|  |
| --- |
| Учреждение образования «Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»Кафедра методики преподавания физико-математических дисциплинУТВЕРЖДЕНОПротокол заседания кафедры от 22.04.2020 № 14 |
|  |
| ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ К ЭКЗАМЕНУ |
|  |  |
| 22.04.2020 |
| г. Брест |
|  |  |
| По курсу: Элементарная математика и ПРЗ (Эвристика как система общих приемов поиска решения нестандартных задач) |
| Специальность: Математика и информатика 4 курс, 8 семестр |
|  | *Составитель: доцент Гринько Е.П.* |
|  | ***Теоретические вопросы*** |

**1. Доказательства и правдоподобные рассуждения.**

Обобщенные приемы исследовательской деятельности в процессе решения уравнений и неравенств (функциональные подстановки; тригонометрические подстановки; метод параметризации). Использование численных неравенств при решении уравнений, неравенств и их систем (неравенства Коши, Коши-Буняковского, Бернулли). Геометрические методы решения алгебраических задач. Векторный метод решения алгебраических задач.

**2. Функциональный подход в поиске решений нестандартных задач.**

Использование ограниченности области определения и области значения функции (метод мажорант). Использование монотонности функции. Использование производной при решении уравнений и неравенств.

**3. Эвристические приемы при решении нестандартных задач.**

Понятие о функциональных уравнениях. Основные теоремы, используемые при решении функциональных уравнений (нестандартных задач). Основные методы решения функциональных уравнений (олимпиадных задач).

**4. Целая и дробная части числа.**

Понятие целой и дробной части числа. Некоторые свойства. Построение графиков функции , , ,  с помощью преобразований. Применение целой и дробной части числа для решения уравнений, неравенств, систем.

**5. Делимость чисел.**

Основные определения и теоремы. Простые и составные числа. Признаки делимости. Последняя цифра числа. Решение в целых числах  уравнений вида . Китайская задача об остатках. Решение в целых числах  уравнений вида .

**6. Принцип Дирихле.**

Использование принципа Дирихле при решении задач на делимость. Принцип Дирихле и его следствие. Задачи геометрического содержания. Обобщенный принцип Дирихле. Олимпиадные задачи, решаемые с использованием принципа Дирихле.

**7. Логические задачи.**

Виды логических задач. Задачи на инварианты: инварианты и делимость; замощения и раскраски; геометрические инварианты. Применение графов для решения логических задач: основные понятия теории графов; базовые теоремы; логические задачи, решаемые с помощью графов. Матричный метод решения логических задач. Задачи «на стратегии». Основные виды и методы решения. Задачи на «маршруты» и «мосты» (использование теории графов, задачи исторического содержания).

***Практическая часть***

1. В классе 15 учеников. Докажите, что найдутся как минимум 2 ученика, отмечающих дни рождения в один месяц.

2. Найдите наибольшее значение функции .

3. Решите уравнение $\left[\frac{x-2}{3}\right]=\left[x\right].$

4. Найдите наибольшее значение функции .

5. Решите уравнение $\left[\frac{x-1}{4}\right]=\left[x\right].$

6. В клетки таблицы  вписали числа 9, 4 и еще два неизвестных числа. Оказалось, что суммы чисел в строках равны 11 и 14, а в одном из столбцов сумма чисел равна 9. Найдите большее из неизвестных чисел. Ответ объясните.

7. В комнате стояли стулья (с четырьмя ножками) и табуретки (с тремя ножками). Когда на каждый стул и каждый табурет село по одному школьнику, то общее число «ног» в комнате составило 39. Сколько стульев и сколько табуреток стояли в комнате?

8. В некоторой деревне есть три колодца. Трое жителей, живущие в трех стоящих рядом домиках перессорились, и решили так протоптать тропинки от своих домов к каждому из трех колодцев, чтобы они не пересекались. Удастся ли им выполнить свой план?

9. Докажите, что для положительных действительных чисел a, b и c верно неравенство: (a + b + c)($\frac{1}{а}$ + $\frac{1}{b}$ + $\frac{1}{c}$) $\geq 9$.

10. Точки на плоскости раскрашены двумя цветами. Показать, что существуют две точки одинакового цвета, расположенные на расстоянии 1 м.

11.



12. Найдите число, которое при делении на 5 дает остаток 2, при делении на
17 – остаток 15, а при делении на 12 – остаток 5.

13. Три артиста Иван, Александр и Олег вышли на сцену в красной, зеленой и синей рубашках. Их туфли были тех же цветов. У Ивана цвета рубашки и туфель совпадали. У Олега ни туфли, ни рубашка не были красными. Александр был в зеленых туфлях, а в рубашке другого цвета. Как были одеты артисты?

14. Найдите все целочисленные решения уравнения 13х + 29у = 19.

15. Найдите наибольшее значение функции .

16. Используя девятилитровое ведро и четырехлитровый бидон, наберите из реки 7 л воды.

17. Найдите $\left\{\frac{2009!}{2011}\right\}$, где $\left\{х\right\}$ – дробная часть числа *х*.

18. Маша, Лена, Оля и Кира умеют играть на разных инструментах (рояле, виолончели, гитаре, скрипке), но каждая только на одном. Они же знают иностранные языки (английский, французский, немецкий и испанский), но каждая только один. Известно, что девушка, которая играет на гитаре, говорит по-испански. Лена не играет ни на скрипке, ни на виолончели и не знает английского языка. Маша не играет ни на скрипке, ни на виолончели и не знает ни немецкого, ни английского. Девушка, которая говорит по-немецки, не играет на виолончели. Оля знает французский язык, но не играет на скрипке. Кто на каком инструменте играет и какой иностранный язык знает?

19. Вадим, Сергей и Михаил изучают различные иностранные языки: китайский, японский и арабский. На вопрос, какой язык изучает каждый из них, один ответил: «Вадим изучает китайский, Сергей не изучает китайский, а Михаил не изучает арабский». Впоследствии выяснилось, что в этом ответе только одно утверждение верно, а два других ложны. Какой язык изучает каждый из молодых людей?

20. Решите в натуральных числах уравнение:

$$x\left(x-1\right)\left(x-2\right)∙…∙2∙1=y^{2}-12.$$

21. Функция  при  удовлетворяет условию . Найдите .

22. Докажите, что множество простых чисел бесконечно.

23. Все делители натурального числа , кроме единицы и самого числа , выписали в ряд. Оказалось, что наибольший из этих делителей в 45 раз больше наименьшего делителя. Найдите все такие числа , которые обладают указанным свойством.

24. Докажите, что уравнение $3x^{2}-4y^{2}=14$ не имеет решений в целых числах.

25. Дано 12 целых чисел. Докажите, что из них можно выбрать 2, разность которых делится на 11.

26. Найдите значение выражения

.

27. Длины трех ребер прямоугольного параллелепипеда выражаются целыми числами и образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 2. Каким из следующих чисел может выражаться объем этого параллелепипеда? Ответ объясните. 1) 1200; 2) 188; 3) 216; 4) 350; 5) 500.

28. Саша написал на листе бумаги число 10. Пятнадцать одноклассников передают лист друг другу, и каждый либо прибавляет к числу, либо отнимает от него единицу. Может ли в результате получиться число 0?

29. Найдите все целочисленные решения уравнения: $x^{2}-3xy+2y^{2}=3.$

30. Найдите значение выражения



31. Можно ли разменять купюру достоинством 50 рублей с помощью 15 монет достоинством 1 и 5 рублей?

32. В клетки таблицы  вписали числа 6, 11 и еще два неизвестных числа. Оказалось, что суммы чисел в строках равны 19 и 11, а в одном из столбцов сумма чисел равна 16. Найдите большее из неизвестных чисел. Ответ объясните.

33. Решите в натуральных числах уравнение: $x!+y!=4z+3,$

34. Из 100 кубиков 80 имеют красную грань, 85 – синюю, 75 – зеленую. Сколько кубиков имеют грани всех трех цветов?

35. Найдите все функции, определенные на R, удовлетворяющие условию

.

36. На каждой стороне шестиугольника записали некоторые числа. Затем в каждой вершине шестиугольника записали сумму двух соседних чисел, и стерли все числа на сторонах и одно число в вершине. Найдите число, которое стерли в вершине.



37. В ряд записаны цифры 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3,…(группа цифр 1, 2, 3 повторяется в этой записи 342 раза). На первом шаге вытираются все цифры, стоящие на нечетных местах. На втором шаге вытираются все цифры, стоящие на нечетных местах в полученном новом ряду. Затем снова проделывается такая же операция, и так до тех пор, пока не останется одна цифра. Какая это будет цифра?

38. Найдите значение выражения

.

39. Дима родился ровно в тот день, когда его маме было 28 лет. Сколько раз возраст Димы будет делителем возраста его мамы, если они проживут долгую жизнь?

40. В учебнике 296 страниц. Сколько цифр нужно записать, чтобы их пронумеровать? Сколько раз будет использована каждая из цифр?

41. На некотором пространстве под землей живут 20 кротов, каждый в своей пещере-жилище. Чтобы общаться друг с другом, не вылезая на поверхность, кроты прорыли между своими жилищами 91 тоннель. Каждый тоннель соединяет только два жилища, тоннели не пересекаются, и никакие два тоннеля не соединяют одну и ту же пару жилищ. Докажите, что есть крот, который может по вырытым тоннелям переползать в жилища не менее чем 10 других кротов (посещая, возможно, по пути другие жилища).

42. Найдите наибольшее значение функции .

43. Найдите число, если это число состоит из 6 разных цифр; четные и нечетные цифры чередуются (ноль также может чередоваться и будет считаться четным числом); каждые две соседние цифры отличаются больше, чем на 1; число, состоящие из первых двух цифр, как и число, состоящие из средних двух цифр, делятся без остатка на число, составленное двумя последними цифрами.

44. Найдите f(х), если f(2х–1)= 3х + 2.

45. Докажите, что для любого натурального числа n целое число
а = – n3 – 17 n +12 делится на 6.

46. Докажите, что квадрат любого простого числа, кроме 2 и 3, при делении на 12 дает в остатке 1.

47. Найдите длину отрезка, концы которого принадлежат графику функции f(х)=12$\left|х^{9} \right|$ – 7х2 – $\frac{х}{2}$ + arctg 0, 352 +$ \frac{1}{2х^{5}}$ + ln$\left|х\right|$, а ось ординат является его серединным перпендикуляром.

48. Решите уравнение 

49. Разложите на простые множители число 218 + 318.

50. Постройте график функции 

51. Найти шестизначное число, произведения которого на 2, 3, 4, 5, 6 записываются теми же цифрами, что и оно само, но в другом порядке.

52. Найдите остаток от деления 15325 – 1 на 9.

53. Решите уравнение 

54. Дима родился ровно в тот день, когда его маме исполнился ровно 21 год. Сколько раз возраст Димы будет делителем возраста его мамы, если они проживут долгую жизнь?

Доцент Е.П. Гринько