свободным членом (-5) имеется отрицательный элемент (-2), то первый столбец берем за разрешающий.

Вычислив симплексные отношения, видим, что наименьшее отношение (2) определяет вторую строку. Следовательно, эта строка будет разрешающей, а разрешающим элементом будет элемент -3. Заключим в рамку разрешающий элементна также выделим (стрелками) разрешающие строку и столбец.



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 132 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

В новой симплексной таблице **табл. 10.3** решение также неопорное.
Таблица 10.3

Б.Н \ Н.Н	$-y_2$	$-x_2$	$-x_3$	1	$t \geq 0$
$y_1 =$	$-2/3$	$5/3$	$-2/3$	-1	$3/2$
$x_1 =$	$-1/3$	$-2/3$	$-4/3$	2	—
$y_3 =$	$4/3$	$11/3$	$10/3$	-11	—
$y_4 =$	$1/3$	$5/3$	$7/3$	1	3
$Z =$	$-4/3$	$-11/3$	$-13/3$	8	

В первой строке **табл. 10.3** находится отрицательный свободный член (-1), а первом и третьем столбце - отрицательные элементы ($-2/3$). Выберем первый столбец за разрешающий.

Таблица 10.4

Б.Н \ Н.Н	$-y_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
$y_2 =$	$-3/2$	$-5/2$	1	$3/2$
$x_1 =$	$-1/2$	$-3/2$	-1	$5/2$
$y_3 =$	2	7	2	-13
$y_4 =$	$1/2$	$5/2$	2	$1/2$
$Z =$	-2	-7	-3	10

Наименьшее симплексное отношение ($3/2$) определяет разрешающую строку — первую.



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 133 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

С выделенным разрешающим элементом рассчитываем новую симплексную таблицу (табл. 10.4).

В табл. 10.4 решение неопорное, поскольку базисная неизвестная $y_3 = -13$. Просматривая элементы третьей строки, видим, что она не содержит отрицательных элементов.

Следовательно, задача не имеет опорного решения, а система ограничений задачи несовместна.



*Кафедра
ПМ и ТП*

Начало

Содержание



Страница 134 из 293

Назад

На весь экран

Закрыть

ЛЕКЦИЯ 11

Алгоритм нахождения оптимального решения

Предположим, что в результате нескольких шагов жордановых преобразований найдено опорное решение задачи (все базисные неизвестные принимают положительные значения), т.е. имеем таблицу, в которой часть игреков переброшена в верхнюю часть, а часть иксов перешла в число базисных неизвестных **табл. 11.1**.

Таблица 11.1

Б.Н \ Н.Н	$-y_1$	$-y_2$	$\dots$	$-x_k$	$\dots$	$-x_n$	1
$x_1 =$	b_{11}	b_{12}	$\dots$	b_{1k}	$\dots$	b_{1n}	b'_1
$x_2 =$	b_{21}	b_{22}	$\dots$	b_{2k}	$\dots$	b_{2n}	b'_2
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$y_i =$	b_{i1}	b_{i2}	$\dots$	b_{ik}	$\dots$	b_{in}	b'_i
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$y_s =$	b_{s1}	b_{s2}	$\dots$	b_{sk}	$\dots$	b_{sn}	b'_s
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$y_m =$	b_{m1}	b_{m2}	$\dots$	b_{mk}	$\dots$	b_{mn}	b'_m
$Z =$	p_1	p_2	$\dots$	p_k	$\dots$	p_n	P

Все элементы таблицы $b'_i > 0, i = \overline{1, m}$. В строке функции среди элементов $p_j, j = \overline{1, n}$, а также среди элементов $b_{ij}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ могут быть положительные, отрицательные и равные нулю.



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 135 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

Рассмотрим, как найти максимум функции Z , в частности, от чего зависит ее значение.

За разрешающий столбец выберем столбец с номером k , полагая, что в этом столбце элемент $b_{sk} > 0$. И другие элементы k -столбца $b_{ik} (i = \overline{1, n})$ могут быть положительными. Чтобы сохранить положительные элементы в столбце свободных членов, выберем разрешающую строку по наименьшему симплексному отношению $t : t = \min_i \frac{b_i}{b_{ik}} = \frac{b'_s}{b_{sk}}$. Следовательно, строка с номером s — разрешающая, а разрешающим элементом будет b_{sk} . Подчеркнем еще раз, что $b'_s > 0$ и $b_{sk} > 0$.

Найдем, чему равно в новой таблице значение функции $'$:

$$P' = \frac{pb_{sk} - b'_s p_k}{b_{sk}} = P - \frac{b'_s p_k}{b_{sk}}$$

Очевидно, что величина P' зависит от значения элемента p_k строки функции. Рассмотрим возможные значения элемента p_k и определим, как будет вести себя величина $'$ по отношению к значению функции P в табл. 11.1

1. Пусть $p_k = 0$, тогда $P' = P$, т.е. если за разрешающий столбец выбрать столбец, в котором элемент в строке функции $p_k = 0$, то значение функции в новой таблице не изменится.

2. Пусть $p_k > 0$, тогда $P' = P$, т.е. значение функции уменьшится при любом значении P .

3. Пусть $p_k < 0$, тогда $P' > P$, т.е. значение функции в новой таблице



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 136 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

увеличится.

Теперь уже не трудно определить признак оптимальности значения функции. Этот признак сформулирован в теореме об оптимальности решения задачи линейной оптимизации.

Теорема. *Если в строке функции все коэффициенты, за исключением свободного члена, неотрицательные, то решение задачи будет оптимальным. Если среди коэффициентов строки функции имеются отрицательные, то значение функции можно улучшить (увеличить).*

Доказательство этой теоремы вытекает из проведенного выше исследования зависимости значения функции от значения коэффициентов ее строки в симплексной таблице.

Сформулируем *алгоритм нахождения оптимального (максимального) значения функции* задачи линейной оптимизации.

1. Считаем, что в симплексной таблице получено опорное решение. Просматриваем коэффициенты строки функции этой таблицы. Если все они неотрицательные, то оптимальное решение задачи достигнуто. В этом решении все небазисные неизвестные равны нулю, а базисные — свободным членам таблицы.

2. Если среди коэффициентов строки функции имеются отрицательные (за исключением свободного члена), то выбираем среди них наибольший по абсолютной величине, и столбец, в котором находится этот коэффициент, берем за разрешающий.

3. Разрешающую строку находим по наименьшему симплексному от-



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 137 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

ношению.

4. С найденным разрешающим элементом рассчитываем новую таблицу. Анализ новой таблицы начинаем с пункта 1 настоящего алгоритма. Так действуем до тех пор, пока не найдем оптимального решения или не убедимся, что его не существует.

5. Если в разрешающем столбце симплексной таблицы все элементы неположительны, то разрешающую строку выбрать невозможно. Задача в этом случае решения не имеет. Функция в области допустимых решений задачи не ограничена сверху и может принимать сколь угодно большое значение ($Z \rightarrow +\infty$).

Докажем последнее утверждение.

Пусть в табл. 11.1 элемент $p_k < 0$, а элементы $b_{ik} \leq 0, i = \overline{1, m}$. Выпишем из таблицы i – ограничение и функцию:

$$y_i = b_{i1}(-y_1) + b_{i2}(-y_2) + \dots + b_{ik}(-x_k) + \dots + b_{in}(-x_n) + b'_i,$$

$$Z = p_1(-y_1) + p_2(-y_2) + \dots + p_k(-x_k) + \dots + p_n(-x_n) + P.$$

Покажем, что для любого $i = \overline{1, m} y_i \geq 0$.

Положив все небазисные переменные равными нулю, за исключением элемента x_k , получим

$$y_i = b_{ik}(-x_k) + b'_i, i = \overline{1, m}, \quad (11.1)$$



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 138 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

$$Z = p_k(-x_k) + p \quad (11.2)$$

Из равенства (11.1) видно, что $y_i > 0$ при любых сколь угодно больших положительных значениях x_k , так как $b_{ik} \leq 0$, а $b'_i > 0, i = \overline{1, m}$. В этом случае и $Z \rightarrow +\infty$ при $x_k \rightarrow +\infty$, поскольку $p_k < 0$, а $p_k(-x_k) \rightarrow +\infty$.

Если в строке функции симплексной таблицы с **оптимальным решением** задачи линейной оптимизации имеется хотя бы один нулевой элемент (за исключением элемента, находящегося в столбце свободных членов), то задача имеет множество оптимальных планов.

Допустим, что решение в **табл. 11.1** оптимальное ($Z^* = P$). Пусть в этой таблице элемент Z -строки $p_k = 0$. Оптимальное решение в данной таблице $Z_1^* = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}, y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \dots, y_m^{(1)})$. Преобразовав таблицу с k -м разрешающим столбцом, получим в новой таблице другой набор базисных и небазисных неизвестных, а значение функции не изменится, т.е. $Z^* = P$. Оптимальное решение в новой таблице обозначим $Z_2^* = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}, y_1^{(2)}, y_2^{(2)}, \dots, y_m^{(2)})$. Учитывая, что оптимальное решение достигается в вершинах многогранника решений Z_1^* и Z_2^* , то оно достигается и в любой точке, которая является выпуклой линейной комбинацией Z_1^* и Z_2^* .

В заключение рассмотрим решение задач линейной оптимизации на минимум функции.

Пусть необходимо найти минимум функции



*Кафедра
ПМ и ТП*

Начало

Содержание



Страница 139 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

при заданной системе ограничений. Для решения задачи достаточно умножить на (-1) функцию Z и найти максимум функции

$$-Z = c_1x_1 - c_2x_2 - \dots - c_nx_n$$

а $\min Z = \max(-Z)$.

Значения неизвестных в оптимальном решении задачи с измененной функцией совпадают со значениями неизвестных в оптимальном решении задачи с исходной функцией.

Пример Предприятие выпускает три вида продукции: I, II, III. Для производства продукции оно располагает ресурсами в следующих объемах (единиц):

Комплектующие изделия	3120
Сырье	3000
Материалы	310

Расход ресурсов на единицу продукции каждого вида представлен в таблице:

Прибыль от единицы продукции I вида составляет 240 млн руб., II — 210 млн руб. и III - 180 млн руб.



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 140 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

Ресурсы	Виды продукции		
	I	II	III
Комплекующие изделия	4	6	8
Сырье	2	8	10
Материалы	6	9	4

Требуется определить производственную программу предприятия, обеспечивающую максимальную прибыль.

Составим математическую модель задачи. Обозначим через x_1, x_2, x_3 искомые объемы производства продукции, а через Z — прибыль предприятия от производства и реализации всей продукции, которая с учетом обозначений определяется следующей функцией:

$$Z = 240x_1 + 210x_2 + 180x_3 \rightarrow \max.$$

Запишем ограничения по ресурсам:

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 \leq 3120, \\ 2x_1 + 8x_2 + 10x_3 \leq 3000, \\ 6x_1 + 9x_2 + 4x_3 \leq 3150, \end{cases}$$

Объемы производства продукции не могут быть отрицательными, поэтому $x_1, x_2, x_3 > 0$.

Приведем ограничения задачи к каноническому виду, добавив к их левым частям соответствующие положительные неизвестные y_1, y_2, y_3 .



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 141 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

В результате ограничения запишутся в виде равенств:

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 + y_1 = 3120, \\ 2x_1 + 8x_2 + 10x_3 + y_2 = 3000, \\ 6x_1 + 9x_2 + 4x_3 + y_3 = 3150, \end{cases}$$

Дополнительные неизвестные y_1, y_2, y_3 будут базисными, так как им соответствуют единичные векторы, которые образуют базис в трехмерном пространстве. Разрешив систему относительно базисных неизвестных, получим:

$$y_1 = -4x_1 - 6x_2 - 8x_3 + 3120 \geq 0,$$

$$y_2 = -2x_1 - 8x_2 - 10x_3 + 3000 \geq 0,$$

$$y_3 = -6x_1 - 9x_2 - 4x_3 + 3150 \geq 0.$$

Занесем условия задачи в симплексную таблицу .

Базисное решение задачи в **табл. 11.2** следующее: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ (как небазисные неизвестные), т.е. предприятие продукции не выпускает. Тогда $y_1 = 3120, y_2 = 3000, y_3 = 3150$. Игроки означают количество неиспользуемых ресурсов. В самом деле, коль продукция не выпускается, то, естественно, ресурсы не используются, и прибыль при этом равна нулю ($Z = 0$).



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 142 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

Решение задачи опорное, так как базисные неизвестные принимают положительные значения. Переходим к поиску оптимального решения.

Таблица 11.2

Б.Н \ Н.Н	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1	$t \geq 0$
$y_1 =$	4	6	8	3120	780
$y_2 =$	2	8	10	3000	1500
$y_3 =$	6	9	4	3150	525
$Z =$	-240	-240	-180	0	

В строке функции наибольший по абсолютной величине (среди отрицательных) элемент находится в первом столбце, поэтому этот столбец берем за разрешающий и выделяем его сверху стрелкой. Разрешающую строку находим по наименьшему симплексному отношению

$$t = \min\left(\frac{3120}{4}; \frac{3000}{2}; \frac{3150}{6}\right) = \min(780; 1500; 525) = 525.$$

Наименьшее симплексное отношение соответствует 3-й строке, следовательно, она будет разрешающей. Отметим эту строку в **табл. 11.2** стрелкой. Выделим в таблице и разрешающий элемент, который находится на пересечении разрешающих строки и столбца.

Симплекс-метод хорошо согласуется с экономической логикой. За разрешающий столбец мы выбрали первый, так как от единицы продукции



*Кафедра
ПМ и ТП*

Начало

Содержание



Страница 143 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

I вида самая высокая прибыль — 240 млн руб. Симплексные отношения означают возможные объемы производства продукции I вида из имеющихся ресурсов, а наименьшее симплексное отношение означает максимально возможный выпуск этой продукции. В самом деле, третий ресурс позволяет изготовить лишь 525 единиц продукции, в то время как первый ресурс — 780, а второй — I 500.

Рассчитаем элементы новой симплексной таблицы (табл. 15.3).

Таблица 11.3

Б.Н \ Н.Н	$-y_1$	$-x_2$	$-x_3$	1	$t \geq 0$
$y_1 =$	-2/3	0	16/3	1020	191.25
$y_2 =$	-1/3	5	26/3	1950	225
$x_1 =$	1/6	3/2	2/3	525	787.5
$Z =$	40	150	-20	126000	

Выпишем решение из табл. 11.3:

$$x_1 = 525, x_2 = x_3 = 0, y_2 = 1920, y_2 = 1950, y_3 = 0,$$

$$Z = 126000(.).$$

Это решение означает следующее: предприятие может изготовить продукции I вида в объеме 525 единиц, при этом оно получит прибыль в размере 126 000 млн руб., третий ресурс будет использован полностью



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 144 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

($y_3 = 0$), а первый и второй ресурсы не используются в объемах 1 020 и 1 950 единиц соответственно. Решение в табл. 2.8 не является оптимальным, так как в строке функции имеется отрицательный элемент (-20).

В соответствии с алгоритмом выберем разрешающий элемент (16/3) и осуществим еще одно симплексное преобразование. табл. 11.4 получено оптимальное решение:

$$x_1 = 397,5; x_2 = 0; x_3 = 191,25; y_1 = y_3 = 0; y_2 = 292,5.$$

$$Z_{max} = 129825(.).$$

Таблица 11.4

Б.Н	Н.Н				1
		$-y_1$	$-x_2$	$-y_1$	
$x_3 =$					191.25
$y_2 =$					292.5
$x_1 =$					397.5
$Z =$		37.5	150	3.75	129 825

Из решения видно, что продукция III вида с самой малой прибылью (180 млн руб.) вошла в оптимальное решение задачи. Это произошло потому, что у этого вида продукции низкая норма расхода третьего ресурса. Поэтому оптимальное сочетание выпуска продукции I и III вида



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 145 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

позволило увеличить прибыль по сравнению с предыдущим решением на 3 825 млн руб.



*Кафедра
ПМ и ТП*

Начало

Содержание



Страница 146 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

ЛЕКЦИЯ 12

Устойчивость оптимального решения

Любую задачу ЛП с экономической точки зрения можно рассматривать как задачу о распределении ограниченных ресурсов $b_1, b_2, \dots, b_m$ между различными потребителями. Например, между некоторыми $ТПP_i$, которые представлены столбцами $a^1, a^2, \dots, a^n$ матрицы ограничений задачи. Любое допустимое решение задачи ЛП $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ даёт конкретное распределение, указывая ту долю каждого из ресурсов, которая должна быть использована при осуществлении соответствующего $ТПP_i$. Если в задаче при малом количестве переменных имеется большое количество ограничений ($m > n$), то переходят к формулировке двойственной задачи.

Одновременно с желанием определить оптимальные значения для каждого из решений x_j у руководителя может возникнуть желание выяснить:

- а) каким образом отразится на полученной прибыли увеличение каждого из потребляемых ресурсов;
- б) каким способом необходимо совершенствовать технологические процессы для роста прибыли;
- в) возможно ли изменение стоимости сырья за счёт замены его менее дефицитным.

Подобного рода вопросы зачастую оказываются для руководителя



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 147 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

предприятия более важными, чем определение оптимальных значений X_j . Решение этих проблем и называют **анализом на чувствительность** линейной модели. Теория двойственности задач ЛП позволяет проводить анализ моделей ЛП на чувствительность.

Если задана **прямая задача** $\max W(X) = \sum_{j=1}^n c_j x_j$ при условиях $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, i = \overline{1, m}; x_j \geq 0; j = \overline{1, n}$, то это означает, что требуется максимизировать доход $W(X)$ от реализации плана производства X при известной интенсивности расхода i -го ресурса при j -м способе $ТПP_i, (a_{ij})$ и известных уровнях i -го ресурса (b_i) .

12.1 Варьирование ресурсов

Ресурсы заданы матрицей $B = \| b_i \|$. Ставится задача - найти ответы на вопросы:

- при каких вариациях правых частей ограничений оптимальный план x_0 не изменится:

- как эти вариации скажутся на величине дохода $W(X)$.

Если i , получают вариации Δb_i то это приводит к вариациям плана $x_0 \rightarrow x_0(b_0 + \Delta b)$ и целевой функции $W(x_0, b_0 + \Delta b)$. Пусть эти вариации Δb таковы, что план $x_0(b_0 + \Delta b)$ остаётся допустимым (т. е. удовлетворяет условию неотрицательности) $\Delta W_{\max}(b) = \frac{W(x_0, b_0 + \Delta b) - W(x_0, b_0)}{\Delta b}$

Устремив $\Delta b \rightarrow 0$. получим $\lim_{\Delta b_i \rightarrow 0} \frac{\Delta W_{\max}(b)}{\Delta b_i} = \frac{\partial W_{\max}(b)}{\partial b_i}$



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 148 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

Здесь b рассматривается как варьируемый параметр. Согласно теореме о двойственности $W_{max}(0) = \sum_{j=1}^n c_j x_j^0 = \sum_{i=1}^m b_i y_i^*$, $\frac{\partial W_{max}(b)}{\partial b_i} = y_i^*$; $i = \overline{1, m}$.

Таким образом, оптимальные значения двойственных переменных y_i^* определяют вклад каждого ресурса в доход W_{max} при оптимальном значении x_0 . Эта величина численно равна дополнительному доходу при увеличении i -го ресурса b_i на единицу и при условии, что ресурсы используются оптимальным образом. Итак, величины y_i^* служат показателями возможности i -го ресурса для системы. Чем больше значение y_i^* , тем существеннее вклад i -го ресурса в функцию дохода W_{max} и тем выгоднее его увеличение. Если же некоторое $y_i^* = 0$, то это означает, что i -й ресурс не является существенным ограничением для системы. Величины y_i^* двойственной задачи часто называют скрытыми доходами (маргинальными оценками ресурсов) системы. Они могут рассматриваться как потенциальная возможность получения дополнительной прибыли за счёт увеличения соответствующего ресурса при условии, что система функционирует нормально.

12.2 Варьирование целевой функцией

Руководителя предприятия может интересовать возможность изменения коэффициентов целевой функции $\{c_j\}$; $j = \overline{1, n}$. Ставится вопрос:



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 149 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

при каких условиях найденный ранее оптимальный план останется оптимальным и каковы при этом будут вариации коэффициентов c_j . Пусть c_j изменилось на величину $c_i^* = c_j + \delta_j$. Обозначим через I_B множество индексов, базисных векторов, а I_{NB} - множество индексов небазисных переменных в оптимальном решении x_0 . Найдём величину оценок после вариации для двух случаев:

1) если $r \in I_{NB}$ то $\Delta_j^H = \Delta_j; j \neq r; \Delta_j^H = \sum_{i \in I_B} c_i a_{ir} - (c_j - \delta_i);$

2) если $r \in I_B$. то

$$\Delta_j^H = \sum_{i \in I_B} c_i^H a_{ij} - (c_j - \delta_i) = \sum_{i \in I_B} c_i a_{ij} - \delta_j a_{ij} - c_j; j \in I_{NB}. \quad (12.1)$$

Для сохранения оптимальности прежнего плана при вариациях коэффициентов c_j необходимо и достаточно сохранение знаков оценки ($\Delta_j^H \geq 0$) для всех небазисных переменных. Поэтому из этого условия с помощью уравнений (12.1) можно определить допустимые вариации коэффициентов целевой функции Δc_j . при которых сохраняется прежнее **оптимальное решение**.

Применение моделей ЛП при решении производственных задач сопряжено со следующими трудностями.

1. При формулировке ограничений оптимизации необходимо быть очень осторожным, чтобы не просмотреть важные ограничения. Но большое



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 150 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

количество ограничений может привести к тому, что оптимизация вообще окажется невозможной.

2. Используется ЭВМ в качестве инструмента организации итеративных вычислений. На практике число ограничений доходит до 200. а число неизвестных при этом в 3-4 раза превышает число ограничений.

3. Поскольку ММ ЛП представляют собой некоторую абстракцию, то нет полной гарантии, что первая же проба решения задачи приводит сразу же к успеху. И поэтому каждый раз необходима проверка решений задачи ЛП на здравый смысл.



*Кафедра
ММ и ТП*

Начало

Содержание



Страница 151 из 293

Назад

На весь экран

Закрыть

ЛЕКЦИЯ 13

Симплекс-метод

Из геометрической интерпретации задачи линейной оптимизации видно, что максимум или минимум функции достигается в угловой точке выпуклого многогранника — ОДР — системы ограничений. Поэтому в основу симплекс-метода положена идея рассмотрения и испытания на оптимальность только угловых точек — вершин многогранника, а не всего бесконечного множества его точек.

Итак, рассмотрим некоторую исходную задачу линейной оптимизации, заданную в симметричной форме:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max, \quad (13.1)$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i, i = \overline{1, m}, \quad (13.2)$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, n}. \quad (13.3)$$

После приведения ограничений задачи к каноническому виду имеем:



Кафедра
ММ и ТП

Начало

Содержание



Страница 152 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

$$(13.4)$$

при ограничениях

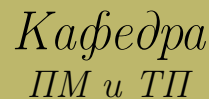
$$(13.5)$$

при ограничениях

$$(13.6)$$

$$(13.7)$$

где $\bar{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ — векторы, $\bar{c} \cdot \bar{x}$ — скалярное произведение векторов, $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_{n+m}$ и p_0 — m -мерные векторы, составленные из коэффициентов при неизвестных и свободных членах системы ограничений задачи:



Содержание



[Назад](#)

Заккрыть

$$\overline{(p_1)} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \overline{(p_1)} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, \overline{(p_n)} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \overline{(p_{n+1})} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\overline{(p_{n+2})} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \overline{(p_{n+m})} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}, \overline{(p_0)} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Векторы $\overline{p_{n+1}}, \overline{p_{n+2}}, \dots, \overline{p_{n+m}}$ единичные и линейно независимые. Поскольку количество этих векторов равно m , то они образуют базис в m -мерном пространстве (базис l -мерного векторного пространства образует любая совокупность из n линейно независимых векторов данного пространства).

Неизвестные $y_i, i = \overline{1, m}$, соответствующие m базисным векторам, будем называть *базисными*, а остальные неизвестные $x_j, j = \overline{1, n}$ соответствующие небазисным векторам, — *небазисными (свободными)*.

Выразим в системе ограничений **17.4** базисные неизвестные через



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 154 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

небазисные, т.е. разрешим систему относительно базисных неизвестных:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = a_{11}(-x_1) + a_{12}(-x_2) + \dots + a_{1k}(-x_k) + \dots + a_{1n}(-x_n) + b_1, \\ y_2 = a_{21}(-x_1) + a_{22}(-x_2) + \dots + a_{2k}(-x_k) + \dots + a_{2n}(-x_n) + b_2, \\ , \\ y_i = a_{i1}(-x_1) + a_{i2}(-x_2) + \dots + a_{ik}(-x_k) + \dots + a_{in}(-x_n) + b_i, \\ , \\ y_r = a_{r1}(-x_1) + a_{r2}(-x_2) + \dots + a_{rk}(-x_k) + \dots + a_{rn}(-x_n) + b_r, \\ , \\ y_m = a_{m1}(-x_1) + a_{m2}(-x_2) + \dots + a_{mk}(-x_k) + \dots + a_{mn}(-x_n) + b_m. \end{array} \right. \quad (13.8)$$

Придавая небазисным неизвестным в системе (13.8) некоторые числовые значения, можно однозначно найти значения базисных неизвестных, т.е. получить частные решения системы. Таких частных решений существует бесконечное множество.

Частное решение, в котором все небазисные переменные равны нулю, называют *базисным решением* системы.

Итак, базисное решение системы (13.8) будет следующим:

$$x_j = 0, j = \overline{1, n}; y_i = b_i, i = \overline{1, m}.$$

Очевидно, что значение функции (13.1) при данном решении равно нулю ($Z = 0$).



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 155 из 293

[Назад](#)

На весь экран

Закрывать

Если в решении задачи линейной оптимизации базисные неизвестные принимают неотрицательные значения, то такое решение называют *опорным (опорным планом)*. Если же хотя бы одна базисная неизвестная принимает отрицательное значение, то решение задачи будет неопорным.

Опорному решению задачи линейной оптимизации геометрически соответствует вершина области допустимых решений.

Опорное решение задачи называется невырожденным, если все базисные неизвестные больше нуля. Если же хотя бы одна базисная неизвестная в решении задачи равна нулю, то такое решение называется вырожденным.

Далее рассматривается решение вырожденных задач линейной оптимизации.

Этап 1. Содержательная постановка задачи. Предприятие выпускает неоднородную продукцию. Руководитель хочет определить уровни производства продукции по четырём ТПР (x_1, x_2, x_3, x_4).

Доход от выпуска единицы продукции по i -му ТПР составляет c_i . При этом выпуске продукции предприятие несёт следующие затраты:

- трудозатраты (общим числом А единиц);
- расход материала 1 (общим числом В единиц);
- расход материала 2 (общим числом D единиц);

Этап 2. Составим таблицу, в которую занесём содержательную ин-



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 156 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

формацию о предприятии. (табл.13.1)

Таблица 13.1

Характеристики	Раз- мер- ность	На единицу продукции 1-го типа		На единицу продукции 2-го типа		Име- ется в наличии
		ТПР ₁	ТПР ₂	ТПР ₃	ТПР ₄	
Трудозатраты	ед.	a_1	a_2	a_3	a_4	A
Расход материала 1	ед.	b_1	b_2	b_3	b_4	B
Расход материала 2	ед.	d_1	d_2	d_3	d_4	D
Доход с единицы продукции	руб.	c_1	c_2	c_3	c_4	max
Объем выпуска продукции	ед.	x_1	x_2	x_3	x_4	найти

Этап 3 . Перевод табличной формы задачи в каноническую. Необходимо найти вектор, четырьмя компонентами которого будут объёмы выпуска продукции по $ТПР_i W = \max \sum_{i=1}^4 c_i x_i$ при ограничениях

$$\sum_{i=1}^4 a_i x_i \leq A; \sum_{i=1}^4 b_i x_i \leq B; \sum_{i=1}^4 d_i x_i \leq D \quad x_i \geq 0; i = \overline{1, 4}.$$

Пример 3. Задача составления смесей жидкостей.

Этап 1. Содержательная постановка задачи. Предприятие торгует смесями жидкостей и выпускает три вида продуктов по трём технологическим процессам. Отличие $ТПР_i (i = \overline{1, 3})$ состоит в разных комбинациях двух составных компонент. У предприятия имеется всего в наличии S_1 количества компоненты 1 и S_2 количества компоненты 2. Спрос на



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 157 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

каждый вид продукции различен и составляет соответственно $D_1, D_2 D_3$. Однако спрос может быть удовлетворён при наличии сертификата каждого продукта. Так, для продукта, полученного по ТПР₁ спрос определяется концентрацией составляющих a_1/r_1 для первой компоненты и a_2/r_1 - для второй. Для продукта, полученного по ТПР₂, спрос определяется концентрацией составляющих b_1/r_2 для первой компоненты и b_2/r_2 - для второй. Для продукта, полученного по ТПР₃, спрос определяется концентрацией второй составляющей $1/r_3$. Доход, получаемый от продажи продуктов, полученных по разным технологиям. различен и составляет P_{ij} (где $i = 1, 2$ - номер компоненты в продукте, $j = 1, 2, 3$ - номер ТПР _{j}). Требуется найти уровень производства x_{ij} каждой компоненты в j -м ТПР.

Этап 2. Табличная формулировка содержательного описания. Составим таблицу, в которой будут следующие группы строк: наличие химической компоненты, спрос, технологии, доход, уровень производства.

Этап 3 . Перевод табличной формы в каноническую. Необходимо найти матрицу $\|x_{ij}\|$ уровней производства по разным ТПР _{j} . дающую максимум целевой функции $W = \max \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^3 P_{ij} x_{ij}$ при ограничениях на объёмы потребляемых химических компонент $x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq S_1; x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq S_2$.

Запланированные выпуски продукции должны удовлетворять имеющемуся спросу $x_{11} + x_{21} \geq D_1; x_{12} + x_{22} \geq D_2; x_{13} + x_{23} \geq D_3$



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 158 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

Технологические ограничения на приготовление смеси будут иметь следующий вид.

Условия	Химическая компонента 1 в продукте, полученном по			Химическая компонента 2 в продукте, полученном по			Ограничения
	ТПР ₁	ТПР ₂	ТПР ₃	ТПР ₁	ТПР ₂	ТПР ₃	
Наличие компоненты 1	1	1	1				$\leq S_1$
Наличие компоненты 2				1	1	1	$\leq S_2$
Спрос на продукцию 1	1			1			$\geq D_1$
Спрос на продукцию 2		1			1		$\geq D_2$
Спрос на продукцию 3			1			1	$\geq D_3$
Технолог. ограничения 1	a_1/r_1			a_2/r_1			$\geq D_1$
Технолог. ограничения 2		b_1/r_2			b_2/r_2		$\geq D_2$
Технолог. ограничения 3						$1/r_3$	≥ 0
Доход	P_{11}	P_{12}	P_{13}	P_{21}	P_{22}	P_{23}	max
Уровень производства	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	найти

На продукт, полученный по ТПР₁: $\frac{a_1}{r_1}x_{11} + \frac{a_2}{r_1}x_{21} \geq D_1 = x_{11} + x_{21}$

После преобразования имеем $\frac{a_1x_{11}+a_2x_{21}}{x_{11}+x_{21}} \geq r_1$

На продукт, полученный по ТПР₂: $\frac{b_1}{r_2}x_{12} + \frac{b_2}{r_2}x_{22} \geq D_2 = x_{12} + x_{22}$

После преобразования имеем $\frac{b_1x_{12}+b_2x_{22}}{x_{12}+x_{22}} \geq r_2$

На продукт, полученный по ТПР₃: $\frac{x_{13}}{x_{23}} \geq r_3$

Наконец, последняя группа ограничений $x_{ij} \geq 0; i = \overline{1, 2}; j = \overline{1, 3}$.



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 159 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

ЛЕКЦИЯ 14

Транспортная задача

Существуют частные типы задач **линейного программирования**, которые, в силу особой своей структуры, допускают решение более простыми методами. Из них мы остановимся только на одной — так называемой «транспортной задаче» (ТЗ). Она ставится следующим образом: имеются n пунктов отправления (ПО) $A_1, A_2, \dots, A_n$, в которых сосредоточены запасы каких-то однородных грузов в количестве соответственно $a_1, a_2, \dots, a_m$ единиц. Имеются n пунктов назначения (ПН) $B_1, B_2, \dots, B_n$, подавших заявки соответственно на $b_1, b_2, \dots, b_n$ единиц груза. Сумма всех заявок равна сумме всех запасов:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

Известны стоимости c_{ij} перевозки единицы груза от каждого пункта отправления A_i до каждого пункта назначения B_j ($i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n$). Все числа сум, образующие прямоугольную таблицу (матрицу), заданы:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \quad (14.1)$$



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 160 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

Коротко матрицу (14.1) будем обозначать (c_{ij}) . Считается, что стоимость перевозки нескольких единиц груза пропорциональна их числу. Требуется составить такой план перевозок (откуда, куда и сколько единиц везти), чтобы все заявки были выполнены, а общая стоимость всех перевозок минимальна. Поставим эту задачу как задачу линейного программирования. Обозначим x_{ij} , — количество единиц груза, отправляемого из i -го ПО A_i в j -и ПН B_j . Неотрицательные переменные x_{ij} тоже можно записать в виде матрицы

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix} \quad (14.2)$$

которую мы будем коротко обозначать (x_{ij}) . Совокупность чисел (x_{ij}) (14.2) мы будем называть «планом перевозок», а сами величины x_{ij} — «перевозками». Эти неотрицательные переменные должны удовлетворять следующим условиям.

1. Суммарное количество груза, направляемого из каждого ПО во все ПН, должно быть равно запасу груза в данном пункте. Это даст нам n



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 161 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

условий-равенств:

[illegible]

2. Суммарное количество груза, доставляемого в каждый ПН из всех ПО, должно быть равно заявке, поданной данным пунктом. Это даст нам n условий-равенств:

[illegible]

3. Суммарная стоимость всех перевозок, то есть сумма величин x_{ij} , умноженных на соответствующие стоимости c_{ij} , должна быть минимальной:

$$L = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \Rightarrow \min \quad (14.5)$$

где знак двойной суммы означает, что суммирование производится по всем комбинациям индексов i и j , т. е. по всем парам ПО — ПН.



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 162 из 293

[Назад](#)

На весь экран

Закрывать

Мы видим, что перед нами — задача линейного программирования с условиями-равенствами (14.5), (14.4) и минимизируемой линейной функцией (14.5). Особенностью этой задачи является то, что все коэффициенты в условиях (14.5), (14.4) равны единице — это позволяет решать задачу очень простыми способами. О них и пойдет речь.

Прежде всего, замечаем, что условия-равенства (14.3), (14.4) не являются линейно независимыми, так как их правые части связаны условием (1). Число линейно независимых среди уравнений (14.3), (14.4) равно не $m + n$ (числу уравнений), а $m + n - 1$. Общее число переменных x_{ij} в нашей задаче равно mn ; как бы ни разрешать уравнения (14.3), (14.4), число базисных переменных будет равно $m + n - 1$, а число свободных переменных $k = mn - (m + n - 1) = (m - 1)(n - 1)$.

Мы знаем, что в задаче **линейного программирования** оптимальное решение достигается в одной из вершин ОДР, в опорной точке, где по крайней мере k переменных равны нулю. Значит, в нашем случае для оптимального плана по крайней мере $(m - 1)(n - 1)$ перевозок должны быть равны нулю (из соответствующих ПО в соответствующие ПН ничего не перевозится).

Будем называть любой план перевозок допустимым, если он удовлетворяет условиям (14.3), (14.4) (все заявки удовлетворены, все запасы исчерпаны). Допустимый план будем называть опорным, если в нем отличны от нуля не более $m + n - 1$ базисных перевозок, а остальные перевозки равны нулю. План (x_{ij}) будем называть оптимальным, если



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 163 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

он, среди всех допустимых планов, приводит к минимальной суммарной стоимости перевозок ($L = \min$). В силу особой структуры ТЗ при ее решении не приходится долго и нужно разрешать и переразрешать систему уравнений. Все **операции** по нахождению оптимального плана сводятся к манипуляциям непосредственно с таблицей, где в определенном порядке записаны условия транспортной задачи: перечень ПО и ПН, заявки и запасы, а также стоимости перевозок c_{ij} . По мере заполнения этой таблицы в ее клетках проставляются сами перевозки x_{ij} . Транспортная таблица состоит из m строк и n столбцов. В правом верхнем углу каждой клетки мы будем ставить стоимость c_{ij} перевозки единицы груза из A_i в B_j , а центр клетки оставим свободным, чтобы помещать в нее саму перевозку x_{ij} . Клетку таблицы, соответствующую пунктам $A_i B_j$ будем кратко обозначать (i, j) .

Таблица 14.1

$\begin{array}{c} \text{ПН} \\ \text{ПО} \end{array}$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	запасы a_i
A_1	13	7	14	7	5	30
A_2	11	8	12	6	8	48
A_3	6	10	10	8	11	20
A_4	14	8	10	10	15	30
Заявки b_j	18	27	42	15	26	128



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 164 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

Пример транспортной таблицы, где приведены условия задачи и стоимости перевозок, но нет еще самих перевозок, дан в таблице (14.1), где $m = 4, n = 5$.

Прежде всего займемся составлением опорного плана. Это в транспортной задаче очень просто: можно, например, применить так называемый «метод северо-западного угла». Продемонстрируем его непосредственно на конкретных данных таблицы (14.1). Начнем заполнение транспортной таблицы с левого верхнего («северо-западного») угла. Пункт B_1 подал заявку на 18 единиц груза; удовлетворим ее из запасов пункта

A_1 После этого в нем остается еще $30 - 18 = 12$ единиц груза; отдадим их пункту B_2 . Но заявка этого пункта еще не удовлетворена; выделим недостающие 15 единиц из запасов пункта A_2 и т. д. Рассуждая точно таким же образом, заполним до конца перевозками x_{ij} транспортную таблицу (таблица 14.2).

Таблица 14.2

$\begin{array}{c} \text{пн} \\ \text{по} \end{array}$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	запасы a_i
A_1	18^{13}	12^7	14	7	5	30
A_2	11	15^8	33^{12}	6	8	48
A_3	6	10	9^{10}	11^8	11	20
A_4	14	8	10	4^{10}	26^{15}	30
Заявки b_j	18	27	42	15	26	128



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 165 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

Проверим, является ли этот план допустимым: да, потому что в нем сумма перевозок по строке равна запасу соответствующего пункта отправления, а сумма перевозок по столбцу — заявке соответствующего пункта назначения; значит, все в порядке — все заявки удовлетворены, все запасы израсходованы (сумма запасов равна сумме заявок и выражается числом 128, стоящим в правом нижнем углу таблицы). Здесь и в дальнейшем мы проставляем в таблице только отличные от нуля перевозки, а клетки, соответствующие нулевым перевозкам, оставляем «свободными». Проверим, является ли план перевозок, данный в таблице 19.2, опорным (не слишком ли много там отличных от нуля, «базисных» перевозок?). Число свободных клеток с нулевыми перевозками в таблице 19.2 равно как раз $(m - 1)(n - 1) = 3 * 4 = 12$, так что план — опорный. Вот как нам его удалось легко построить!

Теперь пора подумать о том, является ли этот план оптимальным — т. е. минимальна ли для него общая стоимость перевозок? Скорее всего, нет (ведь составляя опорный план, мы совсем не думали о стоимостях). Так и есть — план не оптимальный. Например, сразу видно, что можно его улучшить, если произвести в нем «циклическую перестановку» перевозок между клетками таблицы, уменьшив перевозки в «дорогой» клетке (2.3) со стоимостью 12, но зато увеличив перевозки в «дешевой» клетке (2.4) со стоимостью 6. Чтобы план оставался опорным, мы должны при этом сделать одну из свободных клеток базисной, а одну из базисных — свободной. Сколько единиц груза можем мы перенести



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 166 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

по циклу $(2.4) \rightarrow (3.4) \rightarrow (3.3) \rightarrow (2.3)$, увеличивая перевозки в нечетных вершинах цикла и уменьшая — в четных? Очевидно, не больше, чем 11 единиц (иначе перевозки в клетке (3.4) стали бы отрицательными). Очевидно, в результате циклического переноса допустимый план остается допустимым — баланс запасов и заявок не нарушается. Ну что же, произведем этот перенос и запишем новый, улучшенный план перевозок в таблице 14.3.

Таблица 14.3

по \ по	ПН	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	запасы a_i
A_1		18 ¹³	12 ⁷	14	7	5	30
A_2		11	15 ⁸	22 ¹²	11 ⁶	8	48
A_3		6	10	20 ¹⁰	8	11	20
A_4		14	8	10	4 ¹⁰	26 ¹⁵	30
Заявки b_j		18	27	42	15	26	128

Теперь посмотрим, чего мы добились, сколько сэкономили? Общая стоимость плана, показанного в таблице 14.2, равна $L_1 = 18 * 13 + 12 * 7 + 15 * 8 + 33 * 12 + 9 * 10 + 11 - 8 + 4 - 10 + 26 - 15 = 1442$;

Общая стоимость плана, показанного в таблице 3.8, равна $L_2 = 18 * 13 + 12 * 7 + 15 * 8 + 22 * 12 + 11 * 6 + 20 * 10 + 4 * 10 + 26 * 15 = 1398$. Таким образом, нам удалось уменьшить стоимость перевозок на $1442 - 1398 = 44$ единицы. Это, впрочем, можно было предсказать и не



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 167 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

подсчитывая полную стоимость плана. Действительно, алгебраическая сумма стоимостей, стоящих в вершинах цикла, со знаком плюс, если перевозки в этой вершине увеличиваются, и со знаком минус — если уменьшаются (так называемая «цена цикла»), в данном случае равна: $6 - 8 + 10 - 12 = -4$. Значит, при переносе одной единицы груза по этому циклу стоимость перевозок уменьшается на четыре. А мы их перенесли целых 11; значит, стоимость должна была уменьшиться на $11 * 4 = 44$ единицы, что и произошло.

Значит, весь секрет оптимизации плана перевозок в том, чтобы переносить («перебрасывать») перевозки по циклам, имеющим отрицательную цену.

В теории линейного программирования доказывается, что при опорном плане для каждой свободной клетки транспортной таблицы существует цикл, и притом единственный, одна вершина которого (первая) лежит данной свободной клетке, а остальные — в базисных клетках. Поэтому, отыскивая «выгодные» циклы с отрицательной ценой, мы должны высматривать — нет ли в таблице соблазнительных, «дешевых» свободных клеток. Если такая клетка есть, нужно для нее найти цикл, вычислить его цену и, если она будет отрицательной, перенести по этому циклу столько единиц груза, сколько будет возможно (без того, чтобы какие-то перевозки сделать отрицательными). При этом данная свободная клетка становится базисной, а какая-то из бывших базисных — свободной. Очевидно, это равносильно «переразрешению» системы уравне-



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 168 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

ний относительно других базисных переменных, по делается это гораздо легче.

Попробуем еще раз улучшить план, приведенный в таблице 14.3. Например, нас «соблазняет» дешевая клетка (1.5) со стоимостью 5. Нельзя ли улучшить план, увеличив перевозки в этой клетке, зато, уменьшив в других (при этом, конечно, придется кое-где перевозки тоже увеличить). Давайте разглядим внимательно таблицу 14.3 и найдем в ней цикл, первая вершина которого лежит в свободной клетке (1.5), а остальные — все в базисных клетках. Немного подумав, мы этот цикл обнаружим: это последовательность клеток $(1.5) \rightarrow (4.5) \rightarrow (4.4) \rightarrow (2.4) \rightarrow (2.2) \rightarrow (1.2)$ (и замыкая цикл, снова возвращаемся в (1.5)). Нечетные вершины цикла отмечены плюсом — это значит, что перевозки в этих клетках увеличиваются: четные — знаком минус (перевозки уменьшаются). Цикл показан стрелками в таблице 14.4.

Подсчитаем цену этого цикла. Она равна $5 - 15 + 10 - 6 + 8 - 7 = -5$. Так как цена цикла отрицательна, то переброска перевозок по этому циклу выгодна. Посмотрим, сколько же единиц мы можем по нему перебросить? Это определяется наименьшей перевозкой, стоящей в отрицательной вершине цикла. В данном случае это опять 11 (чистое совпадение!). Умножая 11 на цену цикла — 5 получим, что за счет переброски 11 единиц груза по данному циклу мы еще уменьшим стоимость перевозок на 55 (предоставляем любознательному читателю сделать это самостоятельно). Таким образом, разыскивая в транспортной таблице свободные



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 169 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

клетки с отрицательной ценой цикла и перебрасывая по этому циклу наибольшее возможное количество груза, мы будем все уменьшать и уменьшать стоимость перевозок. Бесконечно уменьшаться она не может (она никак не может стать меньше нуля!), значит, рано или поздно мы придем к оптимальному плану. Для такого плана уже не остается ни одной свободной клетки с отрицательной ценой цикла. Это — признак того, что **оптимальное решение** найдено.

В теории линейного программирования существуют способы, позволяющие автоматически, без размышлений, выделять свободные клетки с отрицательной ценой цикла (так называемый «метод потенциалов»), но мы на них останавливаться не будем, так же как и на ряде других способов решения транспортной задачи, с которыми читатель может ознакомиться, но специальным руководствам [5, 7, 8].

В заключение скажем несколько слов о так называемой «транспортной задаче с неправильным балансом», когда сумма заявок не равна сумме запасов:

$$\sum_{i=1}^m a_i \neq \sum_{j=1}^n b_j \quad (14.6)$$

Если $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$ (сумма запасов больше суммы заявок), то все заявки могут быть удовлетворены, но при этом не все запасы будут израс-



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 170 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

Таблица 14.4

$\begin{array}{c} \text{ПН} \\ \text{ПО} \end{array}$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	13 18	7 12 ⁻	14	7	5 +	30
A_2	11	8 15 ⁺	12 22	6 11	8 -	48
A_3	6	10	10 20	8	11	20
A_4	14	8	10	10 4 ⁺	15 -26	30
Заявки b_j	18	27	42	15	26	128

ходованы. Задача может быть сведена к транспортной задаче с правильным балансом, если ввести в рассмотрение некий «фиктивный» пункт назначения B_f , условно приписав ему заявку, равную избытку запасов



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 171 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

над заявками:

$$b_f = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j. \quad (14.7)$$

Тогда задача сводится к задаче с правильным балансом, так как

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j + b_f. \quad (14.8)$$

Возникает вопрос: а каковы же стоимости перевозок из пунктов отправления A_i в «фиктивный» пункт назначения B_f ? Естественно положить их равными нулю (ведь фактически в пункт B_f ничего перевезиться не будет!). Поэтому для любого пункта отправления стоимость $c_{if} = 0$. Введем в транспортную таблицу дополнительный столбец, соответствующий пункту назначения B_f , и проставим в нем нулевые стоимости перевозок. После этого задача решается как обычная транспортная, и для нее находится оптимальный план перевозок:

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} & x_{1f} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} & x_{2f} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} & x_{mf} \end{pmatrix}$$



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 172 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

При этом нужно иметь в виду, что все перевозки x_{if} , стоящие в правом столбце, фактически никуда не отправляются, а остаются на пунктах отправления A_i . Может встретиться также случай $\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$ (запасов не хватает для удовлетворения всех заявок); в этом случае можно тем или другим способом «срезать» заявки и снова получить транспортную задачу с правильным балансом. Если нас совершенно не интересует, насколько «справедливо» удовлетворяются заявки, а важно только «подешевле развезти» имеющиеся запасы (все равно, куда), то можно ввести в рассмотрение фиктивный пункт отправления A_f , условно приписав ему недостающий запас, равный $a_f = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$. Подробнее на этих вопросах мы останавливаться не будем (см. [6]).



Кафедра ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 173 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

ЛЕКЦИЯ 15

Задача о назначениях. Венгерский метод

Частным случаем транспортной задачи является задача о назначениях, в которой число пунктов производства равно числу пунктов назначения, т.е. транспортная таблица имеет форму квадрата. Кроме того, в каждом пункте назначения объем потребности равен 1, и величина предложения каждого пункта производства равна 1. Любая задача о назначениях может быть решена с использованием методов **линейного программирования** или алгоритма решения транспортной задачи. Однако ввиду особой структуры данной задачи был разработан специальный алгоритм, получивший название Венгерского метода.

4.1. Алгоритм решения задачи о назначениях

Этот алгоритм состоит из трех этапов.

Этап 1:

1. Формализация проблемы в виде транспортной таблицы по аналогии с решением транспортной задачи.
2. В каждой строке таблицы найти наименьший элемент и вычесть его из всех элементов данной строки.
3. Повторить ту же самую процедуру для столбцов.

Теперь в каждой строке и в каждом столбце таблицы есть по крайней мере один нулевой элемент. Представленная в полученной с помощью описанного выше приема «приведенной» транспортной таблице задача



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 174 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

о назначениях эквивалентна исходной задаче, и оптимальное решение для обеих задач будет одним и тем же. Сущность Венгерского метода заключается в продолжении процесса приведения матрицы до тех пор, пока все подлежащие распределению единицы не попадут в клетки с нулевой стоимостью. Это означает, что итоговое значение приведенной целевой функции будет равно нулю. Так как существует ограничение на неотрицательность переменных, нулевое значение целевой функции является оптимальным.

Этап 2:

Если некоторое решение является допустимым, то каждой строке и каждому столбцу соответствует только один элемент. Если процесс распределения элементов осуществляется только в клетки с нулевой стоимостью, он приведет к получению минимального значения целевой функции.

1. Найти строку, содержащую только одно нулевое значение стоимости, и в клетку, соответствующую данному значению, поместить один элемент. Если такие строки отсутствуют, допустимо начать с любого нулевого значения стоимости.

2. Зачеркнуть оставшиеся нулевые значения данного столбца.

3. Пункты 1 и 2 повторять до тех пор, пока продолжение описанной процедуры окажется невозможным. Если на данном этапе окажется, что есть несколько нулей, которым не соответствуют назначения и которые являются незачеркнутыми, то необходимо:



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 175 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

4. Найти столбец, содержащий только одно нулевое значение, и в соответствующую клетку поместить один элемент.

5. Зачеркнуть оставшиеся нули в данной строке.

6. Повторять пункты 4 и 5 до тех пор, пока дальнейшая их реализация окажется невозможной. Если окажется, что таблица содержит неучтенные нули, повторить операции 1-6. Если решение является допустимым, т.е. все элементы распределены в клетки, которым соответствует нулевая стоимость, то полученное решение одновременно является оптимальным. Если решение является недопустимым, осуществляется переход к этапу 3.

Этап 3:

1. Провести минимальное число прямых через строки и столбцы матрицы (но не по диагоналям) таким образом, чтобы они проходили через все нули, содержащиеся в таблице.

2. Найти наименьший среди элементов, через которые не проходит ни одна из проведенных прямых.

3. Вычесть его из всех элементов, через которые не проходят прямые.

4. Прибавить найденный элемент ко всем элементам таблицы, которые лежат на пересечении проведенных ранее прямых.

5. Все элементы матрицы, через которые проходит только одна прямая, оставить без изменения.

В результате применения данной процедуры в таблице появляется по крайней мере один новый ноль. Необходимо возвратиться к этапу 2 и



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 176 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

повторять алгоритм до тех пор, пока не будет получено **оптимальное решение**.

Пример 1.

Некоторая компания имеет четыре сбытовые базы и четыре заказа, которые необходимо доставить различным потребителям. Складские помещения каждой базы вполне достаточны для того, чтобы вместить один из этих заказов. В табл. 15.1 содержится информация о расстоянии между каждой базой и каждым потребителем. Как следует распределить заказы по сбытовым базам, чтобы общая дальность транспортировки была минимальной?

Таблица 15.1 Расстояние от сбытовых баз до потребителей

Сбытовая база	Расстояние, миль Потребители			
	I	II	III	IV
A	68	72	75	83
B	56	60	58	63
C	38	40	35	45
D	47	42	40	45

Решение

Понимание существа проблемы можно в значительной степени облегчить, если перед тем, как применять Венгерский метод, попытаться решить поставленную задачу, используя один из широко известных методов. Примените метод Вогеля и проследите, насколько он приближает



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 177 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

нас к оптимальному решению, которое мы рассмотрим в конце данного раздела. Значения общего спроса и общего предложения для всех строк и столбцов равны единице.

Этап 1 Венгерского метода: В каждой строке находится наименьший элемент.

Таблица 15.2 Выявление наименьших элементов по строкам

	Потребители				Наименьший элемент строки
	I	II	III	IV	
A	68	72	75	83	68
B	56	60	58	63	56
C	38	40	35	45	35
D	47	42	40	45	40

Наименьший элемент вычитается из всех элементов соответствующей строки.

Таблица 15.3 Вычитание наименьшего элемента по строкам и выявление наименьшего элемента по столбцам

0	4	7	15
0	4	2	7
3	5	0	10
7	2	0	5
0	2	0	5



*Кафедра
ПМ и ТП*

Начало

Содержание



Страница 178 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

Найденный наименьший элемент вычитается из всех элементов соответствующего столбца.

Таблица 15.4 Вычитание наименьшего элемента по столбцам

0	2	7	10
0	2	2	2
3	3	0	5
7	0	0	0

В соответствии с процедурой, описанной в этапе 2, осуществляются назначения. Наличие назначения обозначается через [0]

Таблица 15.5 Назначении в клетки с нулевыми значениями

0	2	7	10
0	2	2	2
3	3	0	5
7	0	0	0

На данном этапе мы можем осуществить только три нулевых назначения, тогда как требуемое их количество равно четырем. Полученное распределение является недопустимым. Переходим к этапу 3. Проводим наименьшее число прямых, проходящих через все нули таблицы.

Наименьшим элементом, через который не проходит ни одна из прямых, является число 2. Скорректируем таблицу так, как это описано



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 179 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

Таблица 15.6 Проведение прямых через нулевые элементы

0	2	7	10
0	2	2	2
3	3	0	5
7	0	0	0

выше в соответствии с этапом 3, т.е. вычтем 2 из каждого элемента, через который не проходит ни одна прямая, и добавим 2 ко всем элементам, лежащим на пересечении двух прямых, оставив без изменения все прочие элементы, через которые проходит только одна прямая. Теперь перераспределим соответствующие назначения сбытовых баз и потребителей.

Таблица 15.7 Скорректированная таблица с назначениями для нулевых клеток

	I	II	III	IV
A	0	0	7	8
B	0	0	2	0
C	3	1	0	3
D	9	0	2	0

Теперь требование о размещении четырех назначений в клетки с нулевой стоимостью выполняется, следовательно, полученное решение яв-



*Кафедра
ПМ и ТП*

Начало

Содержание



Страница 180 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

ляется оптимальным. Перевозки осуществляются со сбытовой базы А к потребителю I, с базы В — к потребителю II, с базы С — к потребителю III и с базы D — к потребителю IV. Хотя данное решение и является оптимальным, однако оно не единственное. Тем не менее в любом **оптимальном решении** должен присутствовать маршрут (С,III), поскольку это единственный элемент с нулевой стоимостью в строке С. Два других оптимальных распределения назначений представлены ниже.

Таблица 15.8 Первое альтернативное оптимальное решение

	I	II	III	IV
A	0	0	7	8
B	0	0	2	0
C	3	1	0	3
D	9	0	2	0

Таблица 15.9 Второе альтернативное оптимальное решение

	I	II	III	IV
A	0	0	7	8
B	0	0	2	0
C	3	1	0	3
D	9	0	2	0

Минимальную дальность перевозок для каждого из трех решений можно вычислить из исходной таблицы:



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 181 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

Решение 1: $68 + 60 + 35 + 45 = 208$ миль;

Решение 2: $68 + 63 + 35 + 42 = 208$ миль;

Решение 3: $72 + 56 + 35 + 45 = 208$ миль.

Общая дальность перевозок для всех трех решений одинакова. Примечание: в задачах большей размерности, чем задача из примера 13.7, убедиться в том, что проведенное в соответствии с пунктом 1 этапа 3 число прямых является минимальным, гораздо труднее. В этой связи может оказаться полезным так называемое «правило правой руки»:

1. Выбирается любая строка или столбец, содержащие только один нулевой элемент.

2. Если выбрана строка, прямая проводится через столбец, в котором находится данный нулевой элемент.

3. Если выбран столбец, прямая проводится через строку, содержащую данный нулевой элемент.

4. Пункты 1-3 повторяются до тех пор, пока не будут учтены все входящие в таблицу нули.



*Кафедра
ПМ и ТП*

Начало

Содержание



Страница 182 из 293

Назад

На весь экран

Закрыть

ЛЕКЦИЯ 16

Задача коммивояжера

Имеется n городов. Расстояния между любой парой городов известны и составляют a_{ij} ($i, j = \overline{1, n}, i \neq j$). Если прямого маршрута между городами i и j не существует, то $a_{ij} = \infty$. Расстояния между городами удобно записывать в виде матрицы $A = (a_{ij})_{n \times n}$ (табл. 16.1), где $a_{ij} = \infty$.

Таблица 16.1

i \ j	j			
	1	2	...	n
1	∞	a_{12}	...	a_{1n}
2	a_{21}	∞	...	a_{2n}
...	...	...	...	...
n	a_{n1}	a_{n2}	...	∞

Коммивояжер, выезжая из какого-либо города, должен посетить все города, побывав в каждом из них один, и только один раз, и вернуться в исходный город. Необходимо определить такую последовательность объезда городов, при которой длина маршрута была бы наименьшей.

Если городам поставить в соответствие вершины графа, а соединяющим их дорогам — дуги, то в терминах теории графов задача заключается в определении гамильтонова контура минимальной длины. Гамильтоновым контуром (по имени английского математика Гамильто-



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 183 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

на) называется путь, проходящий через все вершины графа, у которого начальная вершина совпадает с конечной. Здесь под длиной контура понимают не количество дуг, входящих в контур, а сумму их длин. Для записи постановки задачи в терминах целочисленной линейной оптимизации определим булевы переменные следующим образом:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{коммивояжер переезжает из города } i \text{ в город } j \ (i, j = \overline{1, n}) \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Тогда задача заключается в отыскании значений переменных x_{ij} , минимизирующих

$$Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ij} \quad (16.1)$$

при ограничениях:

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, j = \overline{1, n} \quad (16.2)$$

(въезд в город j)

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, i = \overline{1, n} \quad (16.3)$$

(отъезд из города i)

$$u_i - u_j + nx_{ij} \leq n - 1, i, j = \overline{1, n} (i \neq j) \quad (16.4)$$

Переменные $u_i, i = \overline{1, n}$, могут принимать произвольные значения,



*Кафедра
ПМ и ТП*

Начало

Содержание



Страница 184 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

однако без всякого ущерба на них может быть наложено условие неотрицательности и целочисленности.

Легко заметить, что задача целочисленной линейной оптимизации (16.1)-(16.4) эквивалентна задаче коммивояжера. Действительно, условия $a_{ii} = \infty$ исключают в оптимальном решении значения $x_{ii} = 1$, как не имеющие смысла. Ограничения (16.2) требуют, чтобы маршрут включал только один въезд в каждый город, а ограничения (16.3) — чтобы маршрут включал лишь один выезд из каждого города. Целевая функция (16.1) отражает длину гамильтонова контура. Ограничения (16.4) требуют, чтобы маршрут образовывал контур и проходил через все города. Решение задачи, описанной только условиями (16.1)-(16.3), не обязательно является контуром, проходящим через все города. В частности, в результате решения задачи (16.1)-(16.3) могут быть получены два и более не связанных между собой частичных контуров. Для устранения возможности образования негамильтоновых контуров и служат ограничения (16.4). Покажем, что эти ограничения действительно исключают все частичные контуры и не исключают ни одного гамильтонова контура. Рассмотрим частичный контур, проходящий через k городов ($k < n$), определяемый значениями $x_{ij} = 1$ для k неизвестных. Складывая все неравенства вида (16.4), содержащие k неизвестных $x_{ij} = 1$, соответствующих дугам, образующим частичный контур, получим недопустимое неравенство $nk < (n-1)k$ (при сложении все разности $u_i - u_j$ взаимно уничтожаются). Следовательно, условие (16.4) исключает возможность



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 185 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

образования любого частичного контура. Теперь установим, что существуют значения переменных u_i , удовлетворяющие ограничениям (16.4) для любого гамильтонова контура. Положим, что $u_i = p$ ($p = 1, 2, \dots, n$), если город i в гамильтоновом контуре посещается по порядку P -м, причем $u_1 = 1$ и $u_j = u_i + 1, j = \overline{(2, n)}$ — номер города в гамильтоновом контуре. Так, например, в контуре 1-3-6-8-... значения u_i будут следующими: $u_1 = 1; u_3 = 2; u_6 = 3; u_8 = 4, \dots$ Из предположения следует, что при $x_{ij} = 0$ соответствующее неравенство (16.4) принимает вид $u_i - u_j \leq n - 1$ и всегда выполняется, поскольку $u_i < n$ и $u_j > 1$ при $j \neq 1$. При x_{ij} эти ограничения выполняются как равенства: $u_i - u_j + nx_{ij} = p - (p + 1) + n * 1 = n - 1$.

Таким образом, справедливость сформулированного выше утверждения полностью доказана.

Следует отметить, что как для задачи коммивояжера, так и для других комбинаторных задач характерно сочетание простоты постановки с трудностью решения, причем трудности эти чисто вычислительного характера. В самом деле, оптимальный маршрут можно найти, перебрав и сравнив по длительности все возможные маршруты, так как их число конечно. Однако с увеличением числа городов количество возможных маршрутов быстро возрастает (число возможных маршрутов при n городах равно $(n - 1)!$) и даже при относительно небольшом количестве городов, порядка 16—20, достигает астрономических цифр. Так как время решения задачи пропорционально числу возможных маршрутов,



Кафедра
ММ и ТП

Начало

Содержание



Страница 186 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

полный перебор вариантов практически неприемлем даже при использовании самых быстродействующих ЭВМ.

Решение задачи (16.1)-(16.4) методами целочисленной линейной оптимизации также связано с определенными трудностями.

16.1 Метод ветвей и границ

В настоящее время разработано большое количество алгоритмов для решения задачи коммивояжера. Одним из наиболее эффективных является, по-видимому, метод ветвей и границ, предложенный в 1963 г. группой авторов (Дж. Литл, К. Мурти, Д. Суини, К. Кэрл).

Вначале для множества R всех гамильтоновых контуров определяется некоторая оценка снизу (нижняя граница) $\phi_{(R)}$ их длины. Затем множество всех гамильтоновых контуров разбивается на два подмножества. Первое подмножество состоит из гамильтоновых контуров, которые включают некоторую дугу (i, j) , — обозначим его $\{(i, j)\}$, а второе состоит из гамильтоновых контуров, которые не включают эту дугу, — обозначим его $\overline{\{(i, j)\}}$. Для каждого из подмножеств $\{(i, j)\}$ и $\overline{\{(i, j)\}}$ определяется нижняя граница длины гамильтоновых контуров $\phi_{(i, j)}$ и $\phi_{\overline{(i, j)}}$. Каждая новая нижняя граница оказывается не меньше нижней границы всего множества гамильтоновых контуров $\phi_{(R)}$. Среди двух подмножеств маршрутов $\{(i, j)\}$ и $\overline{\{(i, j)\}}$ выбирается подмножество с меньшей нижней границей. Это подмножество снова разбивается на два и



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 187 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

для вновь образованных подмножеств находятся нижние границы. Процесс разбиения подмножеств аналогичным образом продолжается до тех пор, пока не будет выделено подмножество, содержащее единственный гамильтонов контур. Взаимосвязь подмножеств, полученных в результате разбиения, изображается в виде дерева (графа), вершинам которого приписываются нижние границы.

Пример такого дерева на [рис. 16.1](#). Получив гамильтонов контур, просматривают оборванные ветви дерева и сравнивают нижние границы подмножеств, соответствующих оборванным ветвям, с длиной полученного гамильтонова контура.

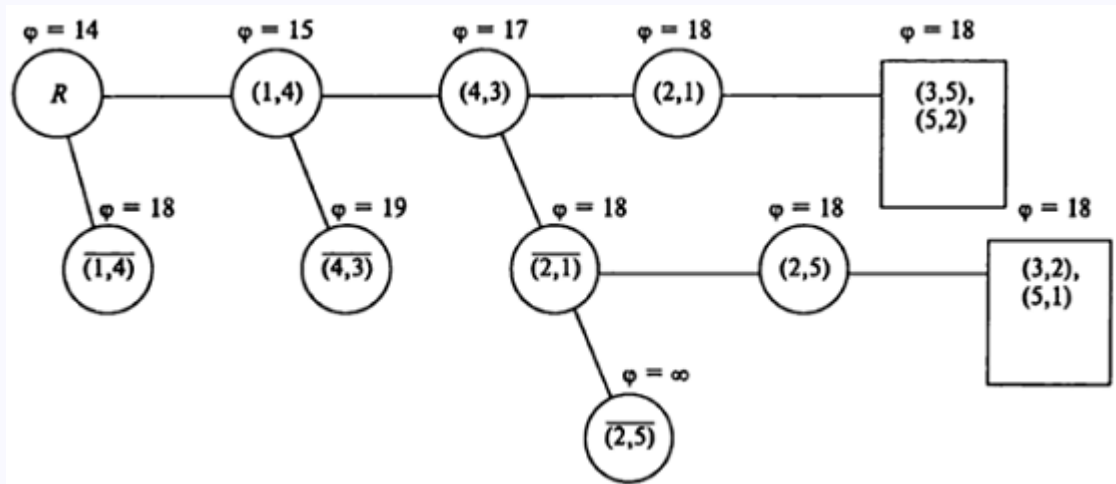


рис 16.1



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 188 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

Если нижние границы подмножеств, соответствующих оборванным ветвям, окажутся меньше длины гамильтонова контура, то эти ветви разбивают по тому же правилу. Процесс продолжается до тех пор, пока нижние границы вновь полученных подмножеств меньше длины гамильтонова контура. В результате могут быть получены новые гамильтоновы контуры. В этом случае сравниваются длины всех гамильтоновых контуров и среди них выбирается контур с наименьшей длиной. Решение задачи считается законченным, если нижние границы оборванных ветвей не меньше длины гамильтонова контура. В качестве оптимального выбирается гамильтонов контур с наименьшей длиной.

Остановимся на способе отыскания нижних границ и разбиения множества гамильтоновых контуров на подмножества. Расчет нижних границ может быть основан на следующем свойстве. Если найти длину оптимального гамильтонова контура с матрицей расстояний A , а затем из элементов некоторой строки или столбца матрицы A вычесть некоторое число и снова решить задачу с новой матрицей, то гамильтонов контур коммивояжера не изменится, а длина его уменьшится на это число. В самом деле, длина оптимального гамильтонова контура коммивояжера состоит из суммы n чисел (элементов матрицы расстояний), взятых по одному из каждой строки и из каждого столбца. Следовательно, изменение всех элементов строки или столбца на одно и то же число не влияет на оптимальное решение задачи. Если операцию вычитания проделать и для других строк и столбцов, то длина оптимального контура задачи с



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 189 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

измененной матрицей будет отличаться от длины оптимального контура задачи с исходной матрицей на сумму чисел, вычитаемых из элементов строк и столбцов.

Таким образом, для определения нижней границы множества всех гамильтоновых контуров необходимо в каждой строке матрицы A найти минимальный элемент $a_j, a_i = \min a_{ij} (i = \overline{1, n})$, и вычесть его из всех элементов данной строки (такая операция называется приведением матрицы расстояний по строкам). В результате приведения в каждой строке матрицы будет, по крайней мере, один нуль. Затем в матрице, приведенной по строкам, находим минимальный элемент β_j в каждом столбце и приводим ее по столбцам. Матрицу, приведенную по строкам и столбцам, называют полностью приведенной, а величины a_i и $\beta_j (i, j = \overline{1, n})$ — константами приведения. Полностью приведенная матрица содержит, по крайней мере, один нуль в каждой строке и каждом столбце.

Так как длина L_1 оптимального гамильтонова контура в задаче с полностью приведенной матрицей отличается от длины L оптимального гамильтонова контура в задаче с неприведенной матрицей, на сумму констант приведения:

$$y = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{j=1}^n \beta_j$$

то $L = L_1 + y$.

В полностью приведенной матрице все элементы неотрицательны, по-



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 190 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

этому $L_1 \geq 0$, а y можно выбрать в качестве нижней границы длины гамильтонова контура, т.е. $\phi_{(R)} = y$.

Рассмотрим теперь способ выбора дуги (i, j) , априорное включение или невключение которой в гамильтонов контур разбивает все множество гамильтоновых контуров на подмножества. Априорное исключение какой-нибудь дуги (i, j) из гамильтонова контура осуществляется заменой соответствующего элемента матрицы расстояний на ∞ . В результате исключения появляется возможность выполнить дополнительное приведение матрицы и улучшить нижнюю границу. Априорное включение дуги (i, j) в гамильтонов контур позволяет сократить размер матрицы за счет вычеркивания i -й строки и j -го столбца. Кроме того, при включении дуги (i, j) в контур существует опасность образования негамильтонова контура, т.е. контура, проходящего через часть городов. Поэтому в целях недопущения образования негамильтонова контура необходимо исключить одну из дуг. В простейшем случае при включении дуги (i, j) в гамильтонов контур требуется исключить дугу (i, j) , т.е. элемент a_{ij} заменить на ∞ . Сокращение размеров матрицы расстояний и исключение одного из элементов позволяют дополнительно выполнить приведение матрицы и улучшить нижнюю границу подмножества $\{(i, j)\}$.

Наиболее вероятно, что в оптимальный гамильтонов контур войдут дуги, которым в приведенной матрице соответствуют нулевые элементы. Поэтому выбор дуги будем осуществлять следующим образом. В приведенной матрице элемент $a_{ij} = 0$ условно заменим на ∞ . Этим самым



Кафедра
ММ и ТП

Начало

Содержание



Страница 191 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

дуга (i, j) будет исключена из гамильтонова контура. Чтобы определить сумму констант приведения вновь полученной матрицы, необходимо сложить минимальный элемент a_i i -й строки с минимальным элементом β_j j -го столбца, так как остальные строки и столбцы содержат, по крайней мере, по одному нулю. Обозначим сумму констант приведения матрицы с исключенной дугой (i, j) через $y_{\overline{(i,j)}}$. Следовательно, $y_{\overline{(i,j)}} = a_i + \beta_j$. Аналогичный расчет произведем для всех остальных нулевых элементов матрицы, условно заменяя их на ∞ . В первую очередь будем исключать из гамильтонова контура ту дугу, для которой сумма констант приведения $y_{\overline{(i,j)}}$ является наибольшей, так как в этом случае произойдет наиболее резкое изменение оценки.

Предположим, что для дуги (r, s) сумма констант приведения максимальна, т.е. $y_{\overline{(r,s)}} = \max y_{\overline{(i,j)}}$. Тогда, исключив дугу (r, s) из гамильтонова контура, получим подмножество контуров $\overline{\{(r, s)\}}$ и, включив эту дугу в гамильтонов контур, получим подмножество контуров $\{(r, s)\}$.

Нижняя граница подмножества контуров $\overline{\{(r, s)\}}$

$$\phi_{\overline{(r,s)}} = \phi_{(R)} + y_{\overline{(r,s)}} = y + y_{\overline{(r,s)}}$$

Нижняя граница подмножества контуров (r,s)

$$\phi_{(r,s)} = \phi_{(R)} + y_{(r,s)} = y + y_{(r,s)}$$



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 192 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

где $y_{(r,s)}$ равна сумме констант приведения сокращенной матрицы (сокращенная матрица получена из исходной путем вычеркивания r -й строки s -го столбца и замены элемента (r,s) на ∞).

При практических расчетах процесс разбиения множества гамильтоновых контуров на подмножества продолжается до тех пор, пока не будет получена матрица расстояний размерности 2×2 .

После приведения этой матрицы нулевые ее элементы, расположенные симметрично, прямо указывают на дуги, которые необходимо включить в гамильтонов контур. Длина гамильтонова контура определяется добавлением к нижней границе соответствующего подмножества контуров суммы констант приведения матрицы 2×2 . Все рассмотренные действия для большей четкости сформулируем в виде алгоритма.

1. Приводим матрицу расстояний по строкам и столбцам. Находим нижнюю границу всего множества маршрутов:

$$\phi_{(R)} = y = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{j=1}^n \beta_j$$

2. Каждый нуль в приведенной матрице условно заменяем на ∞ и находим сумму констант приведения $y_{(i,j)} = a_i + \beta_j$. Значения $y_{(i,j)}$ записываем в соответствующие клетки рядом с нулями.
3. Априорно исключаем из гамильтонова контура ту дугу (i,j) , для которой сумма констант приведения максимальна (исключение дуги



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 193 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

(i,j) достигается заменой элемента в a_{ij} матрице расстояний на ∞ . В результате исключения дуги (i,j) будет образовано подмножество гамильтоновых контуров $\overline{\{(i,j)\}}$.

4. Приводим полученную матрицу расстояний и определяем нижнюю границу $\phi_{\overline{(i,j)}}$ подмножества гамильтоновых контуров $\overline{\{(i,j)\}}$.
5. Априорно включаем дугу (i,j) в гамильтонов контур, что ведет к исключению в матрице, полученной после выполнения п. 2, i-й строки и j-го столбца. Заменяем один из элементов матрицы на ∞ (в простейшем случае симметричный), чтобы не допустить образования негамильтонова контура.
6. Приводим сокращенную матрицу и находим нижнюю границу $\phi_{(i,j)}$ подмножества маршрутов $\{(i,j)\}$.
7. Проверяем размерность сокращенной матрицы. Если сокращенная матрица размерности 2 x 2, то переходим к выполнению п. 9; если же размерность матрицы больше, чем 2 x 2, то — к п. 8.
8. Сравниваем нижние границы подмножеств гамильтоновых контуров $\phi_{\overline{(i,j)}}$ и $\phi_{(i,j)}$ и переходим к выполнению п. 2. При этом, если $\phi_{\overline{(i,j)}} < \phi_{(i,j)}$, то разбиению подлежит подмножество $\overline{\{(i,j)\}}$ (дальнейшему анализу подвергается матрица, полученная в результате



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 194 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

последнего выполнения п.4). Если же $\phi_{(i,j)} < \phi_{\overline{(i,j)}}$, разбиению подлежит подмножество $\{\{\overline{(i,j)}\}\}$ (дальнейшему анализу подвергается матрица, полученная после последнего выполнения п. 6). Разбиение множества гамильтоновых контуров на подмножества сопровождаем построением дерева.

9. Определяем гамильтонов контур и его длину.
10. Сравниваем длину полученного контура с нижними границами оборванных ветвей. Если длина гамильтонова контура не превышает нижних границ оборванных ветвей дерева, то задача решена. Если же длина контура больше нижней границы некоторых ветвей, то, действуя по алгоритму, развиваем эти ветви до тех пор, пока не получим маршрута с меньшей длиной или не убедимся, что его не существует.

Пример 1 Матрица расстояний между пятью городами представлена в **табл. 16.2**.

Необходимо найти гамильтонов контур объезда городов минимальной длины.

Для нахождения нижней границы множества всех гамильтоновых контуров $\phi_{(R)}$ осуществляем приведение матрицы расстояний.

Для этого в дополнительный столбец **табл. 16.3** запишем константы приведения $a_i, i = \overline{1,5}$ по строкам. Матрица, приведенная по строкам,



*Кафедра
ПМ и ТП*

Начало

Содержание



Страница 195 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

представлена в табл. 16.3.

Таблица 16.2

i \ j	1	2	3	4	5
	1	2	3	4	5
1	∞	9	8	4	10
2	6	∞	4	5	7
3	5	3	∞	6	2
4	1	7	2	∞	8
5	2	4	5	2	∞

Таблица 16.3

i \ j	1	2	3	4	5	a_i
	1	2	3	4	5	
1	∞	9	8	4	10	4
2	6	∞	4	5	7	4
3	5	3	∞	6	2	2
4	1	7	2	∞	8	1
5	2	4	5	2	∞	2

В дополнительной строке этой матрицы записаны константы приведения по столбцам. Выполнив приведение по столбцам, получим полностью приведенную матрицу табл. 16.4..

$$\phi_{(R)} = y = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{j=1}^n \beta_j = 13 + 1 = 14$$



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 196 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

Таблица 16.4

$i \backslash j$	1	2	3	4	5
1	∞	5	4	0	6
2	2	∞	0	1	3
3	3	1	∞	4	0
4	0	6	1	∞	7
5	0	2	3	0	∞
β_j	0	1	0	0	0

Найдем дугу, исключение которой максимально увеличило бы нижнюю границу, и разобьем все множество гамильтоновых контуров относительно этой дуги на два подмножества. Для этого определим сумму констант приведения для всех клеток матрицы с нулевыми элементами, условно (мысленно) заменяя нули на ∞ . Заменяем, например, элемент $a_{14} = 0$ табл. 16.4. на ∞ . Тогда константа приведения по 1-й строке равна 4 (минимальному элементу этой строки), а по 4-му столбцу — нулю (минимальному элементу этого столбца).

Сумма констант приведения $y_{\overline{(1,4)}} = a_1 + \beta_4 = 4 + 0 = 4$ записана в скобках в клетке (1,4). Аналогично вычислены все остальные константы и записаны в соответствующие клетки табл. 16.5. Наибольшая из сумм констант приведения, равная 4, соответствует дуге (1, 4). Следовательно, множество R разбивается на подмножества $\{(1, 4)\}$ и $\{(1, 4)\}$. Таким



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 197 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

образом, мы приступим к образованию дерева.

Таблица 16.5

$i \backslash j$	1	2	3	4	5
1	∞	4	4	0(4)	6
2	2	∞	0(2)	1	3
3	3	0(1)	∞	4	0(3)
4	0(1)	5	1	∞	7
5	0(0)	1	3	0(0)	∞

Таблица 16.6

$i \backslash j$	1	2	3	4	5
1	∞	0	0	∞	2
2	2	∞	0	1	3
3	3	0	∞	4	0
4	0	5	1	∞	7
5	0	1	3	0	∞

Исключение дуги $(1, 4)$ из искомого гамильтонова контура осуществляется реальной заменой в матрице из табл. 16.5 элемента $a_{14} = 0$ на ∞ . Такая замена позволяет произвести дополнительное приведение матрицы путем вычитания из элементов 1-й строки 4 и из элементов 4-го



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 198 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

столбца — 0. В результате приведения матрица расстояний для подмножества $\{\overline{(1,4)}\}$ примет вид, показанный в табл. 16.6, а нижняя граница длин гамильтоновых контуров этого подмножества $\phi_{\overline{(1,4)}} = \phi_{(R)} + y_{\overline{(1,4)}} = 14 + 4 = 18$.

Включение дуги (1, 4) в искомый контур ведет к исключению элементов 1-й строки и 4-го столбца табл. 16.5. Кроме того, элемент $a_{41} = 0$ заменяем на ∞ , чтобы не допустить образования негамильтонова контура (1-4-1). Сокращенная матрица приведена в табл. 16.7.

Таблица 16.7

i \ j	1	2	3	4	5
	1	2	3	4	5
1	2	∞	0	3	0
2	3	0	∞	0	0
3	∞	5	1	7	1
4	0	1	3	∞	0
5	0	0	0	0	

Эта матрица допускает дополнительное приведение на 1 единицу только по 4-й строке. Константы приведения записаны в столбце a_i и строке β_j . Сумма констант приведения сокращенной матрицы, полученной в результате включения дуг (1,4) в искомый контур, составит:

$$y_{(1,4)} = \sum_i a_i + \sum_j \beta_j = 1 + 0 = 1$$



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 199 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

После приведения сокращенная матрица имеет вид **табл. 16.8**

Таблица 16.8

$\begin{array}{c} i \backslash j \\ \hline \end{array}$	1	2	3	5
2	2	∞	0(2)	3
3	3	0(1)	∞	0(3)
4	∞	4	0(4)	6
5	0(3)	1	3	∞

Нижняя граница длин гамильтоновых контуров подмножества $\{(1, 4)\}$

$$\phi_{(R)} + y_{(1,4)} = 14 + 1 = 15$$

Так как после сокращения получена матрица 4×4 , переходим к сравнению оценок $\phi_{\overline{(1,4)}}$ и $\phi_{(1,4)}$. Дальнейшему разбиению (ветвлению) подлежит подмножество $\{(1, 4)\}$, так как его нижняя граница меньше.

Найдем дугу, исключение которой максимально увеличило бы нижнюю границу. Для этого определим сумму констант приведения для каждой клетки с нулем **табл. 16.8**. Максимальная сумма констант приведения $y_{\overline{(4,3)}} = a_4 + \beta_3 = 4 + 0 = 4$ соответствует дуге $(4, 3)$. Следовательно, подмножество гамильтоновых контуров $\{(1, 4)\}$, в свою очередь, разбиваем на два подмножества: $\{(1, 4), (4, 3)\}$ и $\{(1, 4), (4, 3)\}$. После замены элемента $a_{43} = 0$ **табл. 16.8** на ∞ и приведения матрица принимает вид



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 200 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

табл. табл. 16.9. Нижняя граница длин гамильтоновых контуров подмножества $\{(1, 4), (4, 3)\}$.

$$\phi_{[(1,4), \overline{(1,4)}]} = \phi_{(1,4)} + y_{\overline{(4,3)}} = 15 + 4 = 19$$

Таблица 16.9

i \ j				
	1	2	3	5
2	2	∞	0	3
3	3	0	∞	0
4	∞	4	∞	6
5	0	1	3	∞

Таблица 16.10

i \ j				
	1	2	5	a_i
2	2	∞	3	2
3	∞	0	0	0
4	0	1	∞	0
β_i	0	0	0	

Включение дуги $(4, 3)$ в гамильтонов контур приводит к исключению из него дуг $(4, 2)$ и $(4, 5)$, то есть элементов четвертой строки матрицы



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 201 из 293

Назад

На весь экран

Закрыть

табл. 16.8, а также дуг (2,3) и (5,3), т.е. элементов 3-го столбца. Кроме того, исключаем из контура дугу (3, 1), чтобы не допустить образования негамильтонова контура (1-4-3-1). Сокращенная матрица табл. 16.10 допускает приведение по 2-й строке на 2 единицы. После приведения эта матрица имеет вид табл. 16.11

Таблица 16.11

i \ j		j		
		1	2	5
	2	0(1)	∞	1
	3	∞	0(1)	0(1)
	5	0(1)	1	∞

Сумма констант приведения

$$y_{(4,3)} = \sum_i a_i + \sum_j \beta_j = 2 + 0 = 2$$

а нижняя граница гамильтоновых контуров $\{(1, 4), (4, 3)\}$

$$\phi_{[(1,4),(4,3)]} = \phi_{(1,4)} + y_{(4,3)} = 15 + 2 = 17$$

Так как, $\phi_{[(1,4),(4,3)]} = 17 < \phi_{[(1,4),\overline{(1,4)}]} = 19$ дальнейшему ветвлению подлежит подмножество $\{(1, 4), (4, 3)\}$. Все суммы констант приведения для клеток с нулями табл. 16.11 равны, поэтому выбираем любую из



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 202 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

дуг, например $(2, 1)$, и разбиваем подмножество $\{(1, 4), (4, 3)\}$ на два новых подмножества $\{(1, 4), (4, 3), \overline{(2, 1)}\}$ и $\{(1, 4), (4, 3), (2, 1)\}$. После исключения дуги $(2, 1)$ и приведения матрицы расстояний получим новую матрицу **табл. 16.12**, для которой $y_{\overline{(2, 1)}} = 1$.

Таблица 16.12

i \ j	1	2	5
2	∞	∞	$0(\infty)$
3	∞	$0(1)$	$0(1)$
5	$0(\infty)$	1	∞

Нижняя граница подмножества $\{(1, 4), (4, 3), \overline{(2, 1)}\}$

$$\phi_{[(1,4),(4,3),\overline{(2,1)}]} = \phi_{[(1,4),(4,3)]} + y_{\overline{(2,1)}} = 17 + 1 = 18$$

Включение дуги $(2, 1)$ в контур приводит к исключению 2-й строки и 1-го столбца **табл. 16.11**, а также дуги $(3, 2)$. Сокращенная матрица имеет вид **табл. 16.13**. Сумма констант приведения этой матрицы $y_{(2,1)} = 1$. Приведенная матрица представлена в **табл. 16.14**. Нижняя граница подмножества контуров $\{(1, 4), (4, 3), (2, 1)\}$

$$\phi_{[(1,4),(4,3),(2,1)]} = \phi_{[(1,4),(4,3)]} + y_{(2,1)} = 17 + 1 = 18$$

Так как в результате сокращения получена матрица 2×2 **табл. 16.14**), то в искомый гамильтонов контур включаем дуги $(3, 5)$ и $(5, 2)$, соответ-



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 203 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

ствующие нулевым элементам этой матрицы. Сумма констант приведения **табл. 16.14** равна нулю. Следовательно, длина гамильтонова контура совпадает с нижней границей подмножества $\{(1, 4), (4, 3), (2, 1)\}$ и равна 18.

Таблица 16.13

i \ j	2	5
	2	5
2	∞	0
5	1	∞

Таблица 16.14

i \ j	2	5
	3	5
3	∞	0
5	0	∞

В соответствии с деревом ветвлений **рис. 16.1.** гамильтонов контур образуют дуги $(1, 4)$, $(4, 3)$, $(2, 1)$, $(3, 5)$, $(5, 2)$. Расположим их начиная с города 1 так, чтобы конец одной совпадал с началом другой. Получим гамильтонов контур, соответствующий последовательности объезда городов коммивояжером $\mu = (1 - 4 - 3 - 5 - 2 - 1)$.



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 204 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

Длина найденного маршрута объезда городов не превышает нижних границ оборванных ветвей, следовательно, она является оптимальной. Однако возможно, что гамильтонов контур μ не единственный, так как имеются подмножества контуров $\{(1, 4), (4, 3), \overline{(2, 1)}\}$ и $\{\overline{(1, 4)}\}$, нижние границы которых также равны 18.

Продолжим ветвление подмножества $\{(1, 4), (4, 3), \overline{(2, 1)}\}$. Следуя алгоритму, найдем сумму констант приведения для каждой клетки с нулем **табл. 16.12**. Максимальная сумма, равная ∞ , приходится на две клетки: (2, 5) и (5, 1). Выбираем любую дугу, например (2, 5), и разбиваем подмножество $\{(1, 4), (4, 3), \overline{(2, 1)}\}$ на два подмножества

$\{(1, 4), (4, 3), \overline{(2, 1)}, (2, 5)\}$ и $\{(1, 4), (4, 3), (2, 1), (2, 5)\}$. Нижние границы подмножеств:

$$\begin{aligned}\phi_{[(1,4),(4,3),\overline{(2,1)},(2,5)]} &= 18 + \infty = \infty \\ \phi_{[(1,4),(4,3),\overline{(2,1)},(2,5)]} &= 18 + 0 = 18\end{aligned}$$

Продолжив решение, найдем второй оптимальный гамильтонов контур $\mu' = (1 - 4 - 3 - 2 - 5 - 1)$.

Возможно найти еще один оптимальный гамильтонов контур, продолжая развитие ветви, соответствующей подмножеству контуров $\{\overline{(1, 4)}\}$. Напомним, что применять алгоритм в этом случае следует к матрице, приведенной в **табл. 16.6**



*Кафедра
ПМ и ТП*

Начало

Содержание



Страница 205 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

ЛЕКЦИЯ 17

Программирование на сетях

17.1 Основные понятия теории графов

Основным объектом этой теории является граф.

Граф можно представить в виде некоторого множества точек плоскости или пространства и множества отрезков кривых или прямых линий, соединяющих все или некоторые из этих точек.

Граф G можно определить заданием двух множеств X и U и обозначается $G = (X, U)$. Элементы множества X называют *вершинами*. Будем обозначать их буквами: $x_1, x_2, \dots, x_n$. Вершины изображают точками плоскости или пространства. Элементами множества U являются пары связанных между собой элементов множества X . Их изображают отрезками кривых или прямых линий. Обозначать их будем $u_1, u_2, \dots, u_m$. Взаимное расположение, форма и длины этих отрезков значений не имеют. Важно лишь то, что они соединяют две данные вершины множества X . Точки пересечения дуг (ребер) не всегда являются вершинами графа.

Графы, в которых множества X и U состоят из конечного числа элементов, называются *конечными*. Если два графа содержат одну и ту же информацию, то о таких графах говорят, что они изоморфны. Два графа изоморфны, если между множествами их вершин существует такое взаимно однозначное соответствие, при котором в одном из графов



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 206 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

отрезками соединены вершины в том и только в том случае, если в другом графе отрезками соединены соответствующие вершины. При этом для орграфа ориентация дуг должна быть одинакова. Вершины в графе называются смежными, если они различны и существует **дуга (ребро)**, соединяющая эти вершины. Если две дуги (ребра) имеют общую конечную вершину, они называются *смежными*.

Вершины в графе могут отличаться друг от друга количеством дуг (ребер), которым они инцидентны. *Степенью* $P(x_i)$ вершины x_i называется число дуг (ребер) графа G , инцидентных данной вершине. Вершина степени 0 называется изолированной. *Полустепенью захода* (для орграфа) $P^+(x_i)$ вершины x_i называется количество дуг, заходящих в и полустепенью исхода $P^-(x_i)$ - количество дуг, исходящих из x_i . Очевидно, что сумма $P^+(x_i) + P^-(x_i) = P(x_i)$. Если в паре вершин (x_i, x_j) указано направление связи, т.е. какая из них является первой, а какая – второй, то соединяющий их направленный отрезок u_k называется *дугой*; если же ориентация не указана – *ребром*; а вершины, определяющие дугу (ребро) u_k , называют *концевыми вершинами дуги (ребра) u_k* . Если концевые вершины совпадают, то дугу (ребро) называют *петлей*. Дуги (ребра) с одинаковыми концевыми вершинами будем называть *параллельными*. Говорят, что дуга (ребро) инцидентна своим концевым вершинам, и обратно.

Если в графе G все элементы множества U являются дугами, то граф называется ориентированным (орграфом), если ребрами - неориентиро-



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 207 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

ванным. Иногда рассматривают смешанные графы, состоящие из дуг и ребер.

Геометрическое изображение графа часто бывает весьма наглядным. Этим и пользуются на практике. Примерами графа могут служить схемы железных и шоссейных дорог и т.п. Граф называется простым, если он не содержит петель и параллельных дуг (ребер). Простой граф, в котором каждая пара вершин смежна, называется полным. Граф, содержащий хотя бы две параллельные дуги (ребра), называется *мультиграфом*.

Путем в орграфе называется последовательность дуг, в которой конец каждой предыдущей дуги совпадает с началом следующей. Путь, проходящий через все вершины и притом только по одному разу, называется гамильтоновым. Путь, содержащий все дуги графа, и притом только по одному разу, называется эйлеровым. Конечный путь, у которого начальная вершина совпадает с конечной называется контуром. Контур, проходящий через каждую вершину графа только по одному разу (за исключением конечной вершины), называется *гамильтоновым*.

В **неориентированном графе** последовательность ребер, в которой каждые два соседних ребра смежны, называется путем, а конечный путь, у которого начальные и конечные вершины совпадают - циклом.

Неориентированный граф называется связным, если любые две его вершины можно соединить путем, и несвязным в противном случае. Для установления связности орграфа ориентацию его дуг принимать в расчет не следует. Говорят, что орграф сильно связный, если между любыми



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 208 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

двумя его вершинами существует хотя бы один путь.

В различных приложениях теории графов дугам (ребрам) графов, моделирующим реальные процессы, обычно сопоставляют какие-либо числовые характеристики.

Например, если дугами изображаются транспортные магистрали, то числовой характеристикой дуги может быть пропускная способность соответствующей магистрали; если же дугами изображаются работы некоторого комплекса, то числовая характеристика может означать время выполнения работы, количество некоторого ресурса, необходимого для ее выполнения, и т. д. В подобных случаях говорят, что дугам графа приписаны определенные веса, а граф G с весами на дугах называют *взвешенным*.

При большом числе вершин и дуг (ребер) изображение графа с помощью рисунка теряет наглядность. В таких случаях для задания графов и работы с ними используются матрицы. Особенно удобно использовать матричный эквивалент графа при его исследовании на ЭВМ.

Рассмотрим граф G без петель, имеющий n вершин и m дуг. Графу G можно сопоставить матрицу инциденций орграфа G . Это прямоугольная матрица размерности $m \times n$, строки которой соответствуют вершинам, а столбцы - дугам графа. Элементы матрицы r_j равны: -1 , если дуга u_j исходит из i -й вершины; $+1$, если дуга заходит в i -ю вершину; 0 , если дуга не инцидентна i -й вершине. В случае неориентированного графа элементами матрицы будут 1 и 0 .



Кафедра
ММ и ТП

Начало

Содержание



Страница 209 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

Строки матрицы инциденций называют векторами инциденций графа G .

Как для орграфов, так и для неориентированных графов можно определить матрицу смежности вершин. Матрица смежности вершин орграфа G - это квадратная матрица $[p_{ij}]_{n \times n}$, строки и столбцы которой соответствуют вершинам графа G . Элементы этой матрицы равны числу дуг, идущих из i -й в j -ю вершину. Если орграф не содержит параллельных дуг, то матрица состоит только из 1 и 0.

В случае неориентированного графа ему вместе с ребром (x_i, x_j) принадлежит и ребро поэтому матрица будет симметричной. Справедливо и обратное утверждение: любой симметричной матрице с целыми неотрицательными элементами можно поставить в соответствие неориентированный граф.

По матрице смежности вершин легко определить полустепени захода и исхода вершин, а значит, и степень вершины. Полустепень захода $P^+(x_i)$ вершины x_i , равна сумме элементов i -го столбца; полустепень исхода $P^-(x_i)$ - сумме элементов i -й строки. Так, для графа, изображенного на рисунке а, по его матрице смежности находим, например, для вершины x_3 :

$$P^+(x_3) = 1, P^-(x_3) = 2, P(x_3) = 3.$$

В дальнейшем используется понятие непосредственного предшествования дуг. Будем говорить, что дуга u_i непосредственно предшествует



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 210 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

дуге u_j , если конец дуги u_i является началом дуги u_j .

Граф G можно задать матрицей смежности дуг (ребер). Матрица смежности дуг орграфа - это квадратная матрица $[q_{ij}]_{m \times m}$ (m - число дуг). Строки и столбцы матрицы соответствуют дугам (ребрам) графа. Элементы равны 1, если дуга u_i непосредственно предшествует дуге u_j и 0 в остальных случаях. Матрицей смежности ребер неориентированного графа является матрица m -го порядка (n - число ребер) с элементами q_{ij} , равными 1, если ребра u_i и u_j смежны, и 0 в остальных случаях.

Пример 17.1.

Для данного орграфа построить матрицу смежности вершин и матрицу смежности дуг.

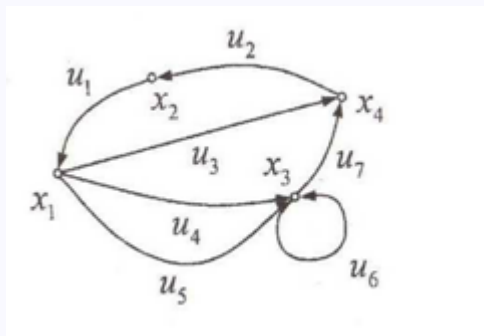


рис 17.1

Решение.

Матрица смежности вершин имеет вид:



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 211 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

$$\begin{array}{c}
 x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \\
 \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 0 & 0 & 2 & 1 \\
 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 1 \\
 0 & 1 & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Матрица смежности дуг имеет вид:

$$\begin{array}{c}
 u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \quad u_5 \quad u_6 \quad u_7 \\
 \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Элементы этой матрицы вычисляются следующим образом. Из вершины x_2 в вершину x_2 идет одна дуга, значит элемент, стоящий во второй строке и первом столбце $p_{21} = 1$. Аналогично получаем $p_{42} = 1, p_{14} =$



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 212 из 293

Назад

На весь экран

Закреть

1 и $p_{34} = 1$. Из вершины x_1 в вершину x_3 идет две параллельные дуги u_4 и u_5 , поэтому $p_{13} = 2$. Наконец, дуга u_6 - петля, поэтому $p_{33} = 1$.

Элементы матрицы вычисляются следующим образом. Рассматриваем дуги в порядке возрастания номеров. Дуга u_2 непосредственно предшествует дуге u_1 , значит элемент $q_{21} = 1$. Дуги u_3 и u_7 непосредственно предшествуют дуге u_2 , следовательно $q_{32} = 1$ и $q_{72} = 1$. Дуга u_1 непосредственно предшествует дугам u_3 , u_4 и u_5 , значит $q_{13} = 1$, $q_{14} = 1$ и $q_{15} = 1$. Дугам u_6 и u_7 непосредственно предшествуют дуги u_4 и u_5 , значит $q_{46} = 1$, $q_{47} = 1$, $q_{56} = 1$ и $q_{57} = 1$. Наконец, так как дуге u_7 непосредственно предшествует дуга u_6 , то $q_{67} = 1$.

17.2 Упорядочивание вершин графа

Графический способ упорядочения вершин (*алгоритм Фалкерсона*) состоит из следующих шагов:

1. Находят вершины графа, в которые не входит ни одна дуга. Они образуют первую группу. Нумеруют вершины группы в натуральном порядке.
2. Мысленно вычеркивают все пронумерованные вершины и дуги, из них выходящие. В получившемся графе найдется, по крайней мере, одна вершина, в которую не входит ни одна дуга. Этой вершине, входящей во вторую группу, присваивают очередной номер и т. д.



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 213 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

Этот шаг повторяют до тех пор, пока все вершины не будут упорядочены (пронумерованы).

Аналогичным образом упорядочивают дуги орграфа. Сначала находят дуги, не имеющие непосредственно предшествующих (они образуют I группу). После вычеркивания дуг I группы в оставшемся графе вновь выделяют дуги, не имеющие непосредственно предшествующих (они образуют II группу). И так до тех пор, пока все дуги не будут разбиты на группы.

Пример 17.2

Упорядочить вершины графа (рисунок 17.1) и построить изоморфный граф.

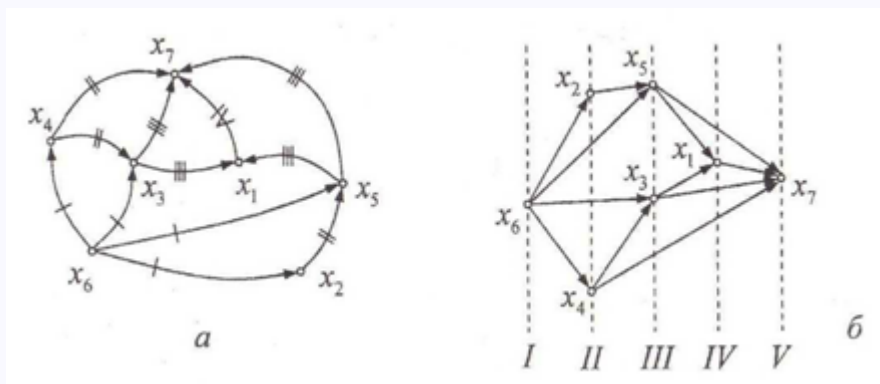


Рисунок 17.1 - упорядочение вершин графа (а - исходный граф; б - упорядоченный граф)



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 214 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

Решение Анализируя исходный граф (рисунок 17.1а), замечаем, что в вершину x_6 не входит ни одна дуга. Следовательно, вершина x_6 не имеет предшественствующих, и поэтому отнесем ее к I группе. Больше подобных вершин на графе нет. Исключаем из рассмотрения вершину x_6 и дуги, из нее исходящие (на рисунке 17.1 а эти дуги отмечены одной черточкой - первое вычеркивание).

В оставшемся графе опять находим вершины, в которые не заходит ни одна дуга - x_2 и x_4 . Они образуют II группу. Выполняем второе вычеркивание и т. д. (рисунок 17.1а). На рисунке (17.1б) для наглядности проведены вертикали, соответствующие группам разбиения, на которых последовательно отмечались точки: сначала x_6 , затем x_2 и x_4 и т. д.

В заключение эти точки соединим дугами так, как на данном графе, и получим изоморфный граф с упорядоченными вершинами. Остается перенумеровать его вершины в натуральном порядке.



*Кафедра
ПМ и ТП*

Начало

Содержание



Страница 215 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

17.3 Алгоритм Фалкерсона. Упорядочение дуг графа

Пример 17.3.

Упорядочить дуги графа (рисунок 17.2) и построить изоморфный граф.

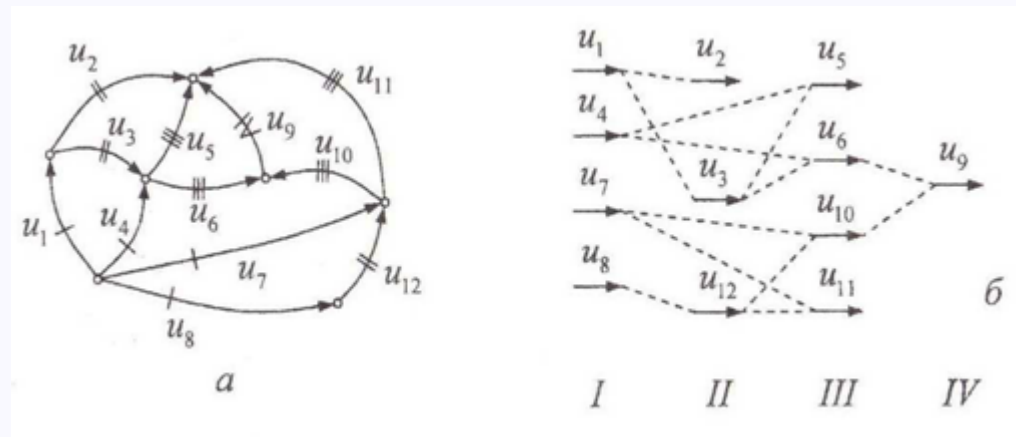


Рисунок 17.2- упорядочение дуг графа (а - исходный граф; б - упорядоченные дуги графа)

Решение. К I группе относятся дуги u_1, u_4, u_7, u_8 . После их вычеркивания непосредственно предшествующих не будут иметь дуги u_2, u_3, u_{10} и u_{11} (это дуги II группы). В III группу входят дуги u_5, u_6, u_{10} и u_{11} , а в IV-дуга u_9 .



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 216 из 293

Назад

На весь экран

Закрыть

На рисунке (17.2б) изображены упорядоченные дуги данного графа. Штриховыми линиями показаны связи между дугами, существующие в данном графе. Используя рисунок (17.2б), изобразим граф, изоморфный данному, но с упорядоченными дугами:

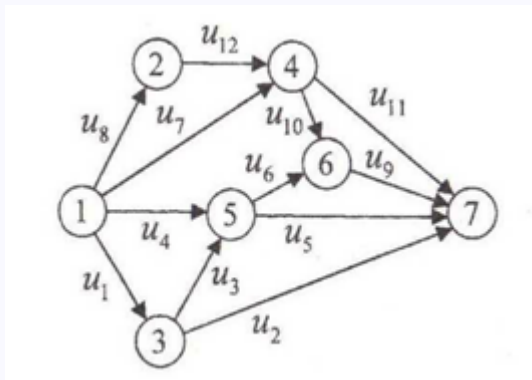


Рисунок 17.3



Кабедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 217 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

ЛЕКЦИЯ 18

Потоки на сетях

18.1 Разрез на сети. Теорема Форда-Фалкерсона

Теория потоков возникла первоначально в связи с разработкой методов решения задач, связанных с рациональной перевозкой грузов. Схема доставки груза представлялась в виде графа, по **ребрам** которого проходит подлежащий максимизации поток этого груза. Позднее обнаружилось, что к задаче о максимальном потоке сводятся и другие важные оптимизационные практические задачи, такие, например, как задача отыскания минимального по стоимости плана выполнения комплекса работ при заданной его продолжительности; задача об определении максимального количества информации, которая может быть передана по разветвленной **сети** каналов связи из одного пункта в другой; задача об оптимальных назначениях; различные задачи организации снабжения; задачи автоматизации проектирования узлов вычислительных машин (печатный монтаж, трассировка плат); задачи, связанные с наиболее экономным строительством энергетических сетей, нефте- и газопроводов, железных и шоссейных дорог, ирригационных систем и много других прикладных задач.

Основным в теории потоков является понятие сети.

Сеть — это взвешенный конечный граф без циклов и петель, **ориен-**



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 218 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

тированный в одном общем направлении от истока (начальная вершина I) к стоку (конечная вершина S). Общее количество вершин сети обозначим через n . Ребрам сети присваивается одна или несколько числовых характеристик. Для наглядности будем представлять, что по ребрам сети из истока в сток направляется некоторое вещество (груз, ресурс, информация и т.п.). В теории потоков предполагается, что если ребро (i,j) входит в сеть, то в сеть входит в ребро (j,i) .

Максимальное количество r_{ij} вещества, которое может пропустить за единицу времени ребро (i,j) , называется его пропускной способностью. В общем случае $r_{ij} \neq r_{ji}$. Если вершины k и l на сети не соединены, то $r_{kl} = r_{jk} = 0$. На сети **пропускные способности ребер** указывают в скобках. При этом первое число – это пропускная способность в направлении от вершины i к вершине j , второе – в противоположном направлении. Пропускные способности сети можно задавать квадратной матрицей R n -го порядка. Поскольку, согласно определения сети $r_{ij} = 0$, то на главной диагонали матрицы R стоят нули.

Количество x_{ij} вещества, проходящего через ребро (i,j) в единицу времени, называется потоком по ребру (i,j) . Произвольно задать n^2 чисел x_{ij} ($i, j = \overline{1, n}$) нельзя. Они должны подчиняться определенным ограничениям, о которых пойдет речь дальше. Будем считать, что если поток из вершины i в вершину j равен x_{ij} , то поток из вершины j в вершину i будет равен $-x_{ij}$, т.е.

$$x_{ji} = -x_{ij} \quad (18.1)$$



*Кафедра
ПМ и ТП*

Начало

Содержание



Страница 219 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

Принимается также, что $x_{ii} = 0$.

Если поток x_{ij} по ребру (i,j) меньше его пропускной способности, т.е. $x_{ij} < r_{ij}$, то ребро (i,j) называют ненасыщенным, если же $x_{ij} = r_{ij}$ – насыщенным.

Совокупность $X = \{x_{ij}\}$ **потоков по всем ребрам** сети называют потоком по сети или просто потоком. Из физического смысла грузопотока следует, что поток по каждому ребру (i,j) не может превышать его **пропускную способность**, т.е.

$$x_{ij} < r_{ij}(i, j = \overline{1, n}) \quad (18.2)$$

Понятно также, что для любой вершины, кроме истока I и стока S , количество вещества, поступающего в эту вершину, равно количеству вещества, вытекающего из нее. С учетом (10.1) это требование можно выразить записью

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 0 (i \neq I, S). \quad (18.3)$$

Это ограничение называют условием сохранения потока: в промежуточных вершинах потоки не создаются и не исчезают. Отсюда следует, что общее количество вещества, вытекающего из истока I , совпадает с общим количеством вещества, поступающего в сток S , т.е.

$$f = \sum_j x_{Ij} = \sum_i x_{iS} \quad (18.4)$$



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 220 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

где j – конечные вершины ребер, исходящих из I ; i – начальные вершины ребер, входящих в S . Линейную функцию f называют мощностью потока на сети.

Пусть дана некоторая **сеть**. Разобьем множество вершин сети на два непересекающихся подмножества A и B так, чтобы исток I попал в подмножество A , а сток S – в подмножество B . В этом случае говорят, что на сети произведен разрез, отделяющий исток I от стока S . В результате произведенного разбиения вершин появятся **ребра** (i,j) , конечные точки которых окажутся в разных подмножествах. Совокупность ребер (i,j) , начальные точки которых принадлежат подмножеству A , а конечные – подмножеству B , называют разрезом сети и обозначают A/B . Величина $R(A/B) = \sum_{i \in A} \sum_{j \in B} r_{ij}$, представляющая собой сумму пропускных способностей r_{ij} всех ребер разреза, называется пропускной способностью разреза.

Пусть на сети задан поток $X = \{x_{ij}\}$ и произведен разрез A/B . Величина $X(A/B) = \sum_{i \in A} \sum_{j \in B} x_{ij}$, представляющая собой сумму потоков x_{ij} по всем ребрам разреза, называется потоком через разрез.

Если на сети задан поток X и произведен разрез A/B , то хотя бы одно ребро любого полного пути, ведущего из истока в сток, будет обязательно принадлежать разрезу A/B . При этом величина потока по любому полному пути не превышает пропускную способность каждого его ребра, а потому величина X суммарного потока, устремленного из истока в



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 221 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

сток, не превышает пропускную способность любого разреза сети, т.е.

$$\sum_{i \in A} \sum_{j \in B} x_{ij} \leq \sum_{i \in A} \sum_{j \in B} r_{ij} \quad (18.5)$$

Оказывается, если удастся построить на сети поток $X^* = \{x_{ij}^*\}$, величина которого равна пропускной способности некоторого разреза A/B , то этот поток будет максимальным, а разрез A/B обладает минимальной пропускной способностью.

В самом деле, пусть для потока $X^* = \{x_{ij}^*\}$ и разреза A^*/B^* выполняется равенство

$$\sum_{i \in A} \sum_{j \in B} x_{ij} \leq \sum_{i \in A} \sum_{j \in B} r_{ij} \quad (18.6)$$

но максимальным является не X^* , а поток $X = \{\widetilde{x}_{ij}\}$. В таком случае поток через разрез A^*/B^* потока $\widetilde{X}$ будет больше потока через этот же разрез потока X^* , т.е.

$$\sum_{i \in A^*} \sum_{j \in B^*} \widetilde{x}_{ij} > \sum_{i \in A^*} \sum_{j \in B^*} x_{ij}^* \quad (18.7)$$

Объединив соотношения), получим

$$\sum_{i \in A^*} \sum_{j \in B^*} \widetilde{x}_{ij} > \sum_{i \in A^*} \sum_{j \in B^*} r_{ij} \quad (18.8)$$

что противоречит неравенству. Вторую часть высказанного выше утверждения примем без доказательства.



*Кафедра
ПМ и ТП*

Начало

Содержание



Страница 222 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

Проведенные рассуждения приводят к следующей теореме.

Теорема Форда-Фалкерсона. *Максимальная величина потока на сети равна минимальной пропускной способности разреза из множества всех разрезов на сети.*

18.2 Постановка и алгоритм задачи о максимальном потоке

Заметим, что числа x_{ij} образуют квадратную матрицу n -го порядка, на главной диагонали которой стоят нули ($x_{ij} = 0$, т.к. согласно определения сети $r_{ij} = 0$), а элементы, расположенные симметрично главной диагонали, равны по абсолютной величине и противоположны по знаку (согласно 25.1). Отсюда следует, что задать поток $X = \{x_{ij}\}$ на сети – это значит задать n^2 чисел x_{ij} , удовлетворяющих условиям.

Учитывая сказанное, задачу о максимальном потоке можно сформулировать следующим образом: найти совокупность $X^* = \{x_{ij}^*\}$ потоков x_{ij}^* по всем ребрам (i,j) сети, которая удовлетворяет условиям и максимизирует линейную функцию. Это типичная задача линейного программирования.

Сформулируем алгоритм решения задачи о максимальном потоке.

Пусть на сети задан некоторый поток $X = \{x_{ij}\}$. Разобьем все вершины сети на два подмножества A и B следующим образом: к подмножеству A отнесем исток I и все вершины достижимые из истока хотя бы по одному пути, состоящему из ненасыщенных ребер; к подмножеству B



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 223 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

отнесем все остальные вершины, т.е. такие, которые нельзя достичь из I по ненасыщенным ребрам. При этом возможны следующие случаи:

1) сток $(S \in A)$;

2) сток $S \in A$.

Случай 1.

Если $(S \in A)$, то $S \in B$ и поэтому построенное разбиение является разрезом A/B . По условию разбиения для любой вершины $i \in A$ существует путь из I в i , состоящий из ненасыщенных ребер, а для любой вершины $j \in B$ такого пути нет. Отсюда следует, что любое ребро (i, j) разреза A/B (а у такого ребра $i \in A, j \in B$) будет насыщенным (иначе j принадлежало бы A), т.е. $x_{ij} = r_{ij}$. Просуммировав эти равенства по всем $i \in A$ и $j \in B$, получим

$$\sum_{i \in A} \sum_{j \in B} x_{ij} = \sum_{i \in A} \sum_{j \in B} r_{ij} \quad (18.9)$$

Из этого равенства по теореме Форда-Фалкерсона следует, что поток $X = \{x_{ij}\}$ является максимальным.

Случай 2.

Если $S \in A$, то существует путь из ненасыщенных ребер, ведущий из I в S . По ребрам этого пути можно пропустить дополнительный поток величиной $\Delta = \min(r_{ij} - x_{ij})$, где минимум берется по всем ребрам, входящим в этот путь. Поток x_{ij} по всем остальным ребрам сети остаются прежними. В результате мощность суммарного потока возрастет



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 224 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

на величину Δ . Это будет новый поток X^1 .

Объединяя оба рассмотренных случая, можно предложить следующий алгоритм построения максимального потока.

1. Построить некоторый начальный поток X^0 .
2. Составить подмножества A вершин, достижимых из истока по ненасыщенным ребрам. Если при этом сток не попадет в подмножество A , то построенный поток будет максимальным и задача решена. Если же сток попадет в A , то перейти к п. 3 алгоритма.
3. Выделить путь из I в S , состоящий из ненасыщенных ребер, и увеличить поток x_{ij} по каждому ребру этого пути на величину $\Delta = \min(r_{ij} - x_{ij})$, где минимум берется по ребрам (i,j) упомянутого пути. Тем самым будет построен новый поток X^1 . После чего выполняем п. 2 алгоритма.

18.3 Приложения задачи о максимальном потоке

Задачу о максимальном потоке можно применить для решения других задач: транспортной задачи по критерию времени, задачи об оптимальных назначениях и пр.



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 225 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

18.3.1 Задача о потоке минимальной стоимости

Задана сеть $G=(E,e)$ с одним источником E_0 , одним стоком E_n и промежуточными вершинами $E_1, E_2, \dots, E_{n-1}$. Каждой дуге (E_i, E_j) (ребру $\overline{E_i, E_j}$) сети поставлены в соответствие две величины: пропускная способность дуги (ребра) b_{ij} ; дуговая стоимость c_{ij} (стоимость доставки единицы потока по дуге (E_i, E_j) или ребру $\overline{E_i, E_j}$, одинаковая в обоих направлениях). Необходимо найти поток из источника в сток заданной величины B , обладающий минимальной стоимостью. Под стоимостью потока будем понимать стоимость доставки того или другого количества вещества из источника в сток. При этом предполагается, что заданная величина потока не превышает величины максимального потока из E_0 в E_n . Формальная запись задачи имеет вид

$$f = \sum_{(i,j) \in e} c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \quad (18.10)$$

$$0 \leq x_{ij} \leq b_{ij}, i, j = \overline{0, n}; i \neq j \quad (18.11)$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} x_{ik} - \sum_{j=1}^n x_{kj} = 0, k = \overline{1, n-1}; \quad (18.12)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{0j} = \sum_{i=0}^{n-1} x_{in} = B \quad (18.13)$$



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 226 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

Если бы не было ограничений на пропускные способности дуг (ребер), то для решения задачи достаточно было бы найти самый экономичный путь (путь минимальной стоимости) из E_0 в E_n и пропустить по нему весь поток. Путь минимальной стоимости — это путь, у которого сумма стоимостей, приписанных дугам, является минимальной. При наличии ограничений на **пропускные способности дуг (ребер)** можно последовательно находить различные пути минимальной стоимости и пропускать потоки по ним до тех пор, пока суммарная величина потока по всем путям не будет равна заданной величине потока. Ниже мы рассмотрим алгоритм нахождения потока минимальной стоимости, основанный на этом подходе.

Алгоритм Басакера-Гоуэна нахождения оптимального потока

Алгоритм нахождения оптимального потока на **сети**, предложенный Басакером и Гоуэном, состоит из ряда шагов.

Первый шаг. В исходной сети все дуговые потоки и величину потока из E_0 в E_n полагаем равными нулю.

Второй шаг. Находим путь μ минимальной стоимости из E_0 в E_n , используя стоимости, приписанные дугам на первой итерации, и модифицированные стоимости на последующих итерациях.

Третий шаг. Определяем пропускную способность Θ пути μ :

$$\Theta = \min_{((E_i, E_j) \in \mu)} (b_{ij}) \quad (18.14)$$



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 227 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

Добавляем к старой величине потока v величину $\Theta' = \min(\Theta, B - v)$ и сравниваем с заданной величиной потока B . Если величина суммарного потока равна заданной величине B , то задача решена, переходим к шестому шагу. В противном случае переходим к четвертому шагу.

Четвертый шаг. Находим величину потока по каждой дуге, принадлежащей пути μ , для чего к старым величинам дуговых потоков пути μ добавляем величину Θ' . Пропускные способности дуг, симметричных дугам пути μ , полагаем равным величинам соответствующих дуговых потоков, т.е. $b_{ji} = x_{ij}$.

Пятый шаг. Определяем модифицированные дуговые стоимости c_{ij} по формуле

$$c_{ij}^* = \begin{cases} c_{ij}, & \text{если } 0 \leq x_{ij} < b_{ij} \\ \infty, & \text{если } x_{ij} = b_{ij}. \end{cases} \quad (18.15)$$

Если для какой-то дуги $x_{ij} > 0$, то модифицированная стоимость симметричной ей дуги (j,i) равна величине c_{ij} , взятой с обратным знаком. Переходим к выполнению второго шага.

Шестой шаг. Минимальную стоимость потока заданной величины определяем по формуле 18.10.

Пример 18.1

Найти поток из E_0 в E_5 величины $B = 3$ на сети, представленной на рис. 18.1, обладающий минимальной стоимостью. Первое число, приписанное каждому ребру, означает пропускную способность, второе — стоимость доставки единицы потока по ребру из одной вершины в другую.



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 228 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

Доставка потока по ребру может осуществляться в любом направлении.

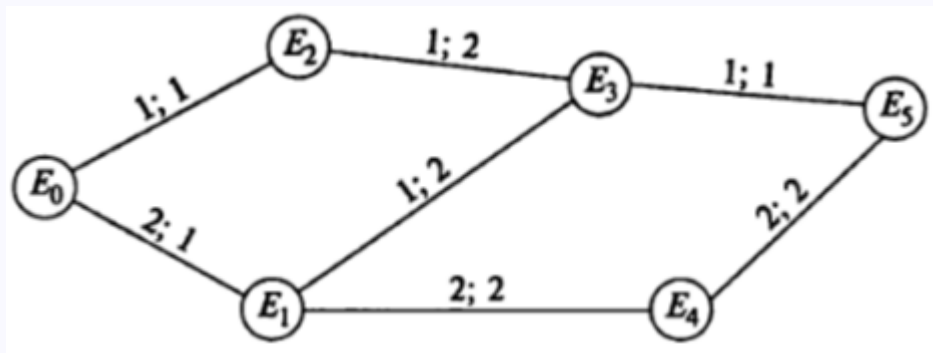


Рисунок 18.1

Итерация 1.

Первый шаг. Полагаем величину потока по каждому ребру сети равной нулю ($x_{ij} = 0$).

Второй шаг. Применяя алгоритм нахождения кратчайшего маршрута, определяем, что минимальная стоимость доставки единицы потока из E_0 в E_5 равная $\varepsilon_5 = 4$, достигается по путям $\mu_1 = E_0 - E_1 - E_3 - E_5$ и $\mu_2 = E_0 - E_2 - E_3 - E_5$ изображенным на рис. 18.2 жирными линиями.

Третий шаг. Определяем пропускные способности выделенных путей μ_1 и μ_2 :

$$\Theta_1 = \min_{(E_i, E_j) \in \mu_1} (b_{ij}) = \min(2, 1, 1) = 1$$

$$\Theta_2 = \min_{(E_i, E_j) \in \mu_2} (b_{ij}) = \min(1, 1, 1) = 1$$



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 229 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

Так как дуга (E_3, E_5) с пропускной способностью $b_{35} = 1$ не позволяет использовать два пути, то выберем первый путь. Учитывая, что $\Theta_1 = 1 < B = 3$, переходим к четвертому шагу.

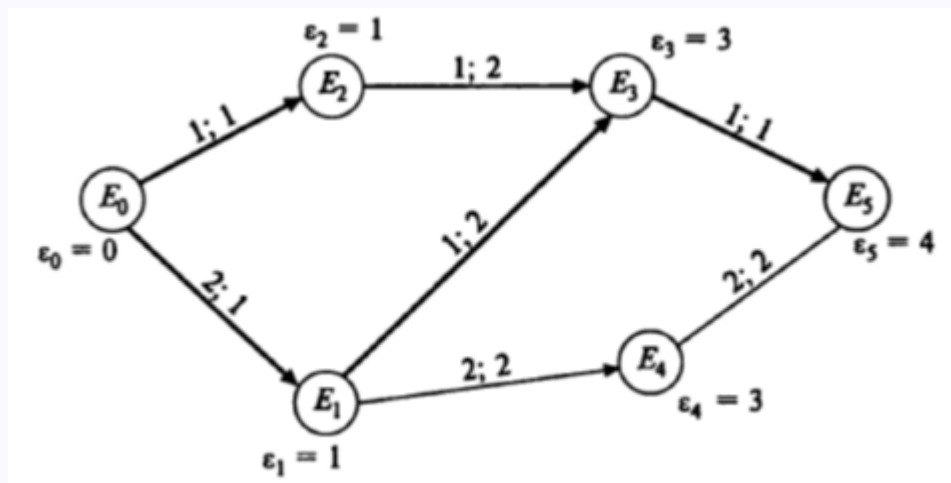


Рисунок 18.2

Четвертый шаг. Величины потоков по дугам пути μ_1 равны: $x_{01} = x_{13} = x_{35} = 0 + 1 = 1$. Эти значения приписаны дугам **сети** в скобках (рис. 18.3). Пропускные способности дуг, симметричных дугам пути, равны: $b_{10} = x_{01} = 1$; $b_{31} = x_{13} = 1$; $b_{53} = x_{35} = 1$.

Пятый шаг. Определяем модифицированные стоимости: $c_{01}^* = 1$, так как $x_{01} = 1 < b_{01} = 2$ и $c_{10}^* = -1$; $c_{13}^* = \infty$, так как $x_{13} = b_{13} = 1$



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 230 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

и $c_{31}^* = -2$; ${}_{35}^* = \infty$, так как $x_{35} = b_{35} = 1$ и $c_{35}^* = -1$. Все остальные $c_{ij}^* = c_{ij}$, так как для них $x_{ij} = 0 < b_{ij} \neq 0$.

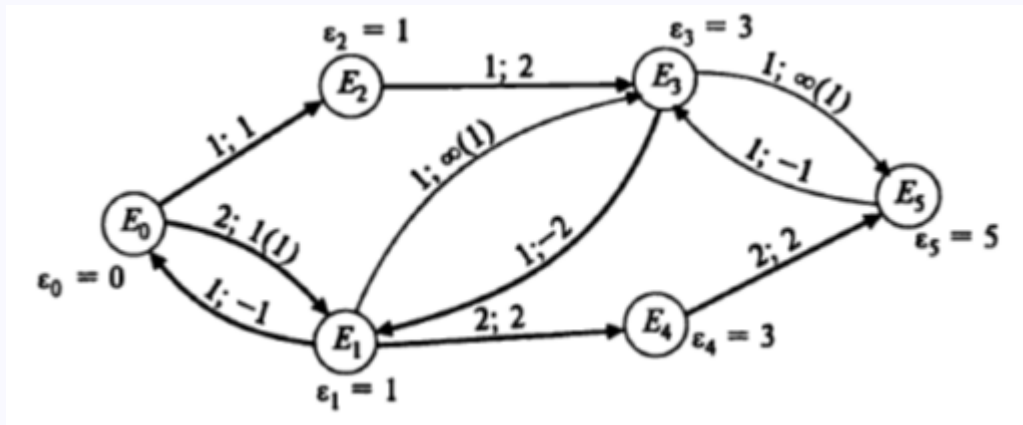


Рисунок 18.3

Итерация 2.

Второй шаг. Находим пути минимальной стоимости $\mu_3 = (E_0 - E_1 - E_4 - E_5)$ и $\mu_4 = (E_0 - E_2 - E_3 - E_1 - E_4 - E_5)$.

Третий шаг. Пропускные способности третьего пути $\Theta_3 = \min(1, 2, 2) = 1$, четвертого пути $\Theta_4 = \min(1, 1, 1, 2, 2) = 1$. В этом случае поток пропускаем сразу по обоим путям, так как пропускные способности общих дуг (E_1, E_4) и (E_4, E_5) равны 2 единицам. Сумма $\Theta_1 + \Theta_3 + \Theta_4 = 3$ и равна заданной величине потока. Следовательно, задача решена.



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 231 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

Шестой шаг. Оптимальная стоимость потока

$$f = \sum_{(i,j) \in e} c_{ij} x_{ij} = 0_1 x_{01} + 0_2 x_{02} + 1_4 x_{14} + 2_3 x_{23} + 3_5 x_{35} + 4_5 x_{45} = 14 \quad (18.16)$$

Фактическое движение потока изображено на рис. 9.8, где числа у дуг равны дуговым потокам ($x_{01} = 2, x_{02} = 1, x_{14} = 2, x_{23} = 1, x_{35} = 1, x_{45} = 2$), все остальные неизвестные равны нулю). Поток по дугам (E_1, E_3) и (E_3, E_1) «погасился».

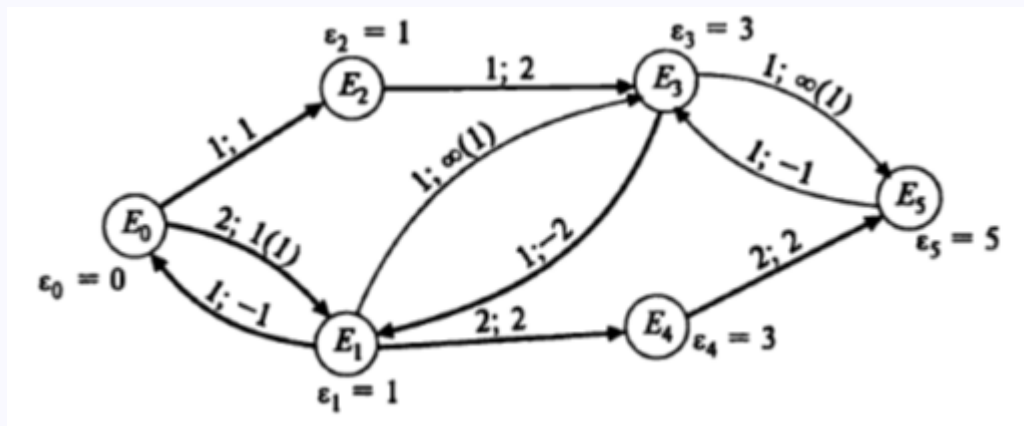


Рисунок 18.4



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание

◀

▶

◀◀

▶▶

Страница 232 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

ЛЕКЦИЯ 19

Общие сведения о теории расписаний

19.1 Определение задачи теории расписаний

Сложности при составлении расписаний появляются тогда, когда работ становится много, нужно учесть множество дополнительных условий и/или составить расписание не для одного человека, а для целого коллектива. Представьте себе сотни работ и десятки исполнителей, для которых необходимо составить расписание.

В процессе решения таких задач, были выработаны общие рекомендации, принципы и методики составления расписаний. В последствии подобные задачи стали исследоваться в рамках специального раздела науки — **Теории расписаний**

Эта наука появилась не напустом месте, а возникла на стыке других областей научного знания. Прежде чем дать определение, что такое **Теория расписаний**, опишем одну важную область математики.

Исследование операций (ИО) – научный метод выработки количественно обоснованных рекомендаций по принятию решений. Важность количественного фактора в ИО и целенаправленность сформулированных рекомендаций позволяют определить ИО как теорию принятия *оптимальных решений*. ИО способствует превращению искусства принятия решений в математическую дисциплину. Термин “ИО”



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 233 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

возник в результате буквального перевода выражения “operation research”, введенного в конце 30-х годов 20-го века как условное наименование одного из подразделений британских ВВС, занимающегося вопросами использования радиолокационных установок в общей системе обороны. Первоначально ИО было связано с решением задач военного содержания, но уже с конца 40-х годов прошлого века оно используется для решения технических, технико-экономических задач, а также задач управления на различных уровнях.

Теперь мы можем дать определение **Теории Расписаний**.

Теория расписаний – это раздел **исследования операций**, в котором строятся и анализируются математические модели календарного планирования (т.е. упорядочивания во времени) различных целенаправленных действий с учетом целевой функции и различных ограничений.

Задачи составления расписаний возникают в частности:

- на производстве, когда нужно упорядочить отдельные **операции** по исполнителям (цеха, станки) и по времени;
- на транспорте при составлении расписания движения поездов, самолетов, общественного городского транспорта;
- при планировании занятий в учебных заведениях;
- при планировании занятости персонала, например, дежурства врачей;
- при выполнении сложных продолжительных проектов строительства зданий, кораблей и т.п.;



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 234 из 293

Назад

На весь экран

Закрыть

- при планировании проведения спортивных мероприятий;
- в компьютерных сетях при планировании очередности передачи пакетов информации и т.д.



*Кафедра
ПМ и ТП*

Начало

Содержание



Страница 235 из 293

Назад

На весь экран

Закрыть

19.2 Классификация задач теории расписаний

Задача теории расписаний считается заданной, если определены:

1. подлежащие выполнению работы и операции;
2. количество и типы машин, выполняющих операцию;
3. порядок прохождения машин;
4. критерии оценки расписаний.

В зависимости от *характера поступления работ* различают два вида задач: **статические** и **динамические**. В статических задачах в свободную систему одновременно поступает определенное число работ. После этого новые работы не поступают и расписание составляется для вполне определенного и известного заранее числа работ. В динамических задачах работы поступают в систему в некоторые моменты времени, которые можно предсказать только в статистическом смысле. Поэтому моменты будущих поступлений не определены. Упорядочение в динамических и статических задачах требует различных методов решения.

Порядок выполнения машинами операций одной работы определяет, является ли система машин:

- а) конвейерной;
- б) со случайным порядком выполнения работ;
- в) системой произвольного типа.



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 236 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

В **конвейерной** системе последовательность прохождения машин одинакова для каждой из работ. Согласно принятой терминологии это означает, что существует такая нумерация машин, что для одной и той же работы номер машины, выполняющей операцию X , меньше номера машины, выполняющей операцию Y , если X предшествует Y .

В **системе со случайным порядком выполнения работ** машинами любая операция может выполняться любой машиной, т.е. все машины являются идентичными.

В **системах произвольного типа** каждая операция может выполняться какой-либо определенной машиной.

Для классификации задач **теории расписаний** в дальнейшем используется запись $A/B/C/D$, где

- A характеризует процесс поступления работ. Для динамических задач A представляет собой функцию распределения времени между поступлениями. Для статических задач A соответствует числу одновременно поступивших работ, если по этому поводу ничего специально не оговорено. Если на месте A стоит n то это означает произвольное, но конечное число работ в статическом случае.
- B характеризует число машин в системе. Если на месте B стоит m то это означает произвольное число машин.
- C характеризует порядок (дисциплину) выполнения работ машинами. Если на месте C находится F , то это соответствует конвейерной системе; если R - то случайной, и если G - произвольной. Для системы, состоящей



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 237 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

из одной машины, указанные дисциплины теряют смысл и поэтому для такой системы третий параметр опускается.

- D характеризует оценку (критерий) расписания.

Пример употребления указанных обозначений: запись $n/2/F/F_{max}$ означает, что требуется упорядочить n работ для выполнения их в конвейерной системе, состоящей из двух машин, так, чтобы минимизировать максимальную длительность прохождения работы (джонсоновская задача составления расписания).

Общая задача теории расписаний записывается так : $n/m/G/F_{max}$ - упорядочить n работ в произвольной системе из m машин так, чтобы минимизировать максимальную длительность прохождения работы.



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 238 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

ЛЕКЦИЯ 20

Одноприборные задачи теории расписаний

Задачам для одного прибора уделяется в рамках ТР особое внимание в силу их тесной связи с классическими задачами из других областей дискретной математики, а также в связи с тем, что одноприборные задачи являются частными случаями и подзадачами более сложных практических задач. В этой главе представлены некоторые алгоритмы решения классических одноприборных задач. Для одноприборных задач можно выделить следующее важное свойство.

Теорема Если $r_j = 0$ для всех $j = 1, 2, \dots, n$, и целевая функция $F(C_1, C_2, \dots, C_n)$ является монотонно неубывающей функцией, зависящей от моментов окончания обслуживания требований C_j , то в задаче минимизации функции F существует оптимальное расписание без прерываний обслуживания требований и простое прибора.

Доказательство. Предположим, что во всех оптимальных расписаниях происходят прерывания в обслуживании хотя бы одной работы. Пусть n - оптимальное расписание, при котором обслуживание работы j прерывается. Пусть работа j обслуживается в интервалах времени $[t_1, t_2)$ и $[t_3, t_4)$, где $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$, причем требование j не обслуживается в промежутке (t_2, t_3) и до момента времени t_1 . Преобразуем расписание n следующим образом. Передвинем часть обслуживания $[t_1, t_2)$ вперед во времени, чтобы требование j обслуживалось без перерывов в



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 239 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

промежутке $[t_3 - (t_2 - t_1), t_4)$. При этом требования, обслуживающиеся в промежутке времени (t_2, t_3) "сдвинем назад" во времени на величину $t_2 - t_1$. В результате такой операции значение целевой функции не увеличилось, но при этом мы сократили одно прерывание. Повторив эту операцию необходимое число раз, равное суммарному количеству всех прерываний, мы получим оптимальное расписание без прерываний. Так как мы минимизируем целевую функцию F и все моменты поступления равны нулю, то очевидно, что всегда будет существовать оптимальное расписание без простоев прибора. **Доказано.**

Многие известные нам целевые функции являются монотонно возрастающими (неубывающими) функциями, зависящими от моментов окончания обслуживания требований C_j . Например, $\sum C_j, \sum U_j, \sum T_j$ и т.д.

Приведенный факт можно использовать следующим образом. Если некоторая задача соответствует условиям теоремы 3.1, тогда оптимальное расписание для этой задачи однозначно задается перестановкой элементов множества N .

Определение Перестановка из n элементов - это конечная последовательность длины n , все элементы которой различны.

Для данных задач перестановка вида $\pi = (j_1, j_2, \dots, j_n)$, задающая расписание π , определяет порядок обслуживания требований (см. векторное представление расписаний). То есть первым обслуживается требование j_1 , за ним - требование j_2 и т.д. Тогда моменты завершения обслуживания для каждого из требований $C_{jk}(\pi) = \sum_{i=1}^k p_{ji}$. Величину



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 240 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

$C_{jk}(\pi)$ называют временем (моментом) завершения обслуживания требований j_k при расписании π .

Для задач, в которых расписание можно задать перестановкой, важными являются следующие определения:

Определение EDD (*Earliest Due Date*) порядок обслуживания требований — очередность обслуживания, при которой требования обслуживаются в порядке неубывания директивных сроков d_j .

Определение LDD (*Latest Due Date*) порядок обслуживания требований — очередность обслуживания, при которой требования обслуживаются в порядке невозрастания директивных сроков d_j .

Определение SPT (*Shortest Processing Time*) порядок обслуживания требований — очередность обслуживания, при которой требования обслуживаются в порядке неубывания времен обслуживания p_j .

Определение LPT (*Longest Processing Time*) порядок обслуживания требований — очередность обслуживания, при которой требования обслуживаются в порядке невозрастания времен обслуживания p_j .

Определение Частичное расписание π' — фрагмент целого расписания π описывающее порядок обслуживания подмножества требований $N' \subset N$.

В данной главе запись вида $\{\pi\}$ обозначает множество требований, обслуживаемых при расписании π . Запись вида $i \in \pi$ означает $i \in \{\pi\}$. Через $\pi/\{i\}$, где $\pi = (\pi_1, i, \pi_2)$, будем обозначать частичное расписание вида (π_1, π_2) . Запись $j \rightarrow i$ означает, что обслуживание требования j



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 241 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

предшествует обслуживанию требования i . Соответственно, запись $(j \rightarrow i)_\pi$ означает, что это выполняется при расписании π .



*Кафедра
ПМ и ТП*

Начало

Содержание



Страница 242 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

ЛЕКЦИЯ 21

Минимизация суммарного запаздывания $1||\sum T_j$

В данном параграфе рассматривается задача минимизации суммарного запаздывания $\sum T_j$, где $T_j = \max\{0, C_j - d_j\}$. То есть в данной задаче необходимо найти расписание π при котором функция $F(\pi) = \sum_{j=1}^n T_j(\pi)$ достигает своего минимума. Несмотря на то, что это классическая задача ТР, доказательство ее NP-трудности было получено сравнительно недавно — в 1990-м году, т.е. выяснение её трудоёмкости было нетривиальной проблемой. Далее для этой задачи будут представлены точный и метаэвристический алгоритмы решения, а также приближенный алгоритм с регулируемой точностью.

Доказательство NP-трудности данной задачи приводится в приложении 2.

21.1 Точный алгоритм решения задачи $1||\sum T_j$

Алгоритм основан на следующих результатах, опубликованных Е. Лаулерм в 1977-м году. Необходимо отметить, что данный алгоритм строит точное решение и для частного случая задачи $1||\sum \omega_j T_j$. при котором выполняется правило: если $p_j < p_i$, то $\omega_j \leq \omega_i, i, j \in N''$.

Теорема. Пусть π - оптимальное расписание для примера задачи с директивными сроками $d_1, d_2, \dots, d_n$, и пусть C_j - моменты завершения



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 243 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

обслуживания требований $j = 1, 2, \dots, n$ при этом расписании. Выберем новые директивные сроки d'_j так, что: $\min\{d_j, C_j\} \leq d'_j \leq \max\{d_j, C_j\}$. Тогда любое оптимальное расписание π' , соответствующее примеру с новыми директивными сроками $d'_1, d'_2, \dots, d'_n$ является оптимальным и для примера с исходными директивными сроками $d_1, d_2, \dots, d_n$.

Доказательство. Обозначим через T , суммарное запаздывания для примера с директивными сроками $d_1, d_2, \dots, d_n$, а через T' - суммарное запаздывания для примера с директивными сроками $d'_1, d'_2, \dots, d'_n$. Пусть π' - оптимальное расписание для примера с директивными сроками $d'_1, d'_2, \dots, d'_n$, а C_j - момент завершения обслуживания требования $j, j = 1, 2, \dots, n$, при данном расписании. Запишем значения $T(\pi)$ и $T(\pi')$ в следующей форме:

$$T(\pi) = T'(\pi) + \sum_{i=1}^n A_j,$$

$$T(\pi') = T'(\pi') + \sum_{j=1}^n B_j,$$

где A_j и B_j - значения, зависящие от требования $j \in N$, для которых выполняется следующее:

(а) Пусть $C_j \leq d_j$, тогда:

1. если $C'_j \leq d_j$, тогда $A_j = d'_j - d_j \geq 0$ и $B_j = 0$;
2. если $d'_j < C'_j \leq d_j$, тогда $A_j = 0$ и $B_j < 0$. $B_j = d_j - C'_j < 0$;
3. если $d_j < C'_j$, тогда $T_j(\pi') \leq T'_j(\pi')$. Поэтому $A_j = 0$ и $B_j < 0$. $B_j = d'_j - d_j < 0$.



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 244 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

(b) пусть $C_j > d_j$, тогда:

1. если $C'_j \leq d_j$, тогда $A_j = d'_j - d_j \geq 0$ и $B_j = 0$;

2. если $d_j < C'_j \leq d'_j$, тогда $A_j = d'_j - d_j \geq 0$ и $B_j = (C'_j - d_j) - 0 < d'_j - d_j = A_j$

3. если $d'_j < C'_j$, тогда $A_j = B_j = d'_j - d_j$.

Выполняется $A_j \geq B_j$ для всех $j = 1, 2, \dots, n$. Более того. $'(\pi) \geq '(\pi')$, т.к. при расписании π' находится минимальное значение T' . Поэтому получаем

$$T'(\pi) + \sum_{i=1}^n A_j \geq T'(\pi') + \sum_{j=1}^n B_j$$

т.е. $T(\pi) \geq T(\pi')$.

Теорема доказана.

Лемма. Для задачи 1|| $\sum T_j$ существует оптимальное расписание π , при котором:

обслуживание требования i предшествует обслуживанию требования j , если $d_i \leq d_j$ и $p_i < p_j$;

все незапаздывающие требования обслуживаются в порядке неубывания директивных сроков.

Доказательство. Сначала докажем первое свойство оптимальных расписаний. Пусть для двух требований i и j выполняется $d_i \leq d_j$ и $p_i < p_j$.



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 245 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

Предположим, что существует оптимальное расписание $\pi = (\pi_1, j, \pi_2, i, \pi_3)$.
 Для расписания $\pi' = (\pi_1, i, \pi_2, j, \pi_3)$ выполняется $F(\pi) - F(\pi') \geq (T_j(\pi) - T_j(\pi')) + (T_i(\pi) - T_i(\pi'))$.

Если $C_i(\pi') > d_j$, тогда

$$F(\pi) - F(\pi') \geq -(p_j + \sum_{k \in \pi_2} p_k) + (p_i + \sum_{k \in \pi_2} p_k) > 0.$$

Иначе, если $C_i(\pi') \leq d_j$, выполняется

$$F(\pi) - F(\pi') \geq -\max\{0, C_j(\pi') - d_j\} + \max\{0, C_j(\pi') - d_i\} > 0,$$

где $C_j(\pi') = C_i(\pi)$. Таким образом, первое свойство леммы доказано.

Докажем второе свойство. Пусть существует оптимальное расписание $\pi = (\pi_1, j, \pi_2, i, \pi_3)$, при котором $d_j > d_i$ и оба требования i и j не запаздывают. Тогда расписание $\pi' = (\pi_1, \pi_2, i, j, \pi_3)$ также является оптимальным. Повторяя подобную **операцию** необходимое число раз получим оптимальное расписание, удовлетворяющее второму свойству леммы. **Доказано.**

Теорема. Пусть требования упорядочены согласно правилу $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$. Обозначим через j^* – требование с максимальной продолжительностью обслуживания, если таких требований несколько, то из них с максимальным директивным сроком, т.е. $j^* = \arg\max \{d_j, p_j\}$, где $p_j = \max\{p_i\}$. Тогда существует требование $k \geq j^*$ такое, что при оптимальном расписании все требования $i, i = 1, 2, \dots, k, i \neq j^*$, обслуживаются перед требованием j^* , а остальные требования после требования j^* .



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 246 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

Доказательство. Пусть C' - наибольший момент окончания обслуживания требования j^* при всех оптимальных расписаниях, соответствующих примеру с директивными сроками $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$. Обозначим через π оптимальное расписание, соответствующее примеру с модифицированными директивными сроками:

$d_1, d_2, \dots, d_{j^*-1}, d'_{j^*} = \max\{d_j, C'\}, d_{j^*+1}, \dots, d_n$ и которое соответствует условиям леммы. Расписание π является оптимальным и для исходного примера согласно теореме. Пусть C - время завершения обслуживания требования j^* при расписании π . Тогда имеем $C \leq C' \leq (d')_{j^*} = \max\{d_{j^*}, C'\}$, т.е. требование j^* не запаздывает в модифицированном примере при расписании π . При расписании π все требования i , $d_i > d'_{j^*}$, обслуживаются перед требованием j^* , т.к. иначе требование i не будет запаздывающим, что противоречит второму свойству леммы 3.4. С другой стороны, все требования j такие, что $d_j \leq d'_{j^*}$, должны обслуживаться при этом расписании перед требованием j^* , т.к. $p_j < p_{j^*}$ (см. первое свойство леммы 16.2). **Теорема доказана.**

Можно сделать следующий вывод из данной теоремы. Если выбрать такое требование j^* и для него определить требование (позицию) $k \geq j^*$, то исходную задачу можно разбить на две подзадачи решаемые аналогично. Первая подзадача содержит множество требований $i, i = 1, 2, \dots, k, i \neq j^*$, а другая - множество требований $\{k + 1, k + 2, \dots, n\}$. Сложность заключается в выборе требования (позиции) k .



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 247 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

На этом факте основан следующий точный алгоритм 16.1 решения задачи. Обозначим через $j^*(N')$ требование с наибольшей продолжительностью обслуживания среди требований множества $N' \subseteq N$. Если таких требований несколько, то выбирается требование с наибольшим директивным сроком, т.е. $j^*(N') = \operatorname{argmax} \{d_j; p_j\}$, где $p_j = \max\{p_i\}$. Для сокращения записи вместо $j^*(N')$ будем записывать j^* , если очевидно о каком множестве идет речь.

Рассмотрим пример (подпример) обслуживания требований множества $N' \subseteq N$, $N' = \{1, 2, \dots, n'\}$, с момента времени $t' \geq 0$. Множество $L(N', t')$ есть множество всех индексов $i \in \{j^*, j^* + 1, \dots, n'\}$.

Алгоритм решения задачи 1 || $\sum T_j$.

Procedure **ProcL** (N,t)

1: Дан пример $\{N, t\}$ с множеством требований $N = \{j_1, j_2, \dots, j_n\}$ и моментом начала обслуживания t , где $d_{j_1} \leq d_{j_2} \leq \dots \leq d_{j_n}$.

2: if $N = \emptyset$ then

3: $\pi' :=$ пустое расписание;

4: else

5: Найдем требование j^* из множества N ;

6: Найдем множество $L(N, t)$ для требования j^* ;

7: for ALL $k \in L(N, t)$ do

8: $\pi_k := (\mathbf{ProcL}(N', t'), j^*(N), \mathbf{ProcL}(N'', t''))$, где

$N' := \{j_1, \dots, j_k\} / \{j^*\}$, $t' := t$, $N'' := \{j_{k+1}, \dots, j_n\}$, $t'' := t + \sum_{i=1}^k p_{j_i}$;

9: end for



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 248 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

10: $\pi_k^* := \operatorname{argmin}\{F(\pi_k, t)\};$

11: end if

12 RETURN π^* ;

Алгоритм решения.

1: π' : **ProcL**(N,0);

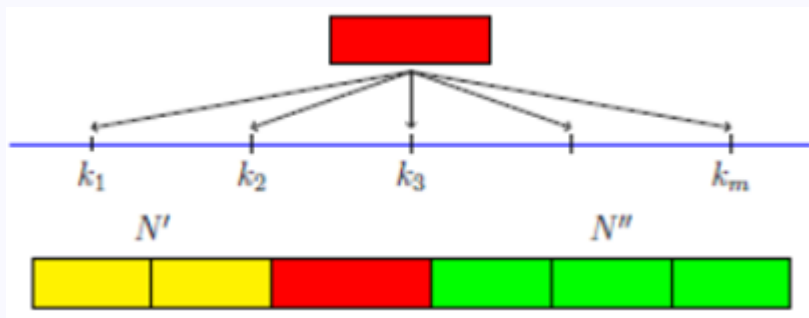


Рисунок 21.1 Рисунки к алгоритму

Запись $F(\pi_k, t)$ в алгоритме означает суммарное запаздывание при расписании π_k выполнение которого начинается с момента времени t . На следующих двух рисунках 3.1 показан процесс выбора позиции k и разбиение исходной задачи на две подзадачи. Список рассматриваемых позиций $L(N', t')$ можно значительно сократить, т.к. в это множество стоит включать только требования $k \in \{j^*, j^* + 1, \dots, n'\}$, для которых выполняются условия:



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 249 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

(а) $t' + \sum_{j=1}^k p_j < d_{k+1}$ (правило исключения 1) и

(б) $d_j + p_j \leq t' + \sum_{j=1}^k p_j$, для всех $j = \overline{j * (N') + 1, k}$ (правила исключения 2, 3), где $d_{n'+1} := \infty$.

Существуют и другие правила исключения, позволяющие сократить время работы алгоритма.

Теорема Трудоёмкость алгоритма составляет $O(n^4 \sum p_j)$ операций. Модификации данного алгоритма с различными правилами сокращения перебора периодически появляются в литературе. Но на текущий момент, лучший из предложенных алгоритмов может решать "простые" примеры, построенные по схеме Поттса и ван Вассенхова, размерностью не больше 500 требований.



*Кафедра
ПМ и ТП*

Начало

Содержание



Страница 250 из 293

Назад

На весь экран

Закрыть

21.2 n-приборные задачи ТР. Постановка задачи, ограничения

В этом разделе главы рассматривается задача Flow-Shop, в которой необходимо минимизировать значение $C_{max} = \max C_j$. Напомним, что для данной задачи каждое требование $j, j = 1, 2, \dots, n$, состоит из одних и тех же **операций**, т.е. $O_{j1} \rightarrow \dots \rightarrow O_{jm}, \forall j \in N$ причем для каждой операции с номером $i, i = 1, 2, \dots, m$, задан прибор, выполняющий i эту операцию. Операции каждого требования j выполняются в заданной последовательности $O_{j1} \rightarrow \dots \rightarrow O_{jm}$, причем выполнение операции $k, k = 2, 3, \dots, m$, может начаться не раньше окончания выполнения операции $k-1$ для этого же требования.

Расписание для каждого прибора задается вектором – порядком обслуживания на данном приборе операций, относящихся к разным требованиям. На рис. 4.1 представлено два допустимых расписания для одного и того же примера, где $n = 2$ и $m = 4$. При этих расписаниях $C_{max} = 11$. Оптимальное расписание представлено на рис. 4.2, где $C_{max} = 10$.

Теорема 21.1 Для задачи $Fm||C_{max}$ существует оптимальное расписание, обладающее свойствами:

- порядок обслуживания требований (вектор) для первых двух приборов совпадает;
- порядок обслуживания требований (вектор) для последних двух приборов совпадает;



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 251 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 252 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

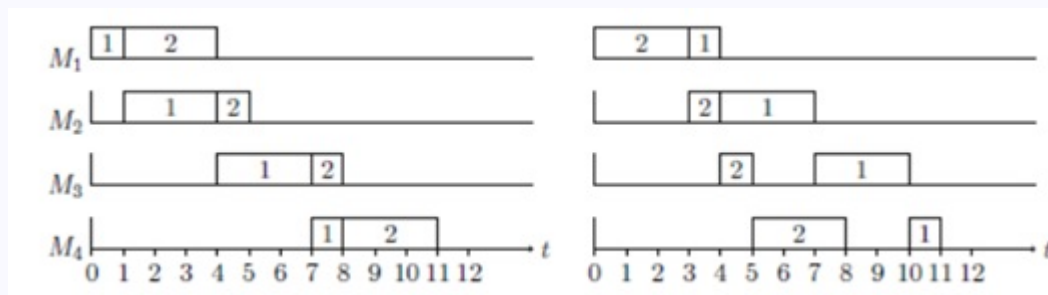


Рисунок 21.1. Расписания для двух требований

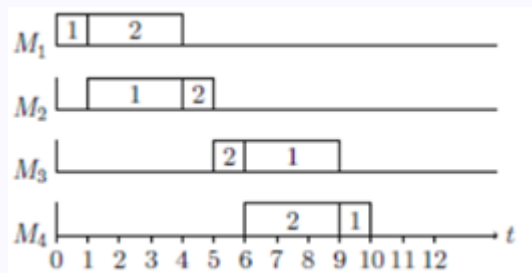


Рисунок 21.2. Оптимальное расписание для двух требований

На основании этой теоремы можно сделать вывод, что если $m \leq 3$, то существует порядок обслуживания (вектор), оптимальный (одинаковый) для всех трех приборов.

Далее представлен алгоритм Джонсона решения задачи $F2||C_{max}$, полученный в 1954-м году. Идея алгоритма заключается в следующем. Последовательно мы конструируем начало π_1 и конец π_2 вектора $\pi = (\pi_1, \pi_2)$, задающего порядок обслуживания. На каждом шаге мы рассматриваем операцию O_{ji} с наименьшим значением p_{ji} , среди рассматриваемых операций. Если $i = 1$, то в конец частичного расписания π_1 мы добавляем требование j , т.е. $\pi_1 = (\pi_1, j)$, иначе требование добавляется в начало другого частичного расписания $\pi_2 = (j, \pi_2)$. После этого требование j исключается из рассмотрения и мы повторяем итерацию до тех пор, пока не будут расставлены все требования.

Необходимо отметить, что алгоритм имеет трудоёмкость $O(n \log n)$ операций, если пункт 3 алгоритма – сортировку продолжительности обслуживания требований - выполнить до основного цикла 2-10.

Алгоритм Джонсона решения задачи $F2||C_{max}$.

```

1:  $N' := N; \pi_1 := (), \pi_2 := ();$ 
2: while  $N' \neq \emptyset$  do
3: Найдём  $O_{j*i*}$  с минимальной продолжительностью
    $p_{j*i*} = \min\{p_{ji} | j \in N', i = 1, 2\};$ 
4: if  $i = 1$  then
5:  $\pi_1 = (\pi_1, j);$ 
6: else
7:  $\pi_2 = (j, \pi_2);$ 
8: end if

```



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 253 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

9: $N' := N' / j$;
 10: end while
 11: $\pi = (\pi_1, \pi_2)$;

Продemonстрируем работу алгоритма на примере.

Таблица: Входные данные

j	1	2	3	4	5
p_{i1}	4	3	3	1	8
p_{i2}	8	3	4	4	7
Куда включаем требование j	π_1	π_2	π_1	π_1	π_2

Для данного примера оптимальный порядок (вектор) имеет вид $\pi = (4, 3, 1, 5, 2)$.

На рис. соответствующее расписание представлено графически.

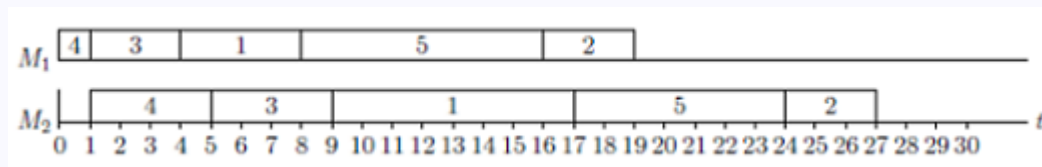


Рис. 21.1: Оптимальное расписание для примера.



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 254 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

ЛЕКЦИЯ 22

Решение задач теории расписания

22.1 Комбинаторный подход

Сводится к целенаправленной перестановке пар работ в некоторой исходной последовательности, пока не будет получено оптимальное $n!$ близкое к **оптимальному** решение.

Вспомним сначала определения таких понятиях, как задачи класса **P**, эффективные алгоритмы и **NP**-полные задачи.

Под «эффективным алгоритмом» понимается алгоритм, для которого число требуемых шагов растет как полином от размера входной задачи. Задачи, имеющие эффективные (полиномиальные) алгоритмы решения, принадлежат классу **P**-задач.

Класс **NP**-задач обладает следующими свойствами:

- никакую **NP**-полную задачу нельзя решить никакими известными полиномиальными алгоритмами;
- если существует полиномиальный алгоритм для какой-нибудь **NP**-полной задачи, то существуют полиномиальные алгоритмы для всех **NP**-полных задач.

Практическое значение понятия **NP**-полноты состоит в следующем: такие задачи по существу труднорешаемы с вычислительной точки зрения, они не поддаются эффективному алгоритмическому решению и



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 255 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

для алгоритма, корректно решающего **NP**-полную задачу, потребуется в худшем случае экспоненциальное количество времени и, следовательно, он не будет применим на практике ни к каким, за исключением очень малых, задачам.

22.2 Эвристические и вероятностные методы

Неудовлетворительное состояние развития точных методов решения задач ТР обусловило разработку приближенных методов, позволяющих получать приемлемые решения при сравнительно небольших затратах времени и средств. Условно приближенные методы делятся на *эвристические* и *вероятностные*.

Эвристические алгоритмы основаны на приеме, который называется *приемом снижения требований*. Он заключается в отказе от поиска оптимального решения за приемлемое время. Эвристические алгоритмы используют различные разумные соображения без строгих обоснований.

Широко применяется так называемый метод локального поиска. При этом заранее выбранное множество перестановок используется для последовательного улучшения начального решения до тех пор, пока такое улучшение возможно, в противном случае оказывается достигнутым локальный оптимум.

Еще одно из направлений эвристических методов решения задач ТР состоит в формировании правил или функций предпочтения (приори-



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 256 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

тетов). Для каждой i -й работы из множества ожидающих выполнения работ, вычисляется значение функции f_i предпочтения и выбирается та работа, для которой f_i достигает максимума или минимума.

Примеры правил предпочтения :

- 1) *Правило SPT (shortest processing time)*. Предпочтение отдается той работе (операции) из множества готовых к обработке на освободившейся машине, у которой время выполнения на этой машине минимально.
- 2) *Правило LRT (longest remaining time)*. Требуем выбора напряженной работы, т.е. той, у которой сумма времен выполнения оставшихся **операций** наибольшее.
- 3) *Правило LPT (longest processing time)*. Предпочтение отдается той работе (операции) из множества готовых к обработке на освободившейся машине, у которой время выполнения на этой машине максимально.

Достоинством эвристических методов является удобство реализации их на ЭВМ даже при решении громоздких задач. Недостатки эвристических методов заключаются в сложности оценки близости полученных расписаний к оптимальному. Кроме того для каждой функции предпочтения существуют задачи, для которых применение данной функции приводит к плохим результатам. Один из путей совершенствования метода функций предпочтения состоит в их привязке к классам задач.

Вероятностные методы связаны с k -кратным моделированием расписаний. Выбор работ из множества ожидающих выполнения осуществляется случайным образом. После k -кратного проигрывания выбирает-



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 257 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

ся наилучшее расписание, которое принимается за решение задачи. При этом различают:

- а) ненаправленный случайный поиск;
- б) направленный случайный поиск без самообучением;
- в) направленный случайный поиск с самообучением.



*Кафедра
ПМ и ТП*

Начало

Содержание



Страница 258 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

ЛЕКЦИЯ 23

Алгоритм Джонсона для двух машин

Имеем конвейер из двух машин: $m=2$. Каждая работа состоит из двух **операций** с длительностями a_i и b_i , минимизируется общее время обслуживания работ.

Последовательность, минимизирующая общее время работы, такова: сначала запускаются работы, для которых $a_i \leq b_i$ в порядке неубывания a_i , затем все работы, для которых $a_i > b_i$ в порядке невозрастания b_i (тем самым минимизируем простои 2-ой машины из-за того, что 1-ая еще не успела обработать какую-либо работу). Доказана оптимальность такой последовательности. Однако на случай $n > 2$ результаты не распространяются.

NP-полнота задачи является веским доводом при обосновании необходимости построения приближенных или эвристических алгоритмов ее решения, применения схем направленного перебора вариантов (таких, как метод последовательного конструирования, анализа и отсеивания вариантов (обобщение метода ветвей и границ)), а также при обосновании необходимости исследования частных случаев задачи.

Павловым А. А. и др. предложен следующий путь решения NP-полных задач:

- исследуется труднорешаемая задача и находятся теоретические свойства, которым удовлетворяет ее оптимальное решение;



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 259 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

- на основе этих свойств разрабатывается полиномиальный алгоритм решения, при этом вводится понятие полиномиальной разрешимости задач из класса NP , под которым понимается существование полиномиального алгоритма, удовлетворяющего следующим условиям:

1) если при решении произвольной индивидуальной задачи выполняются определенные аналитические условия, то эта индивидуальная задача решается строго (т.е. получено строго оптимальное решение);

2) в результате работы полиномиального алгоритма всегда известно решена или нет данная индивидуальная задача точно;

3) полиномиальный алгоритм является эффективным и статически значимым, т.е. при моделировании произвольных индивидуальных задач в большинстве случаев полученные решения являются точными.



*Кафедра
ПМ и ТП*

Начало

Содержание



Страница 260 из 293

Назад

На весь экран

Закрыть

ЛЕКЦИЯ 24

Задачи теории массового обслуживания. Классификация задач

При **исследовании операций** часто приходится сталкиваться с работой своеобразных систем, называемых системами массового обслуживания (СМО). Примерами таких систем могут служить: телефонные станции, ремонтные мастерские, билетные кассы, справочные бюро, магазины, парикмахерские и т. п.

Каждая СМО состоит из какого-то числа обслуживающих единиц (или «приборов»), которые мы будем называть каналами обслуживания. Каналами могут быть: линии связи, рабочие точки, кассиры, продавцы, лифты, автомашины и др. СМО могут быть одноканальными и многоканальными.

Всякая СМО предназначена для обслуживания какого-то потока заявок (или «требуваний»), поступающих в какие-то случайные моменты времени. Обслуживание заявки продолжается какое-то, вообще говоря, случайное время. Тогда, после чего канал освобождается и готов к приему следующей заявки. Случайный характер потока заявок и времен обслуживания приводит к тому, что в какие-то периоды времени на входе СМО скапливается излишне большое число заявок (они либо становятся в очередь, либо покидают СМО не обслуженными); в другие же периоды СМО будет работать с недогрузкой или вообще простаивать.



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 261 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

Процесс работы СМО представляет собой случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем; состояние СМО меняется скачком в моменты появления каких-то событий (или прихода новой заявки, или окончания обслуживания, или момента, когда заявка, которой надоело ждать, покидает очередь). Предмет теории массового обслуживания – построение математических моделей, связывающих заданные условия работы СМО (число каналов, их производительность, правила работы, характер потока заявок) с интересующими нас характеристиками – показателями эффективности СМО, описывающими, с той или другой точки зрения, ее способность справляться с потоком заявок. В качестве таких показателей (в зависимости от обстановки и целей исследования) могут применяться разные величины, например: среднее число заявок, обслуживаемых СМО в единицу времени; среднее число занятых каналов; среднее число заявок в очереди и среднее время ожидания обслуживания; вероятность того, что число заявок в очереди превысит какое-то значение, и т. д. Среди заданных условий работы СМО мы намеренно не выделяем элементов решения: ими могут быть, например, число каналов, их производительность, режим работы СМО и т. д. Важно уметь решать прямые задачи исследования операций, а обратные ставятся и решаются в зависимости от того, какие именно параметры нам нужно выбирать или изменять. Что касается задач оптимизации, то мы ими здесь почти не будем заниматься, разве только в простейших случаях.



*Кафедра
ПМ и ТП*

Начало

Содержание



Страница 262 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

Математический анализ работы СМО очень облегчается, если процесс этой работы – марковский. Мы уже знаем, что для этого достаточно, чтобы все потоки событий, переводящие систему из состояния в состояние (потоки заявок, потоки «обслуживании»), были простейшими. Если это свойство нарушается, то математическое описание процесса становится гораздо сложнее и довести его до явных, аналитических формул удастся лишь в редких случаях. Однако все же аппарат простейшей, марковской теории массового обслуживания может пригодиться для приближенного описания работы СМО даже в тех случаях, когда потоки событий – не простейшие. Во многих случаях для принятия разумного решения по организации работы СМО вовсе и не требуется точного знания всех ее характеристик – зачастую достаточно и приближенного, ориентировочного.

Системы массового обслуживания делятся на типы (или классы) по ряду признаков. Первое деление: СМО с отказами и СМО с очередью. В СМО с отказами заявка, поступившая в момент, когда все каналы заняты, получает отказ, покидает СМО и в дальнейшем процессе обслуживания не участвует. Примеры СМО с отказами встречаются в телефонии: заявка на разговор, пришедшая в момент, когда все каналы связи заняты, получает отказ и покидает СМО не обслуженной. В СМО с очередью заявка, пришедшая в момент, когда все каналы заняты, не уходит, а становится в очередь и ожидает возможности быть обслуженной. На практике чаще встречаются (и имеют большее значение) СМО



*Кафедра
ПМ и ТП*

Начало

Содержание



Страница 263 из 293

Назад

На весь экран

Закрыть

с очередью; недаром теория массового обслуживания имеет второе название: «теория очередей».

СМО с очередью подразделяются на разные виды, в зависимости от того, как организована очередь — ограничена она или не ограничена. Ограничения могут касаться как длины очереди, так и времени ожидания (так называемые «СМО с нетерпеливыми заявками»). При анализе СМО должна учитываться также и «дисциплина обслуживания» — заявки могут обслуживаться либо в порядке поступления (раньше пришла, раньше обслуживается), либо в случайном порядке. Нередко встречается так называемое обслуживание с приоритетом — некоторые заявки обслуживаются вне очереди. Приоритет может быть как абсолютным — когда заявка с более высоким приоритетом «вытесняет» из-под обслуживания заявку с низшим (например, пришедший в парикмахерскую клиент высокого ранга прогоняет с кресла обыкновенного клиента), так и относительным когда начатое обслуживание доводится до конца, а заявка с более высоким приоритетом имеет лишь право на лучшее место в очереди.

Существуют СМО с так называемым многофазовым обслуживанием, состоящим из нескольких последовательных этапов или «фаз» (например, Покупатель, пришедший в магазин, должен сначала выбрать товар, затем оплатить его в кассе, затем получить на контроле).

Кроме этих признаков, СМО делятся на два класса:

«открытые» и «замкнутые». В открытой СМО характеристики пото-



*Кафедра
ПМ и ТП*

Начало

Содержание



Страница 264 из 293

Назад

На весь экран

Закрыть

ка заявок не зависят от того, в каком состоянии - сама СМО (сколько каналов занято). В замкнутой СМО—зависят. Например, если один рабочий обслуживает группу станков, время от времени требующих наладки, то интенсивность потока «требований» со стороны станков зависит от того, сколько их уже неисправно и ждет наладки. Это — пример замкнутой СМО. Классификация СМО далеко не ограничивается приведенными их разновидностями, но мы ограничимся ими.

Оптимизация работы СМО может производиться под разными углами зрения: с точки зрения организаторов (или владельцев) СМО или с точки зрения обслуживаемых клиентов. С первой точки зрения желательно «выжать все, что возможно» из СМО и добиться того, чтобы ее каналы были предельно загружены. С точки зрения клиентов желательно всемерное уменьшение очередей, которые зачастую становятся настоящим «бичом быта», приводя к бессмысленной трате сил и времени и, в конечном итоге, к понижению производительности труда. При решении задач оптимизации в теории массового обслуживания существенно необходим «системный подход», полное и комплексное рассмотрение всех последствий каждого решения. Например, с точки зрения клиентов СМО желательно увеличение числа каналов обслуживания; но ведь работу каждого канала надо оплачивать, что удорожает обслуживание. Построение математической модели позволяет решить оптимизационную задачу о разумном числе каналов с учетом всех «за» и «против». Поэтому мы не выделяем в задачах массового обслуживания какого-



*Кафедра
ПМ и ТП*

Начало

Содержание



Страница 265 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

либо одного показателя эффективности, а сразу ставим эти задачи как многокритериальные.

Все перечисленные выше разновидности СМО (и многие другие, здесь не упомянутые) исследуются в теории массового обслуживания, литература по которой в настоящее время достигла огромных размеров. Мы назовем только несколько книг: [13—17]. Кроме того, разделы, посвященные теории массового обслуживания, имеются в ряде книг по исследованию операций: [1, 6, 7]. Однако почти нигде изложение не ведется на должном методическом уровне: выводы часто проводятся излишне сложно; верные (почти всегда) формулы доказываются не лучшим путем¹). В настоящем (по необходимости кратком) изложении теории массового обслуживания мы приведем два методических приема, позволяющих сильно упростить выводы формул. Этим приемам будет посвящен следующий параграф.



*Кафедра
ПМ и ТП*

Начало

Содержание



Страница 266 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

ЛЕКЦИЯ 25

Задачи теории массового обслуживания. Задача Эрланга

Здесь мы рассмотрим одну из первых по времени, «классических» задач теории массового обслуживания; эта задача возникла из практических нужд телефонии и была решена в начале нашего века датским математиком Эрлангом. Задача ставится так: имеется n каналов (линий связи), на которые поступает поток заявок с интенсивностью λ . Поток обслуживания имеет интенсивность μ (величина, обратная среднему времени обслуживания t_{ob}). Найти финальные вероятности состояний СМО, а также характеристики ее эффективности:

A – абсолютную пропускную способность, т. е. среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени;

Q – относительную пропускную способность, т. е. среднюю долю прошедших заявок, обслуживаемых системой;

P_{otk} — вероятность отказа, т. е. того, что заявка покинет СМО не обслуженной;

k – среднее число занятых каналов.



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 267 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

Решение. Состояния системы S (СМО) будем нумеровать по числу заявок, находящихся в системе (в данном случае оно совпадает с числом занятых каналов):

S_0 — в СМО нет ни одной заявки,

S_1 — в СМО находится одна заявка (один канал занят, остальные свободны),

S_k — в СМО находится k заявок (k каналов заняты, остальные свободны),

S_n — в СМО находится n заявок (все n каналов заняты).

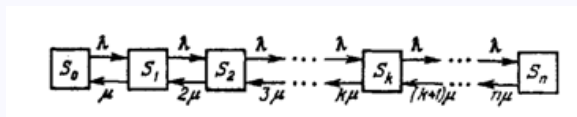


Рис. 25.1:

Граф состояний СМО соответствует схеме гибели в размножения (рис. 29.1). Разметим этот граф – проставим у стрелок интенсивности потоков событий. Из S_0 в S_1 систему переводит поток заявок с интенсивностью λ (как только приходит заявка, система перескакивает из S_0 в S_1). Тот же



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 268 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

поток заявок переводит систему из любого левого состояния в соседнее правое (см. верхние стрелки на рис.)

Проставим интенсивности у нижних стрелок. Пусть система находится в состоянии S_1 (работает один канал). Он производит μ обслуживания в единицу времени. Проставляем у стрелки $S_1 \rightarrow S_0$ интенсивность μ . Теперь представим себе, что система находится в состоянии S_2 (работают два канала). Чтобы ей перейти в S_1 , нужно, чтобы либо закончил обслуживание первый канал, либо второй; суммарная интенсивность их потоков обслуживания равна 2μ ; проставляем ее у соответствующей стрелки. Суммарный поток обслуживания, даваемый тремя каналами, имеет интенсивность 3μ , к каналами — $k\mu$. Проставляем эти интенсивности у нижних стрелок на рис. 29.1.

А теперь, зная все интенсивности, воспользуемся уже готовыми формулами для финальных вероятностей в схеме гибели и размножения. Получим:

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2\mu^2} + \frac{\lambda^3}{2 \cdot 3\mu^3} + \dots + \frac{\lambda^k}{k\mu^k} + \dots + \frac{\lambda^n}{n\mu^n}\right)^{-1} \quad (25.1)$$

Ряд в формуле (29.1) представляет собой геометрическую прогрессию. Мы знаем, что при $\rho < 1$ ряд сходится — это бесконечно убывающая геометрическая прогрессия со знаменателем ρ . При $\rho \geq 1$ ряд расходится (что является косвенным, хотя и не строгим доказательством того,



*Кафедра
ПМ и ТП*

Начало

Содержание



Страница 269 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

что финальные вероятности состояний $0, p_1, \dots, p_k, \dots$ существуют только при $\rho < 1$). Теперь предположим, что это условие выполнено, и $\rho < 1$. Суммируя прогрессию в (29.2), имеем

$$1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^k + \dots = \frac{1}{1 - \rho}, \quad (25.2)$$

откуда

$$p_0 = 1 - \rho. \quad (25.3)$$

Вероятности $p_1, p_2, \dots, p_k, \dots$ найдутся по формулам:

$$p_1 = \rho p_0, p_2 = \rho^2 p_0, \dots, p_k = \rho p_0, \dots, \quad (25.4)$$

откуда, с учетом (21.4), найдем окончательно:

$$p_1 = \rho(1 - \rho), p_2 = \rho^2(1 - \rho), \dots, p_k = \rho_k(1 - \rho), \dots \quad (25.5)$$

Как видно, вероятности $p_0, p_1, \dots, p_k, \dots$ образуют геометрическую прогрессию со знаменателем ρ . Как это ни странно, максимальная из них p_0 — вероятность того, что канал будет вообще свободен. Как бы ни была нагружена система с очередью, если только она вообще справляется с потоком заявок ($\rho < 1$), самое вероятное число заявок в системе будет 0.

Найдем среднее число заявок в СМО $L_{\text{сист.}}$. Тут придется немного повозиться. Случайная величина Z — число заявок в системе — имеет



*Кафедра
ПМ и ТП*

Начало

Содержание



Страница 270 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

возможные значения $0, 1, 2, \dots, k, \dots$ с вероятностями $p_0, p_1, p_2, \dots, p_k, \dots$. Ее математическое ожидание равно

$$L_{sist} = 0 * p_0 + 1 * p_1 + 2 * p_2 + \dots + k * p_k + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k \quad (25.6)$$

(сумма берется не от 0 до ∞ , а от 1 до ∞ , так как нулевой член равен нулю). Подставим в формулу (29.7) выражение для p_k (29.6):

$$L_{sist} = \sum_{k=1}^{\infty} k \rho^k (1 - \rho) \quad (25.7)$$

Теперь вынесем за знак суммы $\rho(1 - \rho)$:

$$L_{sist} = \rho(1 - \rho) \sum_{k=1}^{\infty} k \rho^k - 1 \quad (25.8)$$

Тут мы опять применим «маленькую хитрость»: $k \rho^{k-1}$ есть не что иное, как производная по ρ от выражения ρ^k значит,

$$L_{sist} = \rho(1 - \rho) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{d\rho} \rho^k \quad (25.9)$$



*Кафедра
ПМ и ТП*

Начало

Содержание



Страница 271 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

Меняя местами операции дифференцирования суммирования, получим:

$$L_{sist} = \rho(1 - \rho) \frac{d}{d\rho} \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \quad (25.10)$$

Но сумма в формуле (21.8) есть не что иное, как сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом ρ и знаменателем ρ ; эта сумма равна $\frac{\rho}{1-\rho}$, а ее производная $\frac{\rho}{(1-\rho)^2}$. Подставляя это выражение в (21.8), получим:

$$L_{sist} = \frac{\rho}{1 - \rho}. \quad (25.11)$$

Ну, а теперь применим формулу Литтла (19.12) и найдем среднее время пребывания заявки в системе:

$$W_{sist} = \frac{\rho}{\lambda(1 - \rho)} \quad (25.12)$$

Найдем среднее число заявок в очереди L_{och} . Будем рассуждать так: число заявок в очереди равно числу заявок в системе минус число заявок, находящихся под обслуживанием. Значит (по правилу сложения математических ожиданий), среднее число заявок в очереди L_{och} равно среднему числу заявок в системе L_{sist} минус среднее число заявок под обслуживанием. Число заявок под обслуживанием может быть либо нулем (если канал свободен), либо единицей (если он занят). Математическое



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 272 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

ожидание такой случайной величины равно вероятности того, что канал занят (мы ее обозначили P_{zan}). Очевидно, P_{zan} равно единице минус вероятность 0 того, что канал свободен:

$$P_{zan} = 1 - p_0 = \rho. \quad (25.13)$$

Следовательно, среднее число заявок под обслуживанием равно

$$L_{ob} = \rho, \quad (25.14)$$

отсюда

$$L_{och} = L_{sist} - \rho = \frac{\rho}{1 - \rho} - \rho \quad (25.15)$$

и окончательно

$$L_{och} = \frac{\rho^2}{1 - \rho} \quad (25.16)$$

По формуле Литтла (22.16) найдем среднее время пребывания заявки в очереди:

$$W_{och} = \frac{\rho^2}{\lambda(1 - \rho)} \quad (25.17)$$

Таким образом, все характеристики эффективности СМО найдены. Предложим читателю самостоятельно решить пример: одноканальная СМО представляет собой железнодорожную сортировочную станцию, на которую поступает простейший поток составов с интенсивностью $\lambda = 2$ (состава в час). Обслуживание (расформирование) состава длится



*Кафедра
ПМ и ТП*

Начало

Содержание



Страница 273 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

случайное (показательное) время со средним значением $t_{ob} = 20$ (мин.). В парке прибытия станции имеются два пути, на которых могут ожидать обслуживания прибывающие составы; если оба пути заняты, составы вынуждены ждать на внешних путях. Требуется найти (для предельного, стационарного режима работы станции): среднее, число составов L_{sist} , связанных со станцией, среднее время W_{sist} . пребывания состава при станции (на внутренних путях, на внешних путях и под обслуживанием), среднее число L_{och} составов, ожидающих очереди на расформирование (все равно, на каких путях), среднее время W_{och} пребывания состава на очереди. Кроме того, попытайтесь найти среднее число составов, ожидающих расформирования на внешних путях L_{vnes} и среднее время этого ожидания W_{vnes} (две последние величины связаны формулой Литтла). Наконец, найдите суммарный суточный штраф Π , который придется заплатить станции за простои составов на внешних путях, если за один час простоя одного состава станция платит штраф a (руб.). На всякий случай сообщаем ответы: $L_{sist} = 2$ (состава), $W_{sist} = 1$ (час), $L_{och} = 4/3$ (состава), $W = 2/3$ (часа), $L_{vnes} = 16/27$ (состава), $W_{vnes} = 8/27 \approx 0,297$ (часа). Средний суточный штраф Π за ожидание составов на внешних путях получим, перемножая среднее число составов, прибывающих на станцию за сутки, среднее время ожидания состава на внешних путях и часовой штраф a : $\Pi \approx 14,2a$.



Кафедра ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 274 из 293

Назад

На весь экран

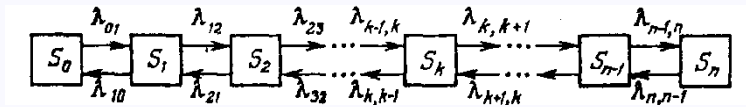
Заккрыть

ЛЕКЦИЯ 26

Схема гибели и размножения. Формула Литтла

26.1 Схема гибели и размножения

Мы знаем, что, имея в распоряжении размеченный граф состояний, можно легко написать уравнения Колмогорова для вероятностей состояний, а также написать и решить алгебраические уравнения для финальных вероятностей. Для некоторых случаев удастся последние уравнения решить заранее, в буквенном виде. В частности, это удастся сделать, если граф состояний системы представляет собой так называемую «схему гибели и размножения».



Граф состояний для схемы гибели и размножения имеет вид, показанный на рисунке. Особенность этого графа в том, что все состояния системы можно вытянуть в одну цепочку, в которой каждое из средних состояний ($S_1, S_2, \dots, S_{n-1}$) связано прямой и обратной стрелкой с каждым из соседних состояний — правым и левым, а крайние состояния (S_0, S_n) — только с одним соседним состоянием. Термин «схема гибели и размножения» ведет начало от биологических задач, где подобной схемой описывается изменение численности популяции.



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 275 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

Схема гибели и размножения очень часто встречается в разных задачах практики, в частности — в теории массового обслуживания, поэтому полезно, один раз и навсегда, найти для нее финальные вероятности состояний.

Предположим, что все потоки события, переводящие систему по стрелкам графа,— простейшие (для краткости будем называть и систему S и протекающий в ней процесс — простейшими). Пользуясь графом, составим и решим алгебраические уравнения для финальных вероятностей состояний), существование вытекает из того, что из каждого состояния можно перейти в каждое другое, в число состояний конечно). Для первого состояния S_0 имеем:

$$\lambda_{01}p_0 = \lambda_{10}p_1 \quad (26.1)$$

Для второго состояния S_1 :

$$(\lambda_{01} + \lambda_{10})p_1 = \lambda_{01}p_0 + \lambda_{21}p_2 \quad (26.2)$$

В силу (26.1) последнее равенство приводится к виду

$$\lambda_{12}p_1 = \lambda_{21}p_2 \quad (26.3)$$

далее, совершенно аналогично

$$\lambda_{23}p_2 = \lambda_{32}p_3 \quad (26.4)$$



*Кафедра
ПМ и ТП*

Начало

Содержание



Страница 276 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

и вообще

$$\lambda_{k-1,k} = \lambda_{k,k-1}p_k \quad (26.5)$$

где k принимает все значения от 0 до n . Итак, финальные вероятности $p_0, p_1, \dots, p_n$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \lambda_{01}p_0 &= \lambda_{10}p_1 \\ \lambda_{12}p_1 &= \lambda_{21}p_2 \\ &\dots\dots\dots \\ \lambda_{k-1,k} &= \lambda_{k,k-1}p_k \\ &\dots\dots\dots \\ \lambda_{n-1,n} &= \lambda_{n,n-1}p_n \end{aligned}$$

кроме того, надо учесть нормировочное условие

$$p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1 \quad (26.6)$$

Решим эту систему уравнений. Из первого уравнения выразим p_1 через p_0 :

$$p_1 = \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}}p_0. \quad (26.7)$$

Из второго, с учетом (26.5), получим:

$$p_2 = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}}p_1 = \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}}p_0. \quad (26.8)$$



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 277 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

из третьего, с учетом (26.8),

$$p_3 = \frac{\lambda_{23}\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{32}\lambda_{21}\lambda_{10}}p_0. \quad (26.9)$$

и вообще, для любого k (от 1 до n):

$$p_k = \frac{\lambda_{k-1,k}\dots\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{k,k-1}\dots\lambda_{21}\lambda_{10}}p_0. \quad (26.10)$$

Обратим внимание на формулу (26.10). В числителе стоит произведение всех интенсивностей, стоящих у стрелок, ведущих слева направо (с начала и до данного состояния S_k), а в знаменателе — произведение всех интенсивностей, стоящих у стрелок, ведущих справа налево (с начала и до S_k).

Таким образом, все вероятности состояний $0, p_1, \dots, p_n$ выражены через одну из них (0) . Подставим эти выражения в нормировочное условие (26.3). Получим, вынося за скобку 0:

$$p_0\left(1 + \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} + \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}} + \dots + \frac{\lambda_{n-1,n}\dots\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{n,n-1}\dots\lambda_{21}\lambda_{10}}\right) = 1. \quad (26.11)$$

отсюда получим выражение для p_0 :

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} + \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}} + \dots + \frac{\lambda_{n-1,n}\dots\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{n,n-1}\dots\lambda_{21}\lambda_{10}}\right)^{-1}. \quad (26.12)$$



*Кафедра
ПМ и ТП*

Начало

Содержание



Страница 278 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

(скобку мы возвели в степень -1 , чтобы не писать двухэтажных дробей). Все остальные вероятности выражены через 0 см. формулу (26.10). Заметим, что коэффициенты при 0 в каждой из них представляют собой не что иное, как последовательные члены ряда, стоящего после единицы в формуле (26.11). Значит, вычисляя 0 , мы уже нашли все эти коэффициенты. Полученные формулы очень полезны при решении простейших задач теории массового обслуживания.

26.2 Формула Литтла

Теперь мы выведем одну важную формулу, связывающую (для предельного, стационарного режима) среднее число заявок L_{sist} , находящихся в системе массового обслуживания (т. е. обслуживаемых или стоящих в очереди), и среднее время пребывания заявки в системе W_{sist} . Рассмотрим любую СМО (одноканальную, многоканальную, марковскую, немарковскую, с неограниченной или с ограниченной очередью) и связанные с нею два потока событий: поток заявок, прибывающих в СМО, и поток заявок, покидающих СМО. Если в системе установился предельный, стационарный режим, то среднее число заявок, прибывающих в СМО за единицу времени, равно среднему числу заявок, покидающих ее: оба потока имеют одну и ту же интенсивность λ .

Обозначим: $X(t)$ — число заявок, прибывших в СМО до момента t . $Y(t)$ — число заявок покинувших СМО до момента t .



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



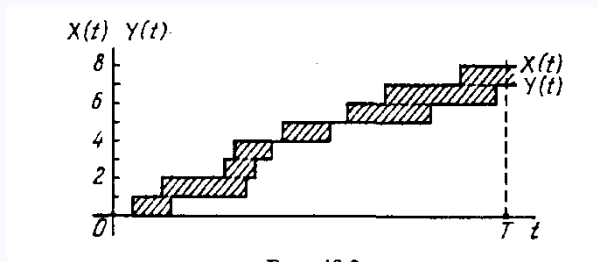
Страница 279 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

И та, и другая функции являются случайными и меняются скачком (увеличиваются на единицу) в моменты приходов заявок ($X(t)$) и уходов заявок ($Y(t)$). Вид функций $X(t)$ и $Y(t)$ показан на рисунке; обе линии — ступенчатые, верхняя — $X(t)$, нижняя — $Y(t)$. Очевидно, что для любого момента t их разность $Z(t) = X(t) - Y(t)$ есть не что иное, как число заявок, находящихся в СМО. Когда линии $X(t)$ и $Y(t)$ сливаются, в системе нет заявок.



Рассмотрим очень большой промежуток времени T (мысленно продолжив график далеко за пределы чертежа) и вычислим для него среднее число заявок, находящихся в СМО. Оно будет равно интегралу от функции $Z(t)$ на этом промежутке, деленному на длину интервала T :

$$L_{sist} = \frac{1}{T} \int_0^T Z(t) dt. \quad (26.13)$$

Но этот интеграл представляет собой не что иное, как площадь фигуры, заштрихованной на рис. 26.2. Разглядим хорошенько этот рисунок.



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 280 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

Фигура состоит из прямоугольников, каждый из которых имеет высоту, равную единице, и основание, равное времени пребывания в системе соответствующей заявки (первой, второй и т. д.). Обозначим эти времена $t_1, t_2, \dots$. Правда, под конец промежутка T некоторые прямоугольники войдут в заштрихованную фигуру не полностью, а частично, но при достаточно большом T эти мелочи не будут играть роли. Таким образом, можно считать, что

$$\int_0^T Z(t)dt = \sum_i t_i. \quad (26.14)$$

где сумма распространяется на все заявки, пришедшие за время T . Разделим правую и левую часть (26.10) на длину интервала T . Получим, с учетом (26.12),

$$L_{sist} = \frac{1}{T} \sum_i t_i. \quad (26.15)$$

Разделим и умножим правую часть (26.14) на интенсивность X :

$$L_{sist} = \frac{1}{T\lambda} \sum_i t_i\lambda. \quad (26.16)$$

Но величина $T\lambda$ есть не что иное, как среднее число заявок, пришедших за время T . Если мы разделим сумму всех времен t_i на среднее число заявок, то получим среднее время пребывания заявки в системе



*Кафедра
ПМ и ТП*

Начало

Содержание



Страница 281 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

L_{sist} . Итак,

$$L_{sist.} = \lambda L_{sist}, \quad (26.17)$$

Откуда

$$L_{sist.} = \frac{1}{\lambda} L_{sist}, \quad (26.18)$$

Это и есть замечательная формула Литтла: для любой СМО, при любом характере потока заявок, при любом распределении времени обслуживания, при любой дисциплине обслуживания среднее время пребывания заявки в системе равно среднему числу заявок в системе, деленному на интенсивность потока заявок. Точно таким же образом выводится вторая формула Литтла, связывающая среднее время пребывания заявки в очереди W_{och} и среднее число заявок в очереди L_{och} :

$$W_{och.} = \frac{1}{\lambda} L_{och}, \quad (26.19)$$

Для вывода достаточно вместо нижней линии на рис. 26.2 взять функцию $U(t)$ — количество заявок, ушедших до момента t не из системы, а из очереди (если заявка, пришедшая в систему, не становится в очередь, а сразу идет под обслуживание, можно все же считать, что она становится в очередь, но находится в ней нулевое время). Формулы Литтла (26.15) и (26.16) играют большую роль в теории массового обслуживания. К сожалению, в большинстве существующих руководств эти формулы (доказанные в общем виде сравнительно недавно) не приводятся¹⁾.



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 282 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

26.3 Статическая детерминированная модель управления запасами без дефицита

Предположение о том, что дефицит не допускается, означает полное удовлетворение спроса на запасаемый продукт, т.е. совпадение функций $r(t)$ и $b(t)$. Пусть общее потребление запасаемого продукта за рассматриваемый интервал времени θ равно N . Рассмотрим простейшую модель, в которой предполагается, что расходование запаса происходит непрерывно с постоянной интенсивностью, т.е. $b(t) = b$. Эту интенсивность можно найти, разделив общее потребление продукта на время, в течение которого он расходуется:

$$b = \frac{N}{\theta}, \quad (26.20)$$

Пополнение заказа происходит **партиями** одинакового объема, т.е. функция $a(t)$ не является непрерывной: $a(t) = 0$ при всех t , кроме моментов поставки продукта, когда $a(t) = n$, где n - объем партии. Так как интенсивность расхода равна b , то вся партия будет использована за время

$$T = \frac{n}{b}, \quad (26.21)$$

Если отсчет времени начать с момента поступления первой партии, то уровень запаса в начальный момент равен объему этой партии n ,



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 283 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

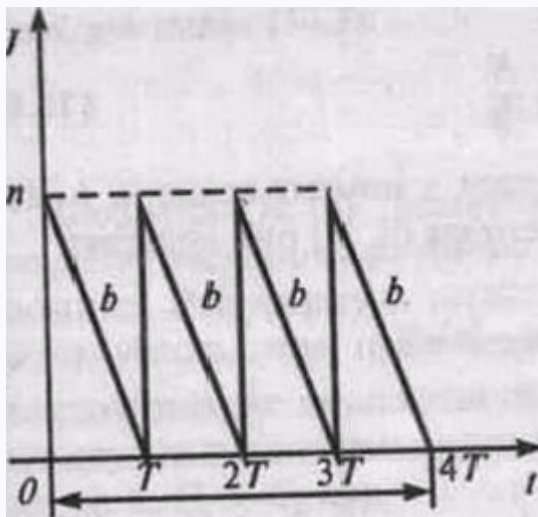


Рис. 26.1:



Рис. 26.2:

т.е. $J(0) = n$. Графически уровень запаса в зависимости от времени представлен на рис 22.5.

На временном интервале $[0, T]$ уровень запаса уменьшается по прямой



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 284 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

$J(t) = n - bt$ от значения n до нуля. Так как дефицит не допускается, то в момент уровень запаса мгновенно пополняется до прежнего значения n за счет поступления партии заказа. И так процесс изменения $J(t)$ повторяется на каждом временном интервале продолжительностью (см. рис.26.1).

Задача управления запасами состоит в определении такого объема партии, при котором суммарные затраты на создание и хранение запаса были бы минимальными.

Обозначим суммарные затраты через C , затраты на создание запаса — через C_1 , затраты на хранение запаса — через C_2 и найдем эти величины за весь промежуток времени T .

Пусть затраты на доставку одной партии продукта, не зависимые от объема партии, равны c_1 , а затраты на хранение одной единицы продукта в единицу времени — c_2 . Так как за время θ необходимо запастись N единицами продукта, который доставляется партиями объема n , то число таких партий k равно:

$$k = \frac{N}{n} = \frac{\theta}{T}, \quad (26.22)$$

Отсюда получаем

$$C_1 = c_1 k = c_1 \frac{N}{n}, \quad (26.23)$$



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 285 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

Мгновенные затраты хранения запаса в момент времени t равны $c_2 J(t)$.
Значит, за промежуток времени $[0, T]$ они составят

$$c_2 \int_0^T J(t) dt = c_2 \int_0^T (n - bt) dt,$$

или, учитывая (26.22):

$$c_2 \int_0^T J(t) dt = c_2 \int_0^T (n - \frac{n}{T}t) dt = c_2 (nt - \frac{nt^2}{2T}) \Big|_0^T = \frac{c_2 n T}{2}.$$

Средний запас за промежуток $[0, T]$ равен $nT/2$, т.е. *затраты на хранение всего запаса при линейном (по времени) его расходе равны затратам на хранение среднего запаса.*

Учитывая периодичность функции $J(t)$ (всего за промежуток времени будет $k = \frac{N}{n}$ "зубцов аналогичных рассмотренному на отрезке $[0, T]$ "), и формулу (26.25), получаем, что затраты хранения запаса за промежуток времени равны:

$$C_2 = \frac{c_2 n T}{2} k = \frac{c_2 n T}{2} * \frac{N}{n} = \frac{c_2 N T}{2} = \frac{c_2 \theta n}{2}, \quad (26.24)$$

Нетрудно заметить, что затраты C_1 обратно пропорциональны, а затраты C_2 прямо пропорциональны объему партии n . Графики функций $C_1(n)$ и $C_2(n)$, а также функции суммарных затрат



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 286 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

$$C = \frac{c_1 N}{n} + \frac{c_2 \theta}{2} n, \quad (26.25)$$

приведены на рис. 26.2. В точке минимума функции $C(n)$ ее производная

$$C'(n) = -\frac{c_1 N}{n^2} + \frac{c_2 \theta}{2} = 0, \quad (26.26)$$

откуда

$$n = n_0 \sqrt{\frac{2c_1 N}{c_2 \theta}}, \quad (26.27)$$

или, учитывая (22.1)

$$n_0 = \sqrt{\frac{2c_1 b}{c_2}}, \quad (26.28)$$

Формула (26.31), называемая *формулой Уилсона или формулой наименее экономичного объема партии*, широко используется в экономике. Эта формула может быть получена и другим способом, если учесть, что произведение $C_1 C_2 = 0.5 c_1 c_2 N \theta$ есть величина постоянная, не зависящая от n . В этом случае, как известно, сумма двух величин принимает наименьшее значение, когда они равны, т. е. $C_1 = C_2$ или

$$\frac{c_1 N}{n} = \frac{c_2 n \theta}{2}, \quad (26.29)$$



*Кафедра
ПМ и ТП*

Начало

Содержание



Страница 287 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

откуда получаем (26.30).

Из (26.30) следует, что *минимум общих затрат задачи управления запасами достигается тогда, когда затраты на создание запаса равны затратам на хранение запаса*. При этом минимальные суммарные затраты

$$C_0 = C(n_0) = \frac{2c_1 N}{n}, \quad (26.30)$$

откуда, с учетом предыдущего, получим $C_0 = \sqrt{2c_1 c_2 \theta N}$
или

$$C_0 = \theta \sqrt{2c_1 c_2 b}, \quad (26.31)$$

Число оптимальных **партий** за время θ с учетом (26.22), (22.30) и (26.21) равно:

$$k_0 = \frac{N}{n_0} = \sqrt{\frac{c_2 N \theta}{2c_1}} = \theta \sqrt{\frac{c_2 b}{2c_1}},$$

Время расхода оптимальной партии равно

$$T_0 = \frac{n_0}{b} = n_0 \frac{\theta}{N},$$

или

$$T_0 = \sqrt{\frac{2c_1 \theta}{c_2 N}} = \sqrt{\frac{2c_1}{c_2 b}},$$



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 288 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

Пример.

Потребность сборочного предприятия в деталях некоторого типа составляет 120 000 деталей в год, причем эти детали расходуются в процессе производства равномерно и непрерывно. Детали заказываются раз в год и поставляются партиями одинакового объема, указанного в заказе. Хранение детали на складе стоит 0,35 ден.ед. в сутки, а поставка партии — 10 000 ден.ед. Задержка производства из-за отсутствия деталей недопустима. Определить наиболее экономичный объем партии и интервал между поставками, которые нужно указать в заказе (предполагается, что поставщик не допускает задержки поставок).

Решение.

По условию затраты на одну партию составляют $C = 10\,000$ ден.ед., затраты хранения единицы запаса в сутки $c_1 = 0,35$ ден.ед. Общий промежуток времени $\theta = 1$ год = 365 дней, а общий объем запаса за этот период $N = 120\,000$ деталей. По формуле (22.10)

$$n = n_0 \sqrt{\frac{2c_1 N}{c_2 \theta}} * n_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot 10000 \cdot 120000}{0.35 \cdot 365}} \approx 4335, \text{ дет.}, \text{ а по (26.22)}$$

$$T_0 = n_0 * \frac{\theta}{N} = 13.2, \text{ дней.}$$

Итак, наиболее экономичный объем партии равен 4335 деталей, а интервал между поставками 13 дней.

На практике, естественно, объем партии может отличаться от оптимального n_0 , вычисленного по (26.30). Так, в предыдущей задаче может



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 289 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

оказаться удобным заказывать партии по 4 500 или даже по 5 000 деталей и возникает вопрос, как при этом изменятся суммарные затраты.



*Кафедра
ПМ и ТП*

Начало

Содержание



Страница 290 из 293

Назад

На весь экран

Закрыть

Тесты

При переходе по ссылке откроется папка с тестами. Выберите интересующую вас тему и проверьте свои знания.

Тесты



*Кафедра
ПМ и ТП*

Начало

Содержание



Страница 291 из 293

Назад

На весь экран

Закреть

Литература

1. Афанасьев М.Ю. Исследование операций в экономике Ж модели, задачи, решения / М.Ю. Афанасьев, Б.П. Суворов. - М. : Инфра-М. 2003
2. Бурдюк В.Я., Шкурба В.В. Теория расписаний. Задачи и методы решений. 1971.
3. Васин А.А., Краснощеков П.С., Морозов В.В. Исследование операций. -М. Издательский центр "Академия 2008.
4. Вентцель Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология. - М. Ж Высшая школа, 2004.
5. Данцинг Д.Б. Линейное программирование, его применения и обобщения. - М. : Наука, 1981.
6. Конвей Р. В., Максвелл В. Л., Миллер Л. В. Теория расписаний. Москва: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва "Наука 1975.
7. Лазарев А.А., Гафаров Е.Р. Теория расписаний. Задачи и алгоритмы. Москва – 2011.
8. Левин В.И. Структурно-логические методы в теории расписаний. Пенза: Изд-во Пенз. гос. технол. акад., 2006.



Кафедра
ПМ и ТП

Начало

Содержание



Страница 292 из 293

Назад

На весь экран

Закреть

9. Севастьянов С.В. Геометрические методы и эффективные алгоритмы в теории расписаний. Новосибирск: 2000.
10. Таха Х. Введение в исследование операций - М. : Наука, 1970.



*Кафедра
ПМ и ТП*

Начало

Содержание



Страница 293 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

Бесконечная игра - игра, в которой хотя бы один из игроков имеет бесконечное число стратегий.

Игра - совокупность предварительно оговоренных правил и условий конфликтной ситуации.

Игрой с нулевой суммой называется игра, в которой сумма выигрышей игроков в каждой партии равна 0.

Исследование операций – это применение математических, количественных методов для обоснования решений во всех областях целенаправленной человеческой деятельности.

Конечная игра - игра, в которой каждый из игроков имеет конечное число стратегий.

Линейное программирование - это раздел математического программирования, применяемый при разработке методов отыскания экстремума линейных функций нескольких переменных при дополнительных линейных ограничениях, налагаемых на переменные.



*Кафедра
ПМ и ТП*

Начало

Содержание



Страница 294 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

Неориентированный граф - если в графе G все элементы множества U являются ребрами.

Обратная задача ИО - отвечает на вопрос: как выбрать решение x для того, чтобы показатель эффективности W обратился в максимум.

Операция - называется всякое управляемое мероприятие (система действий), объединенное единым замыслом и направленное к достижению какой-то цели.

Оптимальное решение ОЗЛП (если оно существует) достигается при такой совокупности значений переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, где по крайней мере k из них обращаются в нуль, а остальные неотрицательны. Граф G можно определить заданием двух множеств X и U и обозначается $G = (X, U)$.

Ориентированный (орграф) граф - если в графе G все элементы множества U являются дугами.

Партия - возможная частичная реализация правил игры.

Поток по ребру – это количество x_{ij} вещества, проходящего через



*Кафедра
ПМ и ТП*

Начало

Содержание



Страница 295 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть

ребро (i,j) в единицу времени.

Ребро – отрезок, соединяющий пару вершин без указания направления связи.

Сеть - это взвешенный конечный граф без циклов и петель, ориентированный в одном общем направлении от истока (начальная вершина I) к стоку (конечная вершина S).

Стратегия - это совокупность правил, однозначно определяющих последовательность действий игрока в конкретной конфликтной ситуации.

Теория игр – раздел математики, занимающийся разработкой рекомендаций по принятию решений в условиях конфликтной ситуации и выработкой оптимальных правил поведения для каждого игрока.

Ход - принятие игроком того или иного решения в процессе игры и его реализация.

Цель исследования операций — предварительное количественное обоснование оптимальных решений.



*Кафедра
ПМ и ТП*

Начало

Содержание



Страница 296 из 293

Назад

На весь экран

Заккрыть