УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
"Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина"

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Неопределенный интеграл

Электронный учебно-методический комплекс для студентов физического факультета

Брест
БрГУ имени А.С. Пушкина
2009

Авторы:

Марзан Сергей Андреевич — заведующий кафедрой математического моделирования БрГУ имени А.С. Пушкина

Семенчук Николай Павлович — доцент кафедры высшей математики БрГУ имени А.С. Пушкина

Сендер Александр Николаевич — доцент кафедры математического моделирования БрГУ имени А.С. Пушкина

Сендер Николай Никитич — заведующий кафедрой высшей математики БрГУ имени А.С. Пушкина

Рецензенты:

Рубанов В.С. — проректор по научной работе БрГТУ,

Климашевская И.Н. — доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений БрГУ имени А.С. Пушкина

Электронный учебно-методический комплекс содержит курс лекций и практических занятий, а также задания для подготовки к экзамену и зачету и варианты заданий для индивидуальной работы по теме "Неопределенный интеграл" раздела "Интегральное исчисление функций одной переменной" дисциплины "Математический анализ". Наличие большого количества примеров и разобранных решений задач поможет в самостоятельном изучении важнейшего раздела математического анализа.

Адресуется студентам первого курса физического факультета университета.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие

Предлагаемый вниманию читателей учебно-методический комплекс предназначен в первую очередь студентам физического факультета, хотя значительная его часть может быть использована и студентами других специальностей.

При составлении учебно-методического комплекса авторы руководствовались учебными программами по дисциплине "Математический анализ" для специальностей 1-31 04 01-03 Физика, 1-02 05 04-02 Физика. Информатика и 1-02 05 04-01 Физика. Математика. В соответствии с указанными программами, на изучение темы "Неопределенный интеграл" отводится 10 часов лекций и 12 часов практических занятий.

Учебно-методический комплекс обеспечивает достижение основной дидактической цели — самообразования. В условиях постоянно возрастающего объема научной (а значит и учебной) информации количество часов, предусмотренных учебными планами на преподавание традиционно изучаемых дисциплин, имеет устойчивую тенденцию к сокращению. В этой связи необходимо, чтобы учебные дисциплины, еще не потерявшие своей актуальности, преподавались на современном научном уровне, полноценно и кратко. При этом глубокое изучение материала студентами возможно только при условии успешной организации самостоятельной работы студентов.

Изложение материала в учебно-методическом комплексе приводится в наиболее оптимальной по мнению авторов последовательности. При изложении теоретического материала рассматриваются не только все известные методы интегрирования, но и приводятся специфические способы решения многих задач, с целью обучения на конкретных примерах поиску наиболее рационального способа решения. В конце каждой лекции приводятся вопросы и задания для самоконтроля с целью помочь студентам в проверке усвоения ими теоретического материала. Наряду с примерами, аналогичными решенным на практических занятиях, учебно-методический комплекс содержит достаточно большое количество нетривиальных задач, не все из которых могут быть решены в аудитории или самостоятельно, многие задачи окажутся полезными для кружковой работы с наиболее сильными студентами. Учебно-методический комплекс содержит достаточно обширный материал для контрольных и индивидуальных работ, а также вопросы для подготовки к экзамену и зачету по теме "Неопределенный интеграл".

ПРИМЕРНЫЙ ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

№	**Название темы, перечень изучаемых вопросов**	ЛК	ПР
1	**Понятие и основные свойства неопределенного интеграла.** Задача восстановления функции по её производной. Понятие первообразной и её основное свойство. Неопределённый интеграл. Основные свойства неопределённого интеграла. Таблица основных неопределённых интегралов. Непосредственное интегрирование.	2	2
2	**Замена переменной и интегрирование по частям в неопределенном интеграле.** Теорема о подстановке в неопределенном интеграле. Интегрирование по частям в неопределенном интеграле.	2	4
3	**Интегрирование рациональных функций.** Разложение рациональных дробей на элементарные. Интегрирование элементарных рациональных дробей. Метод Остроградского.	2	2
4	**Интегрирование простейших иррациональных функций.** Простейшие подстановки. Подстановки Эйлера. Интегралы от дифференциальных биномов.	2	2
5	**Интегрирование некоторых трансцендентных функций.** Интегрирование функций типа $R(\sin x, \cos x)$. Интегралы типа $\int R(\operatorname{sh} x,\ \operatorname{ch} x)dx$. Интегралы типа $\int R(e^x)dx$.	2	2

ЛЕКЦИЯ 1

Понятие и основные свойства неопределенного интеграла

1.1 Задача восстановления функции по её производной. Понятие первообразной и её основное свойство

Первой задачей дифференциального исчисления является нахождение для данной функции её производной, а обратная задача уже решается в рамках интегрального исчисления. Основы теорий дифференциального и интегрального исчислений были изложены в трудах английского математика и физика И. Ньютона (1643–1727) и немецкого философа, математика и физика Г. Лейбница (1646–1716) в конце XVII века. Главными понятиями интегрального исчисления являются понятия неопределённого и определённого интегралов, которые между собой тесно связаны. Интегральное исчисление используется при решении многих как теоретических, так и практических задач.

Определение 1.1. Первообразной функции f на множестве $X \subset D(f)$ называется такая функция F, определённая на X, что для любой точки $x \in X$ будет выполняться равенство

$$F'(x) = f(x).$$

Например, для функции $f(x) = 2x$ на $X = R$ первообразной будет функция $F(x) = x^2$, так как $F'(x) = 2x = f(x)\ \forall x \in R$. Нужно заметить, что и функция $x^2 + C$, где C — произвольная константа, также будет первообразной для функции $f(x) = 2x$ на R.

Теорема 1.1. *Если функция F является первообразной для функции f на промежутке X, то:*

а) *$F(x) + C$ также является первообразной для функции f на промежутке X, где C — произвольная действительная постоянная;*

б) *для любой другой первообразной $\Phi(x)$ функции f на промежутке X существует такая действительная константа C, что*

$$\Phi(x) = F(x) + C.$$

◀ Справедливость заключения а) очевидна; докажем б). Рассмотрим функцию $\varphi = \Phi - F$. Ее производная $\varphi' = \Phi' - F' = 0$ и по критерию постоянства функции на промежутке (достаточное условие) получим, что $\varphi = C$. ▶

Замечание 1.1. Если множество X не есть промежуток, то заключение б) теоремы может не выполняться. Например, для функции $f(x) = \frac{1}{x}$ на $D(f) = X = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ первообразной будет функция

$$F(x) = \begin{cases} \ln(-x) + C_1, & x < 0, \\ \ln(x) + C_2, & x > 0, \end{cases}$$

где C_1 и C_2 — произвольные, не зависящие одна от другой действительные постоянные.

На практике формально будем записывать это так

$$F(x) = \ln|x| + C, \quad x \neq 0.$$

1.2 Неопределённый интеграл. Основные свойства неопределённого интеграла

Определение 1.2. Пусть функция f на промежутке I имеет первообразную $F(x)$. Неопределенным интегралом функции f на промежутке I называется множество всех ее первообразных на этом промежутке.

Обозначение: $\int f(x)dx.$

Таким образом,

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где C — произвольная постоянная.

Функцию f называют подынтегральной функцией, а дифференциальную форму $f(x)dx$ — подынтегральным выражением, x — переменной интегрирования, C — константой интегрирования. Читают $\int f(x)dx$: "интеграл эф от икс дэ икс".

Например:

1. $\int 2xdx = x^2 + C,$

2. $\int \sin x dx = -\cos x + C$ (потому что $(-\cos x)' = \sin x$),

3. $\int \frac{dx}{x} = \begin{cases} \ln(-x) + C_1, & x < 0, \\ \ln(x) + C_2, & x > 0. \end{cases}$

(в дальнейшем будем писать $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$).

Рассмотрим основные свойства неопределенного интеграла:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.

2. $d\int f(x)dx = f(x)dx$.

Свойства 1 и 2 есть следствия определений первообразной, неопределенного интеграла и дифференциала функции.

3. $\int dF(x) = F(x) + C$ (для доказательства найти дифференциал левой и правой части равенства).

4. Если на промежутке I существует $\int f(x)dx$ и α — любое, отличное от нуля действительное число, то на I существует

$$\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx.$$

◀ Пусть $\int f(x)dx = F(x) + C$, тогда $\alpha \int f(x)dx = \alpha F(x) + \alpha C$. Но $(\alpha F(x) + \alpha C)' = \alpha f(x)$. Значит,

$$\exists \int \alpha f(x)dx = \alpha F(x) + \alpha C = \alpha \int f(x)dx. \blacktriangleright$$

Замечание 1.2. Условие $\alpha \neq 0$ существенно, т.к. $0 \cdot \int f(x)dx = 0$, но $\int 0 \cdot f(x)dx = C$.

5. Если на промежутке I существуют $\int f(x)dx = F(x) + C_1$ и $\int g(x)dx = G(x) + C_2$, то на этом промежутке существует

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

◀ $(F+G)' = f + g$. Тогда существует

$$\int (f(x) + g(x))dx = F(x) + G(x) + C = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

(т.к. если C_1 и C_2 — произвольные константы, то и $C = C_1 + C_2$ — произвольная константа). ▶

Следствие 1.1. (Свойство линейности). *Если на промежутке I существуют $\int f_k(x)dx, k = \overline{1,n}$, а α_k — произвольные действительные константы, причем хотя бы одна из них отлична от нуля, то на I существует*

$$\int \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \int f_k(x)dx.$$

1.3 Таблица основных неопределённых интегралов. Непосредственное интегрирование

Используя таблицу производных, получим таблицу основных неопределенных интегралов:

1. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \ \alpha \neq -1.$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ \left(\int e^x dx = e^x + C\right).$

4. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

8. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C.$

9. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C.$

10. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$

11. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$

12. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$

13. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C, \ \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C.$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$

Замечание 1.3. Все приведённые выше формулы справедливы для любых обозначений переменной. Например,

$$\int \cos H dH = \sin H + C.$$

Все формулы из таблицы неопределенных интегралов проверяются непосредственным дифференцированием их правых частей, в результате чего должны получиться подынтегральные функции. Например, для формулы 14 (если $x + \sqrt{x^2 + a} < 0$) получим:

$$\left(\ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right|\right)' = \left(\ln\left(-x - \sqrt{x^2 + a}\right)\right)' =$$

$$= \frac{1}{-x - \sqrt{x^2 + a}} \cdot \left(-1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + a}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}}.$$

Замечание 1.4. Выше было разъяснено понимание формулы

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C = \begin{cases} \ln(x) + C_1, & x > 0, \\ \ln(-x) + C_2, & x < 0. \end{cases}$$

Аналогично нужно понимать и некоторые другие формулы таблицы. Например, $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$ нужно рассматривать отдельно на каждом из интервалов $(\pi k, \pi + \pi k), k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, причем со своей произвольной константой, не зависящей от других констант такого же типа.

Определение 1.3. Нахождение неопределенных интегралов с помощью указанной выше таблицы и основных свойств неопределенных интегралов называется непосредственным интегрированием.

Пример 1.1. Вычислите интеграл $\int\left(-5\sqrt[3]{x}+\frac{2}{x}+\frac{0,5}{\sqrt{x^2-3}}\right)dx$.

◀Обозначим интеграл через I. Используя свойство линейности и формулу $\sqrt[3]{x}=x^{1/3}$ (справедлива при $x\geqslant 0$; при $x<0$ $\sqrt[3]{x}=-(-x)^{1/3}$, но, формально, можно считать и в этом случае $\sqrt[3]{x}=x^{1/3}$), будем иметь:

$$I=-5\int x^{1/3}dx+2\int\frac{dx}{x}+0,5\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-3}}=-5\frac{x^{1/3+1}}{1/3+1}+2\ln|x|+$$

$$+0,5\ln\left|x+\sqrt{x^2-3}\right|=-\frac{15}{4}\sqrt[3]{x^4}+2\ln|x|+0,5\ln\left|x+\sqrt{x^2-3}\right|+C$$

(произвольную константу обычно записывают только в конечном итоге).▶

Замечание 1.5. Далее нами будет доказана теорема о существовании неопределенного интеграла для любой непрерывной на промежутке функции.

Но далеко не всякий существующий неопределенный интеграл является элементарной функцией. Такими интегралами будут:

$$\int e^{-x^2}dx,\ \int\frac{dx}{\ln x},\ \int\frac{\sin x}{x}dx$$

и многие другие.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте определение первообразной функции $f(x)$ на некотором множестве $X \subset D(f)$.

2. Сформулируйте основное свойство первообразной функции $f(x)$ на промежутке X. Почему в формулировке теоремы требуется, чтобы множество X было промежутком?

3. Дайте определение неопределенного интеграла от заданной функции $f(x)$ в заданном промежутке.

4. Сформулируйте свойства неопределенного интеграла, непосредственно вытекающие из его определения.

5. В чем разница между выражениями $d\int f(x)dx$ и $\int dF(x)$?

6. Проверьте правильность формул таблицы неопределенных интегралов непосредственным дифференцированием правых частей формул.

7. Чему равен неопределенный интеграл от суммы дифференциалов?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 1

Непосредственное интегрирование

Цель: Приобретение навыков нахождения неопределенных интегралов с помощью таблицы и основных свойств неопределенных интегралов.

Задание 1. Найти интеграл

$$\int \frac{5+7x+x^2}{x\sqrt{x}}dx.$$

◀Числитель подынтегральной функции делим почленно на знаменатель. Затем применяем свойство линейности неопределенного интеграла и формулу 1 из таблицы неопределенных интегралов:

$$\int \frac{5+7x+x^2}{x\sqrt{x}}dx = \int \left(5x^{-\frac{3}{2}} + 7x^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}\right) dx =$$

$$= \int 5x^{-\frac{3}{2}}dx + \int 7x^{-\frac{1}{2}}dx + \int x^{\frac{1}{2}}dx =$$

$$= 5\int x^{-\frac{3}{2}}dx + 7\int x^{-\frac{1}{2}}dx + \int x^{\frac{1}{2}}dx = 5\frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + 7\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C =$$

$$= 5\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + 7\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = -\frac{10}{\sqrt{x}} + 14\sqrt{x} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C. \blacktriangleright$$

Задание 2. Найти интеграл

$$\int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}dx.$$

◀В числителе применяем формулу куба разности и делим почленно числитель на знаменатель. Далее поступаем, как в задании 1:

$$\int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}dx = \int \frac{1-3x+3x^2-x^3}{x^{\frac{4}{3}}}dx =$$

$$= \int x^{-\frac{4}{3}}dx - 3\int x^{-\frac{1}{3}}dx + 3\int x^{\frac{2}{3}}dx - \int x^{\frac{5}{3}}dx =$$

$$= \frac{x^{-\frac{1}{3}}}{-\frac{1}{3}} - 3\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + 3\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} - \frac{x^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}} + C = -\frac{3}{\sqrt[3]{x}} - \frac{9\sqrt[3]{x^2}}{2} + \frac{9\sqrt[3]{x^5}}{5} - \frac{3\sqrt[3]{x^8}}{8} + C. \blacktriangleright$$

Замечание. Во всех последующих решениях применение свойства линейности неопределенного интеграла будем выполнять мысленно (не записывая его подробно).

Задание 3. Найти интеграл

$$\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}dx.$$

$$\blacktriangleleft \int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}dx = \int \left(1-x^{-2}\right)\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}dx =$$

$$= \int \left(x^{\frac{3}{4}} - x^{-\frac{5}{4}} \right) dx = \frac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}} - \frac{x^{-\frac{1}{4}}}{-\frac{1}{4}} + C = \frac{4\sqrt[4]{x^7}}{7} + \frac{4}{\sqrt[4]{x}} + C. \blacktriangleright$$

Задание 4. Найти интеграл

$$\int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3} dx.$$

$$\blacktriangleleft \int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3} dx = \int \frac{\sqrt{x^4 + \frac{1}{x^4} + 2}}{x^3} dx = \int \frac{\sqrt{\frac{x^8 + 2x^4 + 1}{x^4}}}{x^3} dx =$$

$$= \int \frac{\sqrt{(x^4+1)^2}}{x^2 x^3} dx = \int \frac{x^4 + 1}{x^5} dx = \int \left(\frac{1}{x} + x^{-5} \right) dx =$$

$$= \ln|x| + \frac{x^{-4}}{-4} + C = \ln|x| - \frac{1}{4x^4} + C. \blacktriangleright$$

Задание 5. Найти интеграл

$$\int \frac{x^2 + 3}{x^2 - 1} dx.$$

$$\blacktriangleleft \int \frac{x^2 + 3}{x^2 - 1} dx = \int \frac{x^2 - 1 + 4}{x^2 - 1} dx = \int \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} + \frac{4}{x^2 - 1} \right) dx =$$

$$= \int \left(1 + \frac{4}{x^2 - 1} \right) dx = x + 4 \cdot \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C =$$

$$= x + 2\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C. \blacktriangleright$$

Задание 6. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{(x^2-2)(x^2+3)}.$$

$\blacktriangleleft$Используем тождество $1 \equiv \frac{1}{5}\big((x^2+3)-(x^2-2)\big)$.

$$\int \frac{dx}{(x^2-2)(x^2+3)} = \frac{1}{5}\int \frac{(x^2+3)-(x^2-2)}{(x^2-2)(x^2+3)}dx =$$

$$= \frac{1}{5}\left(\int \frac{dx}{x^2-2} - \int \frac{dx}{x^2+3}\right) = \frac{1}{5}\left(\int \frac{dx}{x^2-(\sqrt{2})^2} - \int \frac{dx}{x^2+(\sqrt{3})^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right| - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + C. \blacktriangleright$$

Задание 7. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}.$$

$\blacktriangleleft$Используем тождество $1 \equiv \sin^2 x + \cos^2 x$.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} =$$

$$= \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C. \blacktriangleright$$

Задание 8. Доказать, что если

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

то

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C \quad (a \neq 0). \tag{1.1}$$

◀Эту формулу можно доказать с помощью теоремы о подстановке в неопределенном интеграле (указанная теорема будет сформулирована и доказана на следующей лекции). Сейчас же мы ее докажем непосредственным дифференцированием правой части. Используя правила дифференцирования и теорему о производной сложной функции, получим:

$$\left(\frac{1}{a}F(ax+b) + C\right)' = \frac{1}{a}(F(ax+b))' + C' = \frac{1}{a}F'(ax+b)(ax+b)' =$$

$$= \frac{1}{a}f(ax+b)\cdot a = f(ax+b). \blacktriangleright$$

Задание 9. Найти интеграл

$$\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x}dx.$$

$$\blacktriangleleft \int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x}dx = \int \frac{2^x \cdot 2 - 5^x \cdot 5^{-1}}{10^x}dx = \int \left(2\frac{2^x}{10^x} - \frac{1}{5}\frac{5^x}{10^x}\right)dx =$$

$$= 2\int 5^{-x}dx - \frac{1}{5}\int 2^{-x}dx = [\text{используем } (1.1)] = -2\frac{5^{-x}}{\ln 5} + \frac{1}{5}\frac{2^{-x}}{\ln 2} + C =$$

$$= -\frac{2}{5^x \ln 5} + \frac{1}{5\cdot 2^x \ln 2} + C. \blacktriangleright$$

Задание 10. Найти интеграл

$$\int \frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x}dx.$$

$$\blacktriangleleft \int \frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x}dx = \int \frac{\sqrt[5]{(1-x)^2}}{1-x}dx = \int \frac{(1-x)^{\frac{2}{5}}}{1-x}dx =$$

$$= \int (1-x)^{-\frac{3}{5}}dx = [\text{используем } (1.1)] = -\frac{(1-x)^{\frac{2}{5}}}{\frac{2}{5}} + C =$$

$$= -\frac{5\sqrt[5]{(1-x)^2}}{2} + C. \blacktriangleright$$

Задание 11. Найти интеграл

$$\int \frac{6x^3 + x^2 - 2x + 1}{2x-1}dx.$$

$\blacktriangleleft$Сначала выделяем целую часть рациональной дроби, деля числитель на знаменатель. Имеем:

$$\frac{6x^3 + x^2 - 2x + 1}{2x-1} = 3x^2 + 2x + \frac{1}{2x-1}.$$

Тогда

$$\int \frac{6x^3+x^2-2x+1}{2x-1}dx = \int 3x^2dx + \int 2xdx + \int \frac{dx}{2x-1} =$$

$$= x^3 + x^2 + \frac{1}{2}\ln|2x-1| + C. \blacktriangleright$$

Задание 12. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x}}.$$

◀Освобождаемся от иррациональности в знаменателе, умножая числитель и знаменатель подынтегральной функции на выражение, сопряженное знаменателю:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x}}dx = \int \frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x}}{(\sqrt{x+4}-\sqrt{x})(\sqrt{x+4}+\sqrt{x})}dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \sqrt{x+4}dx + \frac{1}{4}\int \sqrt{x}dx = \frac{1}{4}\int (x+4)^{\frac{1}{2}}dx + \frac{1}{4}\int x^{\frac{1}{2}}dx =$$

$$= \frac{1}{6}(x+4)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{6}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{6}\sqrt{(x+4)^3} + \frac{1}{6}\sqrt{x^3} + C. \blacktriangleright$$

Задание 13. Найти интеграл

$$\int \sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)dx.$$

◀Применим тригонометрическое тождество

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right)$$

(об этом способе интегрирования будет подробнее говориться на пятой лекции).

$$\int \sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\left(\sin\left(-x-\frac{5\pi}{12}\right)+\sin\left(5x+\frac{\pi}{12}\right)\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos\left(x+\frac{5\pi}{12}\right)-\frac{1}{5}\cos\left(5x+\frac{\pi}{12}\right)\right)+C.\ ▶$$

Задание 14. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{x^2+x-2}.$$

◀Выделяем в знаменателе подынтегральной функции полный квадрат:

$$\int \frac{dx}{x^2+x-2} = \int \frac{dx}{x^2+2\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-2} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2\cdot\frac{3}{2}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{x+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}\right|+C = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C.\ ▶$$

Задание 15. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}.$$

◀ Решаем тем же методом, что и в задании 14:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+4-4+3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2-1}} =$$

$$= \ln\left|x-2+\sqrt{(x-2)^2-1}\right| + C = \ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+3}\right| + C. \blacktriangleright$$

Задание 16. Найти интеграл

$$\int (x^4+3x^2-6x+1)(x-2)^{44}dx.$$

◀ Разложим многочлен $P_4(x) = x^4+3x^2-6x+1$ по степеням $x-2$ по формуле Тейлора для многочлена

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k. \tag{1.2}$$

Для этого найдем значения производных многочлена $P_4(x)$ в точке $x_0 = 2$ всех порядков от 0 до 4 включительно ($P_4^{(0)} \equiv P_4(x)$):

$$P_4^{(0)}(2) = P_4(2) = 17;$$

$$P_4'(x) = 4x^3 + 6x - 6; \quad P_4'(2) = 38;$$
$$P_4''(x) = 12x^2 + 6, \quad P_4''(2) = 54;$$
$$P_4'''(x) = 24x, \quad P_4'''(2) = 48;$$
$$P_4^{(4)}(x) = 24, \quad P_4^{(4)}(2) = 24.$$

Используя формулу (1.2), получим:

$$P_4(x) = 17 + 38(x-2) + \frac{54}{2!}(x-2)^2 + \frac{48}{3!}(x-2)^3 + \frac{24}{4!}(x-2)^4 =$$
$$= 17 + 38(x-2) + 27(x-2)^2 + 8(x-2)^3 + (x-2)^4.$$

Тогда

$$\int (x^4 + 3x^2 - 6x + 1)(x-2)^{44}dx =$$
$$= \int \left(17 + 38(x-2) + 27(x-2)^2 + 8(x-2)^3 + (x-2)^4\right)(x-2)^{44}dx =$$
$$= 17\int (x-2)^{44}dx + 38\int (x-2)^{45}dx + 27\int (x-2)^{46}dx +$$
$$+ \int (x-2)^{47}dx + \int (x-2)^{48}dx =$$
$$= 17\frac{(x-2)^{45}}{45} + 38\frac{(x-2)^{46}}{46} + 27\frac{(x-2)^{47}}{47} + 8\frac{(x-2)^{48}}{48} + C =$$
$$= (x-2)^{45}\left(\frac{17}{45} + \frac{19}{23}(x-2) + \frac{27}{47}(x-2)^2 + \frac{1}{6}(x-2)^3\right) + C. \blacktriangleright$$

Задания для самостоятельного решения

1. $\int (3-x^2)^3 dx.$ **2.** $\int x^2(5-x)^4 dx.$ **3.** $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx.$

4. $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx.$ **5.** $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx.$ **6.** $\int \frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}} dx.$

7. $\int \frac{\left(\sqrt{2x}-\sqrt[3]{3x}\right)^2}{x} dx.$ **8.** $\int (1-x)(1-3x) dx.$ **9.** $\int \frac{x^2}{1-x^2} dx.$

10. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx.$ **11.** $\int \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}} dx.$ **12.** $\int (2^x+3^x)^2 dx.$

13. $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1} dx.$ **14.** $\int (1+\sin x+\cos x) dx.$ **15.** $\int \operatorname{ctg}^2 x dx.$

16. $\int \operatorname{tg}^2 x dx.$ **17.** $\int \frac{dx}{x+a}.$ **18.** $\int (2x-3)^{10} dx.$

19. $\int \sqrt[3]{1-3x} dx.$ **20.** $\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}} dx.$ **21.** $\int \frac{dx}{2+3x^2}.$

22. $\int \frac{dx}{2-3x^2}.$ **23.** $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}.$ **24.** $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}.$

25. $\int (e^{-x}+e^{-2x}) dx.$ **26.** $\int (\sin 5x-\cos 6x) dx.$ **27.** $\int \frac{dx}{\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}.$

Задания для самостоятельного решения

28. $\int \frac{dx}{1+\cos x}$. **29.** $\int \frac{dx}{1-\cos x}$. **30.** $\int \frac{dx}{1+\sin x}$.

31. $\int \frac{1+x}{1-x} dx$. **32.** $\int \frac{x^2}{1+x} dx$. **33.** $\int \frac{x^4+4x^3+3x^2+12x+20}{x^2+4x+5} dx$.

34. $\int \frac{(1+x)^2}{1+x^2} dx$. **35.** $\int \frac{(2-x)^2}{2-x^2} dx$. **36.** $\int \frac{x^5}{x+1} dx$.

37. $\int \frac{dx}{4x^2-5x+6}$. **38.** $\int \frac{dx}{x^2-6x+9}$. **39.** $\int \frac{dx}{1-3x-x^2}$.

40. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+8}}$. **41.** $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x-x^2}}$. **42.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3-3x^2+3x-1}}$.

43. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$. **44.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt{4+x}}$. **45.** $\int x\sqrt{2-5x} dx$.

46. $\int \frac{dx}{(x-1)(x+3)}$. **47.** $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)}$. **48.** $\int \sin^2 x dx$.

49. $\int \cos^2 x dx$. **50.** $\int \sin 3x \sin 5x dx$. **51.** $\int \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{3} dx$.

ЛЕКЦИЯ 2
Замена переменной и интегрирование по частям в неопределенном интеграле

2.1 Замена переменной в неопределённом интеграле

При вычислениях неопределенных интегралов часто используют так называемый метод подстановки (метод замены переменной). Справедлива следующая теорема:

Теорема 2.1. *Если на некотором промежутке U существует $\int f(u)du = F(u) + C$, а функция $u = \varphi(x)$ является дифференцируемой на промежутке X, причем $E(\varphi) \subset U$, то существует*

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) + C. \tag{2.1}$$

◀ На промежутке X каждая из функций $F(\varphi(x))$ и $f(\varphi(x))$ является сложной. Для функции $F(\varphi(x))$ выполняются условия теоремы о дифференцировании сложной функции ($\exists F'(u) = f(u)$ на U, так как $\exists \int f(u)du = F(u) + C$; $\exists \varphi'(x)$ на X — по условию теоремы). Значит, существует на промежутке X

$$(F(\varphi(x)))' = F'(u)\big|_{u=\varphi(x)} \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x). \tag{2.2}$$

Отсюда следует, что функция $F(\varphi(x))$ является первообразной для функции $f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$ на промежутке X.▶

Формула (2.2) называется формулой интегрирования подстановкой, а именно подстановкой $\varphi(x)=u$. Это название объясняется тем, что если формулу (2.2) записать в виде

$$\int f(\varphi(x))d\varphi(x)=\int f(u)du\,|_{u=\varphi(x)}, \tag{2.3}$$

то будет видно, что, для того чтобы вычислить интеграл

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=\int f(\varphi(x))d(\varphi(x)),$$

можно сделать подстановку $u=\varphi(x)$, вычислить интеграл $\int f(u)du$ и затем вернуться к переменной x, положив $u=\varphi(x)$.

Пример 2.1. Вычислите $\int \frac{dx}{\sin x}$.

$$\blacktriangleleft \int \frac{dx}{\sin x}=\int \frac{\sin x dx}{\sin^2 x}=\int \frac{\sin x dx}{1-\cos^2 x}=\int -\frac{1}{1-cos^2 x}(-\sin x)dx=$$

$$=\begin{bmatrix} u=\cos x=\varphi(x), \quad f(u)=-\frac{1}{1-u^2}; \\ X=(\pi k,\pi+\pi k),\ k\in Z; \\ u=(-1,1) \end{bmatrix}=-\int \frac{d(\cos x)}{1-cos^2 x}=$$

$$=-\int \frac{du}{1-u^2}=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|+C=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right|+C. \blacktriangleright$$

Пример 2.2. Вычислите $\int \cos\frac{x}{2}dx$.

◀ $d(\frac{x}{2}) = (\frac{x}{2})'dx = \frac{1}{2}dx$.

$$\int \cos\frac{x}{2}dx = 2\int \cos\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}dx = 2\int \cos\frac{x}{2}d\left(\frac{x}{2}\right) = \left[u = \frac{x}{2},\quad f(u) = \cos u\right] =$$

$$= 2\int \cos u du = 2\sin u = 2\sin\frac{x}{2} + C.$$

Замечание 2.1. Использование определения дифференциала $d\varphi(x) = \varphi'(x)dx$ справа налево при вычислении интегралов методом подстановки называется поднесением под знак дифференциала функции $\varphi(x)$. При этом соответствующая подстановка $u = \varphi(x)$ часто проводится только мысленно, а не в записи. Например:

$$\int \sin^2 x\cos x dx = \int \sin^2 x d(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3} + C;$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - x + 1} = \left[\begin{array}{l} x^2 - x + 1 = x^2 - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}; \\ d(x - \frac{1}{2}) = dx; \end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{d(x - \frac{1}{2})}{(x - \frac{1}{2})^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + C.$$

Кроме того, используя операцию поднесения под знак дифференциала, легко доказать формулу

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C,$$

где $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$. Например:

$$\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C;$$

$$\int (0,2x-3)^{54}dx = \frac{1}{0,2}\frac{(0,2x-3)^{55}}{55} = \frac{(0,2x-3)^{55}}{11} + C;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2(3x-4)} = \frac{1}{3}\operatorname{tg}(3x-4) + C.$$

Замечание 2.2. Если

$$I = \int \frac{f'(x)dx}{f(x)},$$

то

$$I = \int \frac{d(f(x))}{f(x)} = \ln|f(x)| + C.$$

Замечание 2.3. В случае, когда функция φ имеет обратную φ^{-1}, перейдя в обеих частях формулы (2.1) к переменной u с помощью подстановки $x = \varphi^{-1}(u)$ и поменяв местами стороны равенства, получим

$$\int f(u)du = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx \,|_{x=\varphi^{-1}(u)} .$$

Эта формула называется обычно *формулой интегрирования заменой переменной.*

Так, с помощью этой формулы для вычисления интеграла $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$ используют подстановку $x = a\cos u$ или $x = a\sin u$; для $\int \sqrt{x^2 - a^2}dx$ — подстановку $x = \frac{a}{\cos u}$ или $x = \frac{a}{\sin u}$; для $\int \sqrt{x^2 + a^2}dx$ — подстановку $x = a\operatorname{tg} u$ или $x = a\operatorname{ctg} u$.

Указанные подстановки используются соответственно и для вычисления некоторых других интегралов, подынтегральные функции которых содержат в качестве множителей $\sqrt{a^2 - x^2}$, или $\sqrt{x^2 - a^2}$, или $\sqrt{x^2 + a^2}$.

Пример 2.3. Вычислить $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}dx$.

$$◀ \int \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x}dx = \left[\begin{array}{l} x = 2\cos u; \\ 0 < u < \pi \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4 - 4\cos^2 u} = 2\sin u; \\ dx = -2\sin u du; \;\; u = \arccos \frac{x}{2} \end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{2\sin u}{2\cos u}(-2\sin u)du = -2\int \frac{\sin^2 u d(\sin u)}{1-\sin^2 u} = [t = \sin u] =$$

$$= -2\int \frac{t^2 dt}{1-t^2} = 2\int \frac{1-t^2-1}{1-t^2}dt = 2\left(t - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\right) + C =$$

$$= 2\left(\sin u - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin u}{1-\sin u}\right|\right) + C =$$

$$= 2\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}{1-\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}\right|\right) + C =$$

$$= \sqrt{4-x^2} - \ln\left|\frac{2+\sqrt{4-x^2}}{2-\sqrt{4-x^2}}\right| + C. \blacktriangleright$$

2.2 Интегрирование по частям

Теорема 2.2. *Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы на некотором промежутке I, и на этом промежутке существует интеграл $\int vdu$, то на нем существует и нтеграл $\int udv$, причем справедлива формула (формула интегрирования по частям)*

$$\int udv = uv - \int vdu. \tag{2.4}$$

◀ Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы на промежутке I. Тогда по правилу дифференцирования произведения для всех точек этого промежутка имеет место равенство

$$d(uv) = vdu + udv,$$

и поэтому

$$udv = d(uv) - vdu.$$

Интеграл от каждого слагаемого правой части существует, так как

$$\int d(uv) = uv + C,$$

а интеграл $\int vdu$ существует по условию теоремы. Поэтому существует и интеграл $\int udv$, причем

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu. \tag{2.5}$$

Подставляя в правую часть (2.5) $uv + C$ вместо $\int d(uv)$ и относя произвольную постоянную C к интегралу $\int vdu$, получим формулу (2.4).▶

Замечание 2.4. Выделим три группы интегралов, вычисление которых проводится по формуле (2.4) с некоторыми особенностями.

1. $\displaystyle\int P_n(x)a^{\alpha x}dx, \quad \int P_n(x)\sin\alpha x dx, \quad \int P_n(x)\cos\alpha x dx.$

При вычислении интегралов первого типа функцией $u = u(x)$ считают многочлен $P_n(x)$ степени $n \in N$, причем интегрирование по частям необходимо проводить n раз.

Пример 2.4. Вычислите $\int (3x^2 - x)2^{\frac{1}{4}x}dx$.

$$\blacktriangleleft \int (3x^2 - x)2^{\frac{1}{4}x}dx = \left[\begin{array}{ll} u = 3x^2 - x; & du = (6x-1)dx; \\ dv = 2^{\frac{x}{4}}dx; & v = 4\frac{2^{\frac{x}{4}}}{\ln 2} \end{array} \right] =$$

$$= \frac{4}{\ln 2}(3x^2 - x)2^{\frac{x}{4}} - \frac{4}{\ln 2}\int (6x-1)2^{\frac{x}{4}}dx = \left[\begin{array}{ll} u = 6x - 1; & du = 6dx; \\ dv = 2^{\frac{x}{4}}dx; & v = 4\frac{2^{\frac{x}{4}}}{\ln 2} \end{array} \right] =$$

$$= \frac{4}{\ln 2}(3x^2 - x)2^{\frac{x}{4}} - \left(\frac{4}{\ln 2}\right)^2 (6x-1)2^{\frac{x}{4}} + \left(\frac{4}{\ln 2}\right)^2 6\int 2^{\frac{x}{4}}dx =$$

$$= \frac{4}{\ln 2}(3x^2 - x)2^{\frac{x}{4}} - \left(\frac{4}{\ln 2}\right)^2 (6x-1)2^{\frac{x}{4}} + 6\left(\frac{4}{\ln 2}\right)^3 2^{\frac{x}{4}} + C. \blacktriangleright$$

2. $a)$ $\displaystyle\int a^{\alpha x}\sin \beta x dx, \quad \int a^{\alpha x}\cos \beta x dx;$

$b)$ $\displaystyle\int \sqrt{a^2 + x^2}dx, \quad \int \sqrt{a^2 - x^2}dx, \quad \int \sqrt{x^2 - a^2}dx;$

$c)$ $\displaystyle\int \sin(\ln x)dx, \quad \int \cos(\ln x)dx.$

При вычислении интегралов второго типа проводится интегрирование по частям: для пункта a) – два раза, за $u = u(x)$ оба раза берется либо показательная функция, либо тригонометрическая; для пункта b) – один раз, после чего получим равенство относительно искомого интеграла; для пункта c) – интегрирование по частям проводится два раза.

Пример 2.5. Вычислить $\int e^{-x}\cos x dx$.

$$\blacktriangleleft \int e^{-x}\cos x dx = \left[\begin{array}{ll} u = e^{-x}; & du = -e^{-x}dx; \\ dv = \cos x dx; & v = \sin x \end{array}\right] = e^{-x}\sin x +$$

$$+\int e^{-x}\sin x dx = e^{-x}\sin x + \left[\begin{array}{ll} u = e^{-x}; & du = -e^{-x}dx; \\ dv = \sin x dx; & v = -\cos x \end{array}\right] =$$

$$= e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\cos x dx.$$

Решая равенство относительно $\int e^{-x}\cos x dx$, получим

$$\int e^{-x}\cos x dx = \frac{e^{-x}}{2}(\sin x - \cos x) + C. \blacktriangleright$$

Пример 2.6. Вычислить $\int \sqrt{2x - x^2}dx$.

$$\blacktriangleleft \int \sqrt{2x - x^2}dx = [-x^2 + 2x = -(x^2 - 2x + 1 - 1) = 1 - (x-1)^2;$$

$$t = x - 1, \quad dt = d(x-1) = dx] = \int \sqrt{1-t^2}dt =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} u = \sqrt{1-t^2}; & du = \frac{-tdt}{\sqrt{1-t^2}} \\ dv = dt; & v = t \end{array} \right] = t\sqrt{1-t^2} - \int \frac{1-t^2-1}{\sqrt{1-t^2}}dt =$$

$$= t\sqrt{1-t^2} - \int \sqrt{1-t^2}dt + \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} =$$

$$= t\sqrt{1-t^2} - \int \sqrt{1-t^2}dt + \arcsin t = (x-1)\sqrt{2x-x^2} -$$

$$- \int \sqrt{2x-x^2}dx + \arcsin(x-1),$$

$$2\int \sqrt{2x-x^2}dx = (x-1)\sqrt{2x-x^2} + \arcsin(x-1),$$

$$\int \sqrt{2x-x^2}dx = \frac{1}{2}\left((x-1)\sqrt{2x-x^2} + \arcsin(x-1)\right) + C. \blacktriangleright$$

3. $\int f(x)\left(\log_a \alpha x\right)^n dx, \quad \int f(x)\left(\arcsin \alpha x\right)^n dx, \quad \int f(x)\left(\arccos \alpha x\right)^n dx,$

$$\int f(x)\left(\operatorname{arctg} \alpha x\right)^n dx, \quad \int f(x)\left(\operatorname{arcctg} \alpha x\right)^n dx,$$

где функция $f(x)$ есть производная порядка $n \in N$ некоторой функции $\varphi(x)$ $\left(f(x) = \varphi^{(n)}(x)\right)$.

При вычислении интегралов третьего типа проводится интегрирование по частям (n раз), причем за $u = u(x)$ берут второй множитель.

Пример 2.7. Вычислить $\int x \operatorname{arctg} x dx$.

$$◀ \int x \operatorname{arctg} x dx = \left[\begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg} x; & du = \frac{1}{1+x^2}dx; \\ dv = xdx; & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right] = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x -$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}(x - \operatorname{arctg} x) =$$

$$= \frac{x^2 \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} x - x}{2} + C. ▶$$

Замечание 2.5. Справедливо следующее обобщение теоремы 2.2.

Теорема 2.3. *Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ n раз дифференцируемы на промежутке I, и на этом промежутке существует интеграл $\int uv^{(n)}dx$, то на нем существует и интеграл $\int u^{(n)}vdx$, причем справедлива формула*

$$\int uv^{(n)}dx = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k u^{(k)}v^{(n-k-1)} + (-1)^n \int u^{(n)}vdx.$$

Вопросы и задания для самоконтроля

1. В чем состоит сущность способа замены переменной или способа подстановки в неопределенном интеграле? При каких условиях этот способ применим?

2. Какие подстановки удобно использовать для нахождения следующих неопределенных интегралов:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx; \quad \int \sqrt{a^2 + x^2}dx; \quad \int \sqrt{x^2 - a^2}dx.$$

3. Покажите, что правило интегрирования по частям есть следствие правила дифференцирования произведения функций.

4. Назовите классы интегралов, которые можно вычислять интегрированием по частям.

5. Как вычисляются интегралы вида:

$$\int P_n(x)e^{\alpha x}dx, \quad \int P_n(x)\sin\alpha x dx, \quad \int P_n(x)\cos\alpha x dx,$$

где $P_n(x)$ — многочлен степени n, $n \in N$?

6. В чем особенности вычисления интегралов

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx, \quad \int e^{\alpha x}\sin\beta x dx\ ?$$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 2

Замена переменной в неопределенном интеграле

Цель: Приобретение навыков нахождения неопределенных интегралов способом замены переменной.

Способ замены переменной или способ подстановки — один из наиболее сильных приемов интегрирования. К сожалению, нельзя дать общего ответа на вопрос, как выбрать удачную подстановку. В процессе решения задач мы укажем некоторые приемы для важных частных случаев.

Задание 1. Найти интеграл

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} \cos x dx.$$

◀Возьмем подстановку $\sin x = u$. Дифференцируем это равенство: $\cos x dx = du$. Теперь интеграл примет вид:

$$\int \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} = \int \frac{du}{\sqrt[3]{u^2}} = \int u^{-\frac{2}{3}} du.$$

Итак, с помощью подстановки $\sin x = u$ мы преобразовали заданный интеграл к табличному, который легко находится:

$$\int \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} = \int u^{-\frac{2}{3}} du = 3u^{\frac{1}{3}} + C = 3\sqrt[3]{\sin x} + C.$$

После интегрирования мы снова вернулись к первоначальной переменной x.

При решении задачи можно рассуждать и по-другому. В заданном интеграле, вводя множитель $\cos x$ под знак дифференциала, получим:

$$\int \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} = \int \frac{d(\sin x)}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}.$$

Видно, что теперь под знаком интеграла все выражено через $\sin x$ и сама собой напрашивается подстановка $\sin x = u$. Такую подстановку, конечно же, можно провести мысленно, т.е. найти заданный интеграл методом поднесения под знак дифференциала (см. замечание 2.1).▶

Во всех примерах, рассматриваемых далее, по-возможности мы будем использовать метод поднесения под знак дифференциала для нахождения неопределенных интегралов. Если же проводить подстановку мысленно затруднительно — будем вводить новую переменную.

Задание 2. Найти интеграл

$$\int \sin^5 x \cos x dx.$$

$$◀ \int \sin^5 x \cos x dx = \left[d(\sin x) = \cos x dx \right] =$$

$$= \int \sin^5 x d(\sin x) = \frac{\sin^6 x}{6} + C. ▶$$

Кафедра высшей математики

Брэсцкі дзяржаўны універсітэт імя А.С. Пушкіна

Задание 3. Найти интеграл

$$\int \left(\operatorname{tg} x + 3\operatorname{tg}^3 x\right) \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

$$\blacktriangleleft \int \left(\operatorname{tg} x + 3\operatorname{tg}^3 x\right) \frac{dx}{\cos^2 x} = \left[d(\operatorname{tg} x) = \frac{dx}{\cos^2 x}\right] =$$

$$= \int \left(\operatorname{tg} x + 3\operatorname{tg}^2 x\right) d(\operatorname{tg} x) = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \operatorname{tg}^3 x + C. \blacktriangleright$$

Задание 4. Найти интеграл

$$\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} dx.$$

$$\blacktriangleleft \int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} dx = \left[d(\sin x - \cos x) = (\cos x + \sin x)dx\right] =$$

$$= \int (\sin x - \cos x)^{-\frac{1}{3}} d(\sin x - \cos x) = \frac{(\sin x - \cos x)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C =$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt[3]{(\sin x - \cos x)^2} + C. \blacktriangleright$$

Задание 5. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{\cos x}.$$

$$\blacktriangleleft \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x dx}{\cos^2 x} = \int \frac{\cos x dx}{1-\sin^2 x} = \Big[d(\sin x) = \cos x dx \Big] =$$

$$= \int \frac{d(\sin x)}{1-\sin^2 x} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right| + C. \blacktriangleright$$

Задание 6. Найти интеграл

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}} dx.$$

$$\blacktriangleleft \int \frac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}} dx = [\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x] = \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1-2\sin^2 x}} =$$

$$= \Big[d(\sin x) = \cos x dx \Big] = \int \frac{d(\sin x)}{\sqrt{1-(\sqrt{2}\sin x)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin(\sqrt{2}\sin x) + C. \blacktriangleright$$

Задание 7. Найти интеграл

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\blacktriangleleft \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[d(\sqrt{1-x^2}) = \frac{-x dx}{\sqrt{1-x^2}} \right] = -\int \frac{-x dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= -\int d(\sqrt{1-x^2}) = -\sqrt{1-x^2} + C. \blacktriangleright$$

Задание 8. Найти интеграл

$$\int \frac{x^3dx}{x^8-2}.$$

$$◀ \int \frac{x^3dx}{x^8-2} = \left[d(x^4)=4x^3dx\right] = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3dx}{(x^4)^2-2} = \frac{1}{4}\int \frac{d(x^4)}{(x^4)^2-(\sqrt{2})^2} =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^4-\sqrt{2}}{x^4+\sqrt{2}}\right| + C = \frac{1}{8\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^4-\sqrt{2}}{x^4+\sqrt{2}}\right| + C. ▶$$

Задание 9. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}.$$

$$◀ \int \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \int \frac{dx}{e^x+\frac{1}{e^x}} = \int \frac{e^xdx}{e^{2x}+1} = \left[d(e^x)=e^xdx\right] =$$

$$= \int \frac{d(e^x)}{e^{2x}+1} = \operatorname{arctg} e^x + C. ▶$$

Задание 10. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}.$$

$$◀ \int \frac{dx}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}} = \left[d(\arcsin x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right] =$$

$$= \int (\arcsin x)^{-2} d(\arcsin x) = \frac{(\arcsin x)^{-1}}{-1} + C =$$

$$= -\frac{1}{\arcsin x} + C. \blacktriangleright$$

Задание 11. Найти интеграл

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx.$$

$\blacktriangleleft$Разделим числитель и знаменатель подынтегральной функции на x^2:

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx = \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}} dx = \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2-2+\frac{1}{x^2}+2} dx =$$

$$= \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2-2x\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+2} dx = \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2} dx =$$

$$= \left[d\left(x-\frac{1}{x}\right) = \left(1+\frac{1}{x^2}\right) dx \right] = \int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+(\sqrt{2})^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} + C. \blacktriangleright$$

Задание 12. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}.$$

$$\blacktriangleleft \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \left[\frac{1}{x} = t,\ x = \frac{1}{t},\ dx = -\frac{dt}{t^2}\right] = \int \frac{t\left(-\frac{dt}{t^2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}} =$$

$$= -\int \frac{dt}{t\sqrt{\frac{1+t^2}{t^2}}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = -\ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right| + C =$$

$$= -\ln\left|\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right| + C = -\ln\left|\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right| + C. \blacktriangleright$$

Задание 13. Найти интеграл

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}dx.$$

$$\blacktriangleleft \int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}dx = \left[\sqrt{2-x} = t,\ x = 2-t^2;\ dx = -2tdt\right] =$$

$$= \int \frac{(2-t^2)^2}{t}(-2tdt) = -2\int (4-4t^2+t^4)dt =$$

$$= -2\left(4t - \frac{4}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5\right) + C =$$

$$= -2\left(4\sqrt{2-x} - \frac{4}{3}(\sqrt{2-x})^3 + \frac{1}{5}(\sqrt{2-x})^5\right) + C. \blacktriangleright$$

Задание 14. Найти интеграл

$$\int \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1+\ln x}}.$$

$$\blacktriangleleft \int \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = \left[1+\ln x = t,\ d(1+\ln x) = dt,\ \frac{dx}{x} = dt\right] =$$

$$= \int \frac{(t-1)dt}{\sqrt{t}} = \int \sqrt{t}dt - \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int t^{\frac{1}{2}}dt - \int t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{t^3} - 2\sqrt{t} + C = \frac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3} - 2\sqrt{1+\ln x} + C. \blacktriangleright$$

Задание 15. Найти интеграл

$$\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{1+x}.$$

$$\blacktriangleleft \int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{1+x} = \left[d(\operatorname{arctg}\sqrt{x}) = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}dx\right] =$$

$$= 2\int \operatorname{arctg}\sqrt{x} \cdot \frac{1}{1+x} \cdot \frac{dx}{2\sqrt{x}} = 2\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}d(\operatorname{arctg}\sqrt{x}) =$$

$$= (\operatorname{arctg}\sqrt{x})^2 + C. \blacktriangleright$$

Задание 16. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}.$$

$$◀ \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}} = \left[x = \frac{3}{\cos t},\ 0 < t < \frac{\pi}{2},\ dx = \frac{3\sin t dt}{\cos^2 t}\right] =$$

$$= \int \frac{\frac{3\sin t dt}{\cos^2 t}}{\frac{9}{\cos^2 t}\cdot 3 \cdot \sqrt{\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}}} = \frac{1}{9}\int \cos t dt = \frac{1}{9}\sin t + C =$$

$$= \left[x = \frac{3}{\cos t} \Rightarrow \cos t = \frac{3}{x} \Rightarrow t = \arccos\frac{3}{x}\right] = \frac{1}{9}\sin\left(\arccos\frac{3}{x}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{9}\sqrt{1-\frac{9}{x^2}} + C = \frac{\sqrt{x^2-9}}{9x} + C. ▶$$

Задание 17. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}},\ b > a.$$

$$◀ \int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} x-a = (b-a)\sin^2 t, & 0 < t < \frac{\pi}{2}, \\ dx = (b-a)2\sin t\cos t dt, & b-x = (b-a)\cos^2 t \end{array}\right] =$$

Кафедра высшей математики

Начало

Содержание

Таблица интегралов

◀ ▶

◀◀ ▶▶

Назад

На весь экран

Закрыть

$$= \int \frac{2(b-a)\sin t\cos t}{\sqrt{(b-a)^2\sin^2 t\cos^2 t}}dt = 2\int dt = 2t + C =$$

$$= \left[x - a = (b-a)\sin^2 t,\ 0 < t < \frac{\pi}{2},\ \Rightarrow \sin^2 t = \frac{x-a}{b-a} \Rightarrow\right.$$

$$\left.\Rightarrow \sin t = \sqrt{\frac{x-a}{b-a}} \Rightarrow t = \arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}\ \right] = 2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}} + C. \blacktriangleright$$

Задания для самостоятельного решения

1. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$.

2. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

3. $\int \frac{x^2dx}{(x^2+1)^2}$.

4. $\int \frac{e^x dx}{3+4e^x}$.

5. $\int \frac{dx}{\sin 2x}$.

6. $\int \sqrt[3]{\sin^2 2x}\cos 2x dx$.

7. $\int \sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}\frac{dx}{1+x^2}$.

8. $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}dx$.

9. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}$.

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}$.

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}\arcsin^3 2x}$.

12. $\int \frac{dx}{x\ln^5 x}$.

13. $\int (e^{2x}+5)^3 e^{2x}dx$.

14. $\int e^{-x^2}xdx$.

15. $\int e^{\operatorname{arctg} 3x}\frac{dx}{1+9x^2}$.

16. $\int e^{x^2+x+1}(2x+1)dx$.

17. $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}dx}{\cos^2 x}$.

18. $\int \sin(e^x)e^x dx$.

Задания для самостоятельного решения

19. $\int \cos(3e^x+1)e^x dx.$ **20.** $\int \frac{dx}{x\sin^2(\ln x)}.$ **21.** $\int \frac{xdx}{\cos^2(x^2+1)}.$

22. $\int x\sin(4-x^2)dx.$ **23.** $\int \frac{\sin x dx}{\cos^5 x}.$ **24.** $\int \operatorname{tg} 4x dx.$

25. $\int \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}dx.$ **26.** $\int \frac{\cos 4x-\sin 2x}{\sin 4x+2\cos 2x}dx.$ **27.** $\int \frac{\frac{3}{2}\sin 2x(\sin x-\cos x)}{\sin^3 x+\cos^3 x}dx.$

28. $\int \frac{\cos x dx}{1+2\sin x}.$ **29.** $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1+2\cos x}}.$ **30.** $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}dx.$

31. $\int \frac{x^2 dx}{x^6+4}.$ **32.** $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{4-e^{2x}}}.$ **33.** $\int \frac{e^x\sqrt{\operatorname{arctg} e^x}}{1+e^{2x}}dx.$

34. $\int e^{\sqrt{x}}\frac{dx}{\sqrt{x}}.$ **35.** $\int \frac{\ln x-3}{x\sqrt{\ln x}}dx.$ **36.** $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{1+e^{4x}}}.$

37. $\int \frac{2^x dx}{\sqrt{1-4^x}}.$ **38.** $\int e^{2x^2+\ln x}dx.$ **39.** $\int \sin\frac{1}{x}\frac{dx}{x^2}.$

40. $\int \frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)}.$ **41.** $\int \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt[4]{\operatorname{ctg} x}}.$ **42.** $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}dx.$

43. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-2}}.$ **44.** $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$ **45.** $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx.$

46. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2+x^2}}.$ **47.** $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}.$ **48.** $\int \sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}}dx.$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 3

Интегрирование по частям в неопределенном интеграле

Цель: Приобретение навыков нахождения неопределенных интегралов методом интегрирования по частям.

Задание 1. Найти интеграл

$$\int \ln x dx.$$

◀Интеграл относится к третьей группе интегралов, которые можно вычислить интегрированием по частям. Положим здесь

$$u = \ln x,\ dv = dx,\ \text{откуда}\ du = \frac{dx}{x}\ \text{и}\ v = \int dx = x.$$

Применяя формулу интегрирования по частям, получим:

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - x + C. \blacktriangleright$$

Применяя способ интегрирования по частям, мы должны предварительно представить подынтегральное выражение в виде произведения одной функции на дифференциал другой функции. Далее все вспомогательные записи будем делать в квадратных скобках, так, как это было показано на лекции.

Задание 2. Найти интеграл

$$\int \arcsin^2 x dx.$$

$$◀ \int \arcsin^2 x dx = \left[\begin{array}{ll} u = \arcsin^2 x, & du = \frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx, \\ dv = dx, & v = x \end{array} \right] =$$

$$= x\arcsin^2 x - 2\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x\arcsin^2 x -$$

$$-2 \left[\begin{array}{ll} u = \arcsin x, & du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \\ dv = \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}, & v = \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int d(\sqrt{1-x^2}) = -\sqrt{1-x^2} \end{array} \right] =$$

$$= x\arcsin^2 x - 2\left(-\sqrt{1-x^2}\arcsin x + \int dx\right) =$$

$$= x\arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C. ▶$$

Задание 3. Найти интеграл

$$\int (x^2 - 2x + 3) \sin 2x dx.$$

$$◀ \int (x^2 - 2x + 3)\sin 2x dx = \left[\begin{array}{ll} u = x^2 - 2x + 3, & du = (2x-2)dx, \\ dv = \sin 2x dx, & v = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{array} \right] =$$

$$= -\frac{1}{2}(x^2 - 2x + 3)\cos 2x + \int (x-1)\cos 2x dx =$$

$$= -\frac{1}{2}(x^2 - 2x + 3)\cos 2x + \left[\begin{array}{ll} u = x - 1, & du = dx, \\ v = \cos 2x dx, & v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{array}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}(x^2 - 2x + 3)\cos 2x + \frac{1}{2}(x - 1)\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x dx =$$

$$= -\frac{1}{2}(x^2 - 2x + 3)\cos 2x + \frac{1}{2}(x - 1)\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C. \blacktriangleright$$

Замечание. Для вычисления интегралов вида

$$\int (P_n(x)\sin ax + Q_m(x)\cos ax)\, dx$$

можно применить метод неопределенных коэффициентов. Для функции

$$P_n(x)\sin ax + Q_m(x)\cos ax$$

первообразной будет функция вида

$$S_l(x)\sin ax + T_l(x)\cos ax,$$

где $S_l(x)$ и $T_l(x)$ — многочлены степени $l = \max\{m; n\}$ с неизвестными коэффициентами. Тогда:

$$\int \Big(P_n(x)\cos ax + Q_m(x)\sin ax\Big) dx = S_l(x)\sin ax + T_l(x)\cos ax + C.$$

Для определения неизвестных коэффициентов многочленов $S_l(x)$ и $T_l(x)$ продифференцируем обе части последнего равнства и приравняв коэффициенты при подобных слагаемых вида $x^k \sin ax$ и $x^k \cos ax$, получим систему уравнений для определения неизвестных коэффициентов.

Задание 4. Найти интеграл

$$\int (x^2 + x + 1) \sin x dx.$$

◀Применим для решения метод неопределенных коэффициентов.

$$\int (x^2+x+1) \sin x dx = (A_0+A_1x+A_2x^2) \sin x+(B_0+B_1x+B_2x^2) \cos x+C.$$

Продифференцировав обе части равенства, и получим:

$$(x^2 + x + 1) \sin x = \sin x\Big[(A_1 - B_0) + (2A_2 - B_1)x - B_2x^2\Big]+$$

$$+\cos x\Big[(A_0 + B_1) + A_2x^2 + (A_1 + 2B_2)x\Big].$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых слагаемых, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 1 = A_1 - B_0 & (\text{коэффициенты при } \sin x), \\ 1 = 2A_2 - B_1 & (\text{коэффициенты при } x \sin x), \\ 1 = -B_2 & (\text{коэффициенты при } x^2 \sin x), \\ 0 = A_0 + B_1 & (\text{коэффициенты при } \cos x), \\ 0 = A_1 + 2B_2 & (\text{коэффициенты при } x \cos x), \\ 0 = A_2 & (\text{коэффициенты при } x^2 \cos x). \end{cases}$$

Решая систему, получаем:

$$A_2 = 0,\ B_2 = -1,\ B_1 = -1,\ A_0 = 1,\ A_1 = 2,\ B_0 = 1.$$

Следовательно,

$$\int (x^2 + x + 1)\sin x dx = (2x + 1)\sin x + (-x^2 - x + 1)\cos x + C. \blacktriangleright$$

Задание 5. Найти интеграл

$$\int x^2 e^{-2x} dx.$$

$$\int x^2 e^{-2x} dx = \left[\begin{array}{ll} u = x^2, & du = 2xdx, \\ dv = e^{-2x}dx, & v = -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{array}\right] = -\frac{1}{2}x^2 e^{-2x} + \int x e^{-2x} dx =$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 e^{-2x} + \left[\begin{array}{ll} u = x, & du = dx, \\ dv = e^{-2x}dx, & v = -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{array}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 e^{-2x} - \frac{1}{2}x e^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x} dx =$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 e^{-2x} - \frac{1}{2}x e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C = -\frac{1}{4}e^{-2x}(2x^2 + 2x + 1) + C. \blacktriangleright$$

Замечание. Из разобранного примера видно, что в результате вычисления интегралов вида $\int e^{ax}P_n(x)dx$ мы получаем выражение $e^{ax}Q_n(x)$, где $Q_n(x)$ — многочлен той же степени, что и многочлен $P_n(x)$.

Это обстоятельство позволяет метод неопределенных коэффициентов применять и для интегралов указанного типа.

Задание 6. Найти интеграл

$$\int (x^2 - 6x + 2)e^{3x}dx.$$

◀Пусть

$$\int (x^2 - 6x + 2)e^{3x}dx = e^{3x}(Ax^2 + Bx + C).$$

Продифференцируем обе части последнего равенства. Получим:

$$e^{3x}(x^2 - 6x + 2) = 3e^{3x}(Ax^2 + Bx + C) + e^{3x}(2Ax + B).$$

Сократив обе части на $e^{3x} \neq 0$, получим:

$$x^2 - 6x + 2 = 3Ax^2 + (3B + 2A)x + B + 3C.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x, получим:

$$\begin{cases} 1 = 3A, \\ -6 = 3B + 2A, \\ 2 = B + 3C. \end{cases}$$

Решив систему, получим:

$$A = \frac{1}{3}, \; B = -\frac{20}{9}, \; C = \frac{38}{27}.$$

Следовательно,

$$\int (x^2-6x+2)e^{3x}dx = e^{3x}\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{20}{9}x+\frac{38}{27}\right)+C. \blacktriangleright$$

Задание 7. Найти интеграл

$$\int e^{2x}\sin^2 x dx.$$

$$\blacktriangleleft \int e^{2x}\sin^2 x dx = \int e^{2x}\frac{1-\cos 2x}{2}dx =$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int e^{2x}dx-\int e^{2x}\cos 2x dx\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}\int e^{2x}\cos 2x d(2x)\right)=$$

$$=\frac{1}{4}e^{2x}-\frac{1}{4}\int e^{2x}\cos 2x d(2x).$$

$$\int e^{2x}\cos 2x d(2x)=\left[2x=t\right]=\int e^t\cos t dt =: I.$$

$$I=\begin{bmatrix} u=e^t, & du=e^t dt, \\ dv=\cos t dt, & v=\sin t \end{bmatrix} = e^t\sin t-\int e^t\sin t dt =$$

$$=e^t\sin t-\begin{bmatrix} u=e^t, & du=e^t dt, \\ dv=\sin t dt, & v=-\cos t \end{bmatrix}=$$

$$=e^t\sin t+e^t\cos t-\int e^t\cos t dt \Rightarrow I=e^t(\sin t+\cos t)-I \Rightarrow$$

$$2I = e^t(\sin t + \cos t) \Rightarrow I = \frac{1}{2}e^t(\sin t + \cos t).$$

В итоге получим:

$$\int e^{2x}\sin^2 x dx = \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{8}e^{2x}(\sin 2x + \cos 2x) + C. \blacktriangleright$$

Задание 8. Найти интеграл

$$\int \sqrt{1+x^2}dx.$$

$$\blacktriangleleft I = \int \sqrt{1+x^2}dx = \left[\begin{array}{ll} u = \sqrt{1+x^2}, & du = \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}, \\ dv = dx, & v = x \end{array}\right] =$$

$$= x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^2}} = x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{x^2+1-1}{\sqrt{1+x^2}}dx =$$

$$= x\sqrt{1+x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} - \int \sqrt{1+x^2}dx =$$

$$= x\sqrt{1+x^2} + \ln\left|x + \sqrt{1+x^2}\right| - I.$$

Значит,

$$2I = x\sqrt{1+x^2} + \ln\left|x + \sqrt{1+x^2}\right|,$$

$$I = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} + \ln\left|x + \sqrt{1+x^2}\right|\right) + C. \blacktriangleright$$

В некоторых случаях, прежде чем применять метод интегрирования по частям, выгодно предварительно сделать замену переменной.

Задание 9. Найти интеграл

$$\int \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx.$$

$$◀ \int \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx = \int x^2 \operatorname{arctg} x d(\operatorname{arctg} x) =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \operatorname{arctg} x = t, \\ x = \operatorname{tg} t \end{array} \right] = \int t \cdot \operatorname{tg}^2 t dt =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} u = t, & du = dt, \\ dv = \operatorname{tg}^2 t dt, & v = \int \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} dt = \int \frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t} dt = \int \frac{dt}{\cos^2 t} - \int dt = \operatorname{tg} t - t \end{array} \right] =$$

$$= t(\operatorname{tg} t - t) - \int (\operatorname{tg} t - t) dt = t(\operatorname{tg} t - t) - \int \operatorname{tg} t dt + \int t dt =$$

$$= t(\operatorname{tg} t - t) - \int \frac{\sin t}{\cos t} dt + \frac{t^2}{2} = t(\operatorname{tg} t - t) + \int \frac{d(\cos t)}{\cos t} + \frac{t^2}{2} =$$

$$= t(\operatorname{tg} t - t) + \ln|\cos t| + \frac{t^2}{2} + C = \operatorname{arctg} x(\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) - \operatorname{arctg} x) +$$

$$+ \ln|\cos(\operatorname{arctg} x)| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x + C = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x +$$

$$+ \ln \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + C = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x - \ln(\sqrt{1+x^2}) + C. ▶$$

Задание 10. Вывести рекуррентную формулу для вычисления интеграла

$$\int \sin^n x dx, \;\; n \in N, \;\; n \geq 2.$$

Пользуясь выведенной формулой, найти

$$\int \sin^6 x dx.$$

◀ $$I_n = \int \sin^n x dx = \int \sin^{n-2} x \sin^2 x dx = \int \sin^{n-2} x (1 - \cos^2 x) dx =$$

$$= I_{n-2} - \int \sin^{n-2} x \cos^2 x dx.$$

Второй интеграл правой части последнего равенства будем вычислять по частям.

$$\int \sin^{n-2} x \cos^2 x dx =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} u = \cos x, & du = -\sin x dx, \\ dv = \sin^{n-2} x \cos x dx, & v = \int \sin^{n-2} x d(\sin x) = \frac{1}{n-1} \sin^{n-1} x \end{array} \right] =$$

$$= \frac{1}{n-1} \cos x \sin^{n-1} x + \frac{1}{n-1} \int \sin^n x dx = \frac{1}{n-1} \cos x \sin^{n-1} x + \frac{1}{n-1} I_n.$$

В итоге получим:

$$I_n = I_{n-2} - \frac{1}{n-1} \cos x \sin^{n-1} x - \frac{1}{n-1} I_n,$$

тогда

$$I_n\left(1+\frac{1}{n-1}\right)=I_{n-2}-\frac{1}{n-1}\cos x\sin^{n-1}x,$$

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}-\frac{1}{n}\cos x\sin^{n-1}x.$$

Теперь найдем с помощью выведенной формулы $\int\sin^6 x dx$.

$$\int\sin^6 x dx=\frac{5}{6}\int\sin^4 x dx-\frac{1}{6}\cos x\sin^5 x,$$

$$\int\sin^4 x dx=\frac{3}{4}\int\sin^2 x dx-\frac{1}{4}\cos x\sin^3 x,$$

$$\int\sin^2 x dx=\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{2}\cos x\sin x=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\cos x\sin x.$$

Таким образом, окончательно получим:

$$\int\sin^6 x dx=\frac{5}{6}\left(\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\cos x\sin x\right)-\frac{1}{4}\cos x\sin^3 x\right)-$$

$$-\frac{1}{6}\cos x\sin^5 x+C=\frac{5}{16}x-\frac{\cos x\sin x\left(8\sin^4 x+10\sin^2 x+15\right)}{48}+C.$$ ▶

Задания для самостоятельного решения

1. $\int (x^2-2x+3)\ln x dx.$
2. $\int \arcsin x dx.$
3. $\int \operatorname{arctg} x dx.$
4. $\int \frac{x\arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}}.$
5. $\int x^2 \operatorname{arctg} 4x dx.$
6. $\int x^2 \arcsin 2x dx.$
7. $\int e^{-x}\sin^2 x dx.$
8. $\int \ln(x+\sqrt{4+x^2})dx.$
9. $\int \ln^2 x dx.$
10. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx.$
11. $\int \sqrt{x}\ln x dx.$
12. $\int \sin x\ln(\cos x)dx.$
13. $\int \frac{\arcsin\frac{x}{2}}{\sqrt{2-x}}dx.$
14. $\int \frac{x\arccos\frac{x}{a}dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$
15. $\int \frac{x\cos x dx}{\sin^2 x}.$
16. $\int (x^2+x-2)e^{-3x}dx.$
17. $\int (1+x^2)\cos x dx.$
18. $\int x^5\sin 5x dx.$
19. $\int e^{3x}(\sin 2x-\cos 2x)dx.$
20. $\int (x+e^x\cos^2 x)dx.$
21. $\int x^{\frac{3}{2}}\ln^2 x dx.$
22. $\int e^{-4x}x^3 dx.$
23. $\int \operatorname{arctg} x\frac{x^4}{x^2+1}dx.$
24. $\int x^3 e^{-\frac{x}{3}}dx.$
25. $\int (x^2+3x+1)\cos 2x dx.$
26. $\int e^{-x}\cos 2x dx.$
27. $\int e^{-2x}\cos 3x dx.$
28. $\int \frac{\arcsin x dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$
29. $\int x^3\operatorname{arctg} x dx.$
30. $\int e^{-3x}\sin x dx.$
31. $\int x^2\ln\frac{1-x}{1+x}dx.$
32. $\int \sin x\ln(\operatorname{tg} x)dx.$
33. $\int \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx.$

Задания для самостоятельного решения

34. $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx$. **35.** $\int x^2 \arccos x dx$. **36.** $\int e^{\sqrt{x}} dx$.

37. $\int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx$. **38.** $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$. **39.** $\int \cos(\ln x) dx$.

40. Вывести рекуррентные формулы для интегралов:

1. $I_n = \int \cos^n x dx$; найти I_4 и I_5;
2. $I_n = \int x^n e^{-x} dx$; найти I_{10};
3. $I_n = \int \frac{x^n dx}{\sqrt{x^2+a}}$.

41. Вычислить интегралы, применяя рекуррентные формулы:

$$1.\ \int \cos^8 x dx; \quad 2.\ \int \cos^5 x dx; \quad 3.\ \int \sin^5 x dx; \quad 4.\ \int \sin^7 x dx.$$

42. Вычислить интегралы:

$$1.\ \int \frac{x^5 dx}{\sqrt{x^2+4}}; \quad 2.\ \int \frac{x^6 dx}{\sqrt{x^2+9}}; \quad 3.\ \int \frac{dx}{(x^2+8)^4}; \quad 4.\ \int \frac{dx}{(x^2-5)^3}.$$

ЛЕКЦИЯ 3
Интегрирование рациональных функций

3.1 Разложение рациональных дробей на элементарные

Определение 3.1. Дробно-рациональной функцией называется функция, которую можно представить в виде отношения двух многочленов:

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

где $P_n(x)$ — многочлен с действительными коэффициентами степени n ($n \in N$ или $n = 0$), $Q_m(x)$ — многочлен с действительными коэффициентами степени m ($m \in N$ или $m = 0$). Если $m = 0$, то f называют целой рациональной функцией, а если $m \neq 0$ — дробно-рациональной функцией или рациональной дробью (при условии, что дробь несократимая).

Определение 3.2. Рациональная дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ называется правильной, если степень многочлена $P_n(x)$ меньше степени многочлена $Q_m(x)$ ($n < m$).

Определение 3.3. Рациональная дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ называется неправильной, если степень многочлена $P_n(x)$ не меньше степени многочлена $Q_m(x)$ ($n \geq m$).

Всякая рациональная дробь является либо правильной, либо неправильной.

Если рациональная дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ неправильная, то, разделив числитель на знаменатель по правилу деления многочленов, получим равенство

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = R(x) + \frac{P(x)}{Q_m(x)},$$

где $R(x)$, $P(x)$ — некоторые многочлены, а $\frac{P(x)}{Q_m(x)}$ — правильная рациональная дробь.

Лемма 3.1. *Для всякого многочлена степени n с действительными коэффициентами справедливо разложение*

$$P_n(x) = A_n(x-a_1)^{n_1}\dots(x-a_r)^{n_r}\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}\dots(x^2+p_sx+q_s)^{m_s},$$

где

$$\sum_{i=1}^{r} n_i + 2\sum_{i=1}^{s} m_i = n, \quad \frac{p_j^2}{4} - q_j < 0, \quad j = 1, 2, \dots, s,$$

и $a_1, \dots, a_r$ — действительные корни многочлена, A_n, p_j, q_j — действительные числа $(j=1, 2, \dots, s)$. [1, с. 522]

Лемма 3.2. *Пусть $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ — правильная рациональная дробь. Если число a является действительным корнем кратности $k \geq 1$ многочлена $Q_m(x)$, т.е.*

$$Q_m(x) = (x-a)^k Q_{m-k}(x), \quad Q_{m-k}(a) \neq 0,$$

то существуют действительное число A и многочлен $P(x)$ с действительными коэффициентами такие, что

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{P(x)}{(x-a)^{k-1}Q_{m-k}(x)},$$

где дробь $\frac{P(x)}{(x-a)^{k-1}Q_{m-k}(x)}$ *также является правильной.* [1, с. 527]

Лемма 3.3. *Пусть* $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ *— правильная рациональная дробь. Если комплексное число z является корнем кратности $k \geq 1$ многочлена $Q_m(x)$, т.е.*

$$Q_m(x) = (x^2+px+q)^k Q_{m-2k}(x), \quad p^2-4q<0,$$

где $Q_{m-2k}(z) \neq 0$, то существуют действительные числа M, N и многочлен $P(x)$ с действительными коэффициентами такие, что

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} + \frac{P(x)}{(x^2+px+q)^{k-1}Q_{m-2k}(x)},$$

где дробь $\frac{P(x)}{(x^2+px+q)^{k-1}Q_{m-2k}(x)}$ *также является правильной.* [1, с. 529]

Без ограничения общности будем считать, что коэффициент старшего члена многочлена $Q_m(x)$ равен единице.

Теорема 3.1. *Пусть* $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ *— правильная рациональная дробь. Если*

$$Q_m(x) = (x-a_1)^{n_1}\dots(x-a_r)^{n_r}(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}\dots(x^2+p_sx+q_s)^{m_s}, \quad (3.1)$$

a_i — *попарно различные действительные корни многочлена* $Q_m(x)$ *кратности* n_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$, $p_j^2 - 4q_j < 0$ $(j = 1, 2, \ldots, s)$, *то существуют действительные числа* $A_i^{(\alpha)}$ $(i = 1, 2, \ldots, r,\ \alpha = 1, 2, \ldots, n_i)$, $M_j^{(\beta)}$ *и* $N_j^{(\beta)}$ $(j = 1, 2, \ldots, s,\ \beta = 1, 2, \ldots, m_j)$, *такие, что*

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1^{(1)}}{(x-a_1)^{n_1}} + \frac{A_1^{(2)}}{(x-a_1)^{n_1-1}} + \ldots + \frac{A_1^{(n_1)}}{x-a_1} + \ldots +$$

$$+\frac{A_r^{(1)}}{(x-a_r)^{n_r}} + \frac{A_r^{(2)}}{(x-a_r)^{n_r-1}} + \ldots + \frac{A_r^{(n_r)}}{x-a_r} +$$

$$+\frac{M_1^{(1)}x + N_1^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}} + \frac{M_1^{(2)}x + N_1^{(2)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{m_1-1}} + \ldots + \frac{M_1^{(m_1)}x + N_1^{(m_1)}}{x^2+p_1x+q_1} + \ldots +$$

$$+\frac{M_s^{(1)}x + N_s^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{m_s}} + \frac{M_s^{(2)}x + N_s^{(2)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{m_s-1}} + \ldots + \frac{M_s^{(m_s)}x + N_s^{(m_s)}}{x^2+p_1x+q_1}. \quad (3.2)$$

[1, с. 530]

Определение 3.4. Рациональные дроби вида

$$\frac{A}{(x-a)^n},\quad A \neq 0 \quad \text{и} \quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m},\quad M^2+N^2>0,$$

где a, p, q, A, M, N — действительные числа и $p^2 - 4q < 0$, называются элементарными рациональными дробями.

Таким образом, сформулированная теорема утверждает, что *всякая ненулевая правильная рациональная дробь может быть разложена на сумму элементарных рациональных дробей.*

При выполнении разложения вида (3.2) для конкретно заданной дроби обычно оказывается удобным метод неопределенных коэффициентов. Он состоит в следующем. Для правильной дроби записывают разложение (3.2), в котором коэффициенты $A_i^{(\alpha)}$, $M_j^{(\beta)}$, $N_j^{(\beta)}$ считают неизвестными. После этого обе части равенства приводят к общему знаменателю и у получившихся в числителе многочленов приравнивают коэффициенты. При этом если степень многочлена $Q_m(x)$ равна m, то, вообще говоря, в числителе правой части равенства (3.2) после приведения к общему знаменателю получается многочлен степени $m-1$, т.е. многочлен с m коэффициентами, число же неизвестных $M_j^{(\beta)}$, $N_j^{(\beta)}$ также равно m. Таким образом, получена система m уравнений с m неизвестными.

Отметим, что после приведения выражения (3.2) к общему знаменателю и его отбрасывания, в случае, когда $Q_m(x)$ имеет действительные корни, целесообразно подставить в обе части получившегося равенства последовательно эти корни; в результате получаются некоторые соотношения между искомыми коэффициентами, полезные для их окончательного определения. Описанный метод обычно называют методом частных значений.

Пример 3.1. Разложить дробь $\frac{x}{(x^2-1)(x-2)}$ на элементарные дроби.

◀ Согласно (3.2) искомое разложение имеет вид

$$\frac{x}{(x^2-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}.$$

Приводя к общему знаменателю и отбрасывая его, получим

$$x = A(x+1)(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x-1)(x+1). \qquad (3.3)$$

Здесь имеет место случай, когда все корни знаменателя действительны.

Полагая в равенстве (3.3) последовательно $x = 1$, $x = -1$, $x = 2$, находим

$$1 = -2A,\ -1 = 6B,\ 2 = 3C,$$

откуда

$$A = -\frac{1}{2},\ B = -\frac{1}{6},\ C = \frac{2}{3}.$$

таким образом, искомое разложение имеет вид

$$\frac{x}{(x^2-1)(x-2)} = -\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{6(x+1)} + \frac{2}{3(x-2)}.$$ ▶

Пример 3.2. Разложить дробь $\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}$ на элементарные дроби.

◀ Общий вид разложения в этом случае

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+1}.$$

Приводя к общему знаменателю и отбрасывая его, получим

$$x^2 - 1 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)x + (Dx+E)(x^2+1)x.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x:

$x^0|\ -1 = A,\ x^1|\ 0 = C+E,\ x^2|\ 1 = 2A+B+D,\ x^3|\ 0 = E,\ x^4|\ 0 = A+D,$

решая систему, находим

$$A = -1,\ B = 2,\ C = 0,\ D = 1,\ E = 0,$$

поэтому искомое разложение имеет вид

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2} = -\frac{1}{x} + \frac{2x}{(x^2+1)^2} + \frac{x}{x^2+1}. \ ▶$$

Замечание 3.1. В отдельных случаях разложение на элементарные дроби можно получить быстрее и проще, не прибегая к методу неопределенных коэффициентов, а каким-либо другим путем. Например, для разложения дроби

$$\frac{1}{x^2(1+x^2)^2}$$

на сумму элементарных дробей проще всего дважды прибавить и вычесть в числителе x^2 и произвести деление так, как это указано ниже:

$$\frac{1}{x^2(1+x^2)^2} = \frac{(1+x^2)-x^2}{x^2(1+x^2)^2} = \frac{1}{x^2(1+x^2)} - \frac{1}{(1+x^2)^2} =$$
$$= \frac{(1+x^2)-x^2}{x^2(1+x^2)} - \frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{(1+x^2)^2}.$$

Полученное в результате разложение и является разложением данной дроби на сумму элементарных дробей.

Замечание 3.2. Можно показать, что разложение вида (3.2) правильной рациональной дроби единственно.

3.2 Интегрирование элементарных рациональных дробей

Рассмотрим вопрос об интегрировании элементарных рациональных дробей.

Сначала рассмотрим вычисление интегралов от дробей вида

$$\frac{A}{(x-a)^n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Если $n = 1$, то произведя непосредственное интегрирование, получим

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + C,$$

а если $n \neq 1$, то

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = A\int \frac{d(x-a)}{(x-a)^n} = A\frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C = \tag{3.4}$$

$$= -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C.$$

Рассмотрим теперь интегралы от дробей

$$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n},$$

где $p^2 - 4q < 0, \quad n = 1, 2, \ldots$ Снова начнем со случая $n = 1$. Замечая, что

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right),$$

и полагая $t = x + \frac{p}{2}, \quad a^2 = q - \frac{p^2}{4} > 0$, имеем

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \int \frac{M\left(t - \frac{p}{2}\right) + N}{t^2+a^2}dt = M\int \frac{tdt}{t^2+a^2} +$$

$$+\left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{M}{2}\ln\left(t^2+a^2\right) + \frac{2N-Mp}{2a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C =$$

$$= \frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right) + \frac{2N-Mp}{2a}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{2a} + C. \tag{3.5}$$

В случае $n>1$, полагая, как и выше, $t=x+\frac{p}{2}$, $a^2=q-\frac{p^2}{4}$, подобным же образом получим

$$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx=M\int\frac{tdt}{(t^2+a^2)^n}+\frac{2N-Mp}{2}\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^n}. \qquad (3.6)$$

Рассмотрим отдельно каждый из получившихся интегралов в правой части этого равенства. Что касается первого из них, то он вычисляется сразу:

$$\int\frac{tdt}{(t^2+a^2)^n}=\frac{1}{2}\int\frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^n}=-\frac{1}{2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}}+C.$$

Второй же интеграл правой части равенства (3.6) вычисляется несколько сложнее. Пусть

$$I_n=\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^n},\quad n=1,2,3,\ldots$$

Проинтегрируем интеграл I_n по частям, положив $u=\frac{1}{(t^2+a^2)^n}$, $dv=dt$, и, следовательно, $du=-\frac{2ntdt}{(t^2+a^2)^{n+1}}$, $v=t$, а затем, добавив и вычтя a^2 в числителе получившейся под знаком интеграла функции и произведя деление так, как это указано ниже, получим

$$I_n=\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^n}=\frac{t}{(t^2+a^2)^n}+2n\int\frac{t^2+a^2-a^2}{(t^2+a^2)^{n+1}}dt=$$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^n} + 2n\left[\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} - a^2 \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{n+1}}\right],$$

т.е. $I_n = \frac{t}{(t^2+a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2 I_{n+1}$, откуда

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\frac{t}{(t^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} I_n, \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (3.7)$$

Интеграл I_1 легко вычисляется, формула (3.7) позволяет вычислить I_2; зная же I_2, по той же формуле можно найти I_3, продолжая этот процесс дальше, можно найти выражение для любого интеграла I_n $(n \in N)$.

Пример 3.3. Вычислить $\int \frac{xdx}{(x^2-1)(x-2)}$.

◀Уже известно (см. пример 3.1), что

$$\frac{x}{(x^2-1)(x-2)} = -\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{6(x+1)} + \frac{2}{3(x-2)},$$

поэтому

$$\int \frac{xdx}{(x^2-1)(x-2)} = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x-2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln|x+1| + \frac{2}{3}\ln|x-2| + C. \blacktriangleright$$

Пример 3.4. Вычислить $\int \frac{x^6+2x^4+2x^2-1}{x(x^2+1)^2}dx$.

◀Согласно общему правилу, выделим целую часть, разделив числитель на знаменатель; имеем

$$\frac{x^6+2x^4+2x^2-1}{x(x^2+1)^2} = x + \frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}.$$

Для получившейся правильной рациональной дроби уже найдено ее разложение на элементарные дроби в примере 3.2:

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2} = -\frac{1}{x} + \frac{2x}{(x^2+1)^2} + \frac{x}{x^2+1},$$

поэтому

$$\int \frac{x^6+2x^4+2x^2-1}{x(x^2+1)^2}dx = \int x dx - \int \frac{dx}{x} + \int \frac{2x dx}{(x^2+1)^2} +$$

$$+\int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{x^2}{2} - \ln|x| + \int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} =$$

$$= \frac{x^2}{2} - \ln|x| - \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C. \blacktriangleright$$

Пример 3.5. Вычислить $I=\int\frac{x^2dx}{(1-x^2)^3}dx$.

◀Для вычисления интеграла проще не раскладывать подынтегральную функцию на элементарные дроби, а применить правило интегрирования по частям. Положив

$$u=x,\quad dv=\frac{xdx}{(1-x^2)^3},\qquad du=dx,\quad v=\frac{1}{4(1-x^2)^2},$$

получим

$$I=\frac{x}{4(1-x^2)^2}-\frac{1}{4}\int\frac{1}{(1-x^2)^2}dx.$$

Прибавляя и вычитая в числителе получившейся подынтегральной функции x^2, производя деление, получим два интеграла, из которых первый табличный, а второй легко вычисляется интегрированием по частям.

$$I=\frac{x}{4(1-x^2)^2}-\frac{1}{4}\int\frac{1-x^2+x^2}{(1-x^2)^2}dx=$$

$$=\frac{x}{4(1-x^2)^2}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{1-x^2}-\frac{1}{4}\int\frac{x^2dx}{(1-x^2)^2}=$$

$$=\frac{x}{4(1-x^2)^2}-\frac{1}{8}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-\frac{1}{4}\int\frac{x^2dx}{(1-x^2)^2}.$$

Вычислим $\int\frac{x^2dx}{(1-x^2)^2}$ по частям:

$$u=x,\quad dv=\frac{xdx}{(1-x^2)^2},\quad du=dx,\quad v=\frac{1}{2(1-x^2)}.$$

Получим

$$I = \frac{x}{4(1-x^2)^2} - \frac{1}{8}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - \frac{x}{8(1-x^2)} + \frac{1}{8}\int\frac{dx}{1-x^2} =$$

$$= \frac{x}{4(1-x^2)^2} - \frac{1}{16}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - \frac{x}{8(1-x^2)} + C. \blacktriangleright$$

3.3 Метод Остроградского

Анализируя процесс интегрирования элементарных дробей, можно доказать справедливость так называемой формулы Остроградского (М.В. Остроградский (1801–1869) — русский математик).

Если $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ — правильная рациональная дробь и

$$Q_m(x) = (x-a_1)^{n_1}\dots(x-a_r)^{n_r}(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}\dots(x^2+p_sx+q_s)^{m_s}—$$

разложение ее знаменателя в виде (3.1), то

$$\int\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx = \frac{T_{l-1}(x)}{R_l(x)} + \int\frac{K_{m-l-1}(x)}{N_{m-l}(x)}dx, \quad (3.8)$$

где

$$N_{m-l}(x) = (x-a_1)\dots(x-a_r)(x^2+p_1x+q_1)\dots(x^2+p_sx+q_s).$$

Из формулы (3.1) следует, что многочлен $R_l(x)$ имеет вид

$$R_l(x) = (x-a_1)^{n_1-1}\dots(x-a_r)^{n_r-1}(x^2+p_1x+q_1)^{m_1-1}\dots(x^2+p_sx+q_s)^{m_s-1}, \tag{3.9}$$

т.е. является наибольшим общим делителем многочлена $Q_m(x)$ и его производной $Q'_m(x)$.

Многочлен $R_l(x)$, являясь наибольшим общим делителем многочленов $Q_m(x)$ и $Q'_m(x)$, всегда может быть найден с помощью алгоритма Евклида [см. 1, §23, п. 23.5], тем самым для отыскания многочлена $R_l(x)$ не требуется знания корней многочлена $Q_m(x)$. Однако если корни многочлена $Q_m(x)$ известны, а значит, известно и его разложение вида (3.1), то многочлен $R_l(x)$ сразу записывается по формуле (3.9). Многочлен $N_{m-l}(x)$ находится как частное от деления $Q_m(x)$ на $R_l(x)$.

Для отыскания же многочленов $T_{l-1}(x)$ и $K_{m-l-1}(x)$ можно применить метод неопределенных коэффициентов.

Пример 3.6. Вычислить $\int \frac{x^4+2x^3-2x^2+x}{(1-x)^3(1+x^2)^2}dx$.

◀Согласно формуле (3.8),

$$\int \frac{x^4+2x^3-2x^2+x}{(1-x)^3(1+x^2)^2}dx = \frac{Kx^3+Lx^2+Mx+N}{(1-x)^2(1+x^2)} + \int \frac{kx^2+lx+m}{(1-x)(1+x^2)}dx,$$

поэтому

$$\frac{x^4+2x^3-2x^2+x}{(1-x)^3(1+x^2)^2} = \left[\frac{Kx^3+Lx^2+Mx+N}{(1-x)^2(1+x^2)}\right]' + \frac{kx^2+lx+m}{(1-x)(1+x^2)}.$$

Произведя дифференцирование, получим

$$\frac{x^4+2x^3-2x^2+x}{(1-x)^3(1+x^2)^2}=$$

$$=\frac{(3Kx^2+2Lx+M)(1-x)(1+x^2)}{(1-x)^3(1+x^2)^2}-$$

$$-\frac{(Kx^3+Lx^2+Mx+N)\left[-2(1+x^2)+(1-x)2x\right]}{(1-x)^3(1+x^2)^2}+\frac{kx^2+lx+m}{(1-x)(1+x^2)}.$$

Отсюда имеем:

$$x^4+2x^3-2x^2+x=(3Kx^2+2Lx+M)(-x^3+x^2-x+1)-$$

$$-(Kx^3+Lx^2+Mx+N)(-4x^2+2x-2)+(kx^2+lx+m)(x^4-2x^3+2x^2-2x+1).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим

$$M+2N+m=0,$$

$$-M+2L+2M-2N-2m+l=1,$$

$$3K-2L+M+2L-2M+4N+k-2l+2m=-2,$$

$$-M+2L-3K+2K-2L+4M-2k+2l-2m=2,$$

$$3K-2L-2K+4L+2k-2l+m=1,$$

$$-3K+4K-2k+l=0,$$

$$k = 0,$$

или

$$M + 2N + m = 0,$$

$$2L + M - 2N + l - 2m = 1,$$

$$3K - M + 4N + k - 2l + 2m = -2,$$

$$-K + 3M - 2k + 2l - 2m = 2,$$

$$K + 2L + 2k - 2l + m = 1,$$

$$K - 2k + l = 0,$$

$$k = 0.$$

Решая эту систему уравнений, находим:

$$K = \frac{1}{2},\ L = -\frac{1}{2},\ M = \frac{3}{2},\ N = -1,\ k = 0,\ l = -\frac{1}{2},\ m = \frac{1}{2};$$

поэтому

$$\int \frac{x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x}{(1-x)^3(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{2}\frac{x^3 - x^2 + 3x - 2}{(1-x)^2(1+x^2)} +$$

$$+\frac{1}{2}\int \frac{-x+1}{(1-x)(1+x^2)} dx = \frac{1}{2}\frac{x^3 - x^2 + 3x - 2}{(1-x)^2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C. \blacktriangleright$$

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте определение рациональной функции.
2. В каком случае рациональную дробь называют правильной?
3. Перечислите все типы элементарных рациональных дробей.
4. Покажите, как вычисляются интегралы вида

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n}, \; n \in N.$$

5. Покажите, как вычисляются интегралы вида

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx.$$

6. Покажите, как вычисляются интегралы вида

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx, \; n \in N.$$

7. С помощью каких функций выражается в конечном виде интеграл от любой рациональной функции?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 4

Интегрирование рациональных функций

Цель: Приобретение навыков нахождения неопределенных интегралов от рациональных функций.

Вопрос интегрирования элементарных дробей был подробно изучен на лекции. Поэтому далее будем рассматривать неопределенные интегралы от рациональных функций, не являющихся элементарными дробями.

Напомним, что рассмотренные на лекции способы разложения рациональной функции на сумму элементарных дробей применимы только для рациональных функций, являющихся правильными рациональными дробями.

Задание 1. Вычислить интеграл

$$\int \frac{x^2 - x + 2}{x^4 - 5x^2 + 4} dx.$$

◀Разложим знаменатель подынтегральной функции на множители: $x^4 - 5x^2 + 4 = (x-1)(x-2)(x+1)(x+2)$.

Значит, подынтегральную функцию можно разложить на сумму элементарных дробей следующим образом:

$$\frac{x^2 - x + 2}{(x-1)(x-2)(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2} + \frac{D}{x-2}. \qquad (3.10)$$

Приводим правую часть равенства (3.10) к общему знаменателю. В итоге приходим к равенству

$$x^2 - x + 2 = A(x-1)(x+2)(x-2) + B(x+1)(x+2)(x-2) + \\ + C(x+1)(x-1)(x-2) + D(x+1)(x-1)(x+2). \qquad (3.11)$$

Так как все корни знаменателя подынтегральной функции действительные, для определения неизвестных A, B, C и D применим описанный на лекции метод частных значений.

Подставляя поочередно нули знаменателя в равенство (3.11), получим:

при $x = -1$: $4 = A\cdot(-2)\cdot(1)\cdot(-3) + B\cdot 0 + C\cdot 0 + D\cdot 0$, откуда $A = \frac{2}{3}$;

при $x = 1$: $2 = A\cdot 0 + B\cdot 2\cdot 3\cdot(-1) + C\cdot 0 + D\cdot 0$, откуда $B = -\frac{1}{3}$;

при $x = -2$: $8 = A\cdot 0 + B\cdot 0 + C\cdot(-1)\cdot(-3)\cdot(-4) + D\cdot 0$, откуда $C = -\frac{2}{3}$;

при $x = 2$: $4 = A\cdot 0 + B\cdot 0 + C\cdot 0 + D\cdot 3\cdot 1\cdot 4$, откуда $D = \frac{1}{3}$.

Таким образом, мы получили разложение рациональной дроби на простейшие:

$$\frac{x^2 - x + 2}{x^4 - 5x^2 + 4} = \frac{2}{3(x+1)} - \frac{1}{3(x-1)} - \frac{2}{3(x+2)} + \frac{1}{3(x-2)}.$$

Интегрируя, получим:

$$\int \frac{x^2 - x + 2}{x^4 - 5x^2 + 4}dx = \frac{2}{3}\int\frac{dx}{x+1} - \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{2}{3}\int\frac{dx}{x+2} + \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-2} =$$

$$= \frac{2}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{2}{3}\ln|x+2| + \frac{1}{3}\ln|x-2| + C =$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{(x+1)^2(x-2)}{(x-1)(x+2)^2}\right| + C. \blacktriangleright$$

Задание 2. Вычислить интеграл

$$I = \int \frac{(x-1)dx}{x^2(x-2)(x+1)^2}.$$

◀Разложение на элементарные дроби имеет вид

$$\frac{x-1}{x^2(x-2)(x+1)^2} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{(x+1)^2} + \frac{F}{x+1}.$$

Приведём правую часть к общему знаменателю и приравняем числители:

$$x - 1 = A(x-2)(x+1)^2 + Bx(x-2)(x+1)^2 +$$

$$+ Cx^2(x+1)^2 + Dx^2(x-2) + Fx^2(x+1)(x-2). \qquad (3.12)$$

Полагая последовательно $x = 0$, $x = 2$, $x = -1$, находим, что

$$\begin{cases} -1 = -2A, \\ 1 = 36C, \\ -2 = -3D, \end{cases}$$

откуда $A=\frac{1}{2}$, $C=\frac{1}{36}$, $D=\frac{2}{3}$. Подставим эти значения в (3.12) и раскроем скобки. Получим:

$$x-1=\left(B+F+\frac{1}{36}\right)x^4+\left(\frac{11}{9}-F\right)x^3+\left(-3B-2F-\frac{47}{36}\right)x^2+$$
$$+\left(-\frac{3}{2}-2B\right)x-1.$$

Приравнивая коэффициенты при x^3 и x, получим: $\frac{11}{9}-F=0$, $-\frac{3}{2}-2B=1$, откуда $B=-\frac{5}{4}$, $F=\frac{11}{9}$. Итак, $A=\frac{1}{2}$, $B=-\frac{5}{4}$, $C=\frac{1}{36}$, $D=\frac{2}{3}$, $F=\frac{11}{9}$. Таким образом,

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2}-\frac{5}{4}\int\frac{dx}{x}+\frac{1}{36}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{2}{3}\int\frac{dx}{(x+1)^2}+\frac{11}{9}\int\frac{dx}{x+1}=$$
$$=-\frac{1}{2x}-\frac{5}{4}\ln|x|+\frac{1}{36}\ln|x-2|-\frac{2}{3(x+1)}+\frac{11}{9}\ln|x+1|+C. \blacktriangleright$$

Задание 3. Вычислить интеграл

$$I=\int\frac{3x^2+5x+12}{(x^2+3)(x^2+1)}dx.$$

◀Знаменатель не имеет действительных корней. Поэтому разложение данной правильной дроби на элементарные имеет вид:

$$\frac{3x^2+5x+12}{(x^2+3)(x^2+1)}=\frac{Ax+B}{x^2+3}+\frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Приводим дроби в правой части равенства к общему знаменателю и приравниваем числители:

$$3x^2+5x+12=(Ax+B)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2+3)=$$

$$=(A+C)x^3+(B+D)x^2+(A+3C)x+(B+3D).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной x в левой и правой частях равенства, будем иметь:

$$\begin{cases} A+C=0, \\ B+D=3, \\ A+3C=5, \\ B+3D=12. \end{cases}$$

Отсюда, решая систему, получим: $A=-\frac{5}{2}$, $B=-\frac{3}{2}$, $C=\frac{5}{2}$, $D=\frac{9}{2}$, откуда

$$\frac{3x^2+5x+12}{(x^2+3)(x^2+1)}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{5x+3}{x^2+3}+\frac{5x+9}{2(x^2+1)}$$

и

$$\int\frac{3x^2+5x+12}{(x^2+3)(x^2+1)}dx=-\frac{5}{2}\int\frac{xdx}{x^2+3}-\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x^2+3}+\frac{5}{2}\int\frac{xdx}{x^2+1}+$$

$$+\frac{9}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=-\frac{5}{4}\int\frac{d(x^2+3)}{x^2+3}-\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{5}{4}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}+$$

$$+\frac{9}{2}\operatorname{arctg} x = -\frac{5}{4}\ln(x^2+3) - \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{5}{4}\ln(x^2+1) + \frac{9}{2}\operatorname{arctg} x + C. \blacktriangleright$$

Задание 4. Вычислить интеграл

$$I = \int \frac{3x+1}{x(1+x^2)^2} dx.$$

◀Разложим данную дробь на простейшие:

$$\frac{3x+1}{x(1+x^2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{(1+x^2)} + \frac{Dx+F}{(1+x^2)^2}.$$

Приведем к общему знаменателю правую часть равенства и приравняем числители, получим:

$$3x+1 = A(1+x^2)^2 + (Bx+C)x(1+x^2) + (Dx+F)x.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x в правой и левой части, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} A+B=0, \\ C=0, \\ 2A+B+D=0, \\ C+F=3, \\ A=1. \end{cases}$$

Решив систему, получим: $A = 1$, $B = -1$, $C = 0$, $D = -1$, $F = 3$. Следовательно,

$$\frac{3x+1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} + \frac{-x+3}{(1+x^2)^2},$$

$$I = \int \frac{3x+1}{x(1+x^2)}dx = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{xdx}{1+x^2} - \int \frac{xdx}{(1+x^2)^2} +$$

$$+3\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}\int (1+x^2)^{-2} d(1+x^2) + 3I_2 =$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2(1+x^2)} + 3I_2.$$

Остается вычислить интеграл

$$I_2 = \int \frac{dx}{(1+x^2)^2}.$$

Используя рекуррентную формулу (3.7), получим:

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}I_1 = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.$$

Итак, окончательно получим:

$$I = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{3x+1}{2(1+x^2)} + \frac{3}{2}\operatorname{arctg} x + C. \blacktriangleright$$

Задание 5. Вычислить интеграл

$$I = \int \frac{x^7 + 2}{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1} dx.$$

◀Делим многочлен на многочлен и выделяем целую часть. Получим:

$$\frac{x^7 + 2}{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1} = x^3 - 2x^2 + x + 2 + \frac{-4x^3 - 6x^2 - 5x}{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1},$$

поэтому

$$I = \frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} + 2x - \int \frac{4x^3 + 6x^2 + 5x}{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1} dx =$$

$$= \frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} + 2x - I_1.$$

Для вычисления интеграла применим метод Остроградского. Чтобы применить формулу Остроградского, найдем наибольший общий делитель многочлена

$$Q_4(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$$

и

$$Q_4'(x) = 4x^3 + 6x^2 + 6x + 2.$$

Применим для этого алгоритм Евклида. Разделив $Q_4(x)$ на $Q_4'(x)$, получим:

$$\frac{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1}{4x^3 + 6x^2 + 6x + 2} = \frac{1}{4}x + \frac{1}{8} + \frac{\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}}{4x^3 + 6x^2 + 6x + 2}.$$

Так как наибольший общий делитель определяется с точностью до постоянного множителя, то далее согласно алгоритма многочлен $4x^3 + {} + 6x^2 + 6x + 2$ будем делить на $x^2 + x + 1$. Получим:

$$\frac{4x^3 + 6x^2 + 6x + 2}{x^2 + x + 1} = 4x + 2,$$

значит, $R_2(x) = x^2 + x + 1$, а

$$I_1 = \int \frac{4x^3 + 6x^2 + 5x}{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1} dx = \frac{Ax + B}{x^2 + x + 1} + \int \frac{Cx + D}{x^2 + x + 1} dx.$$

Для определения неизвестных коэффициентов продифференцируем обе части последнего равенства. Получим:

$$\frac{4x^3 + 6x^2 + 5x}{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1} = \frac{A(x^2 + x + 1) - (2x + 1)(Ax + B)}{(x^2 + x + 1)^2} +$$

$$+ \frac{(Cx + D)(x^2 + x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2}.$$

Приравнивая числители, а затем коэффициенты при одинаковых степенях, получим:

$$4x^3 + 6x^2 + 5x = A(x^2 + x + 1) - (2x + 1)(Ax + B) + (Cx + D)(x^2 + x + 1),$$

$$4 = C, \ 6 = -A + C + D, \ 5 = -2B + C + D, \ 0 = A - B + D.$$

Решив систему, получим:

$$C = 4,\ B = 0,\ A = -1,\ D = 1,$$

тогда

$$I_1 = \frac{-x}{x^2+x+1} + \int \frac{4x+1}{x^2+x+1}dx = \frac{-x}{x^2+x+1} + 2\int \frac{2x+\frac{1}{2}+1-1}{x^2+x+1}dx =$$

$$= \frac{-x}{x^2+x+1} + 2\int \frac{(2x+1)dx}{x^2+x+1} - \int \frac{dx}{x^2+x+1} =$$

$$= -\frac{x}{x^2+x+1} + 2\ln(x^2+x+1) - \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{-x}{x^2+x+1} + 2\ln(x^2+x+1) - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C_1.$$

Тогда

$$I = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + \frac{x}{x^2+x+1} - 2\ln(x^2+x+1) + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C,$$

где $C = -C_1$. ▶

Замечание. Иногда интегралы от рациональных дробей удается вычислить не прибегая к методу неопределенных коэффициентов. Покажем это на примере.

Задание 6. Вычислить интеграл

$$I = \int \frac{dx}{x(3+x^6)^2}.$$

$$\blacktriangleleft \int \frac{dx}{x(3+x^6)^2} = \frac{1}{3}\int \frac{3+x^6-x^6}{x(3+x^6)^2}dx = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x(3+x^6)} - \frac{1}{3}\int \frac{x^5dx}{(3+x^6)^2} =$$

$$= -\frac{1}{3\cdot 18}\int \frac{d\left(\frac{3}{x^6}+1\right)}{\frac{3}{x^6}+1} - \frac{1}{3\cdot 6}\int \frac{d(3+x^6)}{(3+x^6)^2} =$$

$$= -\frac{1}{54}\ln\left(\frac{3}{x^6}+1\right) + \frac{1}{18(3+x^6)} + C. \blacktriangleright$$

Задания для самостоятельного решения

1. $\int \frac{2x^4-x^2+1}{x^3-x}dx.$

2. $\int \frac{x^2-3}{x^2-1}dx.$

3. $\int \frac{x^2+1}{(x^2-1)(x^2-4)}dx.$

4. $\int \frac{x^3+5}{(x-1)(x^2+4)}dx.$

5. $\int \frac{5x-14}{x^3-x^2-4x+4}dx.$

6. $\int \frac{dx}{(x-1)^3(x+1)^2}.$

7. $\int \frac{11x+16}{(x-1)(x+2)^2}dx.$

8. $\int \frac{(x-1)^2dx}{(x+1)^3(x-4)}.$

9. $\int \frac{dx}{x^4-1}.$

10. $\int \frac{dx}{x^4+1}.$

11. $\int \frac{x^4-6x^3+12x^2+6}{x^3-6x^2+12x-8}dx.$

12. $\int \frac{dx}{(x^2-4x+3)(x^2+4x+5)}.$

13. $\int \frac{2x^4-2x^3+7x^2+5}{(x^2+x+1)(x-2)}dx.$

14. $\int \frac{x^4+2x^2+4}{(1+x^2)^3}dx.$

15. $\int \frac{x^2-2}{x^3(x+2)^2}dx.$

16. $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)^2}.$

17. $\int \frac{dx}{(x^3+1)^2}.$

18. $\int \frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2}dx.$

19. $\int \frac{x^2dx}{(x^2+2x+2)^2}.$

20. $\int \frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2}dx.$

21. $\int \frac{x^{11}dx}{x^8+3x^4+2}.$

22. $\int \frac{x^5-x}{x^8+1}dx.$

23. $\int \frac{dx}{x^6+1}.$

24. $\int \frac{dx}{(9x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}.$

ЛЕКЦИЯ 4
Интегрирование простейших иррациональных функций

4.1 Простейшие подстановки

Интегралы от некоторых иррациональных функций с помощью соответствующей подстановки сводятся к интегралам от рациональных функций.

$$I = \int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_l}{n_l}}\right) dx, \qquad (4.1)$$

$(m_i \in Z, \quad n_i \in N, \quad i = \overline{1,l}; \quad a,b,c,d$ — константы, $\triangle = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0)$.

Если $\triangle = 0$, то $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ и $\frac{ax+b}{cx+d} = \mathrm{const}$, а подынтегральная функция будет рациональной ($R(x)$ — условное обозначение рациональной функции).

Рассмотрим алгоритм вычисления интегралов типа (4.1):

1. Находим наименьшее общее кратное чисел $n_i \in N$, $i = \overline{1,l}$. Обозначаем его n;

2. Используем подстановку

$$t = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Тогда

$$t^n = \frac{ax+b}{cx+d}, \ x = R_0(t), \ dx = R_{01}(t)dt;$$

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_i}{n_i}} = \left[\frac{n}{n_i} = k_i \in N\right] = \left(\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{n}}\right)^{m_i k_i} = t^{m_i k_i} = R_i(t).$$

$$I = \int R\left(R_0(t), R_1(t), \ldots, R_l(t)\right) R_{01}(t)dt = \int R^*(t)dt.$$

Получили интеграл от рациональной функции, алгоритм вычисления которого был дан выше (лекция № 3).

Пример 4.1. Вычислить $I = \int \frac{\sqrt{x+1}}{(1+\sqrt[3]{x+1})(x+1)^{\frac{2}{3}}}dx$.

◀ Имеем:

$$x+1 = \frac{1\cdot x+1}{0\cdot x+1} = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

Используем подстановку $\sqrt[6]{x+1} = t$. Тогда

$$x = t^6 - 1; \ dx = 6t^5dt; \ t = \sqrt[6]{x+1}; \ t^2 = \sqrt[3]{x+1}; \ t^4 = (x+1)^{\frac{2}{3}}.$$

$$I = \int \frac{t^3 6t^5 dt}{(1+t^2)t^4} = 6\int \frac{t^4-1+1}{t^2+1}dt = 6\left(\int (t^2-1)dt + \int \frac{dt}{t^2+1}\right) =$$

$$= 6\left(\frac{t^3}{3} - t + \operatorname{arctg} t\right) + C = 2\sqrt{x+1} - 6\sqrt[6]{x+1} + \operatorname{arctg}\sqrt[6]{x+1} + C. \ ▶$$

4.2 Подстановки Эйлера

С помощью подстановок Эйлера можно вычислять интегралы вида

$$I = \int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx. \tag{4.2}$$

I. Первая подстановка $(a > 0)$:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm x\sqrt{a} \pm t.$$

Отсюда видно, что $x = R_1(t)$, например:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = x\sqrt{a}+t;\ ax^2+bx+c = ax^2+2xt\sqrt{a}+t^2;$$

$$x\left(b-2t\sqrt{a}\right) = t^2-c;\ x = R_1(t) = \frac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}},$$

тогда

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = R_2(t),\ dx = R_3(t)dt,$$

$$I = \int R(R_1(t), R_2(t))R_3(t)dt = \int R^*(t)dt—$$

интеграл от рациональной функции.

II. Вторая подстановка (корни трехчлена ax^2+bx+c — действительные)

Пусть $x_1,\ x_2$ — корни трехчлена ax^2+bx+c. Тогда

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2),$$

значит,

$$R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) = R\left(x, |x-x_1|\sqrt{\frac{a(x-x_2)}{x-x_1}}\right).$$

А это есть иррациональная функция, которую рассматривали при вычислении интегралов типа (4.1).

Таким образом, имеем подстановку $\pm(x-x_i)t = \sqrt{ax^2+bx+c}$, где x_i — или x_1, или x_2.

III. Третья подстановка ($c > 0$).

Подстановка имеет вид

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{c} \pm xt.$$

Получим, например, при $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{c} + xt$

$$ax^2+bx+c = c + 2\sqrt{c}tx + x^2t^2.$$

Отсюда имеем:

$$x = R_1(t), \sqrt{ax^2+bx+c} = R_2(t), \; dx = R_3(t)dt.$$

Тогда

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx = \int R(R_1(t), R_2(t))R_3(t)dt = \int R^*(t)dt —$$

получили интеграл от рациональной функции.

Замечание 4.1. Первая и вторая подстановки позволяют вычислить все интегралы типа (4.2), если функция $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ определена хотя бы на одном невырожденном промежутке.

Третий случай $(c > 0)$ сводится к первому $(a > 0)$ при помощи подстановки $x = \frac{1}{z}$.

Пример 4.2. Вычислите $I = \int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$.

◀Имеем третий случай — $c = 1 > 0$ (подходит и вторая подстановка Эйлера)

$$\sqrt{1 - 2x - x^2} = 1 + xt.$$

Получим:

$$1 - 2x - x^2 = 1 + 2xt + x^2t^2;\ -2 - x = 2t + xt^2;\ x = \frac{-2 - 2t}{1 + t^2};$$

$$dx = \frac{2t^2 + 4t - 2}{(1 + t^2)^2}dt;\ \sqrt{1 - 2x - x^2} + 1 = 2 + t\frac{-2 - 2t}{1 + t^2} = \frac{2 - 2t}{1 + t^2}.$$

$$I = \int \frac{(2t^2 + 4t - 2)(1 + t^2)}{(1 + t^2)^2(2 - 2t)}dt = \int \frac{t^2 + 2t - 1}{(1 + t^2)(1 - t)}dt =$$

$$= \left[\frac{t^2 + 2t - 1}{(1 + t^2)(1 - t)} = \frac{At + B}{1 + t^2} + \frac{C}{1 - t} = \frac{(At + B)(1 - t) + C(1 + t^2)}{(1 + t^2)(1 - t)},\right.$$

$$\left. t^2 + 2t - 1 = (At + B)(1 - t) + C(1 + t^2), \Rightarrow A = 0,\ B = -2,\ C = 1\right] =$$

$$= \int \frac{-2}{1+t^2}dt + \int \frac{dt}{1-t} = -2\,\mathrm{arctg}\,t - \ln|1-t| + C,$$

где $t = \frac{\sqrt{1-2x-x^2}-1}{x}$.▶

Замечание 4.2. При использовании подстановок Эйлера обычно приходится иметь дело с громоздкими вычислениями, поэтому, по возможности, применяют другие, более короткие методы. Например:

1. Для интегралов типа

$$\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \qquad (4.3)$$

где $P_n(x)$ — многочлен степени $n \in N$, справедлива следующая формула:

$$\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + C_0 \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \qquad (4.4)$$

где Q_{n-1} — многочлен степени не выше, чем $n-1$, коэффициенты которого и C_0 находятся методом неопределенных коэффициентов. Если же $n \leqslant 1$, то с помощью выделения полного квадрата и подстановки, интеграл (4.3) сводится к табличному.

2. Интегралы типа

$$\int \frac{Bdx}{(x-A)^\alpha\sqrt{ax^2+bx+c}}, \qquad (4.5)$$

где A, B, a, b, c — некоторые действительные постоянные, а $\alpha \in N$, сводятся к интегралам типа (4.3) с помощью подстановки $t = \frac{1}{x-A}$.

3. При вычислении интегралов типа

$$\int \frac{(Mx+D)dx}{(x^2+px+q)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}, \tag{4.6}$$

где M, D, p, q, a, b, c — известные действительные постоянные ($m \in \in N$), нужно использовать следующее:

1) если $p = b = 0$, то интеграл разбиваем на два:

$$I_1 = \int \frac{Mxdx}{(x^2+q)^m\sqrt{ax^2+c}} = \frac{M}{2}\int \frac{d(x^2)}{(x^2+q)^m\sqrt{ax^2+c}} -$$

это интеграл с линейной иррациональностью относительно x^2 (интеграл типа (4.1), подстановка $t = \sqrt{ax^2+c}$);

$$I_2 = D\int \frac{dx}{(1+q\frac{1}{x^2})^m\sqrt{a+\frac{c}{x^2}}x^{2m}x} = -\frac{D}{2}\int \frac{(\frac{1}{x^2})^{m-1}d\left(\frac{1}{x^2}\right)}{(1+\frac{q}{x^2})^m\sqrt{a+\frac{c}{x^2}}} -$$

линейная иррациональность относительно $\frac{1}{x^2}$ (подстановка $t=\sqrt{a+\frac{c}{x^2}}$);

2) основной случай (4.6), но $b = ap$. Подстановка $x = t-\frac{p}{2}$ (и получим первый случай пункта в);

3) интеграл (4.6) и $b \neq ap$ — подстановка $x = \frac{\mu t+\nu}{1+t}$ (постоянные μ и ν выбираем так, чтобы в квадратных трехчленах коэффициенты при переменных x в первой степени были равны нулю).

Пример 4.3. Вычислить $\int \frac{x^2+x+1}{x\sqrt{x^2-x+1}}dx$, $x>0$.

$$◀ \int \frac{x^2+x+1}{x\sqrt{x^2-x+1}}dx = \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}dx + \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+1}}.$$

$$I_1 = \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2-1+1}{\sqrt{x^2-x+1}}dx =$$

$$= \int \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}dx + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}} =$$

$$= \int d\left(\sqrt{x^2-x+1}\right) + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}} =$$

$$= \sqrt{x^2-x+1} + \frac{3}{2}\ln\left|x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x+1}\right| + C_1.$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+1}} = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{x}=t;\ x=\frac{1}{t};\ dx=-\frac{1}{t^2}dt \\ \sqrt{x^2-x+1} = \sqrt{\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}+1} = \frac{\sqrt{t^2-t+1}}{t} \end{array}\right] =$$

$$= -\int \frac{t\cdot tdt}{t^2\sqrt{t^2-t+1}} = -\int \frac{d(t-\frac{1}{2})}{\sqrt{(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}} =$$

$$= -\ln\left|t-\frac{1}{2}+\sqrt{t^2-t+1}\right| + C_2 = -\ln\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x}\right| + C_2.$$

$$\int \frac{(x^2+x+1)dx}{x\sqrt{x^2-x+1}} = \sqrt{x^2-x+1} + \frac{3}{2}\ln\left|x-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x}\right| -$$

$$-\ln\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x}\right| + C, \text{ где } C = C_1 + C_2. \blacktriangleright$$

Замечание 4.3. При вычислении интегралов

$$\int R(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d})dx$$

сначала берем подстановку $t = \sqrt{ax+b}$ или $t = \sqrt{cx+d}$, после чего получим интеграл типа (4.2).

Пример 4.4. Вычислите $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}$.

$$\blacktriangleleft \int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}} = \left[\begin{array}{l} \sqrt{x} = t \\ x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{array}\right] = \int \frac{2tdt}{1+t+\sqrt{1+t^2}} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \sqrt{1+t^2} = t+z,\ 1+t^2 = t^2+z^2+2tz,\ 1-z^2 = 2tz, \\ t = \frac{1-z^2}{2z} = \frac{1}{2z} - \frac{z}{2},\ dt = (-\frac{1}{2z^2} - \frac{1}{2})dz = -\frac{1}{2}\,\frac{1+z^2}{z^2}dz, \\ 1+t+\sqrt{1+t^2} = 1+2\frac{1-z^2}{2z} + z = \frac{z+1-z^2+z^2}{z} = \frac{z+1}{z} \end{array}\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{(1-z^2)z(1+z^2)}{z(z+1)z^2}dz = -\frac{1}{2}\int \frac{(1-z)(1+z^2)}{z^2}dz =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{z^2}+1-\frac{1}{z}-z\right)dz = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{z}+z-\ln|z|-\frac{z^2}{2}\right)+C =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}-t}+t-\sqrt{1+t^2}+\ln\left|\sqrt{1+t^2}-t\right|+\frac{(\sqrt{1+t^2}-t)^2}{2}\right)+C,$$

где $t=\sqrt{x}$.▶

4.3 Интегралы от дифференциальных биномов

Определение 4.1. Выражение $x^m(a+bx^n)^p dx$, где $a \neq 0$ и $b \neq 0$ — действительные постоянные, m, n, p — некоторые рациональные числа, называется дифференциальным биномом.

Положим

$$x = t^{\frac{1}{n}}, \tag{4.7}$$

тогда $dx = \frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}dt$ и, следовательно

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx = \frac{1}{n}\int (a+bt)^p t^{\frac{m+1}{n}-1}dt.$$

Таким образом, интеграл

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx \tag{4.8}$$

сводится подстановкой (4.7) к интегралу типа

$$\int (a+bt)^p t^q dt, \tag{4.9}$$

где p и q рациональные числа. В рассматриваемом случае

$$q = \frac{m+1}{n} - 1.$$

Первый случай: p — целое число.

Пусть $q = \frac{r}{s}$, где $r \in Z$, $s \in N$. Согласно п. 4.1.1, в этом случае подстановка $z = t^{\frac{1}{s}}$ сводит интеграл (4.9) к интегралу от рациональной дроби.

Второй случай: q — целое число.

Пусть теперь $p = \frac{r}{s}$, $r \in Z$, $s \in N$. Согласно п. 4.1.1, интеграл (4.9) приводится в этом случае подстановкой $z = (a+bt)^{\frac{1}{s}}$ к интегралу от рациональной дроби.

Третий случай: $p+q$ — целое.

Пусть $p = \frac{r}{s}$, $r \in Z$, $s \in N$. Запишем для наглядности интеграл (4.9) в виде

$$\int (a+bt)^p t^q dt = \int \left(\frac{a+bt}{t}\right)^p t^{p+q} dt.$$

Снова имеем интеграл типа, рассмотренного в том же п. 4.1.1. На этот раз к интегралу от рациональной дроби его приводит подстановка

$$z = \left(\frac{a+bt}{t}\right)^{\frac{1}{s}}.$$

Итак, в трех случаях, когда одно из чисел p, q или $p+q$ является целым, интеграл (4.9) при помощи указанных выше подстановок приводится к интегралу от рациональной дроби.

Применительно к интегралу (4.8) этот результат выглядит следующим образом: когда одно из чисел p, $\frac{m+1}{n}$ или $\frac{m+1}{n}+p$ является целым, интеграл (4.8) может быть сведен к интегралу от рациональной дроби. При этом в том случае, когда p целое, это сведение осуществляет подстановка

$$z = x^{\frac{n}{s}},$$

где число s является знаменателем дроби $\frac{m+1}{n}$, т.е. $\frac{m+1}{n} = \frac{r}{s}$; в том случае, когда $\frac{m+1}{n}$ — целое, — подстановка

$$z = (a+bx^n)^{\frac{1}{s}},$$

где число s является знаменателем дроби p, т.е. $p = \frac{r}{s}$, а в том случае, когда $\frac{m+1}{n}+p$ — целое, — подстановка

$$z = (ax^{-n}+b)^{\frac{1}{s}},$$

где число s также является знаменателем дроби p.

Этот факт известен еще И. Ньютону. Л. Эйлер высказал предположение, что ни для каких других показателей m, n и p интеграл от дифференциального бинома нельзя свести к интегралу от рациональных функций. Для рациональных показателей m, n и p, не удовлетворяющих указанным выше условиям, это было доказано П.Л. Чебышевым, а для иррациональных — Д.Д. Мордухай-Болотовским.

Пример 4.5. Вычислить $\int \frac{(1+2x^3)^{\frac{2}{3}}}{x^6} dx$.

◀ $p = \frac{2}{3} \notin Z$, $m = -6$, $n = 3$. Тогда и

$$\frac{m+1}{n} = \frac{-6+1}{3} = -\frac{5}{3} \notin Z.$$

Остается проверить последний случай

$$\frac{m+1}{n} + p = -\frac{5}{3} + \frac{2}{3} = -\frac{3}{3} = -1 \in Z.$$

Берем подстановку

$$t = \left(\frac{1+2x^3}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{(1+2x^3)^{\frac{1}{3}}}{x} = (x^{-3}+2)^{\frac{1}{3}}.$$

Тогда

$$x^{-3} + 2 = t^3; \; -3x^{-4}dx = 3t^2dt; \; -x^{-4}dx = t^2dt, \; dx = -x^4t^2dt.$$

Имеем

$$-\int \frac{(1+2x^3)^{\frac{2}{3}}}{x^2}\frac{1}{x^4}x^4t^2dt = -\int t^2t^2dt = -\frac{t^5}{5}+C = -\frac{\left(1+2x^3\right)^{\frac{5}{3}}}{5x^5}+C. \blacktriangleright$$

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Опишите алгоритм вычисления интегралов типа (4.1).

2. Интегралы какого вида можно вычислять с помощью подстановок Эйлера?

3. Запишите вид первой подстановки Эйлера. В каком случае она применяется?

4. Запишите вид второй подстановки Эйлера. В каком случае она применяется?

5. Запишите вид третьей подстановки Эйлера. В каком случае она применяется?

6. Запишите формулу для вычисления методом неопределенных коэффициентов интегралов типа

$$\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

7. Опишите алгоритм вычисления интегралов типа

$$\int \frac{(Mx+D)dx}{(x^2+px+q)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

8. Какое выражение называют дифференциальным биномом?

9. Какую подстановку следует применять для вычисления интегралов вида $\int (a+bt)^p t^q dt$, если p — целое число?

10. Какую подстановку следует применять для вычисления интегралов вида $\int (a+bt)^p t^q dt$, если q — целое число?

11. Какую подстановку следует применять для вычисления интегралов вида $\int (a+bt)^p t^q dt$, если $p+q$ — целое число?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 5

Интегрирование иррациональных функций

Цель: Приобретение навыков нахождения неопределенных интегралов от иррациональных функций.

1. Интегрирование простейших алгебраических иррациональностей

Задание 1. Вычислить интеграл

$$I = \int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{x^3}+1}.$$

$$\blacktriangleleft \int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{x^3}+1} = \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}}+1}dx.$$

Подынтегральная функция есть рациональная функция от дробных степеней x. Общее наименьшее кратное знаменателей 2 и 4 равно 4, а поэтому полагаем; $x = t^4$, $dx = 4t^3dt$, $t = \sqrt[4]{x}$. Отсюда

$$I = 4\int \frac{t^2t^3}{t^3+1}dt = 4\int \frac{t^5dt}{1+t^3} = 4\int \left(t^2 - \frac{t^2}{t^3+1}\right)dt =$$

$$= \frac{4}{3}t^3 - \frac{4}{3}\ln|t^3+1| + C.$$

Возвращаясь к переменной x, получим:

$$I = \frac{4}{3}\left(x^{\frac{3}{4}} - \ln\left|x^{\frac{3}{4}}+1\right|\right) + C. \blacktriangleright$$

Задание 2. Вычислить интеграл

$$\int \frac{\sqrt[6]{2x-1}dx}{(2x-1)(\sqrt[3]{2x-1}-1)}.$$

$$\blacktriangleleft \int \frac{\sqrt[6]{2x-1}dx}{(2x-1)(\sqrt[3]{2x-1}-1)} = \left[\sqrt[6]{2x-1} = t,\ \sqrt[3]{2x-1} = t^2,\ 2x-1 = t^6,\right.$$

$$\left.2dx = 6t^5dt,\ dx = 3t^5dt\right] = \int \frac{t\cdot 3t^5dt}{t^6(t^2-1)} = 3\int \frac{dt}{t^2-1} =$$

$$= \frac{3}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \frac{3}{2}\left|\frac{\sqrt[6]{2x-1}-1}{\sqrt[6]{2x-1}+1}\right| + C. \blacktriangleright$$

Задание 3. Вычислить интеграл

$$\int \frac{1}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}dx.$$

$$◀ \int \frac{1}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}dx = \left[\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}} = t,\ \frac{2-x}{2+x} = t^3,\right.$$

$$2-x = (2+x)t^3,\ 2-2t^3 = x+xt^3,\ x = \frac{2-2t^3}{1+t^3},$$

$$\left. 2-x = 2-\frac{2-2t^3}{1+t^3} = \frac{4t^3}{1+t^3},\ dx = \frac{-12t^2}{(1+t^3)^2}dt\right] =$$

$$= -\int \frac{(1+t^3)^2 \cdot t \cdot 12t^2}{16t^6(1+t^3)^2}dt = -\frac{3}{4}\int \frac{dt}{t^3} = \frac{3}{8t^2} + C =$$

$$= \frac{3}{8}\sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2} + C.\ ▶$$

Задание 4. Вычислить интеграл

$$\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}.$$

$$◀ \int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}} = \left[(1-x)\sqrt{1-x^2} = (1-x)\sqrt{(1-x)(1+x)} =\right.$$

$$= (1-x)(1+x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}},\ \frac{1-x}{1+x} = t^2,\ x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ dx = \frac{-4tdt}{(1+t^2)^2},$$

$$\left. 1-x = \frac{2t^2}{1+t^2},\ 1+x = \frac{2}{1+t^2}\right] = -\int \frac{4tdt}{(1+t^2)^2\frac{2t^2}{1+t^2}\cdot\frac{2}{1+t^2}\cdot t} =$$

$$= -\int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{t} + C = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C. \blacktriangleright$$

Задание 5. Вычислить интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}.$$

$$\blacktriangleleft \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}} = \left[\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5} = (x-1)(x+2)\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}}, \right.$$

$$\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}} = t, \ \frac{x+2}{x-1} = t^4, \ x+2 = t^4(x-1), \ 2+t^4 = x(t^4-1),$$

$$x = \frac{t^4+2}{t^4-1}, \ x-1 = \frac{t^4+2}{t^4-1} - 1 = \frac{3}{t^4-1}, \ x+2 = \frac{3t^4}{t^4-1},$$

$$\left. dx = \frac{-12t^3dt}{(t^4-1)^2} \right] = -\int \frac{(t^4-1)(t^4-1)12t^3dt}{3 \cdot 3t^4 \cdot t(t^4-1)^2} =$$

$$= -\frac{4}{3}\int \frac{dt}{t^2} = \frac{4}{3t} + C = \frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}} + C. \blacktriangleright$$

2. Интегрирование функций вида $R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$

Интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$ всегда могут быть приведены к интегралу от рациональной функции при помощи подстановок Эйлера.

Задание 1. Вычислить интеграл

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}.$$

◀ Здесь $a=1$, $c=2$; следовательно, с одинаковым успехом можно применить как первую, так и третью подстановки Эйлера. Применим первую подстановку Эйлера.

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}} = \Big[\sqrt{x^2+2x+2} = t-x,$$

$$x^2+2x+2 = t^2-2tx+x^2,\ x=\frac{t^2-2}{2(1+t)},\ dx=\frac{t^2+2t+2}{2(1+t)^2}dt,$$

$$1+\sqrt{x^2+2x+2} = 1+t-\frac{t^2-2}{2(1+t)} = \frac{t^2+4t+4}{2(1+t)}\Big] =$$

$$= \int \frac{2(1+t)(t^2+2t+2)}{(t^2+4t+4)2(1+t)^2}dt = \int \frac{(t^2+2t+2)dt}{(1+t)(t+2)^2} =$$

$$= \Big[\frac{(t^2+2t+2)}{(1+t)(t+2)^2} = \frac{A}{t+1}+\frac{B}{t+2}+\frac{C}{(t+2)^2},$$

$$t^2+2t+2 = A(t+2)^2+B(t+1)(t+2)+C(t+1) \Rightarrow A=1,\ C=-2,\ B=0;$$

$$\frac{(t^2+2t+2)}{(1+t)(t+2)^2} = \frac{1}{t+1}-\frac{2}{(t+2)^2}\Big] = \int\frac{dt}{t+1}-2\int\frac{dt}{(t+2)^2} =$$

$$= \ln|t+1| + \frac{2}{t+2} + C =$$

$$= \ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right) + \frac{2}{x+2+\sqrt{x^2+2x+2}} + C. \blacktriangleright$$

Задание 2. Вычислить интеграл

$$\int \frac{(x+1)dx}{(x^2+2x)\sqrt{x^2+2x}}.$$

◀ Квадратный двухчлен x^2+2x имеет два различных действительных корня: $x_1 = 0$, $x_2 = -2$. Поэтому применяем третью подстановку Эйлера:

$$\int \frac{(x+1)dx}{(x^2+2x)\sqrt{x^2+2x}} = \left[\sqrt{x^2+2x} = xt,\ x^2+2x = x^2t^2,\ 2 = x(t^2-1),\right.$$

$$x = \frac{2}{t^2-1},\ dx = -\frac{4tdt}{(t^2-1)^2},\ x+1 = \frac{2}{t^2-1}+1 = \frac{t^2+1}{t^2-1},$$

$$\left.(x^2+2x)\sqrt{x^2+2x} = x^2t^2\cdot xt = x^3t^3 = \frac{8t^3}{(t^2-1)^3}\right] =$$

$$= -\int \frac{(t^2+1)(t^2-1)^3 4tdt}{(t^2-1)8t^3(t^2-1)^2} = -\frac{1}{2}\int \frac{t^2+1}{t^2}dt = -\frac{1}{2}\int dt - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2} =$$

$$= -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2t} + C = \left[t = \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}\right] = -\frac{\sqrt{x^2+2x}}{2x} + \frac{x}{2\sqrt{x^2+2x}} + C =$$

$$= \frac{-x^2 - 2x + x^2}{2x\sqrt{x^2+2x}} + C = -\frac{1}{\sqrt{x^2+2x}} + C. \blacktriangleright$$

Задание 3. Вычислить интеграл

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}.$$

$\blacktriangleleft$ Здесь $c = 1$; следовательно, можно применить третью подстановку Эйлера.

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}} = \Bigg[\sqrt{1-2x-x^2} = xt-1,\ 1-2x-x^2 = x^2t^2-2xt+1,$$

$$x = \frac{2(t-1)}{t^2+1},\ dx = 2\frac{-t^2+2t+1}{(t^2+1)^2}dt,\ 1+\sqrt{1-2x-x^2} = \frac{2(t-1)t}{t^2+1}\Bigg] =$$

$$= \int \frac{-t^2+2t+1}{(t^2+1)t(t-1)}dt = \Bigg[\frac{-t^2+2t+1}{(t^2+1)t(t-1)} = \frac{At+B}{t^2+1} + \frac{C}{t} + \frac{D}{t-1} =$$

$$= \frac{(At+B)t(t-1) + C(t^2+1)(t-1) + Dt(t^2+1)}{(t^2+1)t(t-1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (At+B)t(t-1) + C(t^2+1)(t-1) + Dt(t^2+1) = -t^2+2t+1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = 0,\ B = -2,\ C = -1,\ D = 1\Bigg] =$$

$$= \int \frac{-2}{t^2+1}dt - \int \frac{dt}{t} + \int \frac{dt}{t-1} = -2\operatorname{arctg} t - \ln|t| + \ln|t-1| + C =$$

$$= \ln\left|\frac{t-1}{t}\right| - 2\,\mathrm{arctg}\, t + C = \left[t = \frac{\sqrt{1-2x-x^2}+1}{x}\right] =$$

$$= \ln\left|\frac{\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}-1}{\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}}\right| - 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x} + C =$$

$$= \ln\left|\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}-x}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}\right| - 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x} + C. \blacktriangleright$$

Подстановки Эйлера, вообще говоря, ведут к громоздким выкладкам, а поэтому к ним следует прибегать лишь тогда, когда не видно других путей к вычислению данного интеграла.

Задание 4. Вычислить интеграл

$$\int \frac{5x+4}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx.$$

$$\blacktriangleleft \int \frac{5x+4}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx = \int \frac{5x+4}{\sqrt{(x+1)^2+4}}dx =$$

$$= \left[x+1=t,\ dx=dt\right] = \int \frac{5t-1}{\sqrt{t^2+4}}dt = 5\int \frac{tdt}{\sqrt{t^2+4}} - \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+4}} =$$

$$= 5\int d(\sqrt{t^2+4}) - \ln\left|t+\sqrt{t^2+4}\right| = 5\sqrt{t^2+4} - \ln\left|t+\sqrt{t^2+4}\right| + C =$$

$$= 5\sqrt{x^2+2x+5} - \ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right| + C. \blacktriangleright$$

Задание 5. Вычислить интеграл

$$\int \frac{2x^3-3x-1}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx.$$

◀ Воспользовавшись формулой (4.4), ищем решение в виде:

$$\int \frac{2x^3-3x-1}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx = (Ax^2+Bx+C)\sqrt{x^2+4x+5}+$$

$$+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}. \tag{4.10}$$

Дифференцируем обе части последнего равенства:

$$\frac{2x^3-3x-1}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx = (2Ax+B)\sqrt{x^2+4x+5}+$$

$$+\frac{(Ax^2+Bx+C)(x+2)}{\sqrt{x^2+4x+5}}+\frac{\lambda}{\sqrt{x^2+4x+5}}$$

и освобождаемся от знаменателя:

$$2x^3-3x-1=(2Ax+B)(x^2+4x+5)+$$

$$+(Ax^2+Bx+C)(x+2)+\lambda.$$

Приравнивая в последнем равенстве коэффициенты при одинаковых степенях x, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 3A = 2, \\ 10A + 2B = 0, \\ 10A + 6B + C = -3, \\ 5B + 2C + \lambda = -1, \end{cases}$$

решая систему, находим:

$$A = \frac{2}{3},\ B = -\frac{10}{3},\ C = \frac{31}{3},\ \lambda = -5.$$

Итак, равенство (4.10) примет вид:

$$\int \frac{2x^3 - 3x - 1}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}} dx =$$

$$= \left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{10}{3}x + \frac{31}{3}\right)\sqrt{x^2 + 4x + 5} - 5\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}} =$$

$$= \left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{10}{3}x + \frac{31}{3}\right)\sqrt{x^2 + 4x + 5} - 5\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2 + 1}} =$$

$$= \left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{10}{3}x + \frac{31}{3}\right)\sqrt{x^2 + 4x + 5} -$$

$$-5\ln\left|x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x + 5}\right| + C. \blacktriangleright$$

Задание 6. Вычислить интеграл

$$I=\int\frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2-2x-1}}.$$

$$◀ \int\frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2-2x-1}}=\Bigg[x-1=\frac{1}{t},\ t=\frac{1}{x-1},\ dx=-\frac{dt}{t^2},$$

$$x^2-2x-1=(x-1)^2-2=\frac{1}{t^2}-2=\frac{1-2t^2}{t^2}\Bigg]=-\int\frac{t^2dt}{\sqrt{1-2t^2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1-2t^2-1}{\sqrt{1-2t^2}}dt=\frac{1}{2}\int\sqrt{1-2t^2}dt-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{1-2t^2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\sqrt{1-2t^2}dt-\frac{1}{2\sqrt{2}}\arcsin\sqrt{2}t.$$

Интеграл $\int\sqrt{1-2t^2}dt$ можно вычислить по частям. В итоге получим:

$$\int\sqrt{1-2t^2}dt=\frac{t}{2}\sqrt{1-2t^2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\arcsin\sqrt{2}t+C.$$

Окончательно имеем:

$$I=\frac{t}{4}\sqrt{1-2t^2}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\arcsin\sqrt{2}t+C=$$

$$=\frac{1}{4(x-1)^2}\sqrt{x^2-2x-1}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{x-1}+C. ▶$$

Задание 7. Вычислить интеграл

$$\int \frac{(x+1)dx}{(x^2-5x+6)\sqrt{x^2+4}}.$$

◀Сначала разложим на элементарные дроби подынтегральную рациональную дробь:

$$\frac{x+1}{x^2-5x+6} = \frac{x+1}{(x-2)(x-3)} = \frac{-3}{x-2} + \frac{4}{x-3}.$$

Тогда

$$\int \frac{(x+1)dx}{(x^2-5x+6)\sqrt{x^2+4}} = \int \left(-\frac{3}{x-2} + \frac{4}{x-3}\right) \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}} =$$

$$= -3\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2+4}} + 4\int \frac{dx}{(x-3)\sqrt{x^2+4}}.$$

Каждый из полученных двух интегралов является интегралом типа (4.5) и, следовательно, первый из них берется с помощью подстановки $x-2=\frac{1}{t}$, а второй — с помощью подстановки $x-3=\frac{1}{z}$ (аналогично вычисляется интеграл в задании 6). Дальнейшие выкладки проделайте самостоятельно.▶

3. Интегралы от дифференциальных биномов

Задание 1. Вычислить интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}(\sqrt[3]{x}+1)^2}.$$

$$◀ \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}(\sqrt[3]{x}+1)^2} = \int x^{-\frac{2}{3}}\left(x^{\frac{1}{3}}+1\right)^{-2} dx.$$

Здесь $m = -\frac{2}{3}$, $n = \frac{1}{3}$, $p = -2$, т.е. p — целое число. Интеграл относится к первому случаю. Вводим подстановку $x^{\frac{1}{3}} = t$, откуда

$$x = t^3,\ dx = 3t^2dt,\ x^{-\frac{2}{3}} = (t^3)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{t^2}.$$

Тогда

$$\int x^{-\frac{2}{3}}\left(x^{\frac{1}{3}}+1\right)^{-2} dx = 3\int \frac{t^2dt}{t^2(t+1)^2} = 3\int \frac{dt}{(t+1)^2} =$$

$$= -\frac{3}{t+1} + C = -\frac{3}{\sqrt[3]{x}+1} + C. ▶$$

Задание 2. Вычислить интеграл

$$\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}} dx.$$

$$◀ \int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int x^{-\frac{2}{3}}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} dx.$$

Здесь $m = -\frac{2}{3}$, $n = \frac{1}{3}$, $p = \frac{1}{2}$ и

$$\frac{m+1}{n} = \frac{-\frac{2}{3}+1}{\frac{1}{3}} = 1$$

есть целое число, т.е. имеем второй случай, следовательно, здесь нужно ввести подстановку

$$a + bx^n = t.$$

Таким образом, для заданного интеграла берем подстановку

$$1 + x^{\frac{1}{3}} = t,$$

откуда находим

$$x^{\frac{1}{3}} = t - 1,\ x = (t-1)^3,\ dx = 3(t-1)^2 dt,\ x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{(t-1)^2}.$$

$$\int x^{-\frac{2}{3}} \left(1 + x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} dx = 3\int \frac{t^{\frac{1}{2}}(t-1)^2 dt}{(t-1)^2} = 3\int t^{\frac{1}{2}} dt = 2t^{\frac{3}{2}} + C =$$

$$= \left[t = x^{\frac{1}{3}} + 1\right] = 2\left(1 + x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} + C = 2\sqrt{(1 + \sqrt[3]{x})^3} + C. \blacktriangleright$$

Задание 3. Вычислить интеграл

$$\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^6} dx.$$

$$\blacktriangleleft \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^6} dx = \int x^{-6}(1+x^2)^{\frac{1}{2}} dx.$$

Здесь $m = -6$, $n = 2$, $p = \frac{1}{2}$. Легко видеть, что

$$\frac{m+1}{n} + p = \frac{-6+1}{2} + \frac{1}{2} = -2$$

есть целое число, т.е. мы имеем третий случай, при котором надо воспользоваться подстановкой $ax^{-n}+b=t$.

Таким образом, применительно к заданному интегралу мы берем подстановку $x^{-2}+1=t$, откуда получаем:

$$x^{-2}=t-1,\ \ x=\frac{1}{\sqrt{t-1}},\ \ dx=-\frac{1}{2}\frac{dt}{\sqrt{(t-1)^3}},$$

$$(1+x^2)^{\frac{1}{2}}=\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{t}{t-1}}.$$

Итак,

$$\int x^{-6}(1+x^2)^{\frac{1}{2}}dx=-\frac{1}{2}\int\frac{(t-1)^3\sqrt{t}dt}{\sqrt{t-1}\sqrt{(t-1)^3}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\int(t-1)t^{\frac{1}{2}}dt=-\frac{1}{2}\int t^{\frac{3}{2}}dt+\frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}dt=$$

$$=-\frac{1}{5}t^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}+C=$$

$$=-\frac{1}{5}\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{3}\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}+C. \blacktriangleright$$

Задания для самостоятельного решения

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$.

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$.

4. $\displaystyle\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}dx$.

5. $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx$.

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+\sqrt[4]{x})^3\sqrt{x}}$.

7. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx$.

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$.

9. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx$.

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2+3x+1}}$.

11. $\displaystyle\int \frac{x^{10}dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

12. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}$.

13. $\displaystyle\int \frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}dx$.

14. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1-x)^2\sqrt{1-x^2}}$.

15. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}dx$.

16. $\displaystyle\int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}dx$.

17. $\displaystyle\int \frac{xdx}{(x-1)^2\sqrt{1+2x-x^2}}$.

18. $\displaystyle\int \frac{xdx}{(x^2-1)\sqrt{x^2-x-1}}$.

19. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x+1)^2}dx$.

20. $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}}$.

21. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

22. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}dx$.

23. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}}$.

24. $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}}$.

Задания для самостоятельного решения

25. $\int \frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{2x^2-2x+5}}$. **26.** $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$. **27.** $\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}dx$.

28. $\int x\sqrt{x^2-2x+2}dx$. **29.** $\int \frac{dx}{\left(1+\sqrt{x(x+1)}\right)^2}$. **30.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$.

31. $\int \frac{(x^2-1)dx}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}$. **32.** $\int \frac{xdx}{(1-x^3)\sqrt{1-x^2}}$. **33.** $\int \frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}}dx$.

34. $\int \frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}dx$. **35.** $\int \frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}$. **36.** $\int x^2\sqrt{x^2+1}dx$.

37. $\int \sqrt{x^2+x^4}dx$. **38.** $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$. **39.** $\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}dx$.

40. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$. **41.** $\int \frac{dx}{x^3\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}}$. **42.** $\int \frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

43. $\int \frac{dx}{x\sqrt[6]{1+x^6}}$. **44.** $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$. **45.** $\int \sqrt[3]{3x-x^3}dx$.

ЛЕКЦИЯ 5

Интегрирование некоторых трансцендентных функций

5.1 Интегрирование функций типа $R(\sin x, \cos x)$

Функция типа $R(\sin x, \cos x)$ — это рациональная функция относительно $\sin x$ и $\cos x$. Рассмотрим способы интегрирования таких функций.

а) Универсальная подстановка.

Подстановка

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2},\ -\pi < x < \pi \quad \left(t = \operatorname{ctg}\frac{x}{2},\ 0 < x < 2\pi\right)$$

называется универсальной. С помощью нее интегралы вида

$$\int R(\sin x, \cos x)dx \tag{5.1}$$

сводятся к интегралам от рациональных функций. Покажем это.

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2},\ -\frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2},\quad x = 2\operatorname{arctg} t,\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Кроме этого,

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Тогда

$$\int R(\sin x,\cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\ \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt = \int R_1(t)dt, \tag{5.2}$$

где $R_1(t)$ — рациональная функция.

Аналогично применяется подстановка $t = \operatorname{ctg}\frac{x}{2}$.

Пример 5.1. Вычислить $\int\frac{dx}{3+5\cos x}$.

◀Используем универсальную подстановку $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

$$\int\frac{dx}{3+5\cos x} = [\text{см.}(5.2)] = \int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3+5\frac{1-t^2}{1+t^2}} =$$

$$= \int\frac{2dt}{8-2t^2} = \int\frac{dt}{4-t^2} = \frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{2+t}{2-t}\right| = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{2-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right| + C.\ ▶$$

б) Подстановки $t=\sin x$, $t=\cos x$, $t=\operatorname{tg}x$.

Замечание 5.1. Использование универсальной подстановки часто приводит к громоздким преобразованиям, поэтому (по возможности) применяют в некоторых случаях другие подстановки.

Лемма 5.1. *Если* $R(-u,v) = R(u,v)$, *то* $R(u,v) = R_1(u^2,v)$, *где* R, R_1 — *рациональные функции.*

◀Функция R имеет только четные степени u.

$$R(u,v) = \frac{P_n(u,v)}{Q_m(u,v)} = R(-u,v) = \frac{P_n(-u,v)}{Q_m(-u,v)} =$$

$$= \left[\text{используем свойство пропорции } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}\right] =$$

$$= \frac{P_n(u,v) + P_n(-u,v)}{Q_m(u,v) + Q_m(-u,v)} = R_1(u^2,v) -$$

взаимно уничтожаются члены с нечетными степенями относительно u.▶

Лемма 5.2. *Если* $R(-u,v) = -R(u,v)$ $(R(u,-v) = -R(u,v))$, *то* $R(u,v) = R_2(u^2,v)u$ $(R(u,v) = R_3(u,v^2)v)$, *где* R, R_1, R_2, R_3 — *рациональные функции.*

$$◀ \frac{R(u,v)}{u} = R^*(u,v),\ R^*(-u,v) = \frac{R(-u,v)}{-u} = \frac{-R(u,v)}{-u} =$$

$$= \frac{R(u,v)}{u} = R^*(u,v) = R_1^*(u^2,v); \Rightarrow R(u,v) = R_1^*(u^2,v)u,$$

где R^*, R_1^* — рациональные функции.▶

Дальше будем рассматривать интеграл (5.1).

I. Подстановка $t = \cos x$.

Теорема 5.1. *Если* $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, *то подстановка* $t = \cos x$ *приводит итеграл* (5.1) *к интегралу от рациональной функции.*

◀Используя лемму 5.2, будем иметь:

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R_1(\sin^2 x, \cos x)\sin x \cdot dx =$$

$$= -\int R_1(1-\cos^2 x, \cos x)d(\cos x) = [t = \cos x] = \int R^*(t)dt. ▶$$

II. Подстановка $t = \sin x$.

Теорема 5.2. *Если* $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, *то подстановка* $t = \sin x$ *приводит итеграл* (5.1) *к интегралу от рациональной функции.*

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 5.1.

III. Подстановка $t = \operatorname{tg} x$.

Лемма 5.3. *Если* $R(-u, -v) = R(u, v)$, *то* $R(u, v) = R_2(\frac{u}{v}, v^2)$.

$$◀\ R(u, v) = R\left(\frac{u}{v}\cdot v, v\right) = R_1\left(\frac{u}{v}, v\right),$$

$$R(-u, -v) = R\left(\frac{u}{v}(-v), -v\right) = R_1\left(\frac{u}{v}, -v\right) = R(u, v) = R_1\left(\frac{u}{v}, v\right).$$

Согласно лемме 5.1, $R_1\left(\frac{u}{v}, v\right) = R_2\left(\frac{u}{v}, v^2\right) = R(u, v)$.▶

Теорема 5.3. *Если* $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, *то подстановка* $t = \operatorname{tg} x$ $(t = \operatorname{ctg} x)$ *приводит интеграл* (5.1) к интегралу от рациональной функции.

$$◀ \int R(\sin x, \cos x)dx = \int R_2\left(\frac{\sin x}{\cos x}, \cos^2 x\right) dx =$$

$$= \int R_2\left(\operatorname{tg} x, \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}\right) dx = \int R_2\left(t, \frac{1}{1+t^2}\right) \frac{dt}{1+t^2},$$

где $t = \operatorname{tg} x$, $x = \operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$. ▶

Пример 5.2. Вычислить $\int \frac{\sin 2x dx}{3+4\sin^2 x}$.

$$◀ R(\sin x, \cos x) = \frac{2\sin x \cos x}{3+4\sin^2 x}; \; R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x).$$

Применим подстановку $t = \operatorname{tg} x$, $dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$. Получим:

$$I = \int \frac{\sin 2x dx}{3+4\sin^2 x} = \int \frac{2\sin x\cos x \cdot \cos^2 x dx}{\cos^2 x(\cos^2 x + \sin^2 x)(3\cos^2 x + 7\sin^2 x)} =$$

$$= \int \frac{2\operatorname{tg} x \cdot d(\operatorname{tg} x)}{(1+\operatorname{tg}^2 x)(3+7\operatorname{tg}^2 x)} = 2\int \frac{t \cdot dt}{(1+t^2)(3+7t^2)} =$$

$$= \left[\frac{t}{(1+t^2)(3+7t^2)} = \frac{At+B}{1+t^2} + \frac{Ct+D}{3+7t^2} = \right.$$

$$= \frac{(At+B)(3+7t^2)+(Ct+D)(1+t^2)}{(1+t^2)(3+7t^2)}\Bigg].$$

Разложив подынтегральную функцию на сумму элементарных дробей и найдя неизвестные коэффициенты A, B, C, D, получим:

$$I = 2\int \frac{-\frac{1}{4}tdt}{1+t^2} + 2\int \frac{\frac{7}{4}tdt}{3+7t^2} = -\frac{1}{4}\ln\left(1+t^2\right) + \frac{1}{4}\ln\left(3+7t^2\right) + C =$$

$$= -\frac{1}{4}\ln\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right) + \frac{1}{4}\ln\left(3+7\operatorname{tg}^2 x\right) + C. \blacktriangleright$$

в) Интегралы вида

$$\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx. \qquad (5.3)$$

I. Если $m, n \in Q$ (рациональные числа), то с помощью подстановки $t = \cos x$ или $t = \sin x$ интеграл вида (5.3) сводится к интегралу от дифференциального бинома.

Например, если $t = \cos x$, $x \in (0, \pi)$, тогда

$$\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x} = (1-t^2)^{\frac{1}{2}}, \; dt = -\sin x dx; \; dx = -\frac{dt}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Значит

$$\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx = -\int (1-t^2)^{\frac{m}{2}} t^n \frac{dt}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}} = -\int t^n (1-t^2)^{\frac{m-1}{2}} dt.$$

Вывод. Интеграл типа (5.3) при $m, n \in Q$ выражается через элементарные функции тогда, когда этой возможностью обладает соответствующий интеграл от дифференциального бинома.

Если m, n — целые (не обязательно положительные) числа, интеграл (5.3) относится к типу интегралов, рассмотренных выше; в частности, для вычисления таких интегралов целесообразно применять подстановки $t = \cos x$, $t = \sin x$, $t = \operatorname{tg} x$.

Например, если $m = 2k+1$ $(n = 2k+1)$ — нечетное число, то можно использовать подстановку $t = \cos x$ (соответственно $t = \sin x$):

$$\int \sin^{2k+1} x \cos^n x dx = -\int \left(1-\cos^2 x\right)^k \cos^n x d(\cos x) =$$

$$= -\int (1-t^2)^k t^n dt = \int R(t)dt.$$

Аналогично с помощью подстановки $t = \sin x$ можно интеграл

$$\int \sin^m x \cos^{2k+1} x dx$$

представить в виде интеграла от рациональной функции.

Если $m = 2k+1$ и $n = 2l+1$, то бывает полезной подстановка $t = \cos 2x$. При этом полезно знать так называемые формулы понижения степени

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}.$$

$$\int \sin^{2k+1} x \cos^{2l+1} x dx = \int \sin^{2k} x \cos^{2l} x \sin x \cos x dx =$$

$$= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^k \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^l \left(-\frac{1}{2} d(\cos 2x)\right) =$$

$$= -\frac{1}{2^{k+l+1}} \int (1-t)^k (1+t)^l dt = \int R(t)dt.$$

Замечание 5.2. Если $m, n \in Z$, то для вычисления интеграла типа (5.3) можно использовать подстановки такие же, как и для интегралов типа (5.1).

Если же m, n — четные и положительные числа (или одно из них равно 0), то при вычислении интегралов типа (5.3) применяется так называемый метод удвоенного угла. Покажем это на примере.

Пример 5.3. Вычислить $\int \cos^4 3x \sin^2 3x dx$.

$$\blacktriangleleft \int \cos^4 3x \sin^2 3x dx = \left[\cos^4 3x \sin^2 3x = \cos^2 3x (\cos^2 3x \sin^2 3x) =\right.$$

$$= \frac{1+\cos 6x}{2} \cdot \frac{\sin^2 6x}{4} = \frac{1}{8}(\sin^2 6x + \sin^2 6x \cdot \cos 6x) =$$

$$\left.= \frac{1}{8}\left(\frac{1-\cos 12x}{2} + \sin^2 6x \cos 6x\right)\right] =$$

$$= \int \frac{1}{8}\left(\frac{1-\cos 12x}{2} + \sin^2 6x \cos 6x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{24}\sin 12x + \frac{1}{6}\int \sin^2 6x d(\sin 6x)\right) =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{24}\sin 12x + \frac{1}{6}\frac{\sin^3 6x}{3}\right) + C. \blacktriangleright$$

Замечание 5.3. При вычислении интегралов $\int \operatorname{tg}^n x dx$ и $\int \operatorname{ctg}^n x dx$ (сводятся к типу $R(\sin x, \cos x)dx$, а $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$) кроме известных подстановок $t = \operatorname{tg} x$ или $t = \operatorname{ctg} x$

$$\left(\int \operatorname{tg}^n x dx = \int \frac{\operatorname{tg}^n x \cos^2 x dx}{(\cos^2 x + \sin^2 x)\cos^2 x} = \int \frac{\operatorname{tg}^n x d(\operatorname{tg} x)}{1 + \operatorname{tg}^2 x} =\right.$$

$$\left. = [t = \operatorname{tg} x] = \int \frac{t^n dt}{1 + t^2}\right)$$

можно использовать так называемый метод понижения степени. Покажем это на примере.

Пример 5.4. Вычислить $\int \operatorname{ctg}^5 4x dx$.

$$\blacktriangleleft \int \operatorname{ctg}^5 4x dx = \frac{1}{4}\int \operatorname{ctg}^5 4x d(4x) = [4x = t] = \frac{1}{4}\int \operatorname{ctg}^5 t dt =$$

$$=\frac{1}{4}\int \operatorname{ctg}^3 t\frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}dt=-\frac{1}{4}\int \operatorname{ctg}^3 t d(\operatorname{ctg} t)-\frac{1}{4}\int \operatorname{ctg}^3 t dt=$$

$$=-\frac{\operatorname{ctg}^4 t}{16}-\frac{1}{4}\int \operatorname{ctg} t\frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}dt=-\frac{\operatorname{ctg}^4 t}{16}-\frac{1}{4}\int \operatorname{ctg} t d(\operatorname{ctg} t)+\frac{1}{4}\int \frac{\cos t}{\sin t}dt=$$

$$=-\frac{\operatorname{ctg}^4 t}{16}-\frac{\operatorname{ctg}^2 t}{8}+\frac{1}{4}\int \frac{d(\sin t)}{\sin t}=-\frac{\operatorname{ctg}^4 4x}{16}-\frac{\operatorname{ctg}^2 4x}{8}+\frac{1}{4}\ln|\sin 4x|+C. \blacktriangleright$$

Замечание 5.4. Интегралы $\int \sin\alpha x\cos\beta x dx$, $\int \sin\alpha x\sin\beta x dx$, $\int \cos\alpha x\cos\beta x dx$ вычисляют, пользуясь известными тригонометрическими формулами:

$$\sin x\cdot\cos y=\frac{1}{2}(\sin(x+y)+\sin(x-y));$$

$$\sin x\cdot\sin y=\frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y));$$

$$\cos x\cdot\cos y=\frac{1}{2}(\cos(x-y)+\cos(x+y)).$$

5.2 Интегралы типа $\int R(\operatorname{sh} x,\ \operatorname{ch} x)dx$

Известно, что

$$\operatorname{sh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\quad \operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\quad \operatorname{th} x=\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

гиперболические функции. Обратные им:

$$\operatorname{Arsh} x = \ln(x+\sqrt{x^2+1});\ \operatorname{Arch} x = \ln(x\pm\sqrt{x^2-1});\ \operatorname{Arth} x = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Способы интегрирования функций $R(\operatorname{sh} x,\ \operatorname{ch} x)$:

а) Универсальная подстановка $t = th\frac{x}{2}$. При этом $\operatorname{sh} x = \frac{2t}{1-t^2}$, т.к

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right)\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}\right)}{2} = 2\frac{\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right)}{2}\frac{\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}\right)}{2} =$$

$$= 2\operatorname{ch}\frac{x}{2}\operatorname{sh}\frac{x}{2};$$

$$\operatorname{ch}^2\frac{x}{2} - \operatorname{sh}^2\frac{x}{2} = \left(\frac{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^x + e^{-x} + 2 - e^x - e^{-x} + 2\right) = 1;$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{2\operatorname{sh}\frac{x}{2}\operatorname{ch}\frac{x}{2}}{\operatorname{ch}^2\frac{x}{2} - \operatorname{sh}^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{th}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{th}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1-t^2}.$$

$\operatorname{ch} x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$, т.к.

$$\operatorname{ch}^2\frac{x}{2} + \operatorname{sh}^2\frac{x}{2} = \left(\frac{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}(e^x + e^{-x} + 2 + e^x + e^{-x} - 2) = \operatorname{ch} x,$$

$$\operatorname{ch} x=\frac{\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}+\operatorname{sh}^2\frac{x}{2}}{\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}-\operatorname{sh}^2\frac{x}{2}}=\frac{1+\operatorname{th}^2\frac{x}{2}}{1-\operatorname{th}^2\frac{x}{2}}=\frac{1+t^2}{1-t^2}.$$

$dx=\frac{2dt}{1-t^2}$, т.к.

$$t=\operatorname{th}\frac{x}{2}\Rightarrow x'=(2\operatorname{Arth}\,t)'=\left(2\ln\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\right)'=$$

$$=(\ln(1+t)-\ln(1-t))'=\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}=\frac{2}{1-t^2}.$$

Тогда

$$\int R(\operatorname{sh} x,\operatorname{ch} x)dx=2\int R\left(\frac{2t}{1-t^2},\frac{1+t^2}{1-t^2}\right)\frac{dt}{1-t^2}=\int R_1(t)dt -$$

получили интеграл от рациональной функции.

б) Подстановки $t=\operatorname{sh} x$, $t=\operatorname{ch} x$, $t=thx$. Для вычисления интегралов указанного типа используется следующее:

I) если $R(\operatorname{sh} x,-\operatorname{ch} x)=-R(\operatorname{sh} x,\operatorname{ch} x)$ — подстановка $t=\operatorname{sh} x$;

II) если $R(-\operatorname{sh} x,\operatorname{ch} x)=-R(\operatorname{sh} x,\operatorname{ch} x)$ — подстановка $t=\operatorname{ch} x$;

III) если $R(-\operatorname{sh} x,-\operatorname{ch} x)=R(\operatorname{sh} x,\operatorname{ch} x)$ — подстановка $t=\operatorname{th} x$.

Пример 5.5. Вычислить $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^3 x + 3\operatorname{ch} x}$.

◀ Подынтегральная функция имеет вид $R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)$, $R(\operatorname{sh} x, -\operatorname{ch} x) = -R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)$. Поэтому используем подстановку $t = \operatorname{sh} x$. Получим:

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^3 x + 3\operatorname{ch} x} = \left[\begin{array}{l} t = \operatorname{sh} x \\ dt = \operatorname{ch} x dx \end{array}\right] = \int \frac{\operatorname{ch} x dx}{\operatorname{ch}^2 x(\operatorname{ch}^2 x + 3)} =$$

$$= \int \frac{d \operatorname{sh} x}{(1 + \operatorname{sh}^2 x)(4 + \operatorname{sh}^2 x)} = \int \frac{dt}{(1 + t^2)(4 + t^2)} =$$

$$= \left[\frac{1}{(1 + t^2)(4 + t^2)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1 + t^2} - \frac{1}{4 + t^2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\int \frac{dt}{1 + t^2} - \int \frac{dt}{4 + t^2}\right) = \frac{1}{3}\left(\operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\operatorname{arctg} \operatorname{sh} x - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} \operatorname{sh}\frac{x}{2}\right) + C. \ ▶$$

Замечание 5.5. При вычислении интегралов вида $\int \operatorname{sh}^m x \cdot \operatorname{ch}^n x dx$, где m, n — рациональные числа, использование подстановки $t = \operatorname{sh} x$ $(t = \operatorname{ch} x)$ приводит указанные интегралы к интегралам от дифференциальных биномов.

5.3 Интегралы типа $\int R(e^x)dx$

В этом случае подстановка $t = e^x$ приводит интеграл к интегралу от рациональной функции.

Пример 5.6. Вычислить $I = \int \frac{1+e^{2x}}{(1+e^x)^2}dx$.

$$◀ \int \frac{1+e^{2x}}{(1+e^x)^2}dx = \begin{bmatrix} t = e^x \\ dt = e^x dx \end{bmatrix} = \int \frac{\left(1+(e^x)^2\right)e^x dx}{e^x(1+e^x)^2} = \int \frac{1+t^2}{t(1+t)^2}dt =$$

$$= \left[\frac{1+t^2}{t(1+t)^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} + \frac{C}{(t+1)^2};\ 1+t^2 = A(1+t)^2 + Bt(1+t) + Ct\right].$$

Применив метод неопределенных коэффициентов, получим:

$$I = \int \frac{dt}{t} - 2\int (t+1)^{-2} d(t+1) = \ln|t| + \frac{2}{t+1} + C =$$

$$= \ln e^x + \frac{2}{e^x+1} + C = x + \frac{2}{e^x+1} + C. ▶$$

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Назовите универсальную подстановку, с помощью которой всегда достигается рационализация дифференциала вида

$$R(\sin x, \cos x)dx, \tag{5.4}$$

и покажите, как ею пользоваться.

2. В каких случаях рационализация дифференциала (5.4) достигается подстановкой $\cos x = t$? Приведите доказательство.

3. В каких случаях рационализация дифференциала (5.4) достигается подстановкой $\sin x = t$? Приведите доказательство.

4. В каких случаях рационализация дифференциала (5.4) достигается подстановкой $\operatorname{tg} x = t$, $\left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$? Приведите доказательство.

5. Выведите рекуррентные формулы для вычисления интегралов вида

$$\int x^n e^{ax} \sin bx dx, \qquad \int x^n e^{ax} \cos bx dx.$$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 6

Интегрирование некоторых трансцендентных функций

Цель: Приобретение навыков нахождения неопределенных интегралов от трансцендентных функций.

Задание 1. Вычислить интеграл

$$\int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^4 x} dx.$$

$$◀ \int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^4 x} dx = \left[\sin^2 x = t,\ 2\sin x \cos x dx = dt,\ \sin^4 x = t^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\sin^2 x) + C. ▶$$

Задание 2. Вычислить интеграл

$$\int \sin mx \cos nx dx \ (m \neq n).$$

$$◀ \int \sin mx \cos nx dx = \frac{1}{2}\int \sin\left[(m-n)x\right] dx + \frac{1}{2}\int \sin\left[(m+n)x\right] dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(m-n)x}{m-n} + \frac{\cos(m+n)x}{m+n}\right] + C. ▶$$

Задание 3. Вычислить интеграл

$$\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx.$$

$$◀ \int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx = \left[\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t,\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\right.$$

$$\left. dx = \frac{2dt}{1+t^2}\right] = \int \frac{\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t}+t+2\right)dt = \frac{1}{2}\left(\ln|t|+\frac{1}{2}t^2+2t\right)+C =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C. ▶$$

Задание 4. Вычислить интеграл

$$\int \frac{\sin x+\sin^3 x}{\cos 2x}dx.$$

$$◀ R(\sin x,\cos x) = \frac{\sin x+\sin^3 x}{\cos^2 x-\sin^2 x};\ R(-\sin x,\cos x) = -R(\sin x,\cos x).$$

Подходит подстановка $t=\cos x$. Имеем:

$$\int \frac{\sin x+\sin^3 x}{\cos 2x}dx = \int \frac{-(2-\cos^2 x)}{2\cos^2 x-1}d(\cos x) = \int \frac{t^2-2}{2t^2-1}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{t^2 - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{t^2 - \frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2}\int dt - \frac{3}{4}\int \frac{dt}{t^2 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}t - \frac{3}{4}\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}}}\ln\left|\frac{t - \sqrt{\frac{1}{2}}}{t + \sqrt{\frac{1}{2}}}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{2}\cos x - \frac{3\sqrt{2}}{8}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\cos x - 1}{\sqrt{2}\cos x + 1}\right| + C. \blacktriangleright$$

Задание 5. Вычислить интеграл

$$\int \frac{dx}{3\cos^2 x + 4\sin^2 x}.$$

$$\blacktriangleleft \int \frac{dx}{3\cos^2 x + 4\sin^2 x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{3 + 4\operatorname{tg}^2 x} = \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{3 + 4\operatorname{tg}^2 x} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(2t)}{3 + (2t)^2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}} + C = \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg} x}{\sqrt{3}} + C. \blacktriangleright$$

Задание 6. Вычислить интеграл

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x} dx.$$

$$\blacktriangleleft \int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x} dx = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}\frac{dx}{\cos^2 x} = \int \operatorname{tg}^3 x d(\operatorname{tg} x) = \frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x + C. \blacktriangleright$$

Задание 7. Вычислить интеграл

$$\int \operatorname{tg}^5 x dx.$$

$$◀ \int \operatorname{tg}^5 x dx = \int \operatorname{tg}^3 x \operatorname{tg}^2 x dx = \int \operatorname{tg}^3 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx =$$

$$= \int \operatorname{tg}^3 x \frac{dx}{\cos^2 x} - \int \operatorname{tg}^3 x dx = \int \operatorname{tg}^3 x d(\operatorname{tg} x) -$$

$$- \int \operatorname{tg} x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x - \int \operatorname{tg} x d(\operatorname{tg} x) +$$

$$+ \int \operatorname{tg} x dx = \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x - \ln |\cos x| + C.$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{d(\cos x)}{\sin x} = - \ln |\cos x| + C. ▶$$

Задание 8. Вычислить интеграл

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x \sin^3 x}.$$

$$◀ \int \frac{dx}{\cos^3 x \sin^3 x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^6 x}}{\operatorname{tg}^3 x} = \int \operatorname{tg}^{-3} x \left(\operatorname{tg}^2 x + 1 \right)^2 \frac{dx}{\cos^2 x} =$$

$$= \int \operatorname{tg}^{-3} x \left(\operatorname{tg}^4 x + 2 \operatorname{tg}^2 x + 1 \right) d(\operatorname{tg} x) =$$

$$= \int \operatorname{tg} x d(\operatorname{tg} x) + 2 \int \operatorname{tg}^{-1} x d(\operatorname{tg} x) + \int \operatorname{tg}^{-3} x d(\operatorname{tg} x) =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + 2\ln|\operatorname{tg} x| - \frac{1}{2\operatorname{tg}^2 x} + C. \blacktriangleright$$

Задание 9. Вычислить интеграл

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x} dx.$$

$$\blacktriangleleft \int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x} dx \int (\sin x)^{-6} \cos^2 x \cos x dx =$$

$$= \int (\sin x)^{-6} (1 - \sin^2 x) d(\sin x) =$$

$$= \int \sin^{-6} x d(\sin x) - \int \sin^{-4} x d(\sin x) = -\frac{1}{5} \sin^{-5} x + \frac{1}{3} \sin^{-3} x + C =$$

$$= \frac{1}{3\sin^3 x} - \frac{1}{5\sin^5 x} + C. \blacktriangleright$$

Задание 10. Вычислить интеграл

$$\int \sin^4 x \cos^2 x dx.$$

$$\blacktriangleleft \int \sin^4 x \cos^2 x dx = \int \frac{(1-\cos 2x)^2}{4} \left(\frac{1+\cos 2x}{2} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{8} \int (1 - \cos^2 2x)(1 + \cos 2x) dx =$$

$$=\frac{1}{8}\int \sin^2 2x(1+\cos 2x)dx=\frac{1}{8}\int \sin^2 2xdx+\frac{1}{8}\int \sin^2 2x\cos 2xdx=$$

$$=\frac{1}{16}\int(1-\cos 4x)dx-\frac{1}{16}\int \sin^2 2xd(\sin 2x)=\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}-\frac{\sin^3 2x}{48}+C. \blacktriangleright$$

Задание 11. Вычислить интеграл

$$\int \sin^3 x\cos^2 xdx.$$

$$\blacktriangleleft \int \sin^3 x\cos^2 xdx=\int \sin^2 x\cos^2 x\sin xdx=$$

$$=-\int(1-\cos^2 x)\cos^2 xd(\cos x)=\left[\cos x=t\right]=-\int t^2(1-t^2)^2dt=$$

$$=-\int t^2dt+2\int t^4dt-\int t^6dt=-\frac{1}{3}t^3+\frac{2}{5}t^5-\frac{1}{7}t^7+C=$$

$$=-\frac{1}{3}\sin^3 x+\frac{2}{5}\sin^5 x-\frac{1}{7}\sin^7 x+C. \blacktriangleright$$

Задание 12. Вычислить интеграл

$$\int \mathrm{sh}^3\, dx.$$

$$\blacktriangleleft \int \mathrm{sh}^3\, dx=\int \mathrm{sh}^2 x\,\mathrm{sh}\, xdx=\int(\mathrm{ch}^2 x-1)d(chx)=\frac{\mathrm{ch}^3 x}{3}-\mathrm{ch}\, x+C. \blacktriangleright$$

Задание 13. Вычислить интеграл

$$\int \operatorname{th}^4 x dx.$$

$$◀ \int \operatorname{th}^4 x dx = \left[\operatorname{th} x = t,\ dt = \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = (1 - \operatorname{th} x)dx\right] =$$

$$= \int \frac{t^4}{1-t^2}dt = -\int \left(1 + t^2 + \frac{1}{t^2-1}\right) dt =$$

$$= -t - \frac{t^3}{3} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = -\operatorname{th} x - \frac{\operatorname{th}^3 x}{3} + x + C. ▶$$

Задание 14. Вычислить интеграл

$$\int \frac{1+e^x}{(1-e^{2x})e^x}dx.$$

$$◀ \int \frac{1+e^x}{(1-e^{2x})e^x}dx = \int \frac{(1+e^x)e^x dx}{(1-e^{2x})e^x} = \left[\begin{array}{c} e^x = t, \\ e^x dx = dt \end{array}\right] = \int \frac{(1+t)dt}{(1-t^2)t^2} =$$

$$= -\int \frac{dt}{(t-1)t^2} = \left[\frac{1}{(t-1)t^2} = \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t}\right] =$$

$$= -\int \frac{dt}{t-1} + \int \frac{dt}{t^2} + \int \frac{dt}{t} = -\ln|t-1| - \frac{1}{t} + \ln|t| + C =$$

$$= \ln\left|\frac{e^x}{e^x-1}\right| - e^{-x} + C. ▶$$

Задание 15. Вычислить интеграл

$$\int e^{\arcsin x} dx.$$

$$\blacktriangleleft \int e^{\arcsin x} dx = \left[\begin{array}{c} \arcsin x = t, \\ x = \sin t, \ \ dx = \cos t dt \end{array} \right] = \int e^t \cos t dt.$$

Интеграл $I = \int e^t \cos t dt$ можно вычислить методом интегрирования по частям. Методика вычисления интегралов такого типа была подробно рассмотрена на третьем практическом занятии.$\blacktriangleright$

Задание 16. Вычислить интеграл

$$\int x e^{\sqrt[3]{x}} dx.$$

$$\blacktriangleleft \int x e^{\sqrt[3]{x}} dx = \left[\begin{array}{c} \sqrt[3]{x} = t, \ \ x = t^3, \\ dx = 3t^2 td \end{array} \right] = \int t^3 e^t dt.$$

Интеграл $I = \int t^3 e^t dt$ можно вычислить методом интегрирования по частям или с помощью метода неопределенных коэффициентов. Методика вычисления интегралов такого типа была подробно рассмотрена на третьем практическом занятии.$\blacktriangleright$

Задания для самостоятельного решения

1. $\int \cos^5 x dx$

2. $\int \sin^6 x dx.$

3. $\int \cos^6 x dx.$

4. $\int \sin^2 x \cos^4 x dx.$

5. $\int \sin^4 x \cos^5 x dx.$

6. $\int \sin^5 x \cos^5 x dx.$

7. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx.$

8. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} dx.$

9. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}.$

10. $\int \frac{dx}{\cos^3 x}.$

11. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}.$

12. $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x}.$

13. $\int \int \frac{dx}{\sin x \cos^4 x}.$

14. $\int \operatorname{tg}^5 x dx.$

15. $\int \operatorname{ctg}^6 x dx.$

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x \cos^5 x}}.$

17. $\int \frac{dx}{\cos x \sqrt[3]{\sin^2 x}}.$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}.$

19. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}}.$

20. $\int \sin 5x \cos x dx.$

21. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}.$

22. $\int \sin^3 2x \cos^2 3x dx.$

23. $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}.$

24. $\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}.$

Задания для самостоятельного решения

25. $\int \frac{\sin^2 x}{\sin x+2\cos x}dx.$ **26.** $\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}dx.$ **27.** $\int \frac{dx}{\sin^3 x+\cos^3 x}.$

28. $\int \frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}.$ **29.** $\int \frac{\sin^2 x-\cos 62x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx.$ **30.** $\int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}dx.$

31. $\int \frac{dx}{3+5\operatorname{tg} x}.$ **32.** $\int \frac{\sin x}{\sin x-3\cos x}dx.$ **33.** $\int \frac{\sin x+2\cos x-3}{\sin x-2\cos x+3}dx.$

34. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{2}+\sin x\cos x}dx.$ **35.** $\int \frac{\sin x dx}{\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}}.$ **36.** $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{2+\sin 2x}}.$

37. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x\sqrt{\operatorname{tg} x}}dx.$ **38.** $\int \frac{dx}{(1+e^x)^2}.$ **39.** $\int \cos x\cos 2x\cos 3x dx.$

40. $\int \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}dx.$ **41.** $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}}.$ **42.** $\int x e^{\sqrt[3]{x}}dx.$

43. $\int \frac{xe^x dx}{(x+1)^2}.$ **44.** $\int \operatorname{sh}^3 x dx.$ **45.** $\int \operatorname{sh} x\cdot\operatorname{sh} 2x\cdot\operatorname{sh} 3x dx.$

46. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x+2\operatorname{ch} x}.$ **44.** $\int \sqrt{\operatorname{th}\, x}dx.$ **45.** $\int \frac{\operatorname{ch} x dx}{3\operatorname{sh} x-4\operatorname{ch} x}.$

Начало
Содержание
Таблица интегралов
Страница 151 из 160
Назад
На весь экран
Закрыть

Задания для подготовки к экзамену и зачету

1. $\int \frac{dx}{x^6(1+x^2)}$.

2. $\int \frac{x^2dx}{(1-x^2)^3}$.

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

4. $\int x^2\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx$.

5. $\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}dx$.

6. $\int \frac{x^5dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

7. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3+x^6}}$.

8. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-2x^2-1}}$.

9. $\int \frac{(1+x)dx}{x+\sqrt{x+x^2}}$.

10. $\int \frac{\ln(1+x+x^2)}{(1+x)^2}dx$.

11. $\int x\ln(4+x^4)dx$.

12. $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

13. $\int x\sqrt{x^2+1}\ln\sqrt{x^2-1}dx$.

14. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ln\frac{x}{\sqrt{1-x}}dx$.

15. $\int \frac{dx}{1+x^4+x^8}$.

16. $\int \frac{x+2}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx$.

17. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}$.

18. $\int \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}dx$.

19. $\int (2x+3)\arccos(2x-3)dx$.

20. $\int \frac{x\ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

21. $\int \frac{dx}{(2+\sin x)^2}$.

22. $\int \frac{\sin 4x}{\sin^8 x+\cos^8 x}dx$.

Задания для подготовки к экзамену и зачету

23. $\int \frac{dx}{\sin x\sqrt{1+\cos x}}$.

24. $\int \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx$.

25. $\int \frac{x\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

26. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}dx$.

27. $\int \frac{x^3\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

28. $\int \frac{x^4\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$.

29. $\int \frac{x\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^3}dx$.

30. $\int \frac{x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{(1-x^2)^2}dx$.

31. $\int \sqrt{1-x^2}\arcsin x dx$.

32. $\int x(1+x^2)\operatorname{arcctg} x dx$.

33. $\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}dx$.

34. $\int \frac{\operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}(1+e^x)}dx$.

35. $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x dx$.

36. $\int \frac{4x^3-5}{x(x^3-5)(x^4-5x+1)}dx$.

37. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}}$.

38. $\int \frac{(5x+4)dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$.

39. $\int \frac{1+\cos 2x}{\cos x}dx$.

40. $\int \sqrt[3]{\sin^2 2x}\cos 2x dx$.

41. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}dx$.

42. $\int \frac{\sin 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx$.

43. $\int \frac{x^3-x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$.

44. $\int \frac{dx}{7\cos^2 x+2\sin^2 x}$.

Задания для подготовки к экзамену и зачету

45. $\int \frac{\ln x-3}{x\sqrt{\ln x}}dx.$

46. $\int \frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}.$

47. $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}.$

48. $\int \frac{(1+\sin x)dx}{\sin x(1+\cos x)}.$

49. $\int \frac{x\ln x}{\sqrt{(x^2-1)^3}}dx.$

50. $\int e^{\arcsin x}dx.$

51. $\int \frac{\sin(x-1)}{\sin(x+1)}dx.$

52. $\int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}.$

53. $\int (x^4-3x^2+8x-2)(1-x)^{21}dx.$

54. $\int \frac{dx}{\operatorname{tg} x\cos 2x}.$

55. $\int \left(\frac{x}{x^5+2}\right)^4 dx.$

56. $\int \frac{\ln\arccos x}{\sqrt{1-x^2}\arccos x}dx.$

57. $\int e^{3x}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)dx.$

58. $\int \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}dx.$

59. $\int \frac{x^4-4x^3+5x^2+10x-10}{x^5-3x^2+x+5}dx.$

60. $\int x\sqrt[4]{x-2}dx.$

61. $\int \frac{xe^x}{(1+e^x)^2}dx.$

62. $\int \frac{x+1}{2^{x+1}}dx.$

63. $\int \frac{\ln(1-x^2)}{\sqrt{1-x}}dx.$

64. $\int \frac{dx}{\sqrt{3}\cos x+\sin x}.$

65. $\int \frac{dx}{2-e^x-e^{2x}}.$

66. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3-x^2-x+1}}.$

Варианты заданий для индивидуальной работы

Вариант 1

I. Найти интегралы:

1. $\int \frac{x^3+3x-1}{(x+4)^{50}}dx.$
2. $\int \frac{dx}{x^4+1}.$
3. $\int \frac{x^6+1}{(x^2+x+1)^2}dx.$
4. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}.$
5. $\int \frac{2x-\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx.$
6. $\int \cos 2x \cdot 2^{-x}dx.$
7. $\int x^2\sqrt{4-x^2}dx.$
8. $\int \frac{\sqrt{1-x^4}}{x^5}dx.$
9. $\int \frac{dx}{(\sin 2x+\cos 2x)^2}.$
10. $\int \frac{dx}{8\sin 3x-1}.$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}.$
12. $\int \frac{dx}{\sin^6 x+\cos^6 x}.$
13. $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx.$
14. $\int \left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2 dx.$
15. $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}.$
16. $\int x^5(2-5x^3)^{\frac{2}{3}}dx.$
17. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos x}.$
18. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}.$
19. $\int x^2e^{\sqrt{x}}dx.$
20. $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx.$

II. Для интеграла $I_n = \int \left(\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\sin\frac{x+a}{2}}\right)^n dx,\ n=2,3,\dots$ доказать рекурентную формулу:

$$I_n = \frac{2\sin a}{n-1}\left(\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\sin\frac{x+a}{2}}\right)^{n-1} + 2\cos a I_{n-1} - I_{n-2}.$$

Используя формулу, вычислить интеграл $\int \left(\frac{\sin\frac{x-1}{2}}{\sin\frac{x+1}{2}}\right)^3 dx.$

Кафедра высшей математики

Варианты заданий для индивидуальной работы

Вариант 2

I. Найти интегралы:

1. $\int (x^2 - 5x + 1)(2x + 30)^{20} dx.$
2. $\int \frac{dx}{x^6+1}.$
3. $\int \frac{dx}{\operatorname{ctg}^8 3x}.$
4. $\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}} dx.$
5. $\int \frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}} dx.$
6. $\int \sin(\ln 2x) dx.$
7. $\int \frac{x dx}{(x+1)^{0,5}+(x+1)^{\frac{1}{3}}}.$
8. $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}.$
9. $\int \frac{dx}{\operatorname{tg} x \cos 2x}.$
10. $\int \frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)} dx.$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}.$
12. $\int \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{\sin^8 x+\cos^8 x} dx.$
13. $\int \frac{x \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}} dx.$
14. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}.$
15. $\int \frac{x dx}{\sin^2 x}.$
16. $\int x\sqrt{2-5x} dx.$
17. $\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x}.$
18. $\int \frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}.$
19. $\int \sin x \ln(\operatorname{tg} x) dx.$
20. $\int \frac{dx}{x(x^{10}+2)}.$

II. Вывести рекурентную формулу для вычисления интеграла

$$I_n = \int \frac{dx}{(a \sin x + b \cos x)^n}, \;\; n \in N, \;\; n > 2, \;\; a, b = const, \;\; a^2 + b^2 \neq 0.$$

Используя найденную формулу, вычислить интеграл

$$\int \frac{dx}{(\sin x + 2\cos x)^3}.$$

Варианты заданий для индивидуальной работы

Вариант 3

I. Найти интегралы:

1. $\int (x^3-3x^2+1)(3x+2)^{15}dx.$
2. $\int \frac{xdx}{x^8+1}.$
3. $\int \frac{x^2dx}{(x^2+2x+2)^2}.$
4. $\int \frac{(x^2+1)dx}{x\sqrt{x^4+x^2+1}}.$
5. $\int \sqrt{\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{1+x^2}}dx.$
6. $\int e^{\sqrt{x}}dx.$
7. $\int \sqrt{x^3+x^4}dx.$
8. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}}.$
9. $\int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}dx.$
10. $\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos^4 x}.$
11. $\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}dx.$
12. $\int \frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}.$
13. $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx.$
14. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}.$
15. $\int x\sin\sqrt{x}dx.$
16. $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx.$
17. $\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}dx.$
18. $\int \frac{dx}{(x^2+8)^4}.$
19. $\int e^{2x}\sin^2 xdx.$
20. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}.$

II. Вывести рекурентную формулу для вычисления интеграла

$$I_n=\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n},\ \ a\neq 0.$$

Используя найденную формулу, вычислить интеграл

$$\int\frac{dx}{(x^2+x+1)^3}.$$

Варианты заданий для индивидуальной работы

Вариант 4

I. Найти интегралы:

1. $\int \frac{3x^2+4x+1}{(x-3)^{30}}dx.$
2. $\int \frac{dx}{(x+a)^m(x+b)^n}.$
3. $\int \frac{4x^5-1}{(x^5+x+1)^2}dx.$
4. $\int \frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}}dx.$
5. $\int \frac{3^x dx}{\sqrt{1-9^x}}.$
6. $\int \cos(\ln 3x)dx.$
7. $\int \frac{dx}{(x^2+x-2)\sqrt{x^2+x+1}}.$
8. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}}.$
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x \cos^5 x}}.$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}}.$
11. $\int \frac{x^6 dx}{\sqrt{x^2+9}}.$
12. $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x+\cos x}dx.$
13. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{2+\sin 2x}}.$
14. $\int \frac{\operatorname{arctg} e^x}{e^x}dx.$
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}.$
16. $\int x^2\sqrt{a^2+x^2}dx.$
17. $\int \frac{x^3 dx}{x^8+3}.$
18. $\int \frac{x^{10} dx}{\sqrt{1+x^2}}.$
19. $\int \frac{dx}{\cos^3 x}.$
20. $\int xe^x \sin^2 x dx.$

II. Вывести рекурентную формулу для вычисления интеграла

$$I_n = \int \frac{dx}{(a+b\cos x)^n} \quad (n \in N,\ n > 1,\ |a| \neq |b|).$$

Используя найденную формулу, вычислить интеграл

$$\int \frac{dx}{(3+2\cos x)^4}.$$

Вопросы для подготовки к экзамену и (или) зачету

1. Понятие первообразной функции и ее основное свойство.

2. Неопределенный интеграл. Основные свойства неопределенного интеграла.

3. Таблица основных неопределенных интегралов (с доказательством всех формул таблицы).

4. Замена переменной в неопределенном интеграле.

5. Интегрирование по частям в неопределенном интеграле.

6. Разложение рациональных дробей на элементарные.

7. Интегрирование элементарных рациональных дробей.

8. Интегрирование простейших иррациональных функций. Простейшие подстановки.

9. Интегрирование простейших иррациональных функций. Подстановки Эйлера.

10. Интегралы от дифференциальных биномов.

11. Интегрирование функций типа $R(\sin x, \cos x)$.

12. Интегрирование функций типа $R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)$.

13. Интегрирование функций типа $R(e^x)$.

Литература

1. Кудрявцев, Л.Д. Курс математического анализа : в 2 т. / Л.Д. Кудрявцев. — Москва : Высшая школа, 1988. — Т. 1 : Курс математического анализа. — 687 с.

2. Ильин, В.А. Основы математического анализа : в 2 т. / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. — М. : Наука, 1982. — Т. 1. — 599 с.

3. Фихтенгольц, Г.М. Основы математического анализа: в 3 т. / Г.М. Фихтенгольц. — С.-Пб. : Лань, 2001. — Т. 1 : Основы математического анализа. — 440 с.

4. Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б.П. Демидович. — М. : Наука, 1977. — 528 с.

5. Виноградова, И.А. Задачи и упражнения по математическому анализу : в 2 кн. / И.А. Виноградова, С.Н. Олехник, В.А. Садовничий; под ред. В.А. Садовничего. — 2-е изд., перераб. — М. : Высш. шк., 2002. — Кн. 1 : Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной. — 725 с.

6. Давыдов, Н.А. Сборник задач по математическому анализу : учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак-тов пед. ин-тов / Н.А. Давыдов, П.П. Коровкин, В.Н. Никольский ; под ред. Н.А. Давыдова. — М. : Просвещение, 1973. — 256 с.

7. Задачник по курсу математического анализа : учеб. пособие для студентов заоч. отделений физ.-мат. фак-тов пединститутов : в 2 т. / Н.Я. Виленкин [и др.] ; под общ. ред. Н.Я. Виленкина. — М. : Просвещение, 1971. — Т. 1. — 343 с.