ОПЕРАТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА С НОРМАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

А.В. Михайлов[1]

[1]Белгосуниверситет, механико-математический факультет
Пр. Независимости 4, 220050 Минск, Беларусь artostby@mail.ru

Рассмотрим линейное операторное уравнение

$$Ax = y, \tag{1}$$

где A – нормальный оператор в гильбертовом пространстве X, $y \in X$ заданный элемент. Нас будет интересовать критический случай, т.-е., случай, когда 0 является точкой спектра оператора A. Пусть $\phi(\lambda)$ и $\psi(\lambda)$ некоторые аналитические на спектре оператора A функции, для которых:

(a) $\phi(\lambda) = 1 - \lambda\psi(\lambda)$;

(b) $|\phi(\lambda)| \leqslant 1 \quad (\lambda \in \operatorname{sp} A)$;

(c) $\operatorname{Fix}\phi(A)^*\phi(A) = \operatorname{Fix}\phi(A)$.

В этом случае определены операторы $\phi(A)$ и $\psi(A)$.

Показано, если уравнение (**??**) разрешимо и на окружности $|\lambda| = 1$ нет отличных от 1 собственных значений $\phi(A)$, то последовательные приближения

$$x_{n+1} = \phi(A)x_n + \psi(A)y \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \tag{2}$$

при любом начальном условии $x_0 \in X$ сходятся к решению x_*, для которого $Px_* = Px_0$, где P — ортопроектор на множество $\ker\psi(A)$. Установлена также сходимость к нулю невязок $Ax_n - y$ и поправок $x_{n+1} - x_n$, при условии $P(\psi(A)y) = 0$. Невязки и поправки для последовательных приближений могут сходиться к нулю и в случае, когда исходное уравнение вообще не имеет решений.

Скорость сходимости приближений (**??**) к соответствующему решению x_* уравнения (**??**) оценивается неравенством $\|x_n - x_*\| \leqslant \gamma_n\|h\| \quad (x_0 - x_* = \theta(A)h, h \in X)$. В случае невязок скорость сходимости для приближений (**??**) к нулю оценивается неравенством $\|Ax_n - y\| \leqslant \gamma_n\|h\| \quad (Ax_0 - y = \theta(A)h, h \in X)$ и при $x_1 - x_0 = \theta(A)h$, $h \in X$, скорость сходимости поправок для приближений (**??**) к нулю оценивается неравенством $\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant \gamma_n\|h\| \quad (x_1 - x_0 \in \theta(A)X)$. Здесь $\gamma_n = \max\limits_{\lambda\in\operatorname{sp} A} |\phi(\lambda)|^n|\theta(\lambda)| \to 0$, $\theta(\lambda)$ — определённая на $\operatorname{sp} A$ функция, обращающаяся в нуль на множестве $\{\lambda\colon\ \phi(\lambda) = 1\}$.

Установлена сходимость в норме $\|x\|_0 = \|\pi(A)x\|$ последовательных приближений $x_{n+1} = \phi(A)x_n + \psi(A)y$ при любом начальном условии $x_0 \in X$ к решению x_* уравнения $Ax = y$, для которого $Px_* = Px_0$. Здесь $\pi(\lambda)$ — некоторая функция, положительная на $\operatorname{sp} A$, нули которой не являются собственными значениями оператора A. Если на множестве $\{\lambda\colon\ \phi(\lambda) = 1\}$ функция $\pi(\lambda)$ обращается в нуль, то $\max\limits_{\lambda\in\operatorname{sp} A} |\pi(\lambda)|\,|\phi(\lambda)|^n \to 0$ при $n \to \infty$. Установлена также сходимость в норме $\|x\|_0$ к нулю невязок $Ax_n - y$ и поправок $x_{n+1} - x_n$ для последовательных приближений (**??**).

Если приближения (**??**) на каждом шаге $n = 0, 1, 2, \dots$ вычисляются с ошибкой $\leq \delta$ (δ — некотрое положительное число), то приближения $\widetilde{x}_{n+1} = \phi(A)\widetilde{x}_n + \psi(A)\widetilde{y}_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$ квазисходятся к соответствующему решению x_* уравнения (**??**), то есть, справедливо соотношение $\lim\limits_{n\to\infty,\, n\delta\to 0} \|\widetilde{x}_n - x_*\| = 0$.