УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»

И.Н. Климашевская

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

Учебно-методический комплекс для студентов специальностей «Прикладная математика» и «Экономическая кибернетика»

Брест
БрГУ имени А.С.Пушкина
2014

Автор:

И.Н. Климашевская – доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений УО «Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина», кандидат физико-математических наук, доцент

Рецензенты:

Л.П. Махнист – заведующий кафедрой высшей математики УО «Брестский государственный технический университет», кандидат технических наук, доцент

Н.Н. Сендер – заведующий кафедрой высшей математики УО «Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина», кандидат физико-математических наук, доцент

Учебно-методический комплекс содержит курс лекий и практических занятий, контрольные вопросы и задания для самостоятельного решения, а также вопросы для подготовки к экзамену по разделу «Введение в анализ». Наличие большого количества примеров и разобраных решений задач поможет студентам первого курса в самостоятельном изучении важнейшего раздела математического анализа.

Адресуется студентам специальностей «Прикладная математика» и «Экономическая кибернетика» физико-математического факультета.

Кафедра

математического анализа и дифференциальных уравнений

СОДЕРЖАНИЕ

Кафедра
математического анализа и дифференциальных уравнений

Кафедра
математического
анализа и
дифференциальных
уравнений

Начало

Содержание

Страница 9 из 430

Назад

На весь экран

Закрыть

Введение

Настоящий электронный учебно-методический комплекс адресован студентам физико-математического факультета, хотя значительная его часть может быть использована студентами других специальностей вузов, где изучают математику.

Учебно-методический комплекс разработан в соответствии с учебными программами по дисциплине «Математический анализ» для специальностей 1-31 03 03-01 Прикладная математика (научно-произволственная деятельность) и 1-31 03 06-01 Экономическая кибернетика (математические методы и компьютерное моделирование в экономике). В соответствии с указанными программами, на изучение раздела «Введение в анализ» отводится 38 часов лекций и 36 часов практических занятий. Предлагаемый электронный учебно-методический комплекс предназначен для организации самостоятельной работы студентов и окажет помощь студентам в достижении основной дидактической цели — самообразования. Цель данного пособия — помочь студентам, начинающим изучать математический анализ, понять точный смысл основных понятий первого раздела курса «Введение в анализ», неформально усвоить изучаемый материал. «Введение в анализ» является важнейшим разделом математического анализа. От того, насколько глубоко и качественно студенты освоят этот раздел, зависит их успех в дальнейшем изучении не только математического анализа, но и других дисциплин учебного плана специальностей.

Материал в учебно-методическом комплексе представлен в оптимальной последовательности. Весь лекционный курс разбит на темы. По каждой теме приводятся основные теоретические сведения и формулы, необходимые для решения задач, даются пояснения и комментарии к ним. Теоретический материал сопровождается решением большого количества примеров. В конце каждой темы приведены вопросы и задания для самоконтроля с целью помочь студентам в проверке усвоения ими теоретического материала. Комплекс содержит разработки практических занятий, в которых представлено большое количество решенных задач, а также задач для самостоятельного решения. С целью обучения поиску наиболее рационального способа решения предлагаются стандартные и специфические способы решения задач. В пособии представлены 10 вариантов индивидуальной работы. Выполнение студентами этой работы даст возможность преподавателю проконтролировать проработку студентами теории, проверить навыки решения задач и оценить качество усвоения изучаемого материала. Также в пособии приведены вопросы, которые необходимо подготовить для сдачи экзамена. Для этой цели указан список литературы, содержащий учебные пособия [1—6] и сборники задач [7—10].

Автор надеется, что предлагаемый учебно-методический комплекс поможет студентам в овладении методами математического анализа, в их самостоятельной работе над предметом.

ПРИМЕРНЫЙ ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

№	Название темы, перечень изучаемых вопросов	ЛК	ПР
1	**Функции (отображения).** Понятие функции (отображения).Классификация отображений. Композиция функций. Мощность множества.	4	4
2	**Действительные числа. Ограниченные числовые множества.** Определение множества действительных чисел. Классы действительных чисел. Модуль действительного числа. Ограниченные и неограниченные числовые множества. Аксиома полноты и существование точных граней числового множества. Принцип Архимеда.	4	4
3	**Основные леммы, связанные с полнотой множества действительных чисел (основные принципы математического анализа).** Лемма о вложенных отрезках (принцип Коши – Кантора). Лемма о конечном покрытии (принцип Бореля – Лебега). Лемма о предельной точке (принцип Больцано – Вейерштрасса). Счетные множества. Несчетность множества R.	4	
4	**Предел числовой последовательности.** Определение предела последовательности. Общие свойства предела последовательности. Бесконечно малые последовательности. Предельный переход и арифметические операции. Предельный переход и неравенства. Подпоследовательность.	4	6

5	**Существование предела последовательности.** Критерий Коши сходимости числовой последовательности. Критерий существования предела монотонной последовательности. Число e. Частичный предел последовательности. Некоторые приложения теории последовательностей в экономике.	4	4
6	**Предел функции.** Определения предела функции. Критерий Коши существования предела функции. Общие свойства предела функции. Предельный переход и арифметические операции. Предельный переход и неравенства. Первый замечательный предел. Предел композиции функций. Предел монотонной функции. Второй замечательный предел.	6	6
7	**Сравнение асимптотического поведения функций. O-символика.** Символ O большое. Символ o малое. Эквивалентные функции.	3	4
8	**Непрерывность функции в точке.** Определения непрерывности функции в точке. Точки разрыва функции. Локальные свойства непрерывных функций. Степенно-показательная функция и ее предел.	3	6
9	**Глобальные свойства непрерывных функций.** Теорема Больцано – Коши. Теоремы Вейерштрасса. Равномерно непрерывные функции.	4	2
10	**Существование обратной функции и ее непрерывность.** Точки разрыва монотонной функции. Существование и непрерывность обратной функции. Обратные тригонометрические функции.	2	
		38	36

Часть I

ЛЕКЦИОННЫЙ КУРС

ТЕМА 1
Функции (отображения)

1.1 Понятие функции (отображения)

Определение 1.1. *Пусть X и Y — некоторые множества. Если каждому элементу $x \in X$ по некоторому правилу или закону f ставится в соответствие единственный элемент $y \in Y$, то говорят, что на множестве X задана функция или отображение $y{=}f(x)$ со значениями во множестве Y.*

Множество X называется областью определения функции, x — аргументом или независимой переменной, y — зависимой переменной.

Множество $f(X) = \{y \in Y | \exists x \in X, y = f(x)\}$ всех значений функции, которые она принимает на элементах множества X, называется множеством значений или областью значений функции.

В зависимости от природы множеств X и Y функция f может называться также отображением, преобразованием, морфизмом, оператором, функционалом. Для функции (отображения) приняты обозначения:

$$f : X \to Y, \quad x \to f(x), \quad y = f(x).$$

Определение 1.2. *Функции f_1 и f_2 называются равными, если они имеют одну и ту же область определения X и для $\forall x \in X$, $f_1(x) = f_2(x)$.*

Пример 1.1. $f_1(x) = \dfrac{x^2-4}{x+2}$, $\quad f_2(x) = x-2$. *Если* $X = [1;3]$, *то* $f_1(x) = f_2(x)$.

Определение 1.3. *Пусть* $f : X \to Y$, $\varphi : A \subset X \to Y$ *и для* $\forall x \in A$ $\varphi(x) = f(x)$. *Функция* $\varphi(x)$ *называется сужением функции* $f(x)$ *на множество* A. *Обозначается* $\varphi = f|_A$. *Функция* $f(x)$ *называется продолжением функции* $\varphi(x)$ *на множество* X.

Пример 1.2.

$$\left.\begin{array}{r} f(x) = e^x,\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \varphi(x) = e^x,\ \varphi : [0;+\infty) \to \mathbb{R} \end{array}\right| \Rightarrow \varphi = f|_{[0;+\infty)}.$$

Для задания функции (отображения) необходимо указать:

1. X *- отображаемое множество;*

2. Y *- множество, в которое идет отображение;*

3. f *- закон, по которому каждому* $x \in X$ *сопоставляется* $y \in Y$.

Способы задания функции: аналитический (с помощью формулы или формул), табличный, графический, словесный.

Пример 1.3. *Функция сигнум. Обозначается символом* $\operatorname{sign} x$ *или* $\operatorname{sgn} x$. *Задается*

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

График функции $\operatorname{sign} x$ изображен на рисунке 1.1:

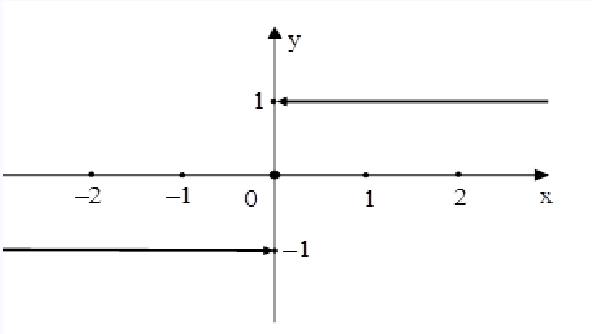

Рис. 1.1:

Пример 1.4. *Функция Дирихле. Обозначается $D(x)$. Задается*

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}. \end{cases}$$

Пример 1.5. *Функция антье. Обозначается $E(x) = [x]$. Задается словесно: наибольшее целое число, не превосходящее x. График функции $y = [x]$ изображен на рисунке 1.2:*

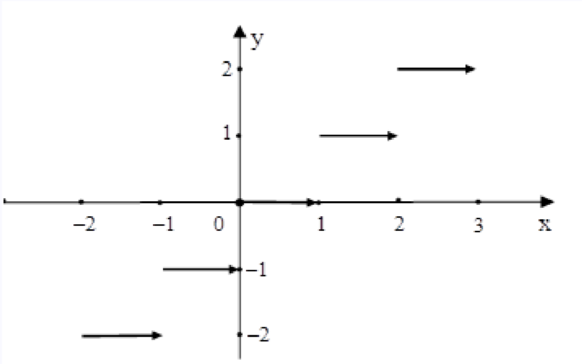

Рис. 1.2:

Пример 1.6. *Функция дробная часть числа. Обозначается* $\{x\}$*. Задается* $y = \{x\} = x - [x]$.

График функции $y = \{x\}$ изображен на рисунке 1.3:

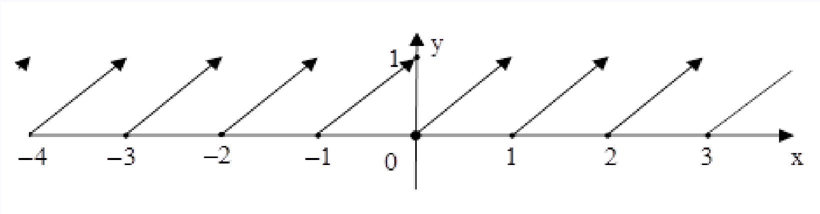

Рис. 1.3:

1.2 Классификация отображений

Пусть дано отображение $f : X \to Y$. Значение $f(x) \in Y$ называется образом элемента $x \in X$.

Определение 1.4. *Образом множества $A \subset X$ при отображении $f : X \to Y$ называется множество $f(A) = \{y \in Y | \exists x \in A, \quad y = f(x)\}$ тех элементов из Y, которые являются образами элементов из A.*

Определение 1.5. *Множество $f^{-1}(B) = \{x \in X | f(x) \in B\}$ тех элементов их X, образы которых содержатся в B, называется прообразом множества $B \subset Y$.*

Определение 1.6. *Отображение $f : X \to Y$ называется сюръективным, если $f(X) = Y$ (отображение X на Y).*

Пример 1.7. *Если $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, то отображение $f(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$ является сюръективным, отображение $f(x) = e^x$ не является сюръективным.*

Определение 1.7. *Отображение $f : X \to Y$ называется инъективным, если для $\forall x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ выполняется $f(x_1) \neq f(x_2)$ (различные элементы имеют различные образы).*

Пример 1.8. *Если $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, то отображение $f(x) = x^3$ является инъективным, а отображения $f(x) = x^2$ и $f(x) = \sin x$ инъективными не являются.*

Определение 1.8. *Отображение $f : X \to Y$ называется биективным (взаимно однозначным), если оно сюръективно и инъективно одновременно.*

Пример 1.9. *Если $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, то отображения $f(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$ и $f(x) = x^3$ являются биективными, отображения $f(x) = x^2$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ биективными не являются.*

Если отображение $f : X \to Y$ биективно, то есть является взаимно однозначным, то возникает отображение $f^{-1} : Y \to X$, которое определяется так: если $x \xrightarrow{f} y$, то $y \xrightarrow{f^{-1}} x$, т.е. $y \in Y$ ставится в соответствие тот элемент $x \in X$, образом которого при отображении f является y. В силу сюръективности f такой элемент x существует, в силу инъективности f такой элемент x единственный. Отображение f^{-1} называется обратным по отношению к отображению f. Отображение f^{-1} является биективным, $(f^{-1})^{-1} = f$.

Пример 1.10. *Пусть $y = f(x) = x^3$, тогда $x = f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$ – обратное ему отображение.*

1.3 Композиция функций

Определение 1.9. *Пусть $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$. Отображение $g \circ f : X \to Z$, определяемое равенством $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, называется композицией отображений f и g.*

Действие композиции $(g \circ f)$ схематически изображено на рисунке 1.4:

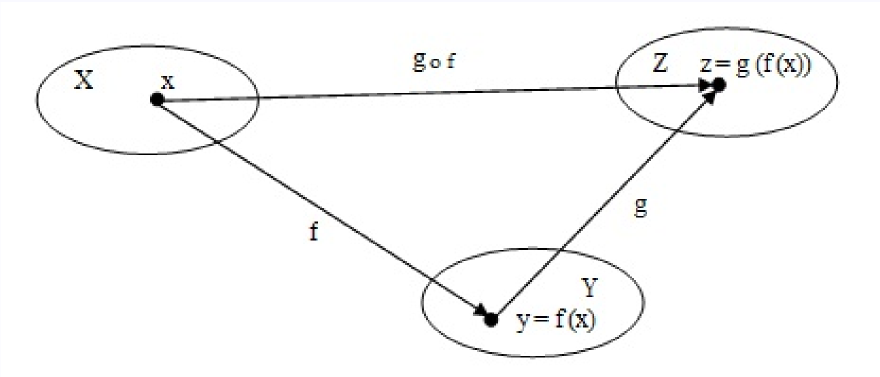

Рис. 1.4:

Пример 1.11. *Пусть $f(x) = 3x$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $g(y) = \sin y$, $g : \mathbb{R} \to [-1; 1]$. Тогда существует композиция функций f и g $(g \circ f)(x) = \sin 3x$, $g \circ f : \mathbb{R} \to [-1; 1]$.*

Пусть $f(x) = \ln x$, $f : (0; +\infty) \to \mathbb{R}$; $g(y) = \sqrt{y}$, $g : [0; +\infty) \to \mathbb{R}$. Так как множество значений функции f — множество R не содержится в области определения функции g — промежутке $[0; +\infty)$, то *на промежутке* $(0;+\infty)$ *композиция функций* f *и* g *не определена. Если рассмотреть функцию* f *на промежутке* $[1;+\infty)$*, то множество её значений – промежуток* $[0;+\infty)$ *совпадает с областью определения функции* g*. Поэтому композиция* $(g \circ f)(x) = \sqrt{\ln x}$ *существует на* $[1;+\infty)$.

Вывод: для существования композиции отображений f и g необходимо, чтобы множество значений отображения f было включено в область определения отображения g $(f(X) \subset Y)$.

1.4 Мощность множества

Определение 1.10. *МножестваX и Y называются эквивалентными или равномощными, если существует биективное отображение X на Y. Записывается $X \sim Y$.*

Из данного определения и определения биективного отображения вытекают свойства отношения эквивалентности:
1) $X \sim X$ (рефлексивность);
2) $X \sim Y \Rightarrow Y \sim X$ (симметричность);
3) $X \sim Y$, $Y \sim Z \Rightarrow X \sim Z$ (транзитивность).

Пример 1.12. *Рассмотрим множества* $A = \{1, 2, 3, 4, 5...\}$ *и* $B = \{2, 4, 6, 8, 10...\}$. $A \sim B$, *так как существует биективное отображение* $f(n) = 2n$, *сопоставляющее каждому элементу* $n \in A$ *единственный элемент* $2n \in B$.

Пример 1.13. *Докажем, что любые два отрезка* $[a; b]$ *и* $[c; d]$ *эквивалентны.*

Способ 1. *Биективное отображение множества точек отрезка* $[a; b]$ *на множество точек отрезка* $[c; d]$ *можно установить графически, как показано на рисунке 1.5.*

Способ 2.*Зададим биекцию между множеством точек отрезка* $[a; b]$ *и множеством точек отрезка* $[c; d]$ *графически (рисунок 1.6) и аналитически.*

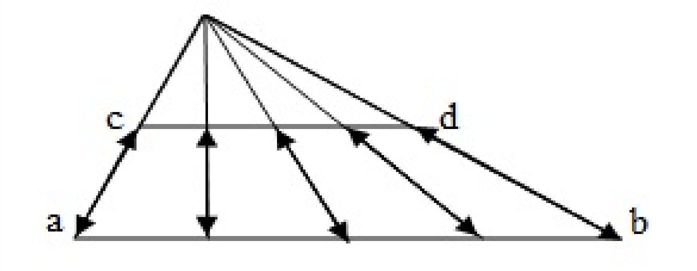

Рис. 1.5:

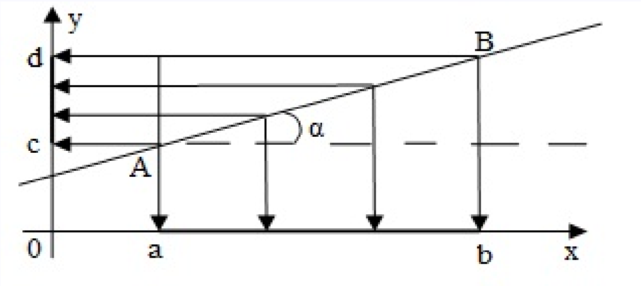

Рис. 1.6:

Составим уравнение прямой AB. Уравнение прямой: $y = kx + m$, где $k = tg\alpha = \dfrac{d-c}{b-a}$. Прямая AB проходит через точку A(a;c), следовательно $c = \dfrac{d-c}{b-a}a + m$, откуда $m = c - \dfrac{d-c}{b-a}a$.

Таким образом, уравнение прямой AB имеет вид

$$y = \frac{d-c}{b-a}x + c - \frac{d-c}{b-a}a.$$

Полученное соотношение задает аналитически биективное отображение отрезка [a;b] на отрезок [c;d]. Доказано, что [a;b] $\sim$ [c;d].

Отношение эквивалентности разбивает совокупность всех множеств на классы эквивалентных между собой множеств. Множества одного класса эквивалентности равномощны. Очевидно, что если множества конечные, то в один класс попадут множества с одинаковым количеством элементов.

Определение 1.11. *Класс, которому принадлежит множество X, называется мощностью множества X, или кардинальным числом множества X, и обозначается* $card\, X$.

Если $X \sim Y$, *то пишут* $card\, X = card\, Y$.

1.5 Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте определение функции (отображения).
2. Дайте определение равных функций.
3. Являются ли равными на $\mathbb{R}$ функции $f_1(x) = \sqrt{x^2}$ и $f_2(x) = x$?
4. Сформулируйте определение сужения функции.
5. Перечислите способы задания функции. Приведите пример функции, которая задается словесно.
6. Дайте определения сюръективного, инъективного и биективного отображений.
7. Приведите примеры отображений, не являющихся сюръективными.
8. Приведите примеры отображений, которые являются инъективными.
9. Являются ли биективными следующие отображения: $f(x) = 2x - 5$, $g(x) = 5^x$, $h(x) = \mathrm{tg} x$, $p(x) = |x|$?
10. Всякое ли отображение имеет обратное?
11. Пусть отображение f задано соотношением $f(x) = 10^x$. Найдите отображение f^{-1} – обратное отображению f.

12. Сформулируйте определение композиции отображений.

13. Пусть заданы отображения $f: A \to B$ и $g: C \to D$. В каком случае существует композиция $g \circ f: A \to D$?

14. Составьте композиции $g \circ f$ и $f \circ g$ для функций $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^2$.

15. Составьте композиции $\varphi \circ \psi$ и $\psi \circ \varphi$ для функций $\psi(x) = 2^x$, $\varphi(x) = x^2$

16. Какие множества называются равномощными?

17. Дайте определение мощности множества.

18. Чему равна мощность конечного множества?

19. Являются ли эквивалентными множества $A = \{1, 2, 3, 4, 5 \ldots\}$ и $B = \{2, 4, 8, 16, 32 \ldots\}$?

20. Докажите, что $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \sim (-\infty; +\infty)$.

21. Чему равна мощность множества студентов вашей группы?

ТЕМА 2
Действительные числа. Ограниченные числовые множества

2.1 Определение множества действительных чисел

Определение 2.1. *Прямым, или декартовым, произведением множеств* X *и* Y *называется множество упорядоченных пар* (x, y), *где* $x \in X$, *а* $y \in Y$, *т.е.* $X \times Y = \{(x, y) | x \in X, y \in Y\}$.

Пример 2.1. *Если* $X = \{1, 2\}$, $Y = \{5, 6\}$, *то* $X \times Y = \{(1, 5), (1, 6), (2, 5), (2, 6)\}$.

Определение 2.2. *Множество* $\mathbb{R}$ *называется множеством действительных чисел, а его элементы действительными числами, если выполняется комплекс аксиом:*

(I) Аксиомы сложения

Определена операция сложения, т.е. отображение $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, сопоставляющее каждой упорядоченной паре (x, y), $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ некоторый элемент $x + y \in \mathbb{R}$, называемый суммой x и y, и выполнены условия:

1_+. Существует нейтральный по сложению элемент 0, называемый нулем, такой, что для $\forall x \in \mathbb{R}$ x+0=0+x=x.

2_+. Для $\forall x \in \mathbb{R}$ существует противоположный элемент $-x \in \mathbb{R}$, такой, что x+(-x)=(-x)+x=0.

3+. Операция сложения коммутативна, т.е. для $\forall x, y \in \mathbb{R}$ выполняется x+y=y+x.

4+. Операция сложения ассоциативна, т.е. для $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ выполняется (x+y)+z=x+(y+z).

(II) Аксиомы умножения

Определена операция умножения, т.е. отображение $\bullet : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, сопоставляющее каждой упорядоченной паре (x, y), $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ элемент $x \cdot y \in \mathbb{R}$, называемый произведением x и y и выполнены условия:

1·. Существует нейтральный по умножению элемент $1 \in \mathbb{R}$, называемый единицей, такой, что для $\forall x \in \mathbb{R} \backslash 0$ $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$.

2·. Для $\forall x \in \mathbb{R} \backslash 0$ существует элемент $x^{-1} \in \mathbb{R} \backslash 0$, называемый обратным, такой, что $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$.

3·. Операция умножения коммутативна, т.е. для $\forall x, y \in \mathbb{R}$ $x \cdot y = y \cdot x$.

4·. Операция умножения ассоциативна, т.е. для $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

(I, II) Связь сложения и умножения

Умножение дистрибутивно по отношению к сложению, т.е. для $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$.

(III) Аксиомы порядка

Между элементами множества $\mathbb{R}$ имеется отношение $\leq$, т.е. для элементов $x, y \in \mathbb{R}$ установлено, выполняется $x \leq y$ или нет. И должны выполняться условия:

1. Для $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad x \le x$.
2. $(x \le y) \wedge (y \le x) \Rightarrow (x = y)$.
3. $(x \le y) \wedge (y \le z) \Rightarrow (x \le z)$.
4. Для $\forall x, y \in \mathbb{R}$ $\quad (x \le y) \vee (y \le x)$.

(I, III) Связь сложения и порядка

Для $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ $\quad (x \le y) \Rightarrow (x + z) \le (y + z)$.

(II, III) Связь умножения и порядка

Для $\forall x, y \in \mathbb{R}$ $\quad (0 \le x) \wedge (0 \le y) \Rightarrow (0 \le x \cdot y)$.

(IV) Аксиома полноты (непрерывности)

Если X и Y – непустые подмножества $\mathbb{R}$ и для $\forall x \in X$, $\forall y \in Y$ выполнено $x \le y$, то существует $c \in \mathbb{R}$ такое, что $x \le c \le y$ для $\forall x \in X$ и $\forall y \in Y$.

2.2 Классы действительных чисел

Определение 2.3. *Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется индуктивным, если для $\forall x \in X$ выполняется $(x+1) \in X$.*

Определение 2.4. *Множеством натуральных чисел называется наименьшее индуктивное множество, содержащее 1. Обозначается $\mathbb{N}$. Его элементы называются натуральными числами.*

Из определения множества $\mathbb{N}$ вытекает принцип математической индукции: если $E \subset \mathbb{N}$, $1 \in E$ и для $\forall x \in E$ выполняется $(x+1) \in E$, то $E = \mathbb{N}$.

На принципе математической индукции основывается широко применяемый в математике метод доказательства – метод математической индукции. Суть метода заключается в следующем: пусть $A(n)$ – высказывание, зависящее от натурального аргумента n; если высказывание $A(1)$ – истинное и высказывание $\forall k \in \mathbb{N}$, $A(k) \Rightarrow A(k+1)$ также является истинным, то высказывание $\forall n \in \mathbb{N}$ $A(n)$ – истинное.

Пример 2.2. *Докажем, что для $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \alpha \geq -1$ имеет место неравенство*

$$(1+\alpha)^n \geq 1 + \alpha n. \tag{2.1}$$

Неравенство (2.1) называется неравенством Бернулли. Якоб Бернулли (1659 – 1705) – швейцарский математик.

При $n = 1$ неравенство (2.1) очевидно. Предположим, что оно выполняется при $n = k$, т.е. $(1+\alpha)^k \geq 1+\alpha k$ — истинное неравенство. Докажем, что неравенство имеет место при $n = k+1$:
$(1+\alpha)^{k+1} = (1+\alpha)^k(1+\alpha) \geq (1+\alpha k)(1+\alpha) = 1+\alpha k+\alpha+\alpha^2 k \geq$
$\geq 1+\alpha k+\alpha = 1+\alpha(k+1)$.

Таким образом, неравенство (2.1) справедливо для $\forall n \in \mathbb{N}$.

Определение 2.5. *Объединение множества натуральных чисел, множества чисел, противоположных им, и нуля называется множеством целых чисел и обозначается $\mathbb{Z}$.*

Определение 2.6. *Рациональным числом называется число вида $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Множество рациональных чисел обозначается $\mathbb{Q}$.*

Определение 2.7. *Действительные числа, не являющиеся рациональными, называются иррациональными.*

Примерами иррациональных чисел являются числа $\sqrt{2}$, π, e.

Всякое рациональное число может быть представлено в виде бесконечной десятичной периодической дроби, любое иррациональное число представимо в виде бесконечной десятичной непериодической дроби.

2.3 Модуль действительного числа

Определение 2.8. *Модулем, или абсолютной величиной, действительного числа называется величина*

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0; \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Из определения модуля следует, что для $\forall x \in \mathbb{R}$ $|x| \geq 0$. Геометрически $|x|$ — это расстояние от точки x до начала координат, $|x - y|$ — это расстояние между точками x и y числовой прямой.

Свойства модуля

1. Для $\forall x \in \mathbb{R}$ $|-x| = |x|$.

◀ Если $x \geq 0$,то

$$\left.\begin{array}{l} |x| = x \\ |-x| = -(-x) = x \end{array}\right| \Rightarrow |x| = |-x|.$$

Если $x < 0$, то

$$\left.\begin{array}{l} |x| = -x \\ |-x| = -x \end{array}\right| \Rightarrow |x| = |-x|. ▶$$

2. Для $\forall x \in \mathbb{R}$ $-|x| \le x \le |x|$.

◀ При $x = 0$ получаем очевидное равенство.

Если $x > 0$,то $-x \le x \le x$.

$$\left.\begin{array}{r} |x| = -x \\ -|x| = -x \end{array}\right| \Rightarrow -|x| \le x \le |x|.$$

Если $x < 0$, то $x \le x \le -x$.

$$\left.\begin{array}{l} |x| = -x \\ -|x| = -(-x) = x \end{array}\right| \Rightarrow -|x| \le x \le |x|. \blacktriangleright$$

3. Для $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall \beta \in \mathbb{R}$, $\forall \alpha > 0$ $|x - \beta| \le \alpha \Leftrightarrow \beta - \alpha \le x \le \beta + \alpha$.

◀ Пусть $|x - \beta| \le \alpha$. Докажем, что $\beta - \alpha \le x \le \beta + \alpha$.
$|x - \beta| \le \alpha \Rightarrow -|x - \beta| \ge -\alpha$.
Из свойства 2 следует, что $-\alpha \le -|x - \beta| \le x - \beta \le |x - \beta| \le \alpha$. Тогда $-\alpha \le x - \beta \le \alpha$ или $\beta - \alpha \le x \le \beta + \alpha$

Пусть $\beta - \alpha \le x \le \beta + \alpha$. Докажем, что $|x - \beta| \le \alpha$. $\beta - \alpha \le x \le \beta + \alpha \Rightarrow -\alpha \le x - \beta \le \alpha$. Если $x - \beta \ge 0$, то $|x - \beta| = x - \beta \le \alpha \Rightarrow |x - \beta| \le \alpha$. Если $x - \beta < 0$, то $|x - \beta| = -(x - \beta)$. Домножим неравенство $-\alpha \le x - \beta \le \alpha$ на -1, получим $-\alpha \le -(x - \beta) \le \alpha$. Откуда $|x - \beta| \le \alpha$.▶

Геометрическая интерпретация неравенства $|x - \beta| \le \alpha$ показана на рисунке 2.1.

4. Для $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall \beta \in \mathbb{R}$, $\forall \alpha > 0$

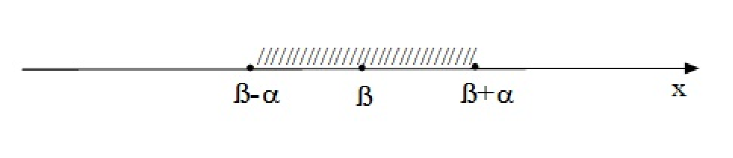

Рис. 2.1:

$$|x-\beta| \geq \alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq \beta + \alpha, \\ x \leq \beta - \alpha. \end{array} \right.$$

Свойство 4 доказывается аналогично свойству 3.

Геометрическая интерпретация неравенства $|x-\beta| \geq \alpha$ показана на рисунке 2.2.

5. Для $\forall x_1, x_2, ...x_n \in \mathbb{R}$ $|x_1 + x_2 + ... + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|$.

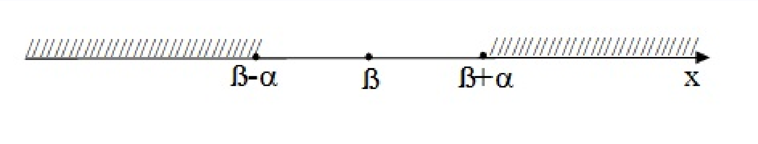

Рис. 2.2:

◀ По свойству 2 модуля:
$-|x_1| \le x_1 \le |x_1|$, $-|x_2| \le x_2 \le |x_2|$, ... ,$-|x_n| \le x_n \le |x_n|$.
Просуммируем неравенства:
$-(|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|) \le x_1 + x_2 + \ldots + x_n \le |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$.
По свойству 3 получаем, что $|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \le |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$. ▶
6. Для $\forall x, y \in \mathbb{R}$ $|x - y| \ge |x| - |y|$.
◀ $|x| = |(x - y) + y| \le |x - y| + |y|$. Откуда $|x - y| \le |x| - |y|$. ▶
7. Для $\forall x, y \in \mathbb{R}$ $|x - y| \ge ||x| - |y||$.
◀ Из свойства 1 следует, что $|x - y| = |y - x| \ge |y| - |x|$ Домножим последнее неравенство на -1:

$$\left.\begin{array}{r} -|x-y| \le |x| - |y| \\ |x-y| \ge |x| - |y| \end{array}\right| \Rightarrow -|x-y| \le |x|-|y| \le |x-y| \Rightarrow ||x|-|y|| \le |x-y|. \blacktriangleright$$

8. Для $\forall x, y \in \mathbb{R}$ $|x - y| \le |x| + |y|$.
◀ $|x - y| = |x + (-y)| \le |x| + |-y| = |x| + |y|$. ▶
9. Для $\forall x_1, x_2, \ldots x_n \in \mathbb{R}$

$$|x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n| = |x_1| \cdot |x_2| \cdot \ldots \cdot |x_n|. \tag{2.2}$$

◀ Доказательство проведем с использованием метода математической индукции. Проверим справедливость равенства при $n = 2$, т.е. $|x_1 \cdot x_2| = |x_1| \cdot |x_2|$.

Если $x_1 \geq 0$,$x_2 \geq 0$, то $x_1 \cdot x_2 \geq 0$.

$$\left.\begin{array}{r} |x_1 \cdot x_2| = x_1 \cdot x_2 \\ |x_1| \cdot |x_2| = x_1 \cdot x_2 \end{array}\right| \Rightarrow |x_1 \cdot x_2| = |x_1| \cdot |x_2|.$$

Если $x_1 < 0$,$x_2 < 0$, то $x_1 \cdot x_2 > 0$.

$$\left.\begin{array}{r} |x_1 \cdot x_2| = x_1 \cdot x_2 \\ |x_1| \cdot |x_2| = (-x_1) \cdot (-x_2) = x_1 \cdot x_2 \end{array}\right| \Rightarrow |x_1 \cdot x_2| = |x_1| \cdot |x_2|.$$

Если x_1, x_2 противоположных знаков, например $x_1 \geq 0$,$x_2 < 0$, то $x_1 \cdot x_2 \leq 0$.

$$\left.\begin{array}{r} |x_1 \cdot x_2| = -(x_1 \cdot x_2) = -x_1 \cdot x_2 \\ |x_1| \cdot |x_2| = x_1 \cdot (-x_2) = -x_1 \cdot x_2 \end{array}\right| \Rightarrow |x_1 \cdot x_2| = |x_1| \cdot |x_2|.$$

Предположим, что равенство (2.2) имеет место при $n = k$, т.е. $|x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_k| = |x_1| \cdot |x_2| \cdot \ldots \cdot |x_k|$. Докажем, что оно выполняется при $n = k+1$. $|x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_k \cdot x_{k+1}| = |x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_k| \cdot |x_{k+1}| = |x_1| \cdot |x_2| \cdot \ldots \cdot |x_k| \cdot |x_{k+1}|$.

Согласно методу математической индукции равенство (2.2) справедливо для $\forall n \in \mathbb{N}$. ▶

10. Для $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R} \setminus 0$

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$$

.

◀ Обозначим $\dfrac{x}{y} = a$, тогда $x = a \cdot y$. По свойству 9 $|x| = |a \cdot y| = |a| \cdot |y|$. Откуда $|a| = \dfrac{|x|}{|y|}$ или $\dfrac{|x|}{|y|} = \dfrac{|x|}{|y|}$. ▶

2.4 Ограниченные и неограниченные числовые множества. Аксиома полноты и существование точных граней числового множества

Определение 2.9. *Непустоемножество* $M \subset \mathbb{R}$ *называется ограниченным сверху, если* $\exists b \in \mathbb{R}$ *такое, что для* $\forall x \in M$ *выполняется* $x \leq b$. *Число* b *называется верхней границей множества* M.

Определение 2.10. *Непустое множество* $M \subset \mathbb{R}$ *называется ограниченным снизу, если* $\exists a \in \mathbb{R}$ *такое, что для* $\forall x \in M$ *выполняется* $x \geq a$. *Число* a *называется нижней границей множества* M.

Определение 2.11. *Непустое множество* $M \subset \mathbb{R}$ *называется ограниченным, если оно ограничено и сверху, и снизу.*

Определение 2.12. *Непустое множество* $M \subset \mathbb{R}$ *называется неограниченным сверху (снизу), если для* $\forall b \in \mathbb{R}$ $(\forall a \in \mathbb{R})$ $\exists\ x' \in M$ *такой, что* $x' > b$ $(x' < a)$.

Определение 2.13. *Непустое множество* $M \subset \mathbb{R}$ *называется неограниченным, если оно не ограничено сверху или снизу.*

Пример 2.3. *Множество* $M = \left\{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\right\}$ *ограничено сверху и снизу. Числа* 1, 2, $\sqrt{3}$, 10 *и т.д. являются его верхними границами. Любое число* $a \leq 0$ *является его нижней границей.*

Очевидно, что всякое конечное множество ограничено. Если множество ограничено, то оно имеет бесконечно много нижних и верхних границ.

Теорема 2.1. ***(критерий ограниченности множества).*** *Пусть $M \neq \varnothing$, $M \subset \mathbb{R}$. Множество M ограничено тогда и только тогда, когда $\exists K > 0$ такое, что для $\forall x \in M$ выполняется $|x| \leq K$.*

Доказательство. ◀ Докажем *необходимость*. Так как множество M ограничено, то оно ограничено сверху и снизу. Значит $\exists a, b \in \mathbb{R}$ такие, что для $\forall x \in M$ $a \leq x \leq b$. Обозначим $K = \max\{|a|, |b|\}$. Очевидно, что

$$\left.\begin{aligned} b \leq |b| \leq K \\ |a| \leq K \Rightarrow -|a| \geq -K \Rightarrow -K \leq -|a| \leq a \end{aligned}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -K \leq -|a| \leq a \leq x \leq b \leq |b| \leq K.$$

Откуда $-K \leq x \leq K$ или $|x| \leq K$.

Докажем *достаточность*. Дано, что $\exists K > 0$ такое, что для $\forall x \in M$ выполняется $|x| \leq K$ или $-K \leq x \leq K$. Пусть $a = -K$, $b = K$, тогда для $\forall x \in M$ выполняется $a \leq x \leq b$. Значит, множество M ограничено и сверху, и снизу. Следовательно, оно ограничено. ▶

Определение 2.14. *Элемент $a \in M$ называется наибольшим, или максимальным, элементом множества M (наименьшим, или минимальным), если для $\forall x \in M$ выполняется $x \leq a (x \geq a)$. Обозначается $a = \max M$.*

Утверждение 2.1. *Если во множестве есть максимальный (минимальный) элемент, то он единственный.*

Доказательство. ◀ Докажем единственность максимального элемента методом от противного. Пусть $a = \max M$, $b = \max M$ и $a \neq b$. Из определения максимального элемента: $a \in M$, $b \in M$, $(a \leq b) \wedge (b \leq a)$. Тогда по аксиоме порядка 2 следует, что $a = b$. Пришли к противоречию. ▶

Не во всяком, даже ограниченном множестве есть максимальный (минимальный) элемент.

Пример 2.4. $M = \{x \in \mathbb{R} | 2 \leq x < 7\}$. *Максимальный элемент во множестве M не существует,* $\min M = 2$.

Определение 2.15. *Наименьшая из всех верхних границ множества $M \subset \mathbb{R}$ называется точной верхней гранью. Обозначается* $\sup M$ (supremum – *наивысшая*).

Определение 2.16. *Наибольшая из всех нижних границ множества $M \subset \mathbb{R}$ называется точной нижней гранью. Обозначается* $\inf M$ (infimum – *наинизшая*).

Из определения точной верхней грани вытекают два ее свойства. Пусть $\sup M = s$.
1. Для $\forall x \in M$ выполняется $x \leq s$.

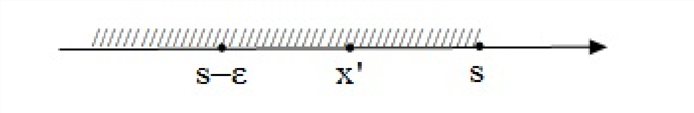

Рис. 2.3:

2. Для $\forall\varepsilon > 0\ \exists x' \in M$ такой, что $x' > s - \varepsilon$ (рисунок 2.3:).

Упражнение. Сформулируйте два свойства точной нижней грани.

Лемма 2.1. ***(принцип верхней грани)***. *Всякое непустое, ограниченное сверху множество $M \subset \mathbb{R}$ имеет единственную точную верхнюю грань.*

Доказательство. ◀ Так как множество M ограничено сверху, то оно имеет бесконечно много верхних границ. Пусть K – множество верхних границ множества $M : K = \{y \in \mathbb{R} | \forall x \in M, x \leq y\}$.

Имеем: $M \neq \varnothing$, $K \neq \varnothing$, $M \subset \mathbb{R}$, $K \subset \mathbb{R}$ и для $\forall x \in M$, $\forall y \in K$ выполняется $x \leq y$. По аксиоме полноты множества R $\exists c \in \mathbb{R}$ такое, что $\forall x \in M$, $\forall y \in K$ $x \leq c \leq y$. Получили, что для $\forall x \in M$, $x \leq c$, следовательно, c – верхняя граница множества M и $c \in K$. С другой стороны, для $\forall y \in K$ $c \leq y$ и $c \in K$, значит c – минимальный элемент множества

K. Это означает, что $c = \sup M$. Единственность точной верхней грани следует из единственности минимального элемента множества. ▶

Замечание 2.1. *Аналогично формулируется и доказывается лемма о существовании точной нижней грани.*

Пример 2.5. *Доказать, что множество* $M = \left\{ \dfrac{n^2-1}{n^2+4} | n \in \mathbb{N} \right\}$ *ограничено. Найти* $\sup M$ *и* $\inf M$.

Так как для $\forall n \in \mathbb{N}$ имеет место оценка

$$0 \le \frac{n^2-1}{n^2+4} = \frac{n^2+4-5}{n^2+4} = 1 - \frac{5}{n^2+4} < 1, \tag{2.3}$$

то множество M ограничено, 0 — нижняя граница множества M, 1 — его верхняя граница.

Докажем, что $\sup M = 1$, т.е. 1 является наименьшей среди верхних границ множества M. Для этого достаточно установить:

1) для $\forall n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $\dfrac{n^2-1}{n^2+4} \le 1$;

2) для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x_\varepsilon \in M$ такое, что $x_\varepsilon > 1 - \varepsilon$.

Справедливость условия 1) следует из неравенства (2.3). Проверим условие 2). Если в качестве ε выбрано число $\varepsilon \ge 1$, то число $1 - \varepsilon$ — неположительное и в качестве x_ε можно взять любое из чисел $\dfrac{n^2-1}{n^2+4}$

при $n \geq 2$. Пусть $0 < \varepsilon < 1$. Докажем, что найдется хотя бы одно натуральное число n, удовлетворяющее неравенству

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 4} > 1 - \varepsilon. \tag{2.4}$$

Тогда точка $x_\varepsilon = \dfrac{n^2 - 1}{n^2 + 4}$, соответствующая найденному значению n, будет удовлетворять неравенству $x_\varepsilon > 1 - \varepsilon$. Неравенство (2.4) можно решить относительно n. Однако, пользуясь тем, что нас устраивает выбор даже очень большого номера n, неравенства типа (2.4) стараются заменить более простыми. Так, в нашем случае

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 4} > \frac{n^2 - 4}{n^2 + 4n + 4} = \frac{n - 2}{n + 2} = 1 - \frac{4}{n + 2} > 1 - \frac{4}{n},$$

а поэтому неравенство (2.4) будет заведомо выполняться для тех номеров n, для которых $1 - \frac{4}{n} > 1 - \varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{4}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \dfrac{4}{\varepsilon}$. Значит, если взять в качестве n $n = \left[\dfrac{4}{\varepsilon}\right] + 1$ то оно удовлетворяет неравенству (2.4).

Точная нижняя грань множества M – $\inf M$ находится проще: так как M имеет минимальный элемент $x = 0$, то этот элемент является и точной нижней гранью множеств M. В самом деле, 0 – нижняя граница множества M (следует из неравенства (2.3)), и каждая, в том числе и наибольшая из нижних границ, должна не превосходить числа $0 \in M$. Значит, $\inf M = 0$.

Замечание 2.2. *Точные грани могут принадлежать множеству, а могут и не принадлежать ему.*

2.5 Принцип Архимеда

Следствием аксиомы полноты множества R является принцип Архимеда.

Теорема 2.2. ***(принцип Архимеда).*** *Для всякого положительного действительного числа x существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $n > x$ (множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ неограничено сверху).*

Доказательство. ◀ Проведем доказательство методом от противного. Пусть множество $\mathbb{N}$ ограничено сверху, E – множество верхних границ для множества $\mathbb{N}$, т.е. $E = \{e \in \mathbb{R} | \forall n \in \mathbb{N},\ n \le e\}$.

Имеем: $\mathbb{N} \ne \varnothing$, $E \ne \varnothing$, $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$, и для $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall e \in E$ выполняется $n \le e$. По аксиоме полноты множества $\mathbb{R}$ $\exists c \in \mathbb{R}$, такое, что для $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall e \in E$ имеет место $n \le c \le e$. Значит c – верхняя граница множества $\mathbb{N}$, поэтому $c \in E$ и $c = \min E$. Тогда $c - 1 \notin E$ и $\exists n' \in \mathbb{N}$ такое, что $n' > c - 1$ или $c < n' + 1$. Но $n' + 1 \in \mathbb{N}$, c – верхняя граница $\mathbb{N}$, поэтому $n' + 1 \le c$.

Получили $c < n' + 1 \le c$. Неравенства несовместны. Пришли к противоречию.▶

2.6 Вопросы и задания для самоконтроля

1. Перечислите группы аксиом множества действительных чисел $\mathbb{R}$.
2. Проиллюстрируйте аксиому полноты на числовой оси.
3. Дайте определение индуктивного множества.
4. Сформулируйте определение множества натуральных чисел $\mathbb{N}$.
5. В чем заключается принцип математической индукции?
6. Как проводится доказательство истинности высказывания с использованием метода математической индукции?
7. Дайте определение множества целых чисел $\mathbb{Z}$.
8. Какое число называется рациональным?
9. В виде каких бесконечных десятичных дробей представляются рациональные и иррациональные числа?
10. Дайте определение модуля действительного числа.
11. Сформулируйте свойства модуля.
12. В чем заключается геометрический смысл $|x|$ и $|x-y|$?

13. Сделайте геометрическую интерпретацию неравенств $|x-\beta| < \alpha$ и $|x-\beta| > \alpha$.

14. При каких значениях α имеют место равенства $|\alpha| = \alpha$ и $|\alpha| = -\alpha$?

15. При каких значениях α имеют место неравенства $|\alpha| > \alpha$ и $|\alpha| < \alpha$?

16. Решите неравенство $\left|\dfrac{x}{x+1}\right| > \dfrac{x}{x+1}$.

17. Решите уравнение $|\sin x| = \sin x + 2$.

18. Дайте определение ограниченного снизу множества.

19. Какое множество называется ограниченным?

20. Дайте определение неограниченного сверху множества.

21. Сформулируйте определение неограниченного множества.

22. Приведите пример числового множества, ограниченного сверху и неограниченного снизу.

23. Приведите пример неограниченного числового множества.

24. Сформулируйте критерий ограниченности множества.

25. Дайте определение максимального элемента множества.

26. Дайте определения точных граней множества M. Сформулируйте два свойства $\sup M$ и два свойства $\inf M$.

27. Сформулируйте принцип нижней грани множества.

28. Докажите единственность точных граней.

29. Приведите примеры числовых множеств M, у которых:
а) $\sup M \in M$;
б) $\sup M \notin M$;
в) $\inf M \in M$;
г) $\inf M \notin M$.
Имеет ли множество M в случаях а) и б) наибольший, а в случаях в) и г) наименьший элемент?

30. Что означает символическая запись:
а) $\sup M = +\infty$;
б) $\inf M = -\infty$?

31. Пусть $X \neq \varnothing$, $Y \neq \varnothing$, $X \subset \mathbb{R}$, $Y \subset \mathbb{R}$, X ограничено сверху, $Y \subset X$. Докажите, что Y также ограничено сверху и $\sup Y \leq \sup X$.

32. Пусть $X \neq \varnothing$, $Y \neq \varnothing$, $X \subset \mathbb{R}$, $Y \subset \mathbb{R}$. Если для $\forall x \in X$ и $\forall y \in Y$ выполнено $x \leq y$, то X ограничено сверху, Y – снизу и $\sup X \leq \inf Y$. Докажите.

33. Пусть $-A$ – множество чисел вида $-\alpha$, где $\alpha \in A \subset \mathbb{R}$. Покажите, что $\sup(-A) = -\inf A$.

ТЕМА 3
Основные леммы, связанные с полнотой множества действительных чисел (основные принципы математического анализа)

3.1 Лемма о вложенных отрезках (принцип Коши – Кантора)

ОгюсменЛуи Коши (1789 – 1857) – французский математик.
Георг Кантор (1845 – 1918) – немецкий математик.

Определение 3.1. *Последовательностью элементов множества X называется функция f, заданная на $\mathbb{N}$, такая, что $f : \mathbb{N} \to X$. Значение $f(n) \in X$ обозначается x_n и называется n-м членом последовательности.*

Определение 3.2. *Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ – последовательность множеств. Если $X_1 \supset X_2 \supset \ldots \supset X_n \supset \ldots$, т.е. для $\forall n \in \mathbb{N}$ $X_n \supset X_{n+1}$, то эта последовательность называется последовательностью вложенных множеств.*

Лемма 3.1. ***(о вложенных отрезках)***. *Для любой последовательности вложенных отрезков $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$ существует точка $c \in \mathbb{R}$, принадлежащая всем отрезкам одновременно. Если для $\forall \varepsilon > 0$ в последовательности существует отрезок I_k, длина которого $|I_k| < \varepsilon$ (существует отрезок сколь угодно малой длины), то такая точка c единственная.*

Доказательство. ◀ Пусть $I_n = [a_n; b_n]$, $A = \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{b_n | n \in \mathbb{N}\}$. $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$, $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$ и для $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall m \in \mathbb{N}$ выполняется $a_n \leq b_m$ (т.к. отрезки вложены друг в друга). Тогда по аксиоме полноты множества $\mathbb{R}$ $\exists c \in \mathbb{R}$ такое, что для $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall m \in \mathbb{N}$ $a_n \leq c \leq b_m$. При $m = n$ получим: для $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \leq c \leq b_n$. Это означает, что $c \in I_n$ для $\forall n \in \mathbb{N}$.

Докажем единственность точки c. Метод доказательства от противного. Предположим, что $\exists c_1, c_2$ $c_1 \neq c_2$ такие, что $c_1 \in I_n$, $c_2 \in I_n$ для $\forall n \in \mathbb{N}$. Пусть $c_1 < c_2$. Тогда для $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \leq c_1 < c_2 \leq b_n$. Откуда $|I_n| = b_n - a_n \geq c_2 - c_1 > 0$ для $\forall n \in \mathbb{N}$.

Т.е. длины всех отрезков не меньше, чем $c_2 - c_1$. Получили противоречие с тем, что в последовательности есть отрезки сколь угодно малой длины. Значит, $c_1 = c_2$. ▶

3.2 Лемма о конечном покрытии (принцип Бореля – Лебега)

ЭмильБорель (1871 – 1956) – французский математик.
Анри Луи Лебег (1875 – 1941) – французский математик.

Определение 3.3. *Будем говорить, что система $S = \{X\}$ множеств X покрывает множество Y, если $Y \subset \bigcup\limits_{X \in S} X$. Подмножество множеств X системы S называется подсистемой системы S.*

Лемма 3.2. ***(о конечном покрытии)***. *Из любой системы интервалов, покрывающих отрезок, можно выделить конечную систему, покрывающую его.*

Доказательство. ◀ Пусть $I_1 = [a; b]$, $S = \{U\}$ – система интервалов, покрывающих отрезок I_1. Метод доказательства от противного. Предположим, что нельзя найти конечную подсистему в системе S, покрывающую отрезок I_1. Разделим отрезок I_1 пополам, обозначим через I_2 ту его половину, которую нельзя покрыть конечной подсистемой интервалов. Такая половина обязательно есть, так как в противном случае весь отрезок I_1 можно покрыть конечной подсистемой. Разделим I_2 пополам и обозначим через I_3 ту его половину, которую нельзя покрыть конечной подсистемой интервалов и т.д. Процесс продолжим до бесконечности. В результате деления получаем последовательность вложенных друг в друга отрезков, так как $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$.

Причем для $\forall n \in \mathbb{N}$ I_n не покрывается конечной подсистемой интервалов. Найдем длины отрезков последовательности

$$|I_1| = b - a \quad, |I_2| = \frac{1}{2}|I_1| = \frac{b-a}{2} \quad, |I_3| = \frac{1}{2}|I_2| = \frac{b-a}{2^2} \quad, \ldots,$$

$$|I_n| = \frac{1}{2}|I_{n-1}| = \frac{b-a}{2^{n-1}} \quad, \ldots .$$

Это означает, что в последовательности есть отрезки сколь угодно малой длины. По лемме о вложенных отрезках: $\exists c \in \mathbb{R}$ такая, что для $\forall n \in \mathbb{N}$ $c \in I_n$ причем такая точка c единственная.

$c \in I_1 = [a; b]$, поэтому в системе S есть интервал $(\alpha; \beta)$ покрывающий точку c $(\alpha < c < \beta)$. Обозначим $\varepsilon = \min\{\beta - c, c - \alpha\}$. Так как в последовательности есть отрезки сколь угодно малой длины, то существует отрезок I_k, длина которого $|I_k| < \varepsilon$. Точка $c \in I_k$, значит $I_k \subset (\alpha; \beta)$ и отрезок I_k покрывается интервалом $(\alpha; \beta)$ из системы S. Это противоречит тому, что I_k нельзя покрыть конечной подсистемой из S. ▶

3.3 Лемма о предельной точке (принцип Больцано – Вейерштрасса)

БернгардБольцано (1781 – 1848) – чешский философ и математик. Карл Вейерштрасс (1815 – 1897) – немецкий математик.

Определение 3.4. *Окрестностью точки $x_0 \in \mathbb{R}$ называется любой интервал U, содержащий эту точку. Обозначается $U(x_0)$.*

Определение 3.5. *Множества*

$$U_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R}|\ x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\} = \{x \in \mathbb{R}|\ |x - x_0| < \delta\},$$

$$\overset{0}{U}_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R}|\ x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, x \neq x_0\} = \{x \in \mathbb{R}|\ 0 < |x - x_0| < \delta\},$$

называются δ-окрестностью и проколотой δ-окрестностью точки x_0.

Определение 3.6. *Точка $a \in \mathbb{R}$ называется предельной точкой множества $M \subset \mathbb{R}$, если в любой ее окрестности находится бесконечно много точек множества M.*

Примеры. 1. $M = \{\frac{1}{n}|n \in \mathbb{N}\}$, точка $a = 0$ – предельная точка множества M.
2. $M = \{x \in \mathbb{R}|a < x < b\} = (a; b)$. $[a; b]$ – множество предельных точек множества M.
3. $M = \mathbb{Q}$. $\mathbb{R}$ – множество предельных точек для M.

Предельные точки могут принадлежать множеству, а могут и не принадлежать ему.

Лемма 3.3. ***(о предельной точке)***. *Всякое бесконечное ограниченное числовое множество имеет, по крайней мере, одну предельную точку.*

Доказательство. ◀ Так как множество M ограничено, то существует отрезок $[a;b]$ такой, что $M \subset [a;b]$. Докажем, что хотя бы одна точка отрезка $[a;b]$ является предельной точкой множества M. Предположим противное: все точки отрезка $[a;b]$ не являются предельными для множества M. Это означает, что для $\forall x \in [a;b]$ существует окрестность $U(x)$, в которой нет точек из M или их конечное число.

Совокупность этих окрестностей образует покрытие $\{U(x)\}$ отрезка $[a;b]$ интервалами. По лемме о конечном покрытии существует конечная подсистема окрестностей, покрывающая $[a;b]$, а значит и множество M. Однако в каждом интервале конечное число точек из M, поэтому в объединении интервалов $U(x)$ их тоже конечное число. Это означает, что множество M – конечное. Получили противоречие. ▶

3.4 Счетные множества. Несчетность множества $\mathbb{R}$

Определение 3.7. *МножествоM называется счетным, если оно равномощно множеству натуральных чисел N, т.е. $cardM = card\mathbb{N}$.*

Для того чтобы доказать, что множество M счетно, надо установить биекцию между множествами $\mathbb{N}$ и M, т.е. занумеровать элементы множества M (указать порядок следования элементов).

Примеры. 1. Множество целых чисел $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...\}$ счетно, т.к. его элементы можно занумеровать: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$, $x_4 = 2$, $x_5 = -2$, $x_6 = 3$, $x_7 = -3$, ...

Если n – четное число, то $x_n = \dfrac{n}{2}$, если нечетное, то $x_n = -\dfrac{n-1}{2}$.
2. Множество положительных рациональных чисел $\mathbb{Q}_+$ счетно. Установим порядок следования элементов во множестве $\mathbb{Q}_+$, как показано на рисунке 3.1.

Определение 3.8. *Множество M называется не более чем счетным, если оно конечно или счетно.*

Теорема 3.1. ***(Кантора)*** *Множество действительных чисел $\mathbb{R}$ несчетно ($card\mathbb{N} \neq card\mathbb{R}$).*

Доказательство. ◀ Докажем, что множество точек отрезка $[0; 1]$ несчетно. Предположим противное: точки отрезка $[0; 1]$ можно занумеровать, представить в виде последовательности x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...

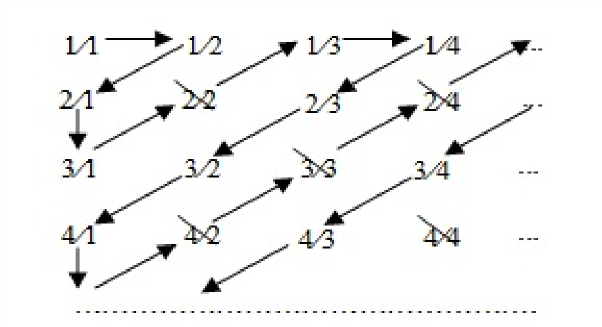

Рис. 3.1:

Выберем отрезок $I_1 \subset [0;1]$ такой, что $x_1 \notin I_1$. Выберем отрезок $I_2 \subset I_1$ такой, что $x_2 \notin I_2$. На n-м шаге: выберем отрезок $I_n \subset I_{n-1}$ такой, что $x_n \notin I_n$. Процесс продолжим до бесконечности. Получили:

$$[0;1] \supset I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots.$$

По лемме о вложенных отрезках: $\exists c \in I_n$ для $\forall n \in \mathbb{N}$, значит $c \in [0;1]$. Но $c \neq x_n$ для $\forall n \in \mathbb{N}$, т.е. не совпадает ни с одной точкой отрезка $[0;1]$. Получили противоречие. ►

3.5 Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте определение последовательности.
2. Что такое последовательность вложенных множеств?
3. Сформулируйте лемму о вложенных отрезках.
4. Дайте определение покрытия множества.
5. Сформулируйте лемму о конечном покрытии.
6. Образуют ли интервалы $(0;3)$, $(4;6)$ и $(7;8)$ покрытие отрезка $[2;5]$?
7. Дайте определение окрестности, δ-окрестности и проколотой δ-окрестности точки.
8. Сделайте геометрическую интерпретацию окрестности, δ-окрестности и проколотой δ-окрестности точки x_0.
9. Какая точка называется предельной точкой множества?
10. Пусть M – множество корней уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$. Имеет ли множество M предельные точки?
11. Пусть $M = \{x \in \mathbb{R} | 1 \leq x < 7\}$. Найдите предельные точки множества M.

12. Приведите пример множества, имеющего предельную точку, которая ему не принадлежит.

13. Сформулируйте лемму о предельной точке.

14. Дайте определение счетного множества. Приведите примеры счетных множеств.

15. Является ли счетным множество отрицательных рациональных чисел $\mathbb{Q}_-$?

16. Является ли счетным множество четных натуральных чисел?

17. Сформулируйте теорему Кантора.

ТЕМА 4
Предел числовой последовательности

4.1 Определение предела последовательности

Определение 4.1. *Числовой последовательностью называется функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, заданная на множестве натуральных чисел. Значение $f(n)$ функции f, соответствующее числу $n \in \mathbb{N}$, обозначается через x_n и называется n-м членом последовательности.*

Последовательность $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ с $x_n = f(n)$ может быть записана так: $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ или $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

Определение 4.2. *Число $A \in \mathbb{R}$ называется пределом последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, если для любого, сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется номер N, такой, что все члены последовательности с номерами $n > N$ удовлетворяют неравенству $|x_n - A| < \varepsilon$.*

Обозначается: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

$$\left(\lim_{n\to\infty} x_n = A\right) := (\forall\varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n > N \Rightarrow |x_n - A| < \varepsilon).$$

Неравенство $|x_n - A| < \varepsilon$ равносильно неравенству $A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon$. Поэтому с геометрической точки зрения тот факт, что число A является пределом последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ означает: в произвольную ε-окрестность точки A попадают все члены последовательности с номерами $n > N$ (где N зависит от ε), т.е. члены $x_{N+1}, x_{N+2}, \ldots$, а вне окрестности их находится разве лишь конечное число — $x_1, x_2, \ldots, x_N$.

Определение 4.3. ***(на языке окрестностей).***

$$(\lim_{n\to\infty} x_n = A) := (\forall U_\varepsilon(A),\ \exists N,\ \forall n > N \Rightarrow x_n \in U_\varepsilon(A)).$$

Последовательности, имеющие конечный предел, называются сходящимися, а последовательности, не имеющие предела, – расходящимися.

Пример 4.1. *Пользуясь определением предела последовательности, докажем, что*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4-2n}{n+3} = -2.$$

Согласно определению предела последовательности следует доказать, что для $\forall\varepsilon > 0$ *существует такой номер* N*, что все члены последовательности* $x_n = \dfrac{4-2n}{n+3}$ *с номерами* $n > N$ *удовлетворяют неравенству*

$$\left|\frac{4-2n}{n+3} + 2\right| < \varepsilon.$$

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ *и рассмотрим модуль:*

$$\left|\frac{4-2n}{n+3} + 2\right| = \frac{10}{n+3} < \frac{10}{n}.$$

Потребуем, чтобы $\dfrac{10}{n} < \varepsilon$*. Решая относительно* n *последнее неравенство, получаем* $n > \dfrac{10}{\varepsilon}$*. Сравнивая неравенства* $n > N$ *и* $n > \dfrac{10}{\varepsilon}$*, легко догадаться, что в качестве* N *можно взять* $N = \left[\dfrac{10}{\varepsilon}\right] + 1$*. В* *самом деле, если* $n > N = \left[\dfrac{10}{\varepsilon}\right] + 1$, *то* $n > \dfrac{10}{\varepsilon}$. *Значит, для всех номеров* $n > N$ *имеет место неравенство* $\dfrac{10}{n} < \varepsilon$. *А так как неравенство* $\left|\dfrac{4-2n}{n+3} + 2\right| < \varepsilon$ *является следствием неравенства* $\dfrac{10}{n} < \varepsilon$, *то оно также выполняется при* $n > N$.

Итак, по заданному $\varepsilon > 0$ *нашли* $N = \left[\dfrac{10}{\varepsilon}\right] + 1$ *такое, что выполнение неравенства* $n > N$ *влечет за собой выполнение неравенства* $\left|\dfrac{4-2n}{n+3} + 2\right| < \varepsilon$. *Заметим, что номер* N *зависит от* ε, *т.е. является функцией от* ε: $N = (\varepsilon)$.

Пример 4.2. *Пользуясь определением предела последовательности, докажем, что*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n^2+4} \neq 1.$$

Пользуясь правилом построения отрицания, заметим, что значит $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq A$. *Число* A *не является пределом последовательности* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, *если существует такое* $\varepsilon > 0$, *что для каждого номера* N *найдется* $n > N$, *для которого* $|x_n - A| \geq \varepsilon$.

Геометрически это означает, что существует такая ε*-окрестность точки* A, *вне которой находится бесконечно много членов последовательности.*

Для нахождения числа ε оценим общий член последовательности сверху:

$$\frac{n+1}{2n^2+4} < \frac{n+1}{2(n^2-1)} = \frac{1}{2(n-1)} \leq \frac{1}{2} \text{ при } n > 1.$$

Так как $x_1 = \frac{1}{3}$, то $x_n < \frac{1}{2}$ для $\forall n \in \mathbb{N}$. Значит, расстояние от точки 1 до каждого члена последовательности больше, чем $\frac{1}{2}$. Возьмем в качестве ε $\varepsilon = \frac{1}{2}$, тогда в ε-окрестности точки 1 нет ни одного члена последовательности. Чтобы убедиться в этом, достаточно решить неравенство:

$$\left|\frac{n+1}{2n^2+4} - 1\right| \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2n^2-n+3}{2n^2+4} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{n^2-n+1}{2n^2+4} \geq 0.$$

Так как $n^2 - n + 1 > 0$ для $\forall n \in \mathbb{N}$ и $2n^2 + 4 > 0$ для $\forall n \in \mathbb{N}$, то исходное неравенство справедливо для $\forall n \in \mathbb{N}$.

Итак, существует $\varepsilon = \frac{1}{2}$ такое, что при всех значениях $n \in \mathbb{N}$ выполняется $\left|\frac{n+1}{2n^2+4} - 1\right| \geq \frac{1}{2}$. Значит, число 1 не является пределом последовательности $x_n = \frac{n+1}{2n^2+4}$.

Пример 4.3. *Докажем, что последовательность $x_n = n^{(-1)^n}$ является расходящейся.*

$$x_n : 1, 2.\frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, 6, \frac{1}{7}, \ldots.$$

Если число A — предел последовательности, то, как следует из определения предела, в любой окрестности A лежат все члены последовательности, за исключением, может быть, конечного их числа.

Число $A \neq 0$ не может быть пределом данной последовательности, так как существует ε-окрестность радиуса $\varepsilon = \frac{|A|}{2}$, вне которой лежат все члены последовательности вида $\frac{1}{2k+1}$, для которых $\frac{1}{2k+1} < \frac{|A|}{2}$.

Число 0 тоже не может быть пределом этой последовательности, поскольку вне ε-окрестности нуля при $\varepsilon = 1$ имеется бесконечно много членов последовательности вида $2k$.

Будем говорить, что последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ стремится к $+\infty$, т.е. $x_n \to +\infty$, если для $\forall C \in \mathbb{R}\ \exists N$ такой, что для $\forall n > N$ выполняется $x_n > C$.

$$(x_n \to +\infty) := (\forall C \in \mathbb{R} \quad \exists N \quad \forall n > N \quad (x_n > C)).$$
$$(x_n \to -\infty) := (\forall C \in \mathbb{R} \quad \exists N \quad \forall n > N \quad (x_n < C)).$$
$$(x_n \to \infty) := (\forall C > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad (|x_n| > C)).$$

Последовательности указанных трех типов называются бесконечно большими.

4.2 Общие свойства предела последовательности

Определение 4.4. *Последовательность* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *называется постоянной, если* $\exists A \in \mathbb{R}$ *такое, что для* $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n = A$.

Определение 4.5. *Последовательность* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *называется финально постоянной, если* $\exists A \in \mathbb{R}$ *и номер* N *такие, что для* $\forall n > N$ *выполняется* $x_n = A$.

Определение 4.6. *Последовательность* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *называется ограниченной, если* $\exists M > 0$ *такое, что для* $\forall n \in \mathbb{N}$ *выполняется* $|x_n| \le M$.

Теорема 4.1. ***(общие свойства предела последовательности).***
1. Всякая финально постоянная последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *сходится.*
2. Если последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *имеет предел, то он единственный.*
3. Всякая сходящаяся последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *ограничена.*

Доказательство. ◀ 1. Так как последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ финально постоянная, то $\exists A \in \mathbb{R}$ и $N \in \mathbb{N}$ такие, что для $\forall n > N$ выполняется $x_n = A$. Значит, в любой окрестности $U_\varepsilon(A)$ находятся $x_n = A$ при $n > N$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

2. Предположим противное. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = B$ и $A \ne B$.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \quad \Rightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists N_1,\ \forall n > N_1 \text{ выполняется } |x_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = B \quad \Rightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists N_2,\ \forall n > N_2$ выполняется $|x_n - B| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Пусть $N = \max\{N_1, N_2\}$. Для $\forall n > N$ оценим:

$|A-B| = |A-x_n+x_n-B| \le |A-x_n|+|x_n-B| = |x_n-A|+|x_n-B| < < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Из неравенства $|A - B| < \varepsilon$ следует, что $A - B = 0$ (ε — любое сколь угодно малое положительное число), т.е. $A = B$. Пришли к противоречию.

3. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$. В соответствии с определением предела последовательности это означает, что для $\forall\varepsilon > 0\ \exists N$ такой, что для $\forall n > N$ выполняется $|x_n - A| < \varepsilon$. В частности, при $\varepsilon = 1$ будем иметь $|x_n - A| < 1$. Так как $|x_n| - |A| \le |x_n - A| < 1$, то $|x_n| < 1 + |A|$ для $n > N$. Обозначим $M = \max\{|x_1|, \dots, |x_N|, 1 + |A|\}$. Тогда для $\forall n \in \mathbb{N}$ выполняется $|x_n| \le M$. Следовательно, последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ является ограниченной. ▶

Замечание 4.1. *Ограниченность последовательности является лишь необходимым условием для ее сходимости, но не достаточным. Так, последовательность $x_n = (-1)^n$ является ограниченной ($|x_n| \le 1$ для $\forall n \in \mathbb{N}$), однако она расходится.*

Упражнение.

Пользуясь определением предела последовательности, докажите, что $x_n = (-1)^n$ предела не имеет.

4.3 Бесконечно малые последовательности

Определение 4.7. *Последовательность* $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ *называется бесконечно малой, если* $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, *т.е. для* $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$ *такой, что для* $\forall n > N$ *выполняется* $|\alpha_n| < \varepsilon$.

Теорема 4.2. ***(свойства бесконечно малых последовательностей).***
1. Сумма двух бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.
2. Произведение бесконечно малой последовательности и ограниченной последовательности есть последовательность бесконечно малая.

Доказательство. ◀ 1. Пусть $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(\beta_n)_{n=1}^{\infty}$ — бесконечно малые последовательности.

$\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \quad \Rightarrow \underline{\forall \varepsilon > 0}$, $\exists N_1$, $\forall n > N_1$ выполняется $|\alpha_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

$\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0 \quad \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists N_2$, $\forall n > N_2$ выполняется $|\beta_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Пусть $\underline{N = \max\{N_1, N_2\}}$. Для $\forall n > N$ оценим:

$|\alpha_n + \beta_n| \le |\alpha_n| + |\beta_n| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

Итак, для $\underline{\forall n > N}$ $\underline{|\alpha_n + \beta_n| < \varepsilon}$. Т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha_n + \beta_n) = 0$.

2. Пусть $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ — ограниченная последовательность. Значит, $\exists M > 0$ такое, что для $\forall n \in \mathbb{N}$ $|x_n| \le M$. Последовательность $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ — бесконечно малая: $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \quad \Rightarrow \underline{\forall \varepsilon > 0}$, $\underline{\exists N}$, $\forall n > N$ выполняется

$|\alpha_n| < \dfrac{\varepsilon}{M}$.

Тогда при $n > N$ $|\alpha_n \cdot x_n| = |\alpha_n| \cdot |x_n| < \dfrac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$.
Для $\underline{\forall n > N}$ выполняется $|\alpha_n \cdot x_n| < \varepsilon$. Т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \alpha_n = 0$. ▶

Следствие 4.1. *Сумма любого конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.*

Доказательство проводится аналогично доказательству утверждения 1 теоремы 2.

Следствие 4.2. *Произведение любого конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.*

Справедливость утверждения следует из того, что всякая бесконечно малая последовательность является ограниченной.

Теорема 4.3. ***(критерий связи последовательности, имеющей конечный предел, с бесконечно малой последовательностью).*** *Число A является пределом последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ тогда и только тогда, когда $x_n = A + \alpha_n$, где $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.*

Доказательство. ◀ *Необходимость.* Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$. Докажем, что $x_n = A + \alpha_n$, где $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ – бесконечно малая последовательность.

Кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A \quad \Rightarrow \underline{\forall\varepsilon > 0}, \ \underline{\exists N}, \ \underline{\forall n > N}$ выполняется $|x_n - A| < \varepsilon$.

Обозначим $x_n - A = \alpha_n$, тогда $x_n = A + \alpha_n$ и $|\alpha_n| < \varepsilon$. Значит $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Достаточность. Пусть $x_n = A + \alpha_n$, где $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ – бесконечно малая последовательность.

$\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \quad \Rightarrow \underline{\forall\varepsilon > 0}, \ \underline{\exists N}, \ \underline{\forall n > N}$ выполняется $|\alpha_n| < \varepsilon$.

$\alpha_n = x_n - A$. Значит, $\underline{|x_n - A| < \varepsilon}$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$. ▶

4.4 Предельный переход и арифметические операции

Теорема 4.4. *(об арифметических операциях над сходящимися последовательностями)* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *и* $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ *— числовые последовательности. Если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, *то:*

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = A + B$;

2. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = A \cdot B$;

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = \dfrac{A}{B}$, *если* $y_n \neq 0$ *для* $\forall n \in \mathbb{N}$ *и* $B \neq 0$.

Доказательство. ◀ 1. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, то по теореме 4.3 $x_n = A + \alpha_n$, $y_n = B + \beta_n$, где $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(\beta_n)_{n=1}^{\infty}$ — бесконечно малые последовательности. Тогда $x_n + y_n = A + B + (\alpha_n + \beta_n)$.

Согласно утверждению 1 теоремы 4.2 $(\alpha_n + \beta_n)_{n=1}^{\infty}$ — бесконечно малая последовательность. Тогда по теореме 4.3 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = A + B$.

2. $x_n \cdot y_n = (A + \alpha_n) \cdot (B + \beta_n) = A \cdot B + A \cdot \beta_n + B \cdot \alpha_n + \alpha_n \cdot \beta_n$.

Последовательности $(A)_{n=1}^{\infty}$, $(B)_{n=1}^{\infty}$ — постоянные, следовательно, сходящиеся и ограниченные. Используя свойства бесконечно малых последовательностей, заключаем, что $(A\cdot\beta_n + B\cdot\alpha_n + \alpha_n\cdot\beta_n)_{n=1}^{\infty}$ — бесконечно малая последовательность. Тогда по теореме 4.3 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = A \cdot B$.

3. $$\frac{x_n}{y_n} = \frac{A + \alpha_n}{B + \beta_n} = \frac{A}{B} + \left(\frac{A + \alpha_n}{B + \beta_n} - \frac{A}{B}\right) = \frac{A}{B} + \frac{B \cdot \alpha_n - A \cdot \beta_n}{B \cdot (B + \beta_n)} =$$

$$= \frac{A}{B} + \frac{1}{B}(B \cdot \alpha_n - A \cdot \beta_n) \cdot \frac{1}{y_n}.$$

$\left(\dfrac{1}{B}\right)_{n=1}^{\infty}$ — постоянная последовательность, $(B \cdot \alpha_n - A \cdot \beta_n)_{n=1}^{\infty}$ — бесконечно малая последовательность. Покажем, что $\left(\dfrac{1}{y_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ — ограниченная последовательность.

$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B \quad \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \left(\varepsilon = \dfrac{|B|}{2}\right), \ \exists N, \ \forall n > N$ выполняется $|y_n - B| < \dfrac{|B|}{2}$.

$$|B| - |y_n| \leq |y_n - B| < \frac{|B|}{2}.$$

Откуда $|y_n| > \dfrac{|B|}{2}$ или $\left|\dfrac{1}{y_n}\right| < \dfrac{2}{|B|}$ при $n > N$. Обозначим $M = \max\{\dfrac{1}{|y_1|}, \dfrac{1}{|y_2|}, \ldots, \dfrac{1}{|y_N|}, \dfrac{2}{|B|}\}$. Тогда для $\forall n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство $\left|\dfrac{1}{y_n}\right| \leq M$, что означает ограниченность последовательности $\left(\dfrac{1}{y_n}\right)_{n=1}^{\infty}$. Таким образом, $\dfrac{1}{B}(B \cdot \alpha_n - A \cdot \beta_n) \cdot \dfrac{1}{y_n}$ — общий член бесконечно малой последовательности (свойства бесконечно малых последовательностей). Поэтому согласно теореме 4.3 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = \dfrac{A}{B}$. ►

4.5 Предельный переход и неравенства

Теорема 4.5. ***(о предельном переходе в неравенствах).*** *1. Пусть $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ — сходящиеся последовательности и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$. Если $A < B$, то $\exists N$ такой, что для $\forall n > N$ имеет место неравенство $x_n < y_n$.*
2. Пусть $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$, $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ — числовые последовательности и $\exists N$ такой, что для $\forall n > N$ выполняется неравенство

$$x_n \le y_n \le z_n, \tag{4.1}$$

причем $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$.

Доказательство. ◀ 1. Очевидно, что $\exists C$ такое, что $A < C < B$.
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ $\forall \varepsilon > 0$ $(\varepsilon = C - A)$, $\exists N_1$, $\forall n > N_1$ выполняется $|x_n - A| < C - A$ или

$$2A - C < x_n < C. \tag{4.2}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$ $\forall \varepsilon > 0$ $(\varepsilon = B - C)$, $\exists N_2$, $\forall n > N_2$ выполняется $|y_n - B| < B - C$ или

$$C < y_n < 2B - C. \tag{4.3}$$

Пусть $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда для $\forall n > N$ одновременно имеют место неравенства (4.2) и (4.3). Из этих неравенств следует, что $x_n < y_n$ при $n > N$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ $\underline{\forall\varepsilon > 0}$, $\exists N_1$, $\forall n > N_1$ выполняется $|x_n - A| < \varepsilon$ или

$$A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon. \tag{4.4}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$ $\varepsilon > 0$, $\exists N_2$, $\forall n > N_2$ выполняется $|z_n - A| < \varepsilon$ или

$$A - \varepsilon < z_n < A + \varepsilon. \tag{4.5}$$

Пусть $\underline{N = \max\{N, N_1, N_2\}}$. Тогда для $\underline{\forall n > N}$ одновременно имеют место неравенства (4.1), (4.4) и (4.5): $A-\varepsilon < x_n \le y_n \le z_n < A+\varepsilon$. Откуда $A - \varepsilon < y_n < A + \varepsilon$ или $\underline{|y_n - A| < \varepsilon}$. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$. ►.

Следствие 4.3. *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$. *Если* $\exists N$ *такое, что для* $\forall n > N$*:*

а) $x_n < y_n$, *то* $A \le B$;

б) $x_n \le y_n$, *то* $A \le B$;

в) $x_n < B$, *то* $A \le B$;

г) $x_n \le B$, *то* $A \le B$.

Доказательство. ◄ Утверждения а) и б) получаются из пункта 1 теоремы 4.5, применяя метод от противного. Утверждения в) и г) – частные случаи пунктов а) и б) при $y_n = B$ ►

Замечание 4.2. *При переходе к пределу в строгом неравенстве можем получить знак равенства. Так,* $x_n = \dfrac{1}{n} > y_n = -\dfrac{1}{n}$, *но* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

4.6 Подпоследовательность

Определение 4.8. *Подпоследовательностьюпоследовательности* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *называется последовательность* $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, *полученная произвольным выбором из данной последовательности бесконечного числа членов, взятых в том порядке, в котором они находятся в последовательности* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

n_k *— номер члена в последовательности, а* k *— его номер в подпоследовательности. Из определения подпоследовательности вытекает справедливость следующих неравенств:* $n_k \geq k$, $n_1 < \ldots < n_k < \ldots$.

Теорема 4.6. ***(о пределе подпоследовательности сходящейся последователь*** *Если последовательность* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *сходится к числу* A, *то любая ее подпоследовательность также сходится к* A.

Доказательство. ◀ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A \quad \Rightarrow \underline{\forall\varepsilon > 0}, \exists N, \forall n > N$ выполняется неравенство $|x_n - A| < \varepsilon$. Пусть $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ — любая подпоследовательность последовательности $(x_n)_{k=1}^{\infty}$. Так как множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ не ограничено сверху, то $\underline{\exists K \in \mathbb{N}}$, такое что $K > N$. Из определения подпоследовательности следует, что $n_k > K > N$. Так как $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$, то для $\forall k > K$ выполняется $n_k > n_K$. Итак, для $\underline{\forall k > K}$ $n_k \geq n_K \geq K > N$. Следовательно, $\underline{|x_{n_k} - A| < \varepsilon}$. Значит, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = A$. ▶

Кафедра

математического анализа и дифференциальных уравнений

Следствие 4.4. *Пусть $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ и $(x_{n_m})_{m=1}^{\infty}$ – подпоследовательности последовательности $(x_n)_{k=1}^{\infty}$. Если $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = A$, $\lim\limits_{m\to\infty} x_{n_m} = B$ и $A \neq B$, то последовательность $(x_n)_{k=1}^{\infty}$ не имеет предела.*

Доказательство. ◀ Проводится методом от противного. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = C$, тогда по теореме 4.6 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim\limits_{m\to\infty} x_{n_m} = C$, т.е. $A = B = C$. ▶

Теорема 4.7. ***(критерий предельной точки).*** *Точка α является предельной точкой множества $E \subset \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда из множества E можно извлечь последовательность точек, отличных друг от друга и от точки α, сходящуюся к α.*

Доказательство.◀ *Необходимость.* Так как α – предельная точка множества E, то согласно определению предельной точки в любой окрестности точки α находится бесконечно много точек множества E. Рассмотрим окрестности радиусов $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \ldots, \dfrac{1}{n}, \ldots$. В окрестности $U_1(\alpha)$ выберем точку $x_1 \in E$, $x_1 \neq \alpha$. Для нее имеет место неравенство $|x_1 - \alpha| < 1$. В окрестности $U_{\frac{1}{2}}(\alpha)$ возьмем точку $x_2 \in E$, $x_2 \neq \alpha$, $x_2 \neq x_1$. Для нее имеем $|x_2 - \alpha| < \frac{1}{2}$. На n-м шаге: в $U_{\frac{1}{n}}(\alpha)$ выберем $x_n \in E$, $x_n \neq \alpha$, $x_n \neq x_1$, $x_n \neq x_2$, ..., $x_n \neq x_{n-1}$. Для нее выполняется неравенство $|x_n - \alpha| < \dfrac{1}{n}$. Процесс продолжим до бесконечности.

Получили последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ точек из E, отличных друг от друга и от точки α. Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$. Возьмем $\underline{\forall\varepsilon > 0}$. Очевидно, что $\exists n \in \mathbb{N}$ такое, что $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$. Положим, $\underline{N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1}$, тогда для $\underline{\forall n > N}$ выполняется $n > \dfrac{1}{n}$ или $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$. По построению окрестностей точки α $|x_n - \alpha| < \dfrac{1}{n} < \varepsilon$. Поэтому $\underline{|x_n - \alpha| < \varepsilon}$. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$.

Достаточность. Дано, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$. По определению предела последовательности это означает, что в любой окрестности точки α находится бесконечно много членов последовательности, т.е. точек множества E. Значит, α – предельная точка множества E. ▶

Теорема 4.8. ***(Больцано–Вейерштрасса о сходящейся подпоследовательнос*** *Из всякой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. ◀ Пусть $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – ограниченная последовательность. Тогда множество $\{x_n\}$ элементов последовательности ограничено. Ограниченные последовательности могут быть двух видов.

1. Множество $\{x_n\}$ элементов последовательности конечное, т.е. в последовательности есть хоть один член, который бесконечно много раз повторяется. Взяв в качестве члена подпоследовательности этот член, получим сходящуюся подпоследовательность.

2. В последовательности нет членов, бесконечно много раз повторяющихся. Значит, $\{x_n\}$ – бесконечное, ограниченное множество. По лемме о предельной точке (принцип Больцано–Вейерштрасса) существует точка α – предельная для множества $\{x_n\}$. Согласно теореме 4.7 из множества $\{x_n\}$ можно извлечь последовательность точек, отличных друг от друга и от точки α, сходящуюся к α, т.е. существует последовательность $(x_{k_m})_{m=1}^{\infty}$, $\lim\limits_{m\to\infty} x_{k_m} = \alpha$. Однако последовательность $(x_{k_m})_{m=1}^{\infty}$ может и не быть подпоследовательностью последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, так как в ней может быть нарушен порядок следования элементов по отношению к $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Поэтому построим новую последовательность $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$. В качестве ее первого члена возьмем x_{k_1}, т.е. $x_{n_1} = x_{k_1}$. В качестве второго члена возьмем x_{k_2}, если $k_2 > k_1$, если нет, то x_{k_3} и т.д. Построенная последовательность $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ является подпоследовательностью последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, так как в ней сохраняется порядок следования элементов и $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ является подпоследовательностью для $(x_{k_m})_{m=1}^{\infty}$, поэтому $x_{n_k} \to \alpha$. Итак, из последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ извлекли сходящуюся подпоследовательность $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$. ▶

4.7 Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте определение числовой последовательности.

2. Сформулируйте определение предела последовательности. Дайте геометрическую интерпретацию этого определения.

3. Покажите на примере, что номер N, фигурирующий в определении предела последовательности, зависит, вообще говоря, от ε.

4. Какая последовательность называется сходящейся, расходящейся?

5. Пусть последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ и число A удовлетворяют условию: $\exists N$ такой, что для $\forall \varepsilon > 0$ и $\forall n > N$ выполняется $|x_n - A| < \varepsilon$. Всякая ли сходящаяся к A последовательность удовлетворяет этому условию?

6. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$.
   а) Могут ли все члены последовательности быть положительными, если $\alpha = 0$?
   б) Может ли последовательность иметь бесконечно много отрицательных членов, если $\alpha > 0$
   в) Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \alpha$.

7. Пусть в некоторой окрестности точки α лежит бесконечно много членов последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Следует ли из этого условия,

что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$?

8. Пусть в любой окрестности точки α лежит бесконечно много членов последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Следует ли отсюда, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$?

9. Пусть последовательность сходится. Является ли сходящейся последовательность, которая получается из исходной, если:
а) из нее удалить конечное число членов, а оставшиеся заново перенумеровать в порядке их следования;
б) к ней добавить конечное число членов, перенумеровав члены последовательности в порядке их следования;
в) в ней изменить произвольным образом конечное число членов?

10. Дайте определение финально постоянной последовательности.

11. Сформулируйте на языке «$\varepsilon - N$» определение того, что число A не является пределом последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, и дайте геометрическую интерпретацию этого определения.

12. Дайте определение ограниченной последовательности.

13. Сформулируйте необходимое условие сходимости последовательности.

14. Докажите, что сходящаяся последовательность имеет один предел.

15. Пусть последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится и $M = \sup\{x_n\}$, $m = \inf\{x_n\}$. Докажите, что: либо $\exists n$ такое, что $x_n = M$; либо $\exists k$ такое, что $x_k = m$; либо $\exists n$ и k такие, что $x_n = M$, $x_k = m$. Приведите примеры последовательностей всех трех типов.

16. Сформулируйте определение бесконечно малой последовательности и свойства бесконечно малых последовательностей.

17. Пусть бесконечное число членов последовательности находится в любой окрестности нуля. Следует ли из этого, что последовательность является бесконечно малой?

18. Является ли бесконечно малая последовательность ограниченной?

19. Известно, что для $\forall n \in \mathbb{N}$ $y_n \neq 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$. Может ли последовательность $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ быть:
а) бесконечно малой;
б) бесконечно большой;
в) сходящейся?
Приведите примеры.

20. Пусть $(x_n+y_n)_{n=1}^{\infty}$ – бесконечно малая последовательность. Следует ли из этого, что $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ – бесконечно малые последовательности?

21. Пусть $(x_n \cdot y_n)_{n=1}^{\infty}$ – бесконечно малая последовательность. Следует ли отсюда, что хотя бы одна из последовательностей $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ – бесконечно малая?

22. Докажите, что если $x_n \geq y_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

23. Известно, что последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится, а $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ – бесконечно большая. Может ли последовательность $(x_n \cdot y_n)_{n=1}^{\infty}$

    а) сходиться;

    б) расходиться, но быть ограниченной;

    в) быть бесконечно большой;

    г) быть бесконечно малой?

    Ответьте на эти вопросы, используя в качестве примеров последовательности $x_n = n$, $x_n = \dfrac{n-1}{n}$, $x_n = \dfrac{1}{n}$, $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, $x_n = \dfrac{1}{n^2}$.

24. Пусть последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится, а $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ расходится. Докажите, что $(x_n + y_n)_{n=1}^{\infty}$ расходится, $(cx_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится, $(cy_n)_{n=1}^{\infty}$ расходится при $c \neq 0$. Покажите на примерах, что последовательность $(x_n \cdot y_n)_{n=1}^{\infty}$ может сходиться, а может и расходиться.

25. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$ и для $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n > b$. Следует ли отсюда, что $\alpha > b (a \geq b)$?

26. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$, а последовательность $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ расходится.

Докажите, что $(y_n \cdot z_n)_{n=1}^{\infty}$ расходится.

27. Даны последовательности $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$, $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n=1}^{\infty}$, $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$, $\left(\frac{1}{n+100}\right)_{n=1}^{\infty}$. Выберите из этих бесконечно малых последовательностей такие, что:
а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$;
б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 1$;
в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \infty$;
г) $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ расходится, но ограничена.

28. Дайте определение подпоследовательности.

29. Сформулируйте теорему о пределе подпоследовательности сходящейся последовательности.

30. Пользуясь следствием из теоремы 4.6, докажите расходимость последовательности $x_n = (-1)^n$.

31. Дайте определение предельной точки множества.

32. Является ли точка $x = \dfrac{1}{2}$ предельной для множества членов последовательности $x_n = \dfrac{1}{n}$?

33. Сформулируйте критерий предельной точки.

34. Является ли предел последовательности предельной точкой для множества ее членов?

35. Даны последовательности $x_n = n((-1)^n + 1)$, $x_n = n$, $x_n = (-1)^n + 1$. Укажите, какая из них имеет предельную точку, не имеет предельной точки, имеет две предельные точки.

36. Верно ли утверждение: «Если последовательность имеет единственную предельную точку, то она сходится?»

37. Сформулируйте теорему Больцано—Вейерштрасса.

38. Верно ли утверждение: «Если последовательность не ограничена, то из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность»?

39. Докажите, что из любой неограниченной последовательности можно выделить бесконечно большую подпоследовательность.

40. Докажите, что любая подпоследовательность бесконечно большой последовательности является бесконечно большой.

ТЕМА 5
Существование предела последовательности

5.1 Критерий Коши сходимости числовой последовательности

Определение 5.1. *Последовательность*$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *называется фундаментальной, или последовательностью Коши, если для* $\forall\varepsilon > 0$ *найдется такой номер* N*, что для всех номеров* n *и* m*, удовлетворяющих условию* $n > N$*,* $m > N$ *справедливо неравенство* $|x_m - x_n| < \varepsilon$*.*

Это определение эквивалентно следующему.

Определение 5.2. *Последовательность* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *называется фундаментальной, если для* $\forall\varepsilon > 0$ $\exists N$ *такое, что для* $\forall n > N$ *и* $\forall p \in \mathbb{N}$ *выполняется неравенство* $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$*.*

Для того, чтобы убедиться в равносильности этих определений, достаточно положить $p = m - n$, если $m > n$, и $p = n - m$, если $n > m$. Геометрическая интерпретация данных определений состоит в следующем: если последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальная, то для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что расстояние между любыми двумя членами последовательности с номерами, большими, чем N, меньше ε.

Теорема 5.1. ***(критерий Коши существования предела последовательности***

Числовая последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальная.

Доказательство. ◀ *Необходимость.* Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$. Тогда $\underline{\forall\varepsilon > 0}$, $\underline{\exists N}$, $\underline{\forall n > N}$ выполняется $|x_n - A| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, $\underline{\forall m > N}$ выполняется $|x_m - A| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Оценим

$$|x_m - x_n| = |x_m - A + A - x_n| \le |x_m - A| + |A - x_n| = |x_m - A| + |x_n - A| < \varepsilon.$$

Получили $\underline{|x_m - x_n| < \varepsilon} \Rightarrow (x_n)_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальная.

Достаточность. Так как последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ фундаментальная, то для $\underline{\forall\varepsilon > 0}$, $\exists N$, $\forall n > N$ $\forall m > N$ имеет место неравенство $|x_n - x_m| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Зафиксируем $m = m_0 > N$. Тогда для $\forall n > N$ выполняется $|x_n - x_{m_0}| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ или $|x_n| - |x_{m_0}| \le |x_n - x_{m_0}| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Откуда $|x_n| < |x_{m_0}| + \dfrac{\varepsilon}{2}$ для $\forall n > N$. Положим $\varepsilon = 1$ и $K = \max\left\{\dfrac{1}{2} + |x_{m_0}|, |x_1|, \ldots, |x_N|\right\}$, тогда для $\forall n \in \mathbb{N}$ выполняется $|x_n| \le K$. Значит, последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – ограниченная. По теореме Больцано – Вейерштрасса из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$. Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \alpha$.

Докажем, что последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ также сходится к числу

α. Так как $x_{n_k} \to \alpha$ при $k \to \infty$, то для $\varepsilon > 0$ $\exists K \in \mathbb{N}$ такой, что для $\forall k > K$ выполняется $|x_{n_k} - A| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Из определения подпоследовательности следует, что $n_k \geq k > K$. Тогда для $\forall n_k > K$ имеет место неравенство $|x_{n_k} - \alpha| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Пусть $\underline{\overline{N} = \max\{N, K\}}$, тогда для $\forall m > \overline{N}$, $\underline{\forall n > \overline{N}}$, $\forall n_k > \overline{N}$ справедливы неравенства $|x_n - x_m| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ и $|x_{n_k} - \alpha| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Возьмем $m = n_k$, тогда: $|x_n - \alpha| = |x_n - x_m + x_m - \alpha| \leq |x_n - x_m| + |x_m - \alpha| = |x_n - x_m| + |x_{n_k} - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Получили $\underline{|x_n - \alpha| < \varepsilon.}$ Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$ и последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится. ▶

Пример 5.1. *Докажем, что последовательность $x_n = (-1)^n$ не имеет предела, так как не является фундаментальной. Надо показать, что $\exists \varepsilon > 0$ такое, что для $\forall N$ $\exists n > N$ и $\exists m > N$ и имеет место неравенство $|x_m - x_n| \geq \varepsilon$.*

Возьмем $\varepsilon = 1$, тогда для $\forall N$, $\exists m = N+1$ и $\exists n = N+2$ такие, что

$$|x_m - x_n| = |x_{N+1} - x_{N+2}| = |1 - (-1)| = 2 > \varepsilon = 1.$$

Пример 5.2. *Докажем, что последовательность с общим членом*

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$$

не является фундаментальной.

Для $\forall n \in \mathbb{N}$ оценим снизу

$$|x_{2n} - x_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{n+n} + \ldots + \frac{1}{n+n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Итак, $\exists \varepsilon = \frac{1}{2}$ *и для* $\forall N\ \exists n > N$, $\exists m = 2n > N$ *такие, что* $|x_m - x_n| > \frac{1}{2}$. *Данная последовательность является расходящейся.*

Пример 5.3. *Докажем, что последовательность* $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$ *является фундаментальной. Для этого оценим* $|x_{n+p} - x_n|$:

$$\begin{gathered}|x_{n+p} - x_n| = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{n(n+1)} + \\ + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \\ + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right) = \\ = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} = \frac{p}{n(n+p)} < \frac{n+p}{n(n+p)} = \frac{1}{n}.\end{gathered} \tag{5.1}$$

Получили, что для $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall p \in \mathbb{N}$ *имеем* $|x_{n+p} - x_n| < \frac{1}{n}$.

Выберем $\forall \varepsilon > 0$ *и потребуем, чтобы было* $\frac{1}{n} < \varepsilon$. *Из последнего неравенства находим, что* $n > \frac{1}{\varepsilon}$. *Положим* $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. *Тогда для* $\forall n > N$ *будет выполняться неравенство* $n > \frac{1}{\varepsilon}$ *или* $\frac{1}{n} < \varepsilon$. *Значит,* для $\forall n > N$ и $\forall p \in \mathbb{N}$ имеет место соотношение $|x_{n+p} - x_n| < \dfrac{1}{n} < \varepsilon$. Это доказывает фундаментальность последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, и в силу критерия Коши делаем вывод, что данная последовательность является сходящейся.

5.2 Критерий существования предела монотонной последовательности

Определение 5.3. *Последовательность* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *называется возрастающей, если для* $\forall n \in \mathbb{N}$ *выполняется* $x_n < x_{n+1}$*; неубывающей, если для* $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n \le x_{n+1}$*; убывающей, если для* $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n > x_{n+1}$*; невозрастающей, если для* $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n \ge x_{n+1}$*. Эти последовательности называются монотонными.*

Определение 5.4. *Последовательность* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *называется ограниченной сверху (снизу), если* $\exists M \in \mathbb{R}$ *такое, что для* $\forall n \in \mathbb{N}$ *имеет место неравенство* $x_n \le M$ $(x_n \ge M)$*.*

Теорема 5.2. ***(критерий Вейерштрасса существования предела монотонно*** *Неубывающая последовательность имеет предел тогда и только тогда, когда она ограничена сверху.*

Доказательство. ◄ *Необходимость.* Так как последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ имеет предел, то по свойству сходящихся последовательностей она ограничена. Значит, она ограничена сверху.

Достаточность. Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ограничена сверху, поэтому ограничено сверху множество членов последовательности $\{x_n\}$. По лемме существования точной верхней грани $\exists \sup\limits_{n \in N}\{x_n\} = s$.

Из определения точной верхней грани следует, что для $\underline{\forall \varepsilon > 0}$, $\underline{\exists N}$

такой, что $s-\varepsilon < x_N \le s$.

Так как последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ неубывающая, то для $\forall n > N$ $x_n \ge x_N$. Тогда $s-\varepsilon < x_N \le x_n \le s$ или $s-\varepsilon < x_n < s+\varepsilon$, т.е. $|x_n - s| < \varepsilon$. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = s$. ▶

Замечание 5.1. *Аналогичное утверждение имеет место для невозрастающей, ограниченной снизу последовательности. В этом случае* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\limits_{n\in N}\{x_n\}$.

Пример 5.4. *Докажем, что последовательность*

$$x_n = \frac{1}{3+1} + \frac{1}{3^2+2} + \frac{1}{3^3+3} + \ldots + \frac{1}{3^n+n}$$

имеет предел. Исследуем последовательность на монотонность. Так как $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{3^{n+1}+(n+1)}$, *и* $\dfrac{1}{3^{n+1}+(n+1)} > 0$ *при* $\forall n \in \mathbb{N}$, *то* $x_{n+1} > x_n$ *для* $\forall n \in \mathbb{N}$. *Значит, последовательность является возрастающей. Докажем, что последовательность ограничена сверху. Оценим сверху* x_n:

$$\begin{aligned} x_n = \frac{1}{3+1} + \frac{1}{3^2+2} + \ldots + \frac{1}{3^n+n} < \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \\ + \frac{1}{3^n} < \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^n} + \ldots = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Итак, для $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n < \dfrac{1}{2}$.

Данная последовательность является возрастающей и ограниченной сверху. Поэтому согласно теореме 5.2 имеет предел.

5.3 Число e

Докажемсуществование предела у последовательности $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Рассмотрим вспомогательную последовательность $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Исследуем последовательность $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ на монотонность и ограниченность. Оценим:

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+2}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{(n+1)^{2n+3}}{n^{n+1}(n+2)^{n+2}} = \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+2}\cdot$$

$$\cdot\frac{n}{n+1} = \left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n+2}\cdot\frac{n}{n+1} = \left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2}\cdot\frac{n}{n+1}.$$

Для дальнейшей оценки воспользуемся неравенством Я. Бернулли:

$(1+h)^n \geq 1+hn$, где $n\in\mathbb{N}$, $h>-1$.

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} \geq \left(1+\frac{n+2}{n(n+2)}\right)\cdot\frac{n}{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{n}{n+1} = \frac{n+1}{n}\cdot\frac{n}{n+1} = 1.$$

Итак, для $\forall n\in\mathbb{N}$ $\frac{y_n}{y_{n+1}} \geq 1$, т.е. $y_n \geq y_{n+1}$ $(\forall n\in\mathbb{N}\ y_n>0)$. Значит, последовательность $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ невозрастающая.

Так как для $\forall n\in\mathbb{N}$ $y_n>0$, то последовательность $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ ограничена снизу. Согласно теореме 5.2 последовательность $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ имеет предел. Очевидно, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} y_n \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Последовательность $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ имеет предел.

Определение 5.5. $e := \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

5.4 Частичный предел последовательности

Определение 5.6. *Число (или символ $+\infty$, $-\infty$) называется частичным пределом последовательности, если в ней есть подпоследовательность, сходящаяся к этому числу.*

Определение 5.7. *Наименьший из всех частичных пределов последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называется ее нижним пределом и обозначается $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$, наибольший из частичных пределов называется верхним пределом и обозначается $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$.*

5.5 Некоторые приложения теории последовательностей в экономике

Проиллюстрируем введенные понятия последовательности и ее предела на экономическом примере из финансовой математики. Мы рассмотрит последовательности сумм накопления в схеме простых и сложных процентов и выясним роль числа е в зависимости годовой суммы накоплений от числа начислений процентов.

Простейший вид финансовой сделки – представление в долг некоторой суммы x_0 при условии, что через период T будет возвращена сумма $x_1 = x_0(1+p)$. Величина px_0 называется добавленным процентом, а p – ставкой процента за время T. При вычислении суммы накопления за несколько базовых периодов nT применяют схему простых или сложных процентов.

В схеме простых процентов для вычисления суммы накопления через n периодов используется формула

$$x_n = x_{n+1} + px_0 = x_0 + n(px_0)$$

В данной схеме процент px_0 за каждый базовый период T начисляется только на начальную сумму x_0.

В схеме сложных процентов сумма накопления через n периодов вычисляется по формуле

$$x_n = x_{n-1} + px_{n-1} = (1+p)x_{n-1} = (1+p)^n x_0.$$

Здесь за каждый период T процент px_{n-1} начисляется на всю накопленную к началу этого периода сумму x_{n-1}.

Предположив, что процесс накопления вклада бесконечен, получим последовательность накопительных сумм (x_n), которая представляет собой либо арифметическую прогрессию $(x_0+n(px_0))$ с разностью $d = px_0$, если процент простой, либо геометрическую прогрессию $(x_0(1+p)^n)$ со знаменателем $q = 1 + p > 1$, если процент сложный. Последовательность (x_n) является бесконечно большой. Экономическое содержание этого факта заключается в следующем: за конечное время (возможно очень большое) сумма накопления превзойдет любое сколь угодно большое наперед заданное значение.

При начислении сложного процента обычно в качестве базового периода T берут один год и через p обозначают годовую ставку процента. Сложный процент, как правило, начисляется n раз в году через равные промежутки времени. При этом ставка за один промежуток составляет $p_n = \dfrac{p}{n}$. Число начислений n для различных видов вкладов различно. Выясним, как изменяется годовая сумма накопления

$$x_n = x_0(1 + p_n)^n$$

при увеличении числа начислений n. Решение этого вопроса сводится к пределу

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Предположим, что годовая ставка $p = 1$ (100% годовых). В таблице приведены значения ставки процента $p_n = \dfrac{p}{n}$ за промежуток между начислениями, а также годовой суммы налепления

$$x_n = x_0\left(1 + \frac{p}{n}\right)^n$$

в расчете на один рубль начальной суммы x_0.

n	p_n	x_n
1	1	$x_1 = 1\text{руб.}\left(1+\dfrac{1}{1}\right)^1 = 2$ руб.
2	$\dfrac{1}{2}$	$x_2 = 1\text{руб.}\left(1+\dfrac{1}{2}\right)^2 = 2,25$ руб.
4	$\dfrac{1}{4}$	$x_4 = 1\text{руб.}\left(1+\dfrac{1}{4}\right)^4 = 2,44$ руб.
12	$\dfrac{1}{12}$	$x_{12} = 1\text{руб.}\left(1+\dfrac{1}{12}\right)^{12} = 2,61$ руб.
....	....	....
n	$\dfrac{1}{n}$	$x_n = 1\text{руб.}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$
....	....	....

Неограниченно увеличивая число начислений n, можно построить последовательность (x_n) годовых сумм накопления, ее общий член равен

Кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Эта последовательность возрастает, следовательно, рост числа начислений n ведет к росту годовой суммы накопления x_n, однако, так как $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, то годовая сумма x_n никогда не превзойдет число $e \approx 2.718\ldots$, сколь бы велико ни было число начислений n.

5.6 Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте два определения фундаментальной последовательности и докажите их эквивалентность.
2. Сформулируйте определение последовательности, которая не является фундаментальной.
3. Сформулируйте критерий Коши сходимости числовой последовательности.
4. Какие последовательности называются монотонными?
5. Сформулируйте критерий существования предела монотонной последовательности.
6. Является ли ограниченность последовательности необходимым и достаточным условием сходимости произвольной последовательности?
7. Дайте определение числа e.
8. Что такое частичный предел последовательности?
9. Сформулируйте определения верхнего и нижнего пределов последовательности.

ТЕМА 6
Предел функции

6.1 Определения предела функции

Пустьмножество $E \subset \mathbb{R}$, α – предельная точка множества E, функция $f : E \to \mathbb{R}$.

Определение 6.1. ***(по Коши или на языке*** *«$\varepsilon - \delta$»). Число A называется пределом функции f в точке α (при $x \to \alpha$), если для $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ такое, что для $\forall x \in E$ и $0 < |x - \alpha| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Пишут: $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = A$.*

$(\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = A) := (\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in E \wedge 0 < |x - \alpha| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon)$.

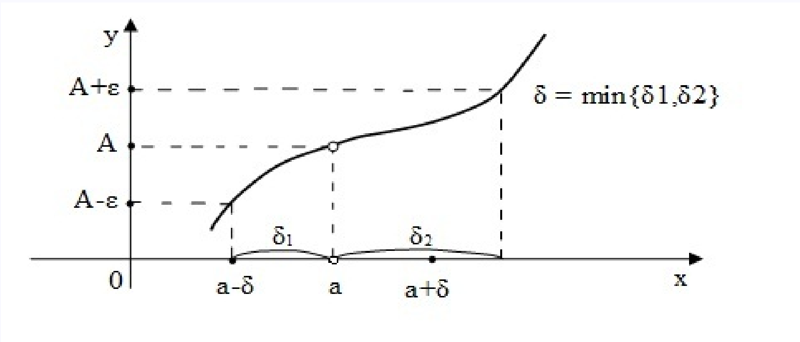

Рис. 6.1:

Геометрическая интерпретация определения 1 приведена на рисунке 6.1.

Пример 6.1. *Пусть* $E = \mathbb{R} \setminus 0$, $f(x) = x \cdot \sin \dfrac{1}{x}$. *Покажем, что* $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \dfrac{1}{x} = 0$. *Возьмем* $\forall \varepsilon > 0$ *и оценим* $\left| x \cdot \sin \dfrac{1}{x} \right| = |x| \cdot \left| \sin \dfrac{1}{x} \right| \leq$
$\leq |x| \cdot 1 = |x|$.

Потребуем, чтобы $|x| < \varepsilon$. *В качестве* δ *возьмем* $\delta = \varepsilon$. *Тогда из неравенства* $0 < |x| < \delta = \varepsilon$ *следует неравенство* $\left| x \cdot \sin \dfrac{1}{x} \right| < \varepsilon$.

Функция $f(x) = x \cdot \sin \dfrac{1}{x}$ *не определена в точке* $\alpha = 0$, *но имеет предел в этой точке. Тот факт, что* $0 \notin E$ *подчеркнут неравенством* $0 < |x|$.

Определение 6.2. *Окрестностью точки* α *называется любой интервал, содержащий эту точку, обозначается* $U(\alpha)$. *Проколотой окрестностью точки* α *называется окрестность без точки* α, *обозначается* $\overset{0}{U}(\alpha)$.

Используя понятие окрестности, определение 1 можно записать так:

$$\left(\lim_{x \to \alpha} f(x) = A \right) := \left(\forall V_\varepsilon(A)\ \exists \overset{0}{U}_\delta(\alpha)\ \forall x \in \overset{0}{U}_\delta(\alpha) \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(A) \right).$$

Учитывая, что в любой окрестности точки содержится некоторая симметричная δ-окрестность, можно дать следующее определение предела функции.

Определение 6.3. ***(на языке «окрестностей»).***

$$\left(\lim_{x\to\alpha} f(x) = A\right) := \left(\forall V(A)\ \exists \overset{0}{U}(\alpha) \Rightarrow f\left(\overset{0}{U}(\alpha)\right) \subset V(A)\right),$$

$f\left(\overset{0}{U}(\alpha)\right)$ – *образ окрестности* $\overset{0}{U}(\alpha)$ *при отображении* f.

Пример 6.2. *Покажем, что* $\lim\limits_{x\to 0} signx$ *не существует, т.е. для* $\forall A \in \mathbb{R}\ \exists V(A)$ *такая, что для* $\forall \overset{0}{U}(0)\ \exists x' \in \overset{0}{U}(0)$ *такой, что* $f(x') \notin V(A)$.

$$f(x) = signx = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Так как функция $signx$ *принимает только значения –1, 0, 1, то никакое число* A*, отличное от них, не может быть пределом функции, поскольку существует окрестность* $V(A)$*, не содержащая этих чисел.*

Если $A \in \{-1, 0, 1\}$*, то возьмем* $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ *и в* ε*-окрестность* $V_\varepsilon(A)$ *не попадут одновременно обе точки 1 и –1. Тогда в любой окрестности* $\overset{0}{U}(0)$ *найдется* $x' \in \overset{0}{U}(0)$ *такая, что* $f(x') \notin V_\varepsilon(A)$.

Определение 6.4. ***(по Гейне или на языке «последовательностей»).*** *Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке α (при $x \to \alpha$), если для любой сходящейся к α последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ такой, что $x_n \in E$, $x_n \neq \alpha$ соответствующая последовательность значений функции $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ сходится к A.*

$$\left(\lim_{x\to\alpha} f(x) = A\right) := (\forall (x_n)_{n=1}^{\infty},\ x_n \in E,\ x_n \neq \alpha,\ x_n \to \alpha \Rightarrow f(x_n) \to A).$$

Генрих Эдуард Гейне (1821–1881) – немецкий математик.

Пример 6.3. *Докажем, что $\lim\limits_{x\to\alpha} c = c$, где $c = const$. Возьмем любую последовательность $x_n \to \alpha$. Составим соответствующую последовательность значений функции: $f(x_n) = c$ – постоянная последовательность. Поэтому $f(x_n) \to c$. Согласно определению 6.4 $\lim\limits_{x\to\alpha} c = c$.*

Пример 6.4. *Докажем, что $\lim\limits_{x\to\alpha} x = \alpha$. Пусть $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – произвольная последовательность, сходящаяся к α. Соответствующая последовательность значений функции $f(x_n) = x_n$ также сходится к α. Следовательно, $\lim\limits_{x\to\alpha} x = \alpha$.*

Теорема 6.1. ***(об эквивалентности определений предела функции по Коши и по Гейне).*** *Определения предела функции по Коши и по Гейне эквивалентны.*

Доказательство. ◀ Пусть $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = A$ в смысле определения Гейне. Докажем, что число A является пределом функции $f(x)$ при $x \to \alpha$ в смысле определения Коши. Доказательство проведем методом от противного. Предположим, что число A не является пределом функции $f(x)$ при $x \to \alpha$ в смысле определения Коши. Это значит, что $\exists \varepsilon_0 > 0$ такое, что для $\forall \delta > 0$ найдется $x' \in E$ и $0 < |x' - \alpha| < \delta$, для которого будет выполняться неравенство $|f(x') - A| \geq \varepsilon_0$. Рассмотрим последовательность $(\delta_n)_{n=1}^{\infty}$, где $\delta_n = \dfrac{1}{n}$.

$$\delta_1 = 1 \ \exists x_1 \in E \ 0 < |x_1 - \alpha| < 1 \Rightarrow |f(x_1) - A| \geq \varepsilon_0,$$

$$\delta_2 = \frac{1}{2} \ \exists x_2 \in E \ 0 < |x_2 - \alpha| < \frac{1}{2} \Rightarrow |f(x_2) - A| \geq \varepsilon_0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\delta_n = \frac{1}{n} \ \exists x_n \in E \ 0 < |x_n - \alpha| < \frac{1}{n} \Rightarrow |f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

Получили последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, такую, что для $\forall n \in \mathbb{N}$ из неравенства $0 < |x_n - \alpha| < \dfrac{1}{n}$ следует $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$.

Очевидно, что при $n \to \infty$ $\delta_n = \dfrac{1}{n} \to 0$, тогда $x_n \to \alpha$. Согласно определению предела функций по Гейне, $f(x_n) \to A$. Это значит, что для $\forall \varepsilon > 0$, в часности для ε_0, $\exists N$ такой, что для $\forall n > N$ выполняется $|f(x_n) - A| < \varepsilon_0$. Пришли к противоречию с тем, что для $\forall n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$.

Пусть $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = A$ в смысле определения Коши. Докажем, что $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = A$ и в смысле определения Гейне. Из определения Коши следует, что $\underline{\forall\varepsilon > 0}$ $\exists\delta > 0$ $\forall x \in E$ $0 < |x - \alpha| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.

Возьмем любую последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ $x_n \to \alpha$ и $x_n \in E$, $x_n \neq \alpha$. По определению предела последовательности: для $\delta > 0$ $\underline{\exists N}$ такой, что для $\underline{\forall n > N}$ выполняется $0 < |x_n - \alpha| < \delta$.

Но тогда $\underline{|f(x_n) - A| < \varepsilon}$. Это означает, что $f(x_n) \to A$. Пришли к определению предела функции в смысле Гейне. ▶

Функция $f(x)$ может иметь в точке α только один предел, это следует из того, что последовательность $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ значений функции имеет только один предел.

Если существуют хотя бы две последовательности $(x'_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(x''_n)_{n=1}^{\infty}$, сходящиеся к α, но $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x''_n) = B$ и $A \neq B$, то предел функции $f(x)$ при $x \to \alpha$ не существует.

Пример 6.5. *Исходя из определения предела функции, докажем, что*

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 8}{x + 3} = -\frac{4}{5}.$$

Для доказательства будем пользоваться определением предела функции по Коши. Следуя этому определению, требуется доказать, что для $\forall\varepsilon > 0$ *найдется такое число* $\delta > 0$, *что для* $\forall x$ *из окрестности* $0 < |x - 2| < \delta$ *будет выполняться неравенство*

$$\left|\frac{x^2 - 8}{x + 3} + \frac{4}{5}\right| < \varepsilon.$$

Возьмем $\forall\varepsilon > 0$ и рассмотрим выражение:

$$\left|\frac{x^2-8}{x+3}+\frac{4}{5}\right| = \left|\frac{5x^2+4x-28}{5(x+3)}\right| = \frac{|x-2|\cdot|5x+14|}{5|x+3|}.$$

Оценим его сверху. Так как на всей числовой прямой множитель $|5x+14|$ не ограничен сверху, а $|x+3| \geq 0$, то оценку частного сделать проще, если выделить некоторую δ_1-окрестность точки $\alpha = 2$. Возьмем, например, $\delta_1 = 1$. Тогда

$$|x-2| < 1 \;\Leftrightarrow\; 1 < x < 3; \Leftrightarrow\; 19 < 5x+14 < 29; \Leftrightarrow\; 19 < |5x+14| < 29$$

$$|x-2| < 1 \;\Leftrightarrow\; 1 < x < 3; \Leftrightarrow\; 4 < x+3 < 6; \Leftrightarrow\; 4 < |x+3| < 6.$$

Для всех x из δ_1-окрестности точки $\alpha = 2$ имеем $|5x+14| < 29$ и $|x+3| > 4$, следовательно:

$$\frac{|x-2|\cdot|5x+14|}{5|x+3|} < \frac{29|x-2|}{5\cdot 4} = \frac{29|x-2|}{20}.$$

Теперь потребуем, чтобы $\dfrac{29|x-2|}{20} < \varepsilon$. Из последнего неравенства следует, что $|x-2| < \dfrac{20\varepsilon}{29}$.

Так как δ-окрестность точки $\alpha = 2$ не должна выходить за пределы δ_1-окрестности, то выберем в качестве $\delta = \min\left\{1; \dfrac{20\varepsilon}{29}\right\}$. При таком *выборе* δ *из неравенства* $0 < |x-2| < \delta$ *будет следовать неравенство* $\left|\dfrac{x^2-8}{x+3} + \dfrac{4}{5}\right| < \varepsilon$. *А это означает, что число* $-\dfrac{4}{5}$ *является пределом функции* $f(x) = \dfrac{x^2-8}{x+3}$ *в точке* $\alpha = 2$.

Пример 6.6. *Докажем, что не существует* $\lim\limits_{x\to 0} \sin\dfrac{1}{x}$. *Укажем две последовательности значений аргумента, сходящиеся к точке* $\alpha = 0$, *такие, что соответствующие последовательности значений функции* $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ *сходятся к различным числам. Рассмотрим последовательности*

$$x_n' = \frac{1}{\pi n} \quad \text{и} \quad x_n'' = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}.$$

Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n' = \lim\limits_{n\to\infty} x_n'' = 0$. *Соответствующие последовательности значений функции*

$$f(x_n') = \sin \pi n = 0 \quad \text{и} \quad f(x_n'') = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1$$

являются постоянными, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n') = 0$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n'') = 1$. *Значит,* $\lim\limits_{x\to 0} \sin\dfrac{1}{x}$ *не существует.*

Понятие предела функции может быть обобщено для случаев, когда аргумент функции или ее значения стремятся к бесконечности.

Определение 6.5. *Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \to +\infty (x \to -\infty, x \to \infty)$, если для $\forall \varepsilon > 0$ существует такое $\Delta > 0$, что для всех $x \in E$ таких, что $x > \Delta (x < -\Delta, |x| > \Delta)$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Пишут:* $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ \left(\substack{x \to -\infty \\ x \to \infty}\right)}} f(x) = A$.

Определение 6.6. *Если для $\forall E > 0$ $\exists \delta > 0$, что при всех $x \in E$, удовлетворяющих условию $0 < |x - \alpha| < \delta$, выполняется неравенство $f(x) > E$ $(f(x) < -E,\ |f(x)| > E)$, то говорят, что функция $f(x)$ имеет своим пределом $+\infty (-\infty, \infty)$ при $x \to \alpha$. Употребляются следующие обозначения:* $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \infty$.

Пример 6.7. *Исходя из определения предела функции, докажем, что*

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty.$$

Для доказательства будем использовать определение 6.6. Согласно этому определению, надо доказать, что для $\forall E > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что из неравенства $0 < |x - 1| < \delta$ будет вытекать неравенство $\dfrac{1}{(1-x)^2} > E$.

Выберем $\forall E > 0$. Рассмотрим соотношение $\dfrac{1}{(1-x)^2} > E$. Очевид-

но, что

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{|1-x|^2} > E.$$

Откуда получаем $0 < |x-1| < \dfrac{1}{\sqrt{E}}$. *Если взять* $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{E}}$, *то из неравенства* $0 < |x-1| < \delta$ *следует, что* $\dfrac{1}{(1-x)^2} > E$. *А это означает, что* $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{(1-x)^2} = +\infty$.

Определение 6.7. *Число A называетсялевосторонним (правосторонним) пределом или пределом слева (справа) функции $f(x)$ в точке α, если для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такое, что для $\forall x$, удовлетворяющего условиям $x \in E$, $\alpha - \delta < x < \alpha$ $(\alpha < x < \alpha + \delta)$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.*

Обозначается:

$$\lim_{x\to\alpha-0} f(x) = A, \qquad \lim_{x\to\alpha+0} f(x) = A$$

или

$$f(\alpha - 0) = A, \qquad f(\alpha + 0) = A.$$

Теорема 6.2. ***(критерий существования предела функции)***. *Для того, чтобы у функции $f(x)$, определенной в некоторой окрестности точки α, за исключением, может быть, самой точки α, существовал*

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = A$, *необходимо и достаточно, чтобы существовали односторонние пределы* $\lim\limits_{x\to\alpha-0} f(x) = A$ *и* $\lim\limits_{x\to\alpha+0} f(x) = A$, *причем*

$$\lim_{x\to\alpha-0} f(x) = \lim_{x\to\alpha+0} f(x) = A.$$

Доказательство. ◀ *Необходимость.* Так как $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = A$, то $\underline{\forall\varepsilon > 0}$ $\underline{\exists\delta > 0}$ $\underline{\forall x \in E} \land 0 < |x-\alpha| < \delta \ \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.

Очевидно, что

$$0 < |x-\alpha| < \delta \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \underline{\alpha < x < \alpha + \delta} \\ \underline{\alpha - \delta < x < \alpha} \end{array}\right.$$

Значит, $\lim\limits_{x\to\alpha-0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to\alpha+0} f(x) = A$.

Достаточность.

$\left(\lim\limits_{x\to\alpha-0} f(x) = A\right) := (\underline{\forall\varepsilon > 0}\ \exists\delta_1 > 0\ \forall x \in E \land \alpha - \delta_1 < x < \alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon)$.

$\left(\lim\limits_{x\to\alpha+0} f(x) = A\right) := (\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_2 > 0\ \forall x \in E \land \alpha < x < \alpha + \delta_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon)$.

Выберем $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, тогда

$$\forall x \in E \land \left[\begin{array}{l} \alpha - \delta < x < \alpha \\ \alpha < x < \alpha + \delta, \end{array}\right. \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

или $\forall x \in E \wedge 0 < |x - \alpha| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$. Это означает, что $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = A$. ▶

Следствие 6.1. *Если существуют* $\lim\limits_{x\to\alpha-0} f(x) = A$ *и* $\lim\limits_{x\to\alpha+0} f(x) = B$, $A \neq B$, *то* $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ *не существует.*

Доказательство следствия проводится методом от противного.

Пример 6.8. *Покажем, что* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{|x|}$ *не существует. Найдем односторонние пределы функций* $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ *в точке* $\alpha = 0$.

$$\lim_{x\to -0} \frac{x}{|x|} = \lim_{x\to -0} \frac{x}{-x} = -1, \quad \lim_{x\to +0} \frac{x}{|x|} = \lim_{x\to +0} \frac{x}{x} = 1.$$

Односторонние пределы функции $f(x)$ *в точке* $\alpha = 0$ *не равны между собой, значит* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{|x|}$ *не существует.*

6.2 Критерий Коши существования предела функции

Теорема 6.3. ***(критерий Коши существования предела функции).*** *Функция $f(x)$ имеетконечный предел в точке α тогда и только тогда, когда для $\forall\varepsilon > 0$ $\exists\delta > 0$ такое, что для $\forall x_1 \in E$, $\forall x_2 \in E$ удовлетворяющих условиям $0 < |x_1-\alpha| < \delta$, $0 < |x_2-\alpha| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.*

Доказательство. ◀ *Необходимость.* Пусть $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = A$.

$\left(\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = A\right) := (\underline{\forall\varepsilon > 0}\ \underline{\exists\delta > 0}\ \forall x \in E \wedge 0 < |x - \alpha| < \delta \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2})$.

Возьмем $\underline{\forall x_1 \in E}$, $\underline{\forall x_2 \in E}$ такие, что $0 < |x_1-\alpha| < \delta$ и $0 < |x_2-\alpha| < \delta$, тогда $|f(x_1) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $|f(x_2) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Оценим

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f(x_1) - A + A - f(x_2)| \leq |f(x_1) - A| + |f(x_2) - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом, $\underline{|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon}$. Что и требовалось доказать.

Достаточность. Пусть для $\underline{\forall\varepsilon > 0}$ $\exists\delta > 0$ такое, что для $\forall x_1 \in E$, $\forall x_2 \in E$ удовлетворяющих условиям $0 < |x_1 - \alpha| < \delta$ и $0 < |x_2 - \alpha| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Возьмем произвольную последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$ и для $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n \neq \alpha$. Так как $x_n \to \alpha$, то для $\delta > 0$ $\underline{\exists N}$

такой, что для $\forall n > N$ выполняется $0 < |x_n - \alpha| < \delta$ и для $\forall m > N$ выполняется $0 < |x_m - \alpha| < \delta$. Тогда $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$. Это означает, в силу критерия Коши сходимости числовой последовательности, что последовательность $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ значений функции имеет конечный предел.

Докажем, что для любой последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, сходящейся к числу α, соответствующая последовательность значений функции $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ сходится к одному и тому же числу.

Пусть последовательности $x'_k \to \alpha$ и $x''_k \to \alpha$. Составим последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ из членов последовательностей $(x'_k)_{k=1}^{\infty}$ и $(x''_k)_{k=1}^{\infty}$:

$$x_n = \begin{cases} x'_k, \ n = 2k - 1, \\ x''_k, \ n = 2k, \end{cases}$$

где $k \in \mathbb{N}$ т.е. $x_n : x'_1, x''_1, x'_2, x''_2, \ldots, x'_k, x''_k, \ldots$.

Очевидно, что $x_n \to \alpha$. Тогда по доказанному ранее последовательность $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ сходится. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$. Последовательности $(x'_k)_{k=1}^{\infty}$ и $(x''_k)_{k=1}^{\infty}$ являются подпоследовательностями последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, а последовательности $(f(x'_k))_{k=1}^{\infty}$ и $(f(x''_k))_{k=1}^{\infty}$ подпоследовательностями последовательности $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$. По теореме о пределе подпоследовательности сходящейся последовательности $\lim\limits_{k\to\infty} f(x'_k) = A$ и $\lim\limits_{k\to\infty} f(x''_k) = A$.

Таким образом, для любой последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, сходящейся к α, $x_n \neq \alpha$ для $\forall n \in \mathbb{N}$, соответствующая последовательность значений функции $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ сходится к A. Это означает по определению предела функции по Гейне, что $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = A$. ▶

Пример 6.9. *Докажем, что* $\lim\limits_{x\to 0} signx$ *не существует, используя критерий Коши существования предела функции. Согласно этому критерию функция* $f(x)$ *не имеет предела при* $x \to 0$, *если существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что для всякого* $\delta > 0$ *найдутся такие значения* x_1 *и* x_2, *удовлетворяющие неравенствам* $0 < |x_1| < \delta$ *и* $0 < |x_2| < \delta$, *что* $|f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon$.

В любой проколотой окрестности точки $x = 0$ $0 < |x| < \delta$ *есть как положительные, так и отрицательные значения* x. *Возьмем в качестве* x_1 *и* x_2 *два различных по знаку значения аргумента из* δ-*окрестности точки* $x = 0$, *тогда функция* $signx$ *в этих точках заведомо принимает различные значения: –1 и 1.*

Значит $|signx_1 - signx_2| = 2$.

Очевидно, что в качестве ε *можно выбрать любое положительное число, не превосходящее 2. Например,* $\varepsilon = 1$. *Тогда для* $\forall\delta > 0$ $\exists x_1$ *и* $\exists x_2$ *из проколотой* δ-*окрестности точки* $x = 0$, *т.е. удовлетворяющие неравенствам* $0 < |x_1| < \delta$, $0 < |x_2| < \delta$, *одно из которых положительное, а второе – отрицательное, такие, что* $|f(x_1) - f(x_2)| = 2 > 1 = \varepsilon$.

6.3 Общие свойства предела функции

Определение 6.8. *Функция* $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *принимающая одно значение, называется постоянной. Функция называется локально постоянной при* $x \to \alpha$, *если существует проколотая окрестность* $\overset{0}{U}(\alpha)$ *точки* α, *в которой функция постоянна.*

Определение 6.9. *Функция* $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *называется ограниченной сверху (снизу), если* $\exists C \in \mathbb{R}$ *такое, что для* $\forall x \in E$ *выполняется* $f(x) \le C$ $(f(x) \ge C)$.

Определение 6.10. *Функция* $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *называется ограниченной, если* $\exists C > 0$ *такое, что для* $\forall x \in E$ *выполняется неравенство* $|f(x)| \le C$.

Если указанные для функции $f(x)$ *соотношения выполняются в некоторой проколотой окрестности* $\overset{0}{U}(\alpha)$ *точки* α, *то функция называется локально ограниченной сверху (снизу), локально ограниченной при* $x \to \alpha$.

Теорема 6.4. ***(общие свойства предела функции)***. *Пусть* $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, α – *предельная точка множества* E.

1. Если функция $f(x)$ *при* $x \to \alpha$ *есть локально постоянная* A, *то* $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = A$.

2. Если существует конечный $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$, *то функция* $f(x)$ *локально*

Кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений

Начало

Содержание

◀ ▶

◀◀ ▶▶

Назад

На весь экран

Закрыть

ограничена при $x \to \alpha$.

3. Если существует $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$, то он единственный.

Доказательство. ◀ 1. Так как $f(x)$ локально постоянная A при $x \to \alpha$, то $\exists \overset{0}{U}(\alpha)$ – проколотая окрестность точки α такая, что для $\forall x \in \overset{0}{U}(\alpha)$ $f(x) = A$. Тогда для $\forall V(A)$ – окрестности точки A $\exists \overset{0}{U}(\alpha)$ такая, что $f\left(\overset{0}{U}(\alpha)\right) \in V(A)$. Согласно определению предела функции на языке «окрестностей», $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = A$.

2. Пусть $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = A$. $\left(\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = A\right) := (\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ $\forall x \in E \wedge 0 < |x - \alpha| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon)$.

В частности для $\varepsilon = 1$ $\exists\delta > 0$ $\forall x \in E \wedge x \in \overset{0}{U}_\delta(\alpha) \Rightarrow |f(x) - A| < 1$.

Используя свойства модуля получим $|f(x)| - |A| \le |f(x) - A| < 1$ или $|f(x)| < 1 + |A|$.

Пусть $C = 1 + |A|$, тогда для $\forall x \in \overset{0}{U}_\delta(\alpha)$ выполняется неравенство $|f(x)| < C$. Значит, функция $f(x)$ локально ограничена при $x \to \alpha$.

3. Доказательство проведем методом от противного. Пусть $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = B$ и $A \ne B$.

$\left(\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = A\right) := (\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_1 > 0\ \forall x \in E \wedge 0 < |x - \alpha| < \delta_1 \Rightarrow$ $\Rightarrow |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2})$.

$$\left(\lim_{x\to\alpha} f(x) = B\right) := (\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_2 > 0\ \forall x \in E \wedge 0 < |x-\alpha| < \delta_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |f(x) - B| < \tfrac{\varepsilon}{2}).$$

Обозначим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда для $\forall x \in E$ и $0 < |x-\alpha| < \delta$ имеет место оценка $|A-B| = |A-f(x)+f(x)-B| \le |f(x)-A|+|f(x)-B| < \varepsilon$. Откуда $A - B = 0$ или $A = B$. Пришли к противоречию. ▶

6.4 Предельный переход и арифметические операции

Определение 6.11. *Функция $f(x)$, где $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется бесконечно малой при $x \to \alpha$ (α — предельная точка множества E), если $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = 0$, т.е. для $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in E \wedge 0 < |x - \alpha| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$.*

Бесконечно малые функции обладают теми же свойствами, что и бесконечно малые последовательности:
1) если $f(x)$ и $g(x)$ — бесконечно малые функции при $x \to \alpha$, то функция $f(x) + g(x)$ также является бесконечно малой при $x \to \alpha$;
2) если $f(x)$ и $g(x)$ — бесконечно малые функции при $x \to \alpha$, то функция $f(x) \cdot g(x)$ также является бесконечно малой при $x \to \alpha$;
3) если $f(x)$ является бесконечно малой функцией при $x \to \alpha$, а функция $g(x)$ — локально ограниченной при $x \to \alpha$, то функция $f(x) \cdot g(x)$ — бесконечно малая при $x \to \alpha$.

Упражнение. Докажите свойства бесконечно малых функций, используя определение бесконечно малой функции. Принцип доказательства аналогичен доказательству соответствующих свойств бесконечно малых последовательностей.

Теорема 6.5. ***(о связи функции, имеющей конечный предел, с бесконечно ма***
Для того, чтобы $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = A$, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ была представима в виде $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно-

нечно малая функция при $x \to \alpha$.

Упражнение. Докажите теорему по аналогии с доказательством критерия связи последовательности, имеющей конечный предел, с бесконечно малой последовательностью.

Теорема 6.6. ***(об арифметических операциях над пределами функций).*** *Пусть $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = B$. Тогда*

1. $\lim\limits_{x\to\alpha} (f(x) + g(x)) = A + B$;

2. $\lim\limits_{x\to\alpha} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$;

3. $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$, *если* $B \neq 0$, $g(x) \neq 0$ *для* $\forall x \in E$.

Доказательство. ◄ Так как $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = B$ то по теореме 6.5: $f(x) = A + \alpha(x)$, $g(x) = B + \beta(x)$, где $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – бесконечно малые функции при $x \to \alpha$.

1. $f(x) + g(x) = A + \alpha(x) + B + \beta(x) = (A + B) + (\alpha(x) + \beta(x)) =$
$= (A + B) + \gamma(x)$.

Функция $\gamma(x) = \alpha(x) + \beta(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to \alpha$ (свойства бесконечно малых функций). По теореме 6.5: $\lim\limits_{x\to\alpha} (f(x) + g(x)) = A + B$.

2. $f(x) \cdot g(x) = (A + \alpha(x))(B + \beta(x)) = A \cdot B + A \cdot \beta(x) + B \cdot \alpha(x) +$

$+\alpha(x)\cdot\beta(x) = A\cdot B + \gamma(x)$,
где $\gamma(x) = A\cdot\beta(x) + B\cdot\alpha(x) + \alpha(x)\cdot\beta(x)$ – бесконечно малая функция при $x\to\alpha$. По теореме 6.5: $\lim\limits_{x\to\alpha}(f(x)\cdot g(x)) = A\cdot B$.

3. $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)} = \dfrac{A}{B} + \left(\dfrac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)} - \dfrac{A}{B}\right) = \dfrac{A}{B} + \dfrac{B\alpha(x) - A\beta(x)}{B(B+\beta(x))} =$
$= \dfrac{A}{B} + \dfrac{1}{B}\cdot\dfrac{1}{g(x)}\cdot(B\alpha(x) - A\beta(x)) = \dfrac{A}{B} + \gamma(x)$.

Докажем, что $\gamma(x)$ – бесконечно малая функция при $x\to\alpha$. Очевидно, что $B\alpha(x) - A\beta(x)$ – бесконечно малая функция при $x\to\alpha$. Покажем, что функция $\dfrac{1}{g(x)}$ – локально ограниченная при $x\to\alpha$.

$\left(\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = B\right) := (\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x\in E\wedge 0<|x-\alpha|<\delta \quad\Rightarrow$
$\Rightarrow |g(x)-B|<\varepsilon)$. Тогда $|B| - |g(x)| \le |g(x)-B| < \varepsilon$. В частности, при $\varepsilon = \dfrac{|B|}{2}$ имеем $|B| - |g(x)| < \dfrac{|B|}{2}$ или $|g(x)| > \dfrac{|B|}{2}$. Откуда получаем $\dfrac{1}{|g(x)|} < \dfrac{2}{|B|}$. Следовательно, функция $\dfrac{1}{g(x)}$ ограничена в $\overset{0}{U}_\delta(\alpha)$. По теореме 6.5: $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$. ▶

Следствие 6.2. *Если* $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = A$, C – *const*, *то* $\lim\limits_{x\to\alpha} Cf(x) = CA$.

Следствие 6.3. *Если* $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = A$, *то* $\lim\limits_{x\to\alpha}(f(x))^n = A^n$, $n\in\mathbb{N}$.

Справедливость этих утверждений вытекает из пункта 2 теоремы 6.6.

Особые случаи и неопределенности:

I в пределе суммы:

1.

$$\left.\begin{array}{r} f(x)\to A\\ \varphi(x)\to\infty \end{array}\right| f(x)+\varphi(x)\to\infty,$$

2.

$$\left.\begin{array}{r} f(x)\to +\infty\\ \varphi(x)\to +\infty \end{array}\right| f(x)+\varphi(x)\to +\infty,$$

3.

$$\left.\begin{array}{r} f(x)\to -\infty\\ \varphi(x)\to -\infty \end{array}\right| f(x)+\varphi(x)\to -\infty,$$

4.

$$\left.\begin{array}{r} f(x)\to +\infty\\ \varphi(x)\to -\infty \end{array}\right| f(x)+\varphi(x) - \text{неопределенность вида}(\infty-\infty);$$

II в пределе произведения:

1.

$$\left.\begin{array}{r} f(x)\to\infty\\ \varphi(x)\to A\neq 0 \end{array}\right| f(x)\cdot\varphi(x)\to\infty,$$

2.

$$\left.\begin{array}{r} f(x) \to \infty \\ \varphi(x) \to \infty \end{array}\right| f(x)\cdot\varphi(x) \to \infty,$$

3.

$$\left.\begin{array}{r} f(x) \to +\infty \\ \varphi(x) \to -\infty \end{array}\right| f(x)\cdot\varphi(x) \to -\infty,$$

4.

$$\left.\begin{array}{r} f(x) \to -\infty \\ \varphi(x) \to -\infty \end{array}\right| f(x)\cdot\varphi(x) \to +\infty;$$

5.

$$\left.\begin{array}{r} f(x) \to 0 \\ \varphi(x) \to \infty \end{array}\right| f(x)\cdot\varphi(x) - \text{неопределенность вида}(0\cdot\infty);$$

III в пределе частного: 1.

$$\left.\begin{array}{r} f(x) \to A \\ \varphi(x) \to \infty \end{array}\right| \frac{f(x)}{\varphi(x)} \to 0,$$

2.

$$\left.\begin{array}{r} f(x) \to \infty \\ \varphi(x) \to A \neq 0 \end{array}\right| \frac{f(x)}{\varphi(x)} \to \infty,$$

3.
$$\left.\begin{array}{r} f(x) \to \infty \\ \varphi(x) \to 0 \end{array}\right| \frac{f(x)}{\varphi(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{\varphi(x)} \to \infty,$$

4.
$$\left.\begin{array}{r} f(x) \to A \neq 0 \\ \varphi(x) \to 0 \end{array}\right| \frac{f(x)}{\varphi(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{\varphi(x)} \to \infty,$$

5.
$$\left.\begin{array}{r} f(x) \to 0 \\ \varphi(x) \to 0 \end{array}\right| \frac{f(x)}{\varphi(x)} - \text{неопределенность вида}(\frac{0}{0}),$$

6.
$$\left.\begin{array}{r} f(x) \to 0 \\ \varphi(x) \to \infty \end{array}\right| \frac{f(x)}{\varphi(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{\varphi(x)} \to 0,$$

7.
$$\left.\begin{array}{r} f(x) \to \infty \\ \varphi(x) \to \infty \end{array}\right| \frac{f(x)}{\varphi(x)} - \text{неопределенность вида}(\frac{\infty}{\infty}).$$

6.5 Предельный переход и неравенства

Теорема 6.7. ***(о сохранении функциями знака пределов).*** *Пусть* $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Если* $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = B$ *и* $A < B$, *то* $\exists \overset{0}{U}(\alpha)$ *— проколотая окрестность точки* α *такая, что для* $\forall x \in \overset{0}{U}(\alpha)$ *выполняется* $f(x) < g(x)$.

Доказательство. ◀ Так как $A < B$, то $\exists C \in \mathbb{R}$, $A < C < B$.

$$\left(\lim_{x\to\alpha} f(x) = A\right) := (\forall \varepsilon > 0 (\varepsilon = C - A) \quad \exists \delta_1 > 0 \quad \forall x \in E \wedge$$
$$\wedge \quad 0 < |x - \alpha| < \delta_1 \quad \Rightarrow |f(x) - A| < C - A,$$

т.е. для $\forall x \in \overset{0}{U}_{\delta_1}(\alpha)$ $2A - \varepsilon < f(x) < C$.

$$\left(\lim_{x\to\alpha} g(x) = B\right) := (\forall \varepsilon > 0 (\varepsilon = B - C) \quad \exists \delta_2 > 0 \quad \forall x \in E \wedge$$
$$\wedge \quad 0 < |x - \alpha| < \delta_2 \quad \Rightarrow |g(x) - B| < B - C,$$

т.е. для $\forall x \in \overset{0}{U}_{\delta_2}(\alpha)$ $C < g(x) < 2B - C$.

Возьмем $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, тогда для $\forall x \in \overset{0}{U}_{\delta}(\alpha)$ будет выполняться $f(x) < C < g(x)$. Откуда $f(x) < g(x)$ для $\forall x \in \overset{0}{U}_{\delta}(\alpha)$. ▶

Следствие 6.4. *Пусть* $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = B$. *Если* $\exists \overset{0}{U}(\alpha)$ *такая, что для* $\forall x \in \overset{0}{U}(\alpha)$:

1. $f(x) > g(x)$, *то* $A \geq B$;
2. $f(x) \geq g(x)$, *то* $A \geq B$;
3. $f(x) > B$, *то* $A \geq B$;
4. $f(x) \geq B$, *то* $A \geq B$.

Сформулированные утверждения доказываются методом от противного.

Теорема 6.8. ***(о пределе промежуточной функции)***. *Пусть* $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Если* $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = A$ *и* $\forall x \in E\ f(x) \leq \varphi(x) \leq g(x)$, *то* $\lim\limits_{x\to\alpha} \varphi(x) = A$.

Доказательство. ◀

$$\left(\lim_{x\to\alpha} f(x) = A\right) := (\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_1 > 0 \quad \forall x \in E \wedge 0 < |x - \alpha| < \delta_1 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon,$$

т.е. из неравенства $0 < |x - \alpha| < \delta_1$ следует, что $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$.

$$\left(\lim_{x\to\alpha} g(x) = A\right) := (\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_2 > 0 \quad \forall x \in E \wedge 0 < |x - \alpha| < \delta_2 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |g(x) - A| < \varepsilon,$$

т.е. из неравенства $0 < |x - \alpha| < \delta_2$ следует, что $A - \varepsilon < g(x) < A + \varepsilon$.

Выберем $\delta = \min\{\delta_1 \delta_2\}$, тогда для $\forall x \in E$ и $0 < |x - \alpha| < \delta$ будет выполняться $A - \varepsilon < f(x) \leq \varphi(x) \leq g(x) < A + \varepsilon$ или $A - \varepsilon < \varphi(x) < A + \varepsilon$ или $|\varphi(x) - A| < \varepsilon$. Значит, $\lim\limits_{x\to\alpha} \varphi(x) = A$. ▶

6.6 Первый замечательный предел

Докажем, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$

Будем пользоваться школьным определением $\sin x$ как ординаты точки, в которую переходит точка (1;0) при повороте с центром в начале координат на угол в x радиан.

Вначале покажем, что при $0<|x|<\dfrac{\pi}{2}$ имеет место соотношение $\cos^2 x<\dfrac{\sin x}{x}<1$. Так как $\cos^2 x$ и $\dfrac{\sin x}{x}$ – четные функции, то это соотношение достаточно доказать для $0<x<\dfrac{\pi}{2}$. На координатной плоскости рассмотрим окружность с центром в начале координат радиуса 1. Пусть x – величина центрального угла $\angle BOA$ в радианах (рисунок 6.2).

Плоские фигуры на рисунке 6.2 связаны соотношением: сектор $DOC\subset$ $\subset\triangle BOA\subset$ сектор BOA. В силу свойства монотонности площади имеем следующие неравенства для площадей этих фигур:

$$S_{\text{сектора}DOC}<S_{\triangle BOA}<S_{\text{сектора}BOA}.$$

Так как площадь сектора можно вычислить по формуле $S_{\text{сек}}=\dfrac{1}{2}r^2\cdot\alpha$, то соотношение для площадей фигур примет вид: $\dfrac{1}{2}\cos^2 x\cdot x<\dfrac{1}{2}\sin x<\dfrac{1}{2}x.$

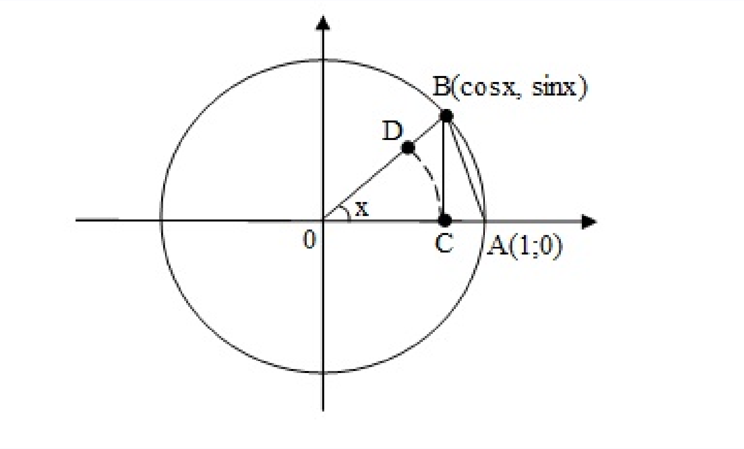

Рис. 6.2:

Откуда

$$\cos^2 x < \frac{\sin x}{x} < 1. \tag{6.1}$$

Далее докажем, что для $\forall x \in \mathbb{R}$ имеет место неравенство $|\sin x| \leq |x|$. Очевидно, что равенство выполняется только при $x = 0$.

Если $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то по доказанному ранее $\sin x < x$, т.е. $|\sin x| < |x|$.

Если $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, то $0 < -x < \frac{\pi}{2}$ и $\sin(-x) < -x$. Значит $-\sin x < -x$. Откуда $|\sin x| < |x|$.

Если $|x| \geq \frac{\pi}{2}$, то $|\sin x| \leq 1 < \frac{\pi}{2} \leq |x|$. Получим $|\sin x| < |x|$.

Докажем, что $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$. Имеем $0 \leq |\sin x| \leq |x|$.

Так как $\lim\limits_{x\to 0}|x| = 0$, то по теореме о пределе промежуточной функции $\lim\limits_{x\to 0}|\sin x| = 0$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0$.

При $0 < |x| < \dfrac{\pi}{2}$, из неравенства (6.1) получим

$$1 - \sin^2 x < \frac{\sin x}{x} < 1. \tag{6.2}$$

Учитывая, что $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin^2 x) = 1 - \lim\limits_{x\to 0}\sin x \cdot \lim\limits_{x\to 0}\sin x = 1$, из неравенства (6.2), в силу теоремы о пределе промежуточной функции, следует, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Итак,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1. \tag{6.3}$$

Соотношение (6.3) называется первым замечательным пределом.

6.7 Предел композиции функций

Теорема 6.9. ***(о пределе композиции функций)***. *Пустьданы функции $\varphi : D_t \to D_x$, $f : D_x \to \mathbb{R}$. Если выполняются условия:*
1. $\lim\limits_{t\to\alpha} \varphi(t) = x_0$, где α – предельная точка множества D_t;
2. существует $\overset{0}{U}_{\delta_1}(\alpha)$ – проколотая δ_1-окрестность точки α, в которой $\varphi(t) \neq x_0$;
3. x_0 – предельная точка множества D_x и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, то существует $\lim\limits_{t\to\alpha}(f\circ\varphi)(t) = A$.

Доказательство. ◀ Распишем по определению предела функции $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{t\to\alpha} \varphi(t) = x_0$:

$$\left(\lim_{x\to x_0} f(x) = A\right) := (\underline{\forall\varepsilon > 0} \quad \exists\sigma > 0 \quad \forall x \in D_x \wedge 0 < |x - x_0| < \sigma \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon,$$
$$\left(\lim_{t\to a} \varphi(t) = x_0\right) := (\sigma > 0 \quad \exists\delta_2 > 0 \quad \forall t \in D_t \wedge 0 < |t - \alpha| < \delta_2 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |\varphi(t) - x_0| < \sigma.$$

Неравенство $|\varphi(t) - x_0| < \sigma$ равносильно неравенству $|x - x_0| < \sigma$. Выберем $\underline{\delta = \min\{\delta_1\delta_2\}}$. Тогда для $\underline{\forall t \in D_t}$ и $\underline{0 < |t - \alpha| < \delta}$ следует, что $0 < |x - x_0| < \sigma$. Откуда $|f(x) - A| < \varepsilon$ или $|f(\varphi(t)) - A| < \varepsilon$. Значит, $\lim\limits_{t\to\alpha}(f\circ\varphi)(t) = A$. ▶

Пример 6.10. *Найдем* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}$. *Пусть* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $y=f(x)=3x$, $g:\mathbb{R}\backslash 0\to\mathbb{R}$, $g(y)=\dfrac{\sin y}{y}$. *Существует композиция функций* f *и* g $g\circ f:\mathbb{R}\backslash 0\to\mathbb{R}$, $(g\circ f)(x)=\dfrac{\sin 3x}{3x}$.

Точка $x=0$ *— предельная точка множества* $\mathbb{R}\backslash 0$, $\lim\limits_{x\to 0}3x=0$, *существует* $\overset{0}{U}(0)$, *в которой* $3x\neq 0$ *и* $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{y}=1$.

По теореме о пределе композиции: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{y}=1$.

6.8 Предел монотонной функции

Определение 6.12. *Функция* $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *называется возрастающей (неубывающей) на множестве* E, *если для* $\forall x_1, \quad x_2 \in E$ *таких, что* $x_1 < x_2$ *выполняется неравенство* $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) \leq f(x_2))$.

Определение 6.13. *Функция* $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *называется убывающей (невозрастающей) на множестве* E, *если для* $\forall x_1, \quad x_2 \in E$ *таких, что* $x_1 < x_2$, *выполняется неравенство* $f(x_1) > f(x_2)$ $(f(x_1) \geq f(x_2))$.

Функции возрастающие, неубывающие, убывающие и невозрастающие на множестве E называются монотонными на этом множестве.

Определение 6.14. *Пусть* $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Если множество* E *можно разбить на конечное число промежутков, на каждом из которых функция* $f(x)$ *монотонна, то функция* $f(x)$ *называется кусочно-монотонной на множестве* E.

Пусть $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Функция $f(x)$ монотонна на множестве E. Числа $i = \inf E$ и $s = \sup E$ являются предельными точками множества E (если E неограниченное числовое множество, то i и s могут быть равными $-\infty$ и $+\infty$).

Теорема 6.10. ***(критерий существования предела монотонной функции)***. *Неубывающая на множестве* E *функция* $f(x)$ *имеет предел при* $x \to s$, $x \in E$ *тогда и только тогда, когда она ограничена* *сверху; $f(x)$ имеет предел при $x \to i$, $x \in E$ тогда и только тогда, когда она ограничена снизу.*

Доказательство. ◀ Докажем теорему для предела $\lim\limits_{x\to s} f(x)$.

Необходимость. Так как существует конечный $\lim\limits_{x\to s} f(x)$, то по теореме 6.4 (общие свойства предела функции) существует $\overset{0}{U}(s)$ – окрестность точки s, в которой функция $f(x)$ ограничена. А значит $f(x)$ ограничена сверху в $\overset{0}{U}(s)$. Поскольку функция неубывающая на множестве E, а s – самая правая предельная точка этого множества, то $f(x)$ ограничена сверху на E.

Достаточность. Функция $f(x)$ ограничена сверху на E, значит, ограничено сверху множество $\{f(x)\}$ – множество ее значений. По лемме существования точных граней существует $\sup\limits_{x\in E} f(x) = A$. Докажем, что $\lim\limits_{x\to s} f(x) = A$.

По свойствам точной верхней грани: для $\underline{\forall \varepsilon > 0}$ $\underline{\exists x_0 \in E}$ такое, что $A - \varepsilon < f(x_0) \le A$.

Пусть $B = \left\{ x \in E \,\middle|\, x_0 < x < s \right\}$. Так как $f(x)$ неубывающая на множестве B, то для $\forall x \in B$ имеем $A - \varepsilon < f(x_0) \le f(x) \le A$. Откуда

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon \quad \text{или} \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Множество B – левосторонняя окрестность точки s, т.е. $B = \overset{0}{U}(s)$.

Таким образом, для $\underline{\forall x \in \overset{0}{U}(s)}$ выполняется $\underline{|f(x) - A| < \varepsilon}$. Это означает, что $\lim\limits_{x \to s} f(x) = A$. ►

6.9 Второй замечательный предел

Докажем, что

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{6.4}$$

Покажем, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$. Так как $x \to +\infty$, то $x > 0$. Очевидно, что для $\forall x \geq 1$ существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что

$$n \leq x < n+1. \tag{6.5}$$

Из неравенства (6.5) следует, что $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{n}$ или

$$1+\frac{1}{n+1} < 1+\frac{1}{x} \leq 1+\frac{1}{n}. \tag{6.6}$$

Усилим неравенство (6.6) с помощью неравенства (6.5) (величины, входящие в неравенство (6.6), больше 1):

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}. \tag{6.7}$$

Если $x \to +\infty$, то $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} = \frac{e}{1} = e$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=e\cdot 1=e.$$

Из неравенства (6.7) по теореме о пределе промежуточной функции следует, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e.$

Покажем, что $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$. Сделаем замену $x=-y$. Если $x\to-\infty$, то $y\to+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y}=$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{y-1}\right)^{y}=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y}=$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\cdot\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)=e\cdot 1=e.$$

Объединяя случаи $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$, имеем равенство (6.4), которое носит название второй замечательный предел.

Упражнение. Используя второй замечательный предел, докажите, что:

а) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$, б) $\lim\limits_{x\to x_0}(1+\alpha(x))^{\dfrac{1}{\alpha(x)}} = e$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

6.10 Вопросы и задания для самоконтроля

1. Сформулируйте определение предела функции в точке по Коши и сделайте геометрическую интерпретацию этого определения.

2. Сформулируйте отрицание определения предела функции по Коши.

3. Дайте определение окрестности точки и сформулируйте определение предела функции в точке на языке «окрестностей».

4. Сформулируйте отрицание определения предела функции в точке на языке «окрестностей».

5. Дайте определение предела функции в точке по Гейне. Что означает эквивалентность определений предела функции в точке по Коши и по Гейне?

6. Сформулируйте отрицание определения предела функции по Гейне.

7. Дана функция $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$. Определена ли функция в точке $x = 0$? Является ли точка $x = 0$ предельной точкой области определения функции? Существует ли $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$?

8. Сформулируйте определение предела функции при $x \to +\infty$ и отрицание этого определения.

9. Докажите, что $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$.

10. Сформулируйте определения следующих пределов и сделайте их геометрическую интерпретацию:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$, в) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$, д) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$,

б) $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = +\infty$, г) $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \infty$, е) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$.

11. Дайте определения односторонних пределов функции в точке и постройте отрицания этих определений.

12. Существуют ли $f(5+0)$, $f(5-0)$ и $\lim\limits_{x\to5} f(x)$, если $f(x) = \dfrac{|5-x|}{5-x}$?

13. При каких условиях из существования односторонних пределов следует существование предела функции?

14. Сформулируйте критерий Коши существования предела функции.

15. Следуя критерию Коши, что значит, что функция не имеет предела?

16. Какая функция называется локально постоянной при $x \to \alpha$?

17. Дайте определения функции, ограниченной сверху, ограниченной снизу, ограниченной. Постройте отрицания этих определений.

18. Какая функция называется локально ограниченной при $x \to \alpha$?

19. Сформулируйте общие свойства предела функции.
20. Локальная ограниченность функции $f(x)$ при $x \to \alpha$ является необходимым или достаточным условием для существования $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$?
21. Дайте определение бесконечно малой функции при $x \to \alpha$.
22. Перечислите свойства бесконечно малых функций.
23. Сформулируйте критерий связи функции, имеющей конечный предел, с бесконечно малой функцией.
24. Сформулируйте теорему об арифметических операциях над пределами функций.
25. Какие неопределенности могут возникнуть в пределе суммы, произведения и частного двух функций?
26. Сформулируйте теорему о сохранении функциями знака пределов.
27. Приведите пример таких функций $f(x)$ и $g(x)$, что для $\forall x \in D$ $f(x) < g(x)$ (D – область определения функций), но $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$ (α – предельная точка множества D).
28. Сформулируйте теорему о пределе промежуточной функции.
29. Запишите первый замечательный предел. Неопределенность какого вида он раскрывает?

30. Сформулируйте теорему о пределе композиции функций.

31. Дайте определения невозрастающей и убывающей функций. Приведите примеры таких функций.

32. Сформулируйте критерий существования предела монотонной функции.

33. Запишите второй замечательный предел.

34. Пусть $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to \alpha$. Чему равен $\lim\limits_{x\to\alpha}(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}$?

ТЕМА 7

Сравнение асимптотического поведения функций. O-символика

Пусть $\pi(x)$ – количество простых чисел, не превосходящих данного числа $x \in \mathbb{R}$. При каждом фиксированном x можно найти значение $\pi(x)$, например, перебором. Но мы не можем ответить на вопрос о том, как ведет себя функция $\pi(x)$ при $x \to +\infty$, т.е. каков закон распределения простых чисел. Ясно, что $\pi(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$. Русский математик П.Л. Чебышев (1821–1894) доказал, что функция $\pi(x)$ растет примерно как функция $\dfrac{x}{\ln x}$ при $x \to +\infty$.

Когда возникает вопрос об описании поведения функции вблизи некоторой точки или бесконечности, то говорят, что интересуются асимптотическим поведением функции в окрестности этой точки.

Асимптотическое поведение функции обычно характеризуют с помощью другой функции, более простой или более изученной, которая в окрестности исследуемой точки принимает значения, близкие значениям изучаемой функции.

7.1 Символ O большое

Будемговорить, что некоторое свойство или соотношение между функциями выполняется при $x \to x_0$ $(x \to \infty)$, если оно выполняется в некоторой проколотой окрестности точки x_0 (∞), т.е. существует окрестность $\overset{0}{U}_\delta(x_0)$ $(U_\triangle(\infty))$, в которой оно имеет место.

Определение 7.1. *Если для функций $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to x_0$ выполняется соотношение $f(x) = \beta(x) \cdot g(x)$, где $\beta(x)$ – локально ограниченная при $x \to x_0$ функция, то говорят, что функция $f(x)$ есть O большое от $g(x)$ при $x \to x_0$. Пишут $f \underset{x \to x_0}{=} O(g)$.*

Пример 7.1. $\left(\dfrac{1}{x} + \sin x\right) x = O(x)$ *при* $x \to \infty$.

$$f(x) = \left(\frac{1}{x} + \sin x\right) x, \quad g(x) = x, \quad \beta(x) = \frac{1}{x} + \sin x.$$

Покажем, что функция $\beta(x)$ – локально ограниченная при $x \to \infty$. Возьмем окрестность $U_1(\infty) = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; |x| > 1\right\}$. Для $\forall x \in U_1(\infty)$ имеем

$$|\beta(x)| = \left|\frac{1}{x} + \sin x\right| \leq \frac{1}{|x|} + |\sin x| < 1 + 1 = 2.$$

Замечание 7.1. *Если $g(x) \equiv 1$, то $f \underset{x \to x_0}{=} O(1)$ означает, что $f(x)$ – локально ограниченная при $x \to x_0$ функция.*

Утверждение 7.1. *Если существует $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k$, где $k \neq \infty$, то $f \underset{x \to x_0}{=} O(g)$.*

Доказательство. ◀ Так как $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = k$, то по критерию связи функции, имеющей конечный предел, с бесконечно малой функцией, имеем
$$\frac{f(x)}{g(x)} = k + \alpha(x),$$
где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$. Откуда $f(x) = (k+\alpha(x))g(x)$. Поскольку $\lim\limits_{x\to x_0}(k+\alpha(x)) = k \neq \infty$, то функция $(k+\alpha(x))$ – локально ограниченная при $x \to x_0$. Значит, $f \underset{x\to x_0}{=} O(g)$. ▶

Замечание 7.2. *Обратное утверждение неверно.* $x\cdot\sin x \underset{x\to\infty}{=} O(x)$, *так как* $\sin x$ *– ограниченная при* $x\to\infty$ *функция.*

Однако $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\cdot\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ *не существует.*

7.2 Символ o малое

Определение 7.2. *Если при $x \to x_0$ выполняется соотношение $f(x) = \alpha(x) \cdot g(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$ функция, то говорят, что функция $f(x)$ есть о малое от $g(x)$ или $f(x)$ есть бесконечно малая по сравнению с функцией $g(x)$ при $x \to x_0$. Пишут $f \underset{x \to x_0}{=} o(g)$.*

Пример 7.2. $x^2 = o(x)$ *при* $x \to 0$, *так как* $x^2 = x \cdot x$. $x = o(x^2)$ *при* $x \to \infty$, *так как* $x = \frac{1}{x} \cdot x^2$, *где* $\alpha(x) = \frac{1}{x} \to 0$ *при* $x \to \infty$.

Замечание 7.3. *Если $g(x) \equiv 1$, то запись $f \underset{x \to x_0}{=} o(1)$ означает, что $f(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$ функция.*

Определение 7.3. *Если $f \underset{x \to x_0}{=} o(g)$ и $g(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$ функция, то говорят, что $f(x)$ есть бесконечно малая более высокого порядка по сравнению с $g(x)$ при $x \to x_0$.*

Пример 7.3. $\frac{1}{x^2} \underset{x \to \infty}{=} o(\frac{1}{x})$, *так как* $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}$ *и* $\frac{1}{x} \underset{x \to \infty}{\to} o$.

Значит, $\frac{1}{x^2}$ – *бесконечно малая более высокого порядка по сравнению с* $\frac{1}{x}$ *при* $x \to \infty$.

Упражнение. Докажите, что $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0 \quad\Leftrightarrow\quad f \underset{x\to x_0}{=} o(g)$.

7.3 Эквивалентные функции

Определение 7.4. *Если между функциями $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to x_0$ выполняется соотношение $f(x) = \gamma(x) \cdot g(x)$, где $\lim\limits_{x \to x_0} \gamma(x) = 1$, то говорят, что при $x \to x_0$ функция $f(x)$ асимптотически ведет себя как функция $g(x)$ или что $f(x)$ эквивалентна $g(x)$ при $x \to x_0$. Пишут $f \underset{x \to x_0}{\sim} g$.*

Отношение эквивалентности между функциями обладает свойствами:

1) рефлексивности: $f \underset{x \to x_0}{\sim} f$,

2) симметричности: если $f \underset{x \to x_0}{\sim} g$, то $g \underset{x \to x_0}{\sim} f$,

3) транзитивности: если $f \underset{x \to x_0}{\sim} g$, $g \underset{x \to x_0}{\sim} h$, то $f \underset{x \to x_0}{\sim} h$.

Упражнение. Пользуясь определением эквивалентных функций, докажите свойства эквивалентности между функциями.

Заметим, что $\lim\limits_{x \to x_0} \gamma(x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma(x) = 1 + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to x_0$ функция. Тогда

$$f \underset{x \to x_0}{\sim} g \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = \gamma(x) \cdot g(x) \quad \text{при} \quad x \to x_0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x) = (1 + \alpha(x)) \cdot g(x) \text{при} \quad x \to x_0 \quad \Leftrightarrow f(x) = g(x) + \alpha(x) \cdot g(x)$$

$$\text{при} \quad x \to x_0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = g(x) + o(g) \quad \text{при} \quad x \to x_0.$$

Последнее равенство называется асимптотическим равенством при $x \to x_0$.

Таким образом, $f \underset{x\to x_0}{\sim} g \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = g(x) + \mathrm{o}(g)$ при $x \to x_0$.

Утверждение 7.2. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ *тогда и только тогда, когда* $f \underset{x\to x_0}{\sim} g$.

Доказательство. ◀ $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1+\alpha(x)$ при $x \to x_0$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$ функция $\Leftrightarrow f(x) = g(x)+\alpha(x)\cdot g(x)$ при $x \to x_0 \Leftrightarrow f(x) = g(x) + o(g)$ при $x \to x_0 \Leftrightarrow f \underset{x\to x_0}{\sim} g$. ▶

Пример 7.4. *Известно (первый замечательный предел), что* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. *Поэтому* $\sin x \underset{x\to x_0}{\sim} x$. *Имеет место асимптотическое равенство:*

$$\sin x = x + o(x) \quad \textit{при} \quad x \to 0.$$

Пример 7.5. $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, *так как*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1.$$

Асимптотическое равенство:

$$\ln(1+x) = x + o(x) \quad \textit{при} \quad x \to 0.$$

Пример 7.6. $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$, *так как*

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \begin{bmatrix} e^x - 1 = t \\ e^x = t+1 \\ x = \ln(t+1) \\ x\to 0 \Leftrightarrow t\to 0 \end{bmatrix} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(t+1)} = 1.$$

Асимптотическое равенство:

$$e^x = 1 + x + o(x) \quad \textit{при} \quad x\to 0.$$

Пример 7.7. $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$, *так как*

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{\ln(1+x)^\alpha}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{\alpha\ln(1+x)}\cdot$$

$$\cdot\frac{\alpha\ln(1+x)}{x} = \begin{bmatrix} \alpha\ln(1+x) = t \\ x\to 0\Leftrightarrow t\to 0\end{bmatrix} = \lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}\alpha\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \alpha.$$

Асимптотическое равенство:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x) \quad \textit{при} \quad x\to 0.$$

Утверждение 7.3. ***(принцип замены эквивалентных функций).*** *Если* $\alpha \underset{x\to x_0}{\sim} \alpha_1$, $\beta \underset{x\to x_0}{\sim} \beta_1$ *и существует* $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = k$, *то существует* $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = k$.

Кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений

Начало

Содержание

Назад

На весь экран

Закрыть

Доказательство. ◀ Очевидно, что

$$\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} \cdot \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} \cdot \frac{\beta_1(x)}{\beta(x)} \text{при} \quad x \to 0.$$

Тогда $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} \cdot \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} \cdot \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\beta_1(x)}{\beta(x)} = 1 \cdot k \cdot 1 = k.$ ▶

Пример 7.8.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{\sin x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \begin{bmatrix} \ln u \underset{u\to 1}{\sim} u - 1 \\ \sin x^2 \underset{x\to 0}{\sim} x^2 \end{bmatrix} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} =$$

$$= -2\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 \dfrac{x}{2}}{x^2} = \left[\sin^2 \frac{x}{2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{4}\right] = -2\lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{x^2}{4}}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Пример 7.9. *Рассмотрим два способа вычисления предела.*

$$a)\ \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = [\infty - \infty] = \lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1\right) =$$

$$= \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}\right] = \lim_{x\to+\infty} x \cdot \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}.$$

$$б)\ \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \begin{bmatrix} \sqrt{x^2 + x} \underset{x\to+\infty}{\sim} x \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = 1 \end{bmatrix} \neq \lim_{x\to+\infty} (x - x) = 0.$$

Второй способ приводит к неверному результату, так как заменять эквивалентными функциями можно лишь в произведении или частном, а в сумме или разности нельзя.

Утверждение 7.4. *При $x \to x_0$:*
а) $o(f) + o(f) = o(f)$,
б) $o(f) + O(f) = O(f)$,
в) $O(f) + O(f) = O(f)$,
г) если $g(x) \neq 0$, *то* $\dfrac{o(f)}{g} = o\left(\dfrac{f}{g}\right)$, $\dfrac{O(f)}{g} = O\left(\dfrac{f}{g}\right)$.

Упражнение. Пользуясь определениями символов O и o, докажите соотношения из утверждения 7.4.

В разделе «Ряды» будут строго доказаны следующие соотношения для элементарных функций:

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots \text{при} x \in \mathbb{R},$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \ldots + \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}x^{2k-1} + \ldots \text{ при } x \in \mathbb{R},$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \ldots + \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} + \ldots \text{ при } x \in \mathbb{R},$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \ldots \text{ при } |x| < 1,$$

$$(1+x)^\alpha = 1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots \text{ при } |x|<1.$$

Используя o-символику, запишем асимптотические формулы для элементарных функций, обобщающие формулы, полученные в примерах 7.4–7.7.

$$e^x = 1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\ldots+\frac{1}{n!}x^n+o(x^n) \text{ при } x\to 0.$$

$$\sin x = x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\ldots+\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}x^{2k-1}+o(x^{2k-1}) \text{ при } x\to 0.$$

$$\cos x = 1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\ldots+\frac{(-1)^{k}}{(2k)!}x^{2k}+o(x^{2k}) \text{ при } x\to 0.$$

$$\ln(1+x) = x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+o(x^n) \text{ при } x\to 0.$$

$$(1+x)^\alpha = 1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$$

при $x\to 0$.

Эти формулы являются эффективным средством при нахождении пределов элементарных функций.

Пример 7.10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\left(x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)\right)}{x^3} =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{6}x^3 - o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{6} - \lim_{x\to 0} \frac{o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{6} - \lim_{x\to 0} o(1) = \frac{1}{6}.$$

7.4 Вопросы и задания для самоконтроля

1. Что по определению означает запись $f \underset{x\to x_0}{=} O(g)$?
2. Что означает запись $f \underset{x\to x_0}{=} O(1)$?
3. Используя понятие предела функции, сформулируйте достаточные условия того, что $f \underset{x\to x_0}{=} O(g)$.
4. Что по определению означает запись $f \underset{x\to x_0}{=} o(g)$?
5. Что означает запись $f \underset{x\to x_0}{=} o(1)$?
6. Дайте определение бесконечно малой функции $f(x)$ более высокого порядка при $x \to x_0$, чем $g(x)$.
7. Если $f \underset{x\to x_0}{=} o(g)$, то чему равен $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$?
8. Дайте определение эквивалентных при $x \to x_0$ функций.
9. Перечислите свойства отношения эквивалентности между функциями.
10. Пусть $f \underset{x\to x_0}{\sim} g$. Запишите асимптотическое равенство, которое вытекает из этого соотношения.

11. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, то в каком отношении находятся функции $f(x)$ и $g(x)$: а) $f \underset{x\to x_0}{=} O(g)$; б) $f \underset{x\to x_0}{=} o(g)$; в) $f \underset{x\to x_0}{\sim} g$?

12. Приведите примеры функций $f(x)$, для которых справедливы равенства: а) $f(x) \underset{x\to 0}{=} o(x)$; б) $f(x) \underset{x\to\infty}{=} o(\frac{1}{x^2})$; в) $f(x) \underset{x\to 1-0}{=} o(\sqrt{1-x})$.

13. Докажите, что $x^3 \underset{x\to 0}{=} o(x^2)$. Верно ли равенство $x^3 \underset{x\to 0}{=} o(g)$, если: а) $g(x) = x$; б) $g(x) = x^2\sqrt{|x|}$; в) $g(x) = x^3\sqrt{|x|}$; г) $g(x) = x^2\sin x$?

14. Являются ли функции $\sin x$ и x эквивалентными бесконечно малыми при $x\to 0$? Докажите, что $\sin x - x = o(x)$.

15. Сформулируйте принцип замены эквивалентных функций.

16. Можно ли производить замену эквивалентных функций в сумме?

17. Запишите асимптотические формулы для элементарных функций.

18. Запишите свойства символов o малое и O большое.

19. Верно ли равенство $\sqrt{1+x^2} = 1 + \dfrac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ при $x\to 0$?

ТЕМА 8
Непрерывность функции в точке

8.1 Определения непрерывности функции в точке

Пустьфункция $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, α – предельная точка множества E и $\alpha \in E$.

Определение 8.1. ***(общее).*** *Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке α, если существует $\lim\limits_{x\to\alpha} = f(\alpha)$.*

Определение 8.2. ***(по Коши).*** *Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке α, если для $\forall\varepsilon > 0$ $\exists\delta > 0$ такое, что для $\forall x \in E$ и $|x - \alpha| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - f(\alpha)| < \varepsilon$.*

Так как точка $\alpha \in E$, то берутся все значения x из δ-окрестности точки α.

Определение 8.3. ***(по Гейне).*** *Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке α, если для любой последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, такой, что $x \in E$ и $x_n \to \alpha$, соответствующая последовательность значений функции $f(x_n) \to f(\alpha)$.*

Так как точка $\alpha \in E$, то x_n может совпадать с α.

Определение 8.4. ***(на языке «окрестностей»).*** *Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке α, если для любой окрестности*

$V(f(\alpha))$ найдется такая окрестность $U(\alpha) \subset E$ образ которой $f(U(\alpha))$ содержится в $V(f(\alpha))$.

Эквивалентность всех этих определений следует из эквивалентности определений предела функции.

Обозначим $\triangle f(\alpha) = f(x) - f(\alpha)$, $\triangle x = x - \alpha$. Величина $\triangle f(\alpha)$ называется приращением функции в точке α, величина $\triangle x$ называется приращением аргумента. Из определения 2 следует, что функция $f(x)$ является непрерывной в точке α, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in E \quad \wedge \quad |\triangle x| < \delta \Rightarrow |\triangle f(\alpha)| < \varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{\triangle x \to 0} \triangle f(\alpha) = 0$.

Определение 8.5. ***(на языке «бесконечно малых»).*** *Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке α, если $\lim\limits_{\triangle x \to 0} \triangle f(\alpha) = 0$ т.е. бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.*

Определение 8.6. *Функция $f(x)$ называется непрерывной на множестве E, если она непрерывна в каждой точке множества E.*

Совокупность всех функций, непрерывных на множестве E, будем обозначать $C(E)$.

Пример 8.1. *Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, $f = K$, где K – const. Докажем, что $f(x)$ непрерывна на E. Возьмем $\forall x_0 \in E$, $f(x_0) = K$. Очевидно, что для любой окрестности $V(K)$ существует окрестность*

$U(x_0)$ такая, что для $\forall x \in U(x_0)$ выполняется $f(x) = K \in V(K)$, т.е. $f(U(x_0)) \subset V(K)$.

Пример 8.2. *Докажем, что функция $f(x) = x$ непрерывна на $\mathbb{R}$. Возьмем $\forall x_0 \in \mathbb{R}$. Рассмотрим $|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0|$.*

Пусть $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Выберем в качестве δ $\delta = \varepsilon$. Тогда из неравенства $|x - x_0| < \delta$ будет следовать неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Пример 8.3. *Докажем, что функция $f(x) = \sin x$ непрерывна на $\mathbb{R}$. Возьмем $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ и рассмотрим*

$$|\sin x - \sin x_0| = \left|2\cos\frac{x + x_0}{2} \cdot \sin\frac{x - x_0}{2}\right| = \left|2\cos\frac{x + x_0}{2}\right| \cdot \left|\sin\frac{x - x_0}{2}\right| \leq$$

$$\leq 2 \cdot 1 \cdot \left|\frac{x - x_0}{2}\right| = |x - x_0|.$$

Потребуем, чтобы $|x - x_0| < \varepsilon$. Выберем в качестве δ $\delta = \varepsilon$. Тогда из неравенства $|x - x_0| < \varepsilon$ следует неравенство $|\sin x - \sin x_0| < \varepsilon$.

Упражнение. Докажите, что функция $f(x) = \cos x$ непрерывна на $\mathbb{R}$.

8.2 Точки разрыва функции

Определение 8.7. *Еслифункция* $f : E \to \mathbb{R}$ *не является непрерывной в некоторой точке множества* E*, то эта точка называется точкой разрыва функции* $f(x)$*.*

Итак, точка α *является точкой разрыва функции* $f(x)$*, если*

$$\exists V(f(\alpha)) \quad \forall U(\alpha) \quad \exists x \in U(\alpha) \quad f(x) \notin V(f(\alpha))$$

или

$$\exists \varepsilon > 0 \qquad \forall \delta > 0 \qquad \exists x \in E \quad \wedge \quad |x - \alpha| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(\alpha)| \geq \varepsilon.$$

Определение 8.8. *Точка* $\alpha \in E$ *называется точкой разрыва первого рода устранимого разрыва функции* $f : E \to \mathbb{R}$*, если существуют конечные односторонние пределы* $f(\alpha - 0) = \lim\limits_{x \to \alpha - 0} f(x)$ *и* $f(\alpha + 0) = \lim\limits_{x \to \alpha + 0} f(x)$*, причем* $f(\alpha - 0) = f(\alpha + 0) \neq f(\alpha)$*.*

Пример 8.4. *Для функции*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

точка $x = 0$ *является точкой разрыва первого рода устранимого разрыва, так как* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1 \neq 0$*.*

График функции изображен на рисунке 8.1.

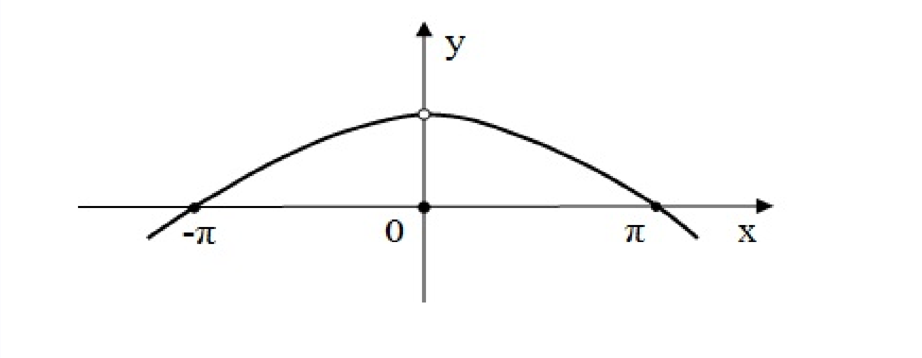

Рис. 8.1:

Определение 8.9. *Точка $\alpha \in E$ называется точкой разрыва первого рода со скачком функции $f : E \to \mathbb{R}$, если существуют конечные односторонние пределы $f(\alpha - 0)$ и $f(\alpha - 0)$, причем $f(\alpha - 0) \neq f(\alpha + 0)$. Скачок $h = |f(\alpha - 0) - f(\alpha + 0)|$.*

Если $f(\alpha - 0) = f(\alpha)$, то говорят, что функция f непрерывна в точке α слева, если $f(\alpha + 0) = f(\alpha)$, то она непрерывна в точке α справа.

На рисунке 8.2 изображены схематические графики функций, имеющих точки разрыва первого рода со скачком.

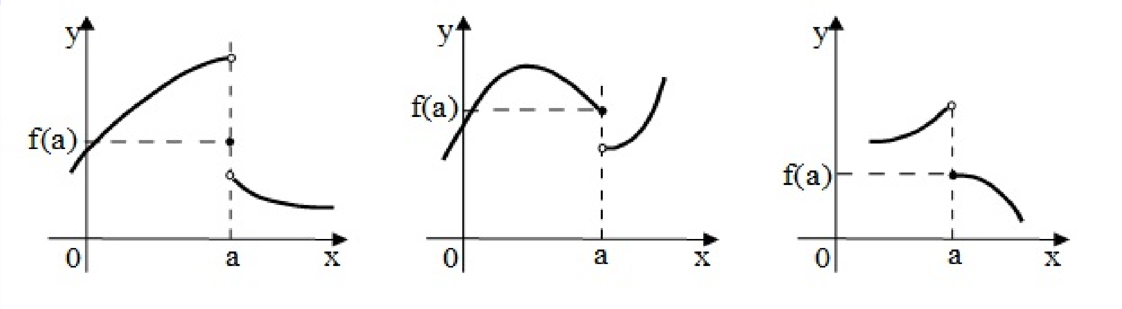

Рис. 8.2:

Пример 8.5. *Для функции*

$$y = signx = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ -1, & \text{если } x < 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

точка $x = 0$ является точкой разрыва первого рода со скачком, так как $f(0-0) = \lim\limits_{x \to -0} signx = -1$, $f(0+0) = \lim\limits_{x \to +0} signx = 1$. Причем скачок $h = 2$.

Определение 8.10. *Точка $\alpha \in E$ называется точкой разрыва второго рода функции $f : E \to \mathbb{R}$, если хотя бы один из односторонних пределов $f(\alpha - 0)$, $f(\alpha + 0)$ бесконечен или не существует.*

Пример 8.6. *Для функции*

$$f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

точка $x = 0$ является точкой разрыва второго рода в силу того, что $\lim\limits_{x\to 0} sin\dfrac{1}{x}$ не существует (пример 6.6 темы «Предел функции»).

8.3 Локальные свойства непрерывных функций

Локальныминазываются свойства, которые определяются поведением функции в сколь угодно малой окрестности точки.

Теорема 8.1. *(локальные свойства непрерывных функций). Пусть функция $f : E \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $\alpha \in E$. Тогда справедливы утверждения:*
1) функция $f(x)$ ограничена в некоторой окрестности точки $\alpha U(\alpha)$;
2) если $f(\alpha) > 0$, то в некоторой окрестности $U(\alpha)$ $f(x) > 0$;
3) если функция $g : U(\alpha) \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке α, то функции $f(x) + g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ и $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(\alpha) \neq 0)$ непрерывны в точке α.

Доказательство. ◀ 1. Так как функция $f(x)$ непрерывна в точке α, то в силу определения 8.1 $\lim\limits_{x\to\alpha} = f(\alpha)$. По общим свойствам предела функции существует окрестность $U(\alpha)$ точки α, в которой функция ограничена.

2. В силу непрерывности функции $f(x)$ в точке α: $\lim\limits_{x\to\alpha} = f(\alpha) > 0$. По теореме о сохранении функцией знака предела существует окрестность $U(\alpha)$ такая, что для $\forall x \in U(\alpha)$ выполняется неравенство $f(x) > 0$.

3. Докажем, что функция $f(x)+g(x)$ непрерывна в точке α. Из непрерывности функций $f(x)$ и $g(x)$ в точке α следует, что $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = f(\alpha)$ и

$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = g(\alpha)$. Тогда

$$\lim_{x\to\alpha}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to\alpha} f(x) + \lim_{x\to\alpha} g(x) = f(\alpha)+g(\alpha).$$

В силу определения 8.1 это означает непрерывность функции $f(x)+g(x)$ в точке α.

Аналогично доказывается непрерывность функций $f(x)\cdot g(x)$ и $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ в точке α. Так как $g(\alpha)\neq 0$, то $g(x)\neq 0$ в некоторой $U(\alpha)$ и функция $\dfrac{1}{g(x)}$ определена в этой окрестности. ▶

Теорема 8.2. ***(о предельномпереходе под знаком непрерывной функции).*** *Пусть заданы функции $\varphi : T \to X$, $f : X \to \mathbb{R}$ и существует композиция $f\circ\varphi : T \to \mathbb{R}$. Если $\lim\limits_{t\to t_0}\varphi(t) = x_0$ и функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то*

$$\lim_{t\to t_0}(f\circ\varphi)(t) = \lim_{t\to t_0} f(\varphi(t)) = f(\lim_{t\to t_0}\varphi(t)).$$

Доказательство. ◀ Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, по определению 8.2 это означает, что для $\underline{\forall\varepsilon>0}$ $\exists\delta>0$ такое, что для $\forall x\in X$ и $|x-x_0|<\delta$ выполняется $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

Так как $\lim\limits_{t\to t_0}\varphi(t) = x_0$, то в силу определения предела функции по Коши имеем: для $\delta>0$ $\underline{\exists\sigma>0}$ такое, что для $\underline{\forall t\in T}$ и $\underline{0<|t-t_0|<\sigma}$

выполняется $|\varphi(t) - x_0| < \delta$ или $|x - x_0| < \delta$. Откуда следует, что $\underline{|f(\varphi(t)) - f(x_0)| < \varepsilon}$. Значит, $\lim\limits_{t\to t_0} f(\varphi(t)) = f(x_0) = f\left(\lim\limits_{t\to t_0} \varphi(t)\right)$. ►

Пример 8.7. *Вычислим предел*

$$\lim_{x\to 0} e^{\dfrac{1-\cos x}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}} =$$

$$= e^{2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2}{4}}{x^2}} = e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

Воспользовались тем, что функция $y = e^x$ непрерывна на $\mathbb{R}$.

Теорема 8.3. *(о непрерывности композиции функций). Пусть заданы функции $\varphi : T \to X$, $f : X \to \mathbb{R}$ и существует композиция $f \circ \varphi : T \to \mathbb{R}$. Если функция $\varphi(t)$ непрерывна в точке t_0 и $\varphi(t_0) = x_0$, функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то композиция $(f \circ \varphi)(t)$ непрерывна в точке t_0.*

Доказательство. ◄ Так как функция $\varphi(t)$ непрерывна в точке t_0, то $\lim\limits_{t\to t_0} \varphi(t) = \varphi(t_0) = x_0$. Тогда по теореме 8.2:

$$\lim_{t\to t_0}(f\circ\varphi)(t) = f(\lim_{t\to t_0}\varphi(t)) = f(x_0) = f(\varphi(t_0)) = (f\circ\varphi)(t_0).$$

Следовательно, композиция $(f \circ \varphi)(t)$ непрерывна в точке t_0. ►

8.4 Степенно-показательная функция и ее предел

Определение 8.11. *Функция вида* $u(x)^{\nu(x)}$, *где* $u : D \to \mathbb{R}$, $\nu : D \to \mathbb{R}$ *и для* $\forall x \in D \quad u(x) > 0$, *называется степенно-показательной.*

Теорема 8.4. ***(о пределе степенно-показательной функции).*** *Пусть функция* $u(x)^{\nu(x)}$ *задана на множестве* D *и* x_0 *– предельная точка множества* D. *Если существуют* $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = a$ *и* $\lim\limits_{x\to x_0} \nu(x) = b$ *(*a *и* b *– конечные числа), то существует* $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)^{\nu(x)} = a^b$.

Доказательство. ◀ Рассмотрим

$$\lim_{x\to x_0} u(x)^{\nu(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{\ln u(x)^{\nu(x)}} = \lim_{x\to x_0} e^{\nu(x)\ln u(x)} = [\text{теорема } 8.2] =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to x_0}\nu(x)\ln u(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0}\nu(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}\ln u(x)} = e^{b\ln\lim\limits_{x\to x_0}u(x)} = e^{b\ln a} = e^{\ln a^b} = a^b. \ ▶$$

Особые случаи и неопределенности в пределе степенно-показательной функции:

1.

$$\left.\begin{array}{l} u(x) \to +\infty \\ \nu(x) \to +\infty \end{array}\right| u(x)^{\nu(x)} \to +\infty,$$

$$\lim_{x\to x_0} u(x)^{\nu(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{\ln u(x)^{\nu(x)}} = \lim_{x\to x_0} e^{\nu(x)\ln u(x)} = +\infty;$$

2.
$$\left.\begin{array}{r} u(x)\to+\infty \\ \nu(x)\to-\infty \end{array}\right| u(x)^{\nu(x)}\to 0;$$

3.
$$\left.\begin{array}{r} u(x)\to+0 \\ \nu(x)\to+\infty \end{array}\right| u(x)^{\nu(x)}\to 0;$$

4.
$$\left.\begin{array}{r} u(x)\to+0 \\ \nu(x)\to-\infty \end{array}\right| u(x)^{\nu(x)}\to +\infty;$$

5.
$$\left.\begin{array}{r} u(x)\to 1 \\ \nu(x)\to\infty \end{array}\right| u(x)^{\nu(x)} \text{ – неопределенность вида}(1^{\infty}), \text{ так как}$$
$$\lim_{x\to x_0}\nu(x)\ln u(x) \text{ – неопределенность вида}(\infty\cdot 0);$$

6.
$$\left.\begin{array}{r} u(x)\to+0 \\ \nu(x)\to 0 \end{array}\right| u(x)^{\nu(x)} \text{ – неопределенность вида}(0^{0}), \text{ так как}$$
$$\lim_{x\to x_0}\nu(x)\ln u(x) \text{ – неопределенность вида}(0\cdot\infty);$$

7.
$$\left.\begin{array}{r} u(x)\to+\infty \\ \nu(x)\to 0 \end{array}\right| u(x)^{\nu(x)} \text{ – неопределенность вида}(\infty^{0}), \text{ так как}$$

$$\lim_{x\to x_0} \nu(x)\ln u(x) \text{ — неопределенность вида} (0\cdot\infty).$$

Замечание 8.1. *Второй замечательный предел* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$ *раскрывает неопределенность вида* (1^∞).

Замечание 8.2. *Для раскрытия неопределенности* (1^∞) *можно воспользоваться формулой:* $\lim\limits_{\substack{u\to 1\\ \nu\to\infty}} u(x)^{\nu(x)} = e^{\lim\limits_{\substack{u\to 1\\ \nu\to\infty}} \nu(x)(u(x)-1)}$. *В самом деле*

$$\lim_{\substack{u\to 1\\ \nu\to\infty}} u(x)^{\nu(x)} = \lim_{\substack{u\to 1\\ \nu\to\infty}} (u(x)-1+1)^{\nu(x)} = \begin{bmatrix} u(x)-1 \text{ — \textit{бесконечно}} \\ \text{\textit{малая функция.}} \\ \text{\textit{Используем второй}} \\ \text{\textit{замечательный предел}} \end{bmatrix} =$$

$$= \lim_{\substack{u\to 1\\ \nu\to\infty}} \left((1+(u(x)-1))^{\dfrac{1}{u(x)-1}} \right)^{\nu(x)(u(x)-1)} = e^{\lim\limits_{\substack{u\to 1\\ \nu\to\infty}} \nu(x)(u(x)-1)}.$$

8.5 Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте общее определение непрерывности функции в точке.

2. Сформулируйте определение непрерывности функции в точке по Коши и на языке «окрестностей».

3. Дайте определение непрерывности функции в точке по Гейне.

4. Какие величины называются приращением аргумента и функции?

5. Сформулируйте определение непрерывности функции в точке на языке «бесконечно малых».

6. Какая функция называется непрерывной на множестве?

7. Дайте определение точки разрыва первого рода устранимого разрыва. Приведите пример функции, имеющей точку разрыва такого типа.

8. Дайте определение точки разрыва первого рода со скачком. Приведите пример функции, имеющей точку разрыва этого типа.

9. Сформулируйте определение точки разрыва второго рода.

10. Исследуйте на непрерывность функцию Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Найдите точки разрыва этой функции и укажите их тип.

11. Укажите тип точки разрыва функции $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$.

12. Перечислите локальные свойства непрерывных функций.

13. Сформулируйте теорему о предельном переходе под знаком непрерывной функции. Пользуясь этой теоремой, вычислите $\lim\limits_{x\to 0} \ln \dfrac{\sin x}{x}$.

14. Сформулируйте теорему о непрерывности композиции функций.

15. Дайте определение степенно-показательной функции.

16. Сформулируйте теорему о пределе степенно-показательной функции.

17. Какие неопределенности возможны в пределе степенно-показательной функции?

18. Запишите второй замечательный предел.

19. Запишите формулу для раскрытия неопределенности (1^{∞}).

20. Вычислите пределы: а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{2x-3}\right)^{x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^{2x}$.

ТЕМА 9
Глобальные свойства непрерывных функций

9.1 Теорема Больцано–Коши

Свойствофункции называется глобальным, если оно выполняется на всей области определения.

Теорема 9.1. ***(Больцано–Коши о промежуточном значении функции).*** *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и на его концах принимает значения разных знаков, то существует точка $c \in (a;b)$ такая, что $f(c) = 0$.*

$$(f \in C[a;b]) \ \wedge \ (f(a) \cdot f(b) < 0) \ \Rightarrow \ \exists c \in (a;b) \ f(c) = 0.$$

Доказательство. ◀ Пусть $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Поделим отрезок $[a;b]$ пополам. Если значение функции в середине отрезка равно нулю, то это искомая точка. Если нет, то обозначим через I_1 ту половину отрезка $[a;b]$, на концах которой функция принимает значения разных знаков. Пусть $I_1 = [a_1;b_1]$. Поделим отрезок I_1 пополам и продолжим процесс. Тогда либо мы на каком-то шаге попадаем в точку $c \in (a;b)$, где $f(c) = 0$, либо получим последовательность вложенных отрезков $I_n = [a_n;b_n]$ (рисунок 9.1).

$$[a;b] \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots.$$

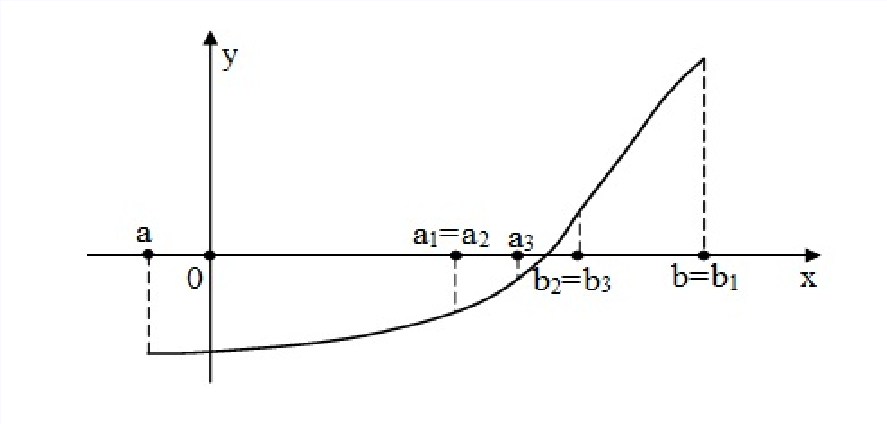

Рис. 9.1:

Заметим, что для $\forall n \in \mathbb{N}\quad f(a_n) < 0,\ f(b_n) > 0$. Длина n-го отрезка $|I_n| = b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n} \to 0$ при $n \to \infty$. По лемме о вложенных отрезках существует единственная точка c, принадлежащая всем отрезкам одновременно. По построению существуют две последовательности: $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность левых концов отрезков I_n и $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность правых концов. Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$.

Так как $c \in [a;b]$, то функция $f(x)$ непрерывна в точке c. Используя определение непрерывности функции по Гейне и свойства предела последовательности, получим

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(c) \le 0 \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(c) \ge 0.$$

Откуда следует, что $f(c)=0$. ►

Геометрическая интерпретация теоремы 9.1 заключается в следующем: если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то кривая $f(x)$, переходящая из одной полуплоскости по отношению к оси Ox в другую полуплоскость, непременно пересекает эту ось хотя бы в одной точке.

Следствие 9.1. *Если функция $\varphi(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, $\varphi(a)=A$, $\varphi(b)=B$, то для любого C, лежащего между A и B, существует $c\in(a;b)$ такая, что $f(c)=C$.*

Доказательство. ◄ Рассмотрим функцию $f(x)=\varphi(x)-C$. Функция $f(x)$ определена и непрерывна на $[a;b]$. Так как $f(a)\cdot f(b)=(A-C)(B-C)<0$, то по теореме 9.1 существует точка $c\in(a;b)$ такая, что $f(c)=0$, т.е. $\varphi(c)-C=0$. Откуда $\varphi(c)=C$. ►

Геометрическая интерпретация следствия 9.1 представлена на рисунке 9.2.

Следствие 9.2. *Множество значений функции, непрерывной на промежутке D, сплошь заполняет некоторый промежуток.*

Доказательство. ◄ Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке D. Обозначим $\sup\limits_{x\in D} f(x)=M$, $\inf\limits_{x\in D} f(x)=m$. Если функция $f(x)$ ограничена на D, то $m,\ M\in\mathbb{R}$. Если $f(x)$ неограничена сверху или снизу, то примем $m=-\infty$, $M=+\infty$.

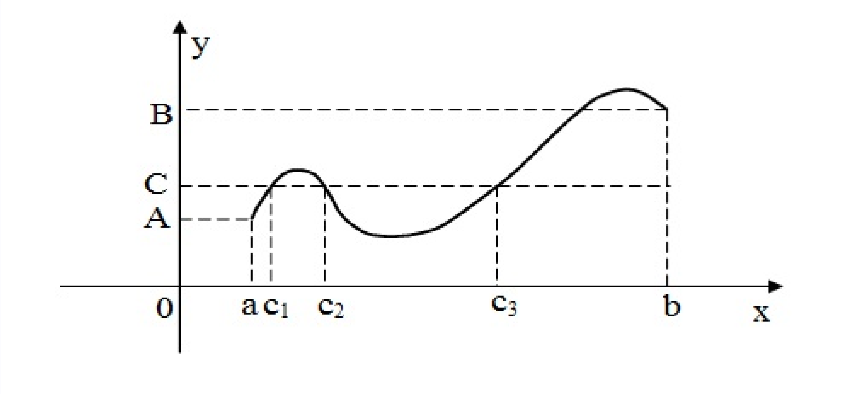

Рис. 9.2:

По первому свойству точных граней для $\forall x \in D$ выполняется

$$m \leq f(x) \leq M. \tag{9.1}$$

Рассмотрим интервал $(m; M)$ и покажем, что значения функции $f(x)$ сплошь заполняют его. Возьмем $\forall C \in (m; M)$ и подберем два значения функции $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$ таких, что $f(x_1) < C < f(x_2)$. Докажем, что такие значения функции всегда существуют.

Если $m \in \mathbb{R}$, то по второму свойству точной нижней грани: для $\forall \varepsilon > 0$, в частности $\varepsilon = C - m > 0$, $\exists x_1 \in D$ такой, что $f(x_1) < m + \varepsilon = C$.

Если $m = -\infty$, то функция $f(x)$ неограничена снизу и $\exists x_1 \in D$ такой, что $f(x_1) < C$.

Аналогично доказывается существование $x_2 \in D$ для которого $f(x_2) > C$. Таким образом, $\exists x_1,\ x_2 \in D$ такие, что $f(x_1) < C < f(x_2)$.

На отрезке $[x_1; x_2]$ функция $f(x)$ непрерывна и принимает на его концах различные значения, тогда по следствию 9.1 $\exists c \in (x_1; x_2)$ такая, что $f(c) = C$. Так как C – любое число из промежутка $(m; M)$, то значения функции сплошь заполняют этот промежуток.

Учитывая неравенство (9.1), говорящее о том, что функция может как принимать значения m и M, так и не принимать, можно сделать вывод, что множество значений функции $f(x)$ есть один из четырех промежутков:$[m; M]$, $(m; M)$, $[m; M)$, $(m; M]$. ►

Теорема Больцано–Коши имеет большое значение для теоретических исследований как в математическом анализе, так и в других смежных областях. Например, она применяется для доказательства существования решений уравнений.

Утверждение 9.1. *Если функция $f(x)$ непрерывна и ограничена на $\mathbb{R}$, то уравнение $f(x) = x$ имеет хотя бы одно решение на $\mathbb{R}$.*

Доказательство. ◄ Так как функция $f(x)$ ограничена на $\mathbb{R}$, то $\exists A \in \mathbb{R}$, $\exists B \in \mathbb{R}$ такие, что для $\forall x \in \mathbb{R}$ выполняется $A \le f(x) \le B$. Рассмотрим отрезок $[a; b]$ такой, что $a < A < B < b$. Имеем $a - A < 0$, $b - B > 0$.

На отрезке $[a; b]$ рассмотрим функцию $\varphi(x) = x - f(x)$. Очевидно, что функция $\varphi(x)$ непрерывна на $[a;b]$,

$$\varphi(a) = a - f(a) \leq a - A < 0, \quad \varphi(b) = b - f(b) \geq b - B > 0.$$

Функция $\varphi(x)$ на отрезке $[a;b]$ удовлетворяет условиям теоремы Больцано–Коши. По заключению этой теоремы $\exists c \in (a;b)$ такое, что $\varphi(c) = 0$. Значит $c - f(c) = 0$ или $f(c) = c$. Следовательно, c – решение уравнения $f(x) = x$. ▶

9.2 Теоремы Вейерштрасса

Теорема 9.2. ***(Вейерштрасса об ограниченности функции, непрерывной на отрезке).*** *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она на нем ограничена.*

Доказательство. ◀ Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она непрерывна в любой точке $x \in [a;b]$. В силу локальных свойств непрерывных функций существует окрестность точки x $U(x)$, в которой функция $f(x)$ ограничена. Совокупность таких окрестностей для всех точек $x \in [a;b]$ образует покрытие $[a;b]$. По лемме Бореля–Лебега можно извлечь конечную систему окрестностей $U_1, U_2, ..., U_n$, покрывающую $[a;b]$. В каждой окрестности U_k $(k = \overline{1,n})$ функция $f(x)$ ограничена. Значит, $\exists m_k$, M_k такие, что для $\forall x \in U_k$ выполняется $m_k \le f(x) \le M_k$.

Обозначим $m = \min\{m_1, m_2, ..., m_n\}$, $M = \max\{M_1, M_2, ..., M_n\}$. Тогда для $\forall x \in [a;b]$ выполняется неравенство $m \le f(x) \le M$. Это означает, что функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a;b]$. ▶

Теорема 9.3. ***(Вейерштрасса о достижении непрерывной на отрезке функцией своих точных граней).*** *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она на этом отрезке достигает своих точных граней.*

Доказательство. ◀ Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке

$[a;b]$, то по теореме 9.2 она на нем ограничена. Значит, множество ее значений $\{f(x)\}$ – множество ограниченное. По лемме существования точных граней: $\exists \sup\limits_{x\in[a;b]} f(x) = M$ и $\exists \inf\limits_{x\in[a;b]} f(x) = m$.

Докажем, что на $[a;b]$ функция $f(x)$ принимает значения m и M, т.е. $\exists x_1 \in [a;b]$ и $\exists x_2 \in [a;b]$ такие, что $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$. Покажем, что функция $f(x)$ достигает значение M. Предположим, что функция $f(x)$ не принимает значение M на $[a;b]$, т.е. для $\forall x \in [a;b]$ выполняется $f(x) < M$.

Рассмотрим на $[a;b]$ вспомогательную функцию $\varphi(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$. Функция $\varphi(x)$ непрерывна на $[a;b]$ и для $\forall x \in [a;b]$ $\varphi(x) > 0$. На отрезке $[a;b]$ функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 9.2, поэтому она ограничена на $[a;b]$. Следовательно, $\exists \sup\limits_{x\in[a;b]} \varphi(x) = S$. По первому свойству точной верхней грани: для $\forall x \in [a;b]$ выполняется $\varphi(x) \le S$ или $\dfrac{1}{M - f(x)} \le S$. Откуда $M - f(x) \ge \dfrac{1}{S}$ или $f(x) \le M - \dfrac{1}{S}$ для $\forall x \in [a;b]$. Последнее неравенство означает, что $M - \dfrac{1}{S}$ – верхняя граница множества значений функции $f(x)$. Так как на отрезке $[a;b]$ $\varphi(x) > 0$, то $S > 0$ и $\dfrac{1}{S} > 0$, поэтому $M - \dfrac{1}{S} < M$. Пришли к противоречию с тем, что M – точная верхняя грань множества значений функции $f(x)$. Аналогично доказывается, что на отрезке $[a;b]$ функция $f(x)$ достигает значение m. ▶

Следствие 9.3. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то множество её значений есть отрезок $[m;M]$, где $m = \inf\limits_{x\in[a;b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{x\in[a;b]} f(x)$.*

Доказательство. ◀ Это непосредственно следует из теоремы 9.3 и следствия 9.2 теоремы Больцано—Коши. ▶

9.3 Равномерно непрерывные функции

Рассмотримфункцию $y = \dfrac{1}{x}$ на промежутке $(0;+\infty)$. На этом промежутке функция непрерывна, т.е. непрерывна в каждой точке $x_0 \in (0;+\infty)$. Это значит, что для $\forall\varepsilon > 0$ $\exists\delta > 0$ такое, что для $\forall x \in (0;+\infty)$ и $|x - x_0| < \delta$ выполняется $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Очевидно (рисунок 9.3), что величина δ зависит от ε. Меняем ε — изменяется δ.

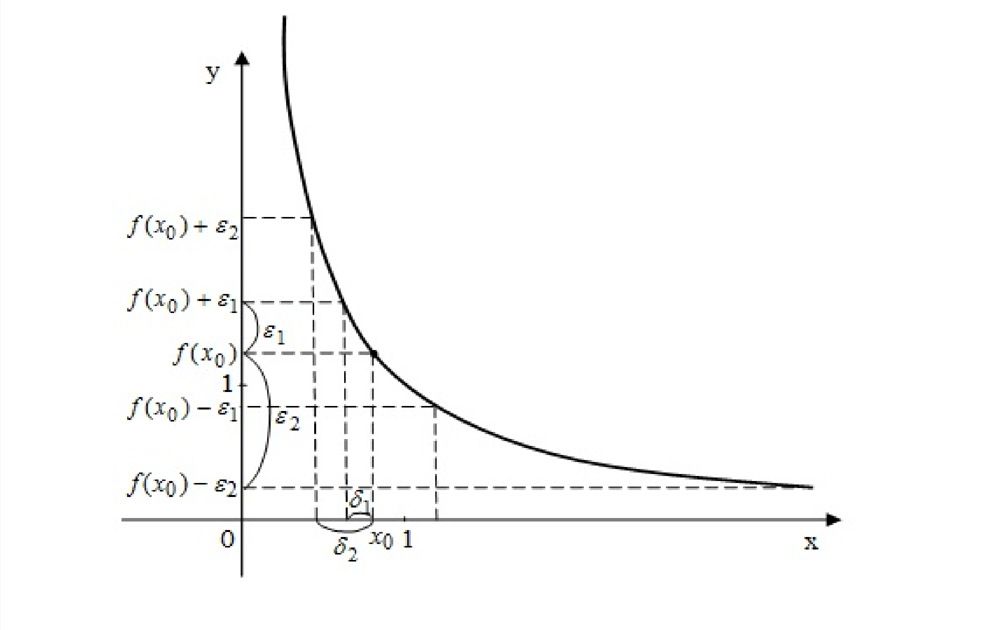

Рис. 9.3:

Однако δ зависит не только от ε, но и от выбора точки x_0. Для одного и того же ε, но различных точек x_0 и x_1, и δ будет различным (рисунок 9.4).

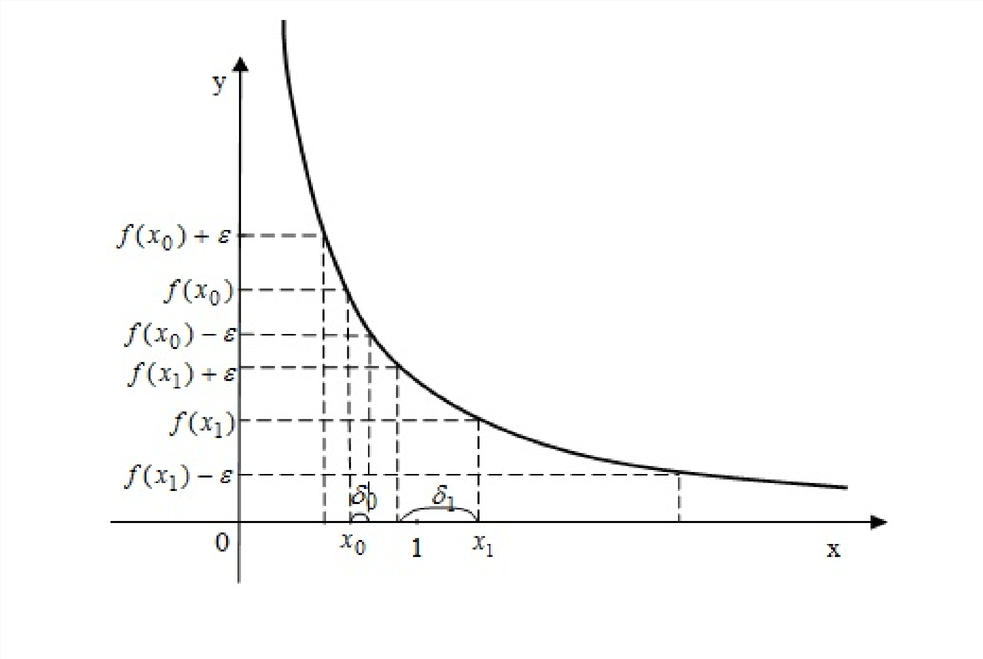

Рис. 9.4:

Таким образом, δ зависит от ε и x, т.е. является функцией ε и x $\delta(\varepsilon, x)$.

Существуют такие непрерывные функции, рассматриваемые на некоторых промежутках, для которых по $\forall\varepsilon > 0$ $\exists\delta > 0$, не зависящее от x, т.е. одно и то же для всех точек x из рассматриваемого промежутка.

Это равномерно непрерывные функции.

Определение 9.1. *Функция $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется равномерно непрерывной на множестве E, если для $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что для $\forall x_1, x_2 \in E$ и $|x_1 - x_2| < \delta$ выполняется $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.*

Равномерная непрерывность функции $f(x)$ на множестве E означает, что во всех частях множества E достаточна одна и та же степень близости двух значений аргумента, чтобы добиться заданной степени близости соответствующих значений функции.

Если функция $f(x)$ равномерно непрерывна на множестве E, то она непрерывна в любой точке $a \in E$. Достаточно в определении равномерной непрерывности положить $x_1 = x$, $x_2 = a$ и получим определение непрерывности функции $f(x)$ в точке a.

Пример 9.1. *Докажем, что функция $y = x^2$ равномерно непрерывна на интервале $(-1; 1)$. Для этого достаточно доказать, что для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такое, что для $\forall x_1, x_2 \in (-1; 1)$ и $|x_1 - x_2| < \delta$ выполняется $|x_1^2 - x_2^2| < \varepsilon$.*

Возьмем $\forall \varepsilon > 0$ и $\forall x_1, x_2 \in (-1; 1)$. Рассмотрим $|x_1^2 - x_2^2|$:

$$|x_1^2 - x_2^2| = |x_1 - x_2| \cdot |x_1 + x_2| \le |x_1 - x_2| \cdot (|x_1| + |x_2|) < |x_1 - x_2| \cdot (1 + 1) =$$

$$= 2|x_1 - x_2|$$

Потребуем, чтобы $2|x_1 - x_2| < \varepsilon$. Откуда $|x_1 - x_2| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Пусть

$\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$. *Тогда из неравенства* $|x_1 - x_2| < \delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ *следует неравенство* $|x_1^2 - x_2^2| < \varepsilon$.

Пример 9.2. *Докажем, что функция* $y = x^2$ *не является равномерно непрерывной на* $\mathbb{R}$. *Надо доказать, что* $\exists \varepsilon > 0$ *такое, что для* $\forall \delta > 0$ $\exists x', x'' \in \mathbb{R}$ *такие, что из неравенства* $|x' - x''| < \delta$ *следует неравенство* $|(x')^2 - (x'')^2| \geq \varepsilon$.

Рассмотрим последовательности $x'_n = \sqrt{n+1}$ *и* $x''_n = \sqrt{n}$.

$$|(x')^2 - (x'')^2| = |n + 1 - n| = 1.$$

Найдем

$$\lim_{n\to\infty} (x'_n - x''_n) = \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0.$$

По определению предела последовательности это означает, что для $\forall \delta > 0$ $\exists N$ *такое, что для* $\forall n > N$ *выполняется* $|x' - x''| < \delta$.

Итак, $\exists \varepsilon \leq 1$ *такое, что для* $\forall \delta > 0$ $\exists x'_{n_0}, x''_{n_0} \in \mathbb{R}$ $(n_0 > N)$ *такие, что из неравенства* $|x'_{n_0} - x''_{n_0}| < \delta$ *следует неравенство* $|(x'_{n_0})^2 - (x''_{n_0})^2| \geq \varepsilon$.

Пример 9.3. *Докажем, что функция* $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ *не является равномерно непрерывной на интервале* $(0; 1)$.

Функция $f(x)$ *не является равномерно непрерывной на множестве*

Начало
Содержание
Страница 186 из 430
Назад
На весь экран
Закрыть

E, *если* $\exists\varepsilon>0\ \forall\delta>0\ \exists x', x''\in E\ \wedge |x'-x''|<\delta\ \Rightarrow\ |f(x')-f(x'')|\geq\varepsilon$.

Заметим, что в любой окрестности точки ноль функция бесконечно много раз принимает значения 1 *и* -1.

$$\sin\frac{1}{x}=1\ \Leftrightarrow\ \frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z\ \Leftrightarrow\ x=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n},\ n\in Z.$$

$$\sin\frac{1}{x}=-1\ \Leftrightarrow\ \frac{1}{x}=\frac{3\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z\ \Leftrightarrow\ x=\frac{1}{\frac{3\pi}{2}+2\pi n},\ n\in Z.$$

Рассмотрим последовательности:

$$x'_n=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}\ \text{и}\ x''_n=\frac{1}{\frac{3\pi}{2}+2\pi n}.$$

Очевидно, что $x'_n\to 0$, $x''_n\to 0$ *при* $n\to\infty$. *Поэтому* $\lim\limits_{n\to\infty}(x'_n-x''_n)=0$, *т.е.* $\forall\delta>0\ \exists N\ \forall n>N\ \Rightarrow\ |x'-x''|<\delta$.

Таким образом, $\exists\varepsilon\leq 2\ \forall\delta>0\ \exists x'_{n_0},\ x''_{n_0}\in(0;1)\ (n_0>N)\ |x'_{n_0}-x''_{n_0}|<\delta$

$$\left|\sin\frac{1}{x'_{n_0}}-\sin\frac{1}{x''_{n_0}}\right|=|1-(-1)|=2\geq\varepsilon.$$

Вывод. Не всякая непрерывная на множестве функция является равномерно непрерывной на этом множестве (примеры 9.2, 9.3).

Теорема 9.4. ***(Кантора о равномерной непрерывности непрерывной на отрезке функции).*** *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она равномерно непрерывна на нем.*

Доказательство. ◀ Применим метод доказательства от противного. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, но не является равномерно непрерывной на нём, т.е. $\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \ \exists x', \, x'' \in [a;b] \, \wedge$ $\wedge \, |x' - x''| < \delta \ \ \Rightarrow |f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon$. Рассмотрим $\delta = 1, \, \frac{1}{2}, \, \frac{1}{3}, \, \frac{1}{4}, \, \ldots$:

для $\delta = 1 \ \exists x_1', \, x_1'' \in [a;b] \ |x_1' - x_1''| < 1 \ \Rightarrow |f(x_1') - f(x_1'')| \geq \varepsilon$,

для $\delta = \frac{1}{2} \ \exists x_2', \, x_2'' \in [a;b] \ |x_2' - x_2''| < \frac{1}{2} \ \Rightarrow |f(x_2') - f(x_2'')| \geq \varepsilon$,

....

для $\delta = \frac{1}{n} \ \exists x_n', \, x_n'' \in [a;b] \ |x_n' - x_n''| < \frac{1}{n} \ \Rightarrow |f(x_n') - f(x_n'')| \geq \varepsilon$,

....

Получили две последовательности: $(x_n')_{n=1}^{\infty}$ и $(x_n'')_{n=1}^{\infty}$. Так как для $\forall n \in \mathbb{N} \ x_n' \in [a;b], \, x_n'' \in [a;b]$, то эти последовательности ограниченные. По теореме Больцано—Вейерштрасса из них можно извлечь сходящиеся подпоследовательности. Чтобы не вводить новых обозначений, будем считать, что сами последовательности $(x_n')_{n=1}^{\infty}$ и $(x_n'')_{n=1}^{\infty}$ сходятся.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n' = x_0$. Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n'' = x_0$. Рассмотрим $|x_n'' - x_0|$:

$$|x_n'' - x_0| = |x_n'' - x_n' + x_n' - x_0| \leq |x_n'' - x_n'| + |x_n' - x_0|. \qquad (9.2)$$

Так как при $n \to \infty \ |x_n' - x_n''| < \frac{1}{n} \to 0, \, |x_n' - x_0| \to 0$, то из неравенства

(9.2) следует, что $|x''_n - x_0| \to 0$ при $n \to \infty$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x''_n = x_0$.

Для $\forall n \in \mathbb{N}$ $x'_n \in [a; b]$, значит

$$a \leq x'_n \leq b. \tag{9.3}$$

В неравенстве (9.3) перейдем к пределу при $n \to \infty$, получим: $a \leq x_0 \leq b$.

Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, следовательно, она непрерывна в точке $x_0 \in [a; b]$. По определению непрерывности функции в точке по Гейне, это означает, что $f(x'_n) \to f(x_0)$, $f(x''_n) \to f(x_0)$ при $n \to \infty$. Тогда $|f(x'_n) - f(x''_n)| \to 0$ при $n \to \infty$. Но для $\forall n \in \mathbb{N}$ $|f(x'_n) - f(x''_n)| > \varepsilon$. Пришли к противоречию. ►

Определение 9.2. *Колебанием функции $f(x)$ на множестве E называется величина $\omega(f, E) = \sup\limits_{x', x'' \in E} |f(x') - f(x'')|$ или $\omega(f, E) = M - m$, где $M = \sup\limits_{x \in E} f(x)$, $m = \inf\limits_{x \in E} f(x)$.*

Следствие 9.4. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то для $\forall \varepsilon > 0$ отрезок $[a; b]$ можно разбить на конечное число частей так, что на каждой из частей колебание функции не будет превышать ε, т.е. $\omega_i \leq \varepsilon$ $(i = \overline{1, n})$.*

Доказательство. ◄ Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то по теореме Кантора она равномерно непрерывна на нем:

$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x_1, x_2 \in [a;b]\ |x_1 - x_2| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. Очевидно, что отрезок $[a;b]$ можно разбить на конечное число частей, длина каждой из которых меньше δ. Обозначим эти части $\triangle_i$ $(i = \overline{1,n})$. Их длины $|\triangle_i| < \delta$. Для $\forall x_1, x_2 \in \triangle_i$ выполняется $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. Тогда $\sup\limits_{x', x'' \in \triangle_i} |f(x_1) - f(x_2)| \le \varepsilon$ или $\omega_i = \omega(f, \triangle_i) \le \varepsilon$ $(i = \overline{1,n})$. ►

9.4 Вопросы и задания для самоконтроля

1. Сформулируйте теорему Больцано–Коши и сделайте ее геометрическую интерпретацию.

2. Сформулируйте следствие из теоремы Больцано–Коши о промежуточном значении функции.

3. Сформулируйте следствие 9.2 из теоремы Больцано–Коши.

4. Сформулируйте первую теорему Вейерштрасса.

5. Справедливо ли утверждение: «Непрерывная на интервале функция ограничена на этом интервале»?

6. Может ли неограниченная на множестве E функция быть непрерывной на этом множестве, если:
   а) E– отрезок,
   б) E– интервал?

7. Сформулируйте вторую теорему Вейерштрасса.

8. Справедливо ли утверждение: «Непрерывная и ограниченная на интервале функция достигает на этом интервале своих точных граней»?

9. Справедливо ли утверждение: «Если функция не достигает на отрезке $[a; b]$ своей точной верхней (или нижней) грани, то она разрывна на нем»?

10. Достигает ли функция $y = x^2$ своих точных граней на интервале $(-1; 2)$?

11. Справедливо ли утверждение: «Непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция имеет $\max\limits_{x\in[a;b]} f(x)$ и $\min\limits_{x\in[a;b]} f(x)$»?

12. Приведите пример функции, заданной на отрезке $[a; b]$, не достигающей на этом отрезке своей точной верхней грани.

13. Приведите пример непрерывной функции, заданной на интервале $(a; b)$, не достигающей на этом интервале своей точной нижней грани.

14. Постройте пример ограниченной на отрезке функции, которая на этом отрезке:
    а) достигает sup, но не достигает inf
    б) достигает inf, но не достигает sup;
    в) не достигает inf и sup.
    Может ли такая функция быть непрерывной на отрезке?

15. Постройте пример функции, которая на некотором множестве E имеет inf и sup, но не имеет max и min.

16. Дайте определение равномерно непрерывной функции.

17. Пользуясь правилом построения отрицания, дайте определение функции, не являющейся равномерно непрерывной.

18. Справедливы ли утверждения:
а) «Если функция $f(x)$ непрерывна на множестве E, то она равномерно непрерывна на этом множестве»;
б) «Если функция $f(x)$ равномерно непрерывна на множестве E, то она непрерывна на этом множестве»?

19. Сформулируйте теорему Кантора.

20. Справедливо ли утверждение: «Непрерывная на интервале функция равномерно непрерывна на этом интервале»?

21. Дайте определение колебания функции на множестве.

22. Найдите колебания функции:
а) $f(x) = x^2$ на $(-1; 2)$;
б) $f(x) = \sin x$ на $[0; 2\pi]$;
в)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

на $(-\pi;\pi)$.

23. Сформулируйте следствие из теоремы Кантора.

ТЕМА 10
Существование обратной функции и ее непрерывность

10.1 Точки разрыва монотонной функции

Теорема 10.1. ***(о точках разрыва монотонной функции).*** *Пусть функция $f : D \to \mathbb{R}$, где D – промежуток. Если функция $f(x)$ монотонна на промежутке D (строго или нестрого), то она на этом промежутке может иметь лишь точки разрыва первого рода со скачком.*

Доказательство. ◀ Возьмем любую точку $x_0 \in D$, но x_0 – не самая левая и не самая правая точка промежутка D. Пусть функция $f(x)$ возрастает на D. Тогда для $\forall x < x_0$ выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$, т.е. для $\forall x < x_0$ множество значений функции $f(x)$ ограничено сверху. По критерию существования предела монотонной функции существует конечный $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$. В неравенстве $f(x) < f(x_0)$ перейдем к пределу при $x \to x_0 - 0$. Получим

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \le f(x_0). \tag{10.1}$$

Для $\forall x > x_0$ выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$ (т.к. функция $f(x)$ возрастает на D). В последнем неравенстве перейдем к пределу при $x \to x_0 + 0$:

$$f(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) \ge f(x_0). \tag{10.2}$$

Из неравенства (10.1) и (10.2) следует:

$$f(x_0 - 0) \leq f(x_0) \leq f(x_0 + 0). \tag{10.3}$$

В неравенстве (10.3) возможны следующие случаи.

1. $f(x_0 - 0) = f(x_0) = f(x_0 + 0)$.

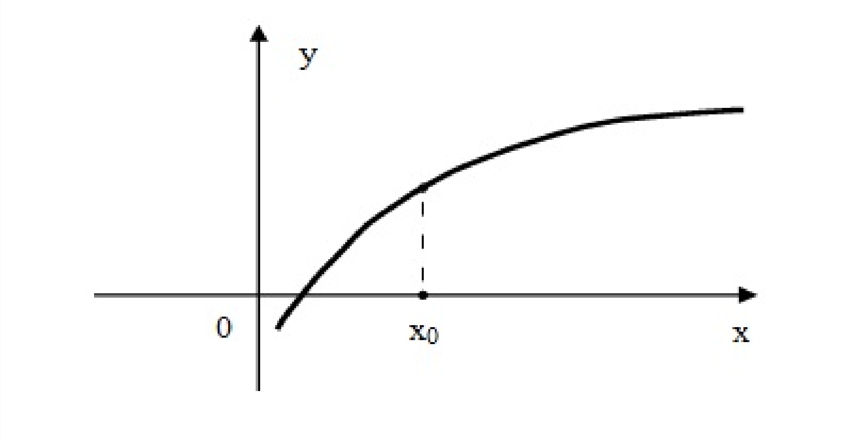

Рис. 10.1:

Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 (рисунок 10.1).

2. $f(x_0 - 0) = f(x_0) < f(x_0 + 0)$.

Точка x_0 является точкой разрыва первого рода со скачком. Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 слева (рисунок 10.2)

3. $f(x_0 - 0) < f(x_0) = f(x_0 + 0)$.

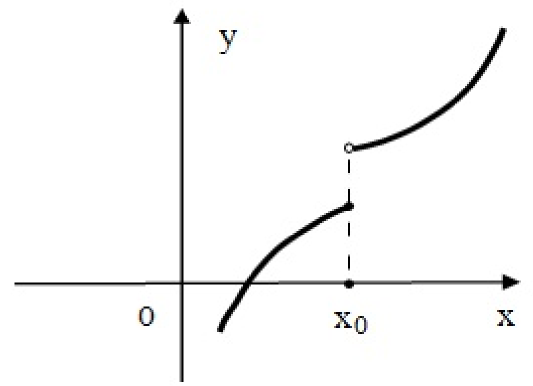

Рис. 10.2:

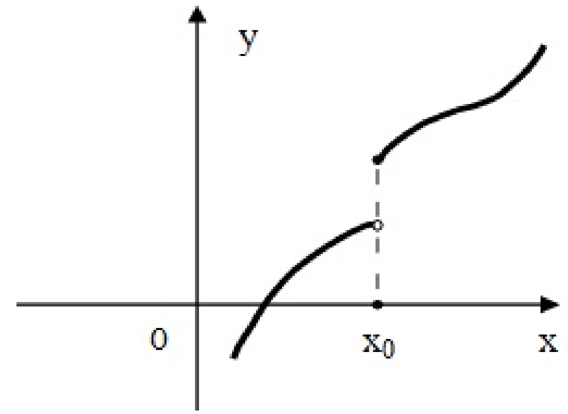

Рис. 10.3:

Точка x_0 является для функции $f(x)$ точкой разрыва первого рода со скачком. Функция $f(x)$ непрерывна в точке справа (рисунок 10.3).

4. $f(x_0 - 0) < f(x_0) < f(x_0 + 0)$.

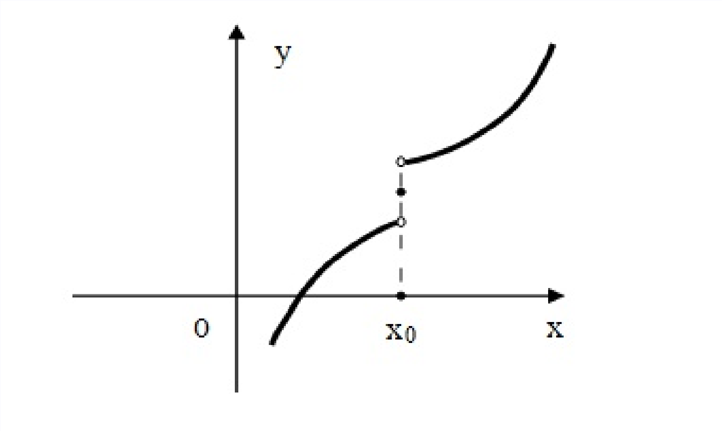

Рис. 10.4:

Точка x_0 является для функции $f(x)$ точкой разрыва первого рода со скачком (рисунок 10.4).

Таким образом, либо функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, либо x_0 — точка разрыва первого рода со скачком. ▶

Теорема 10.2. ***(о непрерывности монотонной функции).*** *Если монотонная функция $f(x)$ задана на промежутке D и множество ее значений E также промежуток, то $f(x)$ непрерывна на промежутке D.*

Доказательство. ◀ Метод доказательства от противного. Предположим, что функция $f(x)$ не является непрерывной на промежутке D, а терпит разрыв в точке x_0. Согласно теореме 10.1, x_0 – точка разрыва первого рода со скачком.

Пусть функция $f(x)$ возрастает на D. Тогда $f(x_0 - 0) < f(x_0 + 0)$ и промежуток $(f(x_0 - 0); f(x_0 + 0))$ сплошь не заполнен значениями функции. Но $(f(x_0 - 0); f(x_0 + 0)) \subset E$ – промежутке. Пришли к противоречию. ▶

10.2 Существование и непрерывность обратной функции

Теорема 10.3. ***(о существовании обратной функции).*** *Пусть $f : X \to \mathbb{R}$, $f(X) = Y$ – множество значений функции $f(x)$. Если $f(x)$ строго монотонна на множестве X, то для нее существует обратная функция $f^{-1} : Y \to X$, причем $f^{-1}(y)$ имеет тот же характер монотонности, что и функция $f(x)$.*

Доказательство. ◀ Так как Y – множество значений функции $f(x)$, то отображение $f : X \to Y$ сюръективно.

Пусть функция $f(x)$ возрастает на X, т.е. для $\forall x_1, x_2 \in X \;\; x_1 < x_2$ выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$. Это означает, что если $x_1 \neq x_2$, то $f(x_1) \neq f(x_2)$. Следовательно, отображение $f : X \to Y$ инъективно.

Таким образом, отображение $f : X \to Y$ биективно, является взаимно однозначным отображением. Поэтому существует обратное отображение $f^{-1} : Y \to X$, задаваемое формулой $x = f^{-1}(y)$.

Возьмем $\forall y_1, y_2 \in Y$, $\;y_1 < y_2 \;\Leftrightarrow\; f(x_1) < f(x_2) \;\Leftrightarrow\; x_1 < x_2 \;\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\; f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$. Значит, обратная функция $f^{-1}(y)$ возрастает на Y. ▶

Теорема 10.4. ***(о непрерывности обратной функции).*** *Пусть $f : D \to E$, где D – промежуток, $f(D) = E$. Если функция $f(x)$ строго монотонна и непрерывна на D, то обратная функция $f^{-1} : E \to D$ непрерывна на E.*

Доказательство. ◀ Пусть функция $f(x)$ возрастает на D, тогда по теореме 10.3 обратная функция $f^{-1}(y)$ возрастает на E. Функция $f(x)$ непрерывна на промежутке D, тогда по следствию 9.2 из теоремы Больцано–Коши E – промежуток.

Итак, обратная функция $f^{-1} : E \to D$, где E и D – промежутки, монотонна на E. Согласно теореме 10.2 функция $f^{-1}(y)$ непрерывна на E. ▶

10.3 Обратные тригонометрические функции

Обратные тригонометрические функции определяются как функции, обратные к сужениям функций $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{tg} x$, $\mathrm{ctg} x$ на определенные промежутки, где эти функции непрерывны и строго монотонны.

Функция $f(x) = \sin x$ возрастает и непре рывна на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Значит функция $f\Big|_{\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]}$ имеет обратную, которая обозначается $x = \arcsin y$. Или меняя аргумент и функцию местами пишут $y = \arcsin x$. Эта функция определена на отрезке $[-1; 1]$ и является возрастающей и непрерывной (теоремы 10.3 и 10.4). Таким образом,

$$\arcsin : [-1; 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

Графики функций f и f^{-1} симметричны относительно прямой $y = x$. График функции $\arcsin x$ показан на рисунке 10.5.

Функция $f(x) = \cos x$ убывает и непрерывна на отрезке $[0; \pi]$. Ее сужение $f\Big|_{[0;\pi]} : [0; \pi] \to [-1; 1]$ имеет обратную функцию $f^{-1} : [-1; 1] \to [0; \pi]$, которая обозначается arccos. Функция $y = \arccos x$ убывает и непрерывна на $[-1; 1]$, ее график изображен на рисунке 10.6.

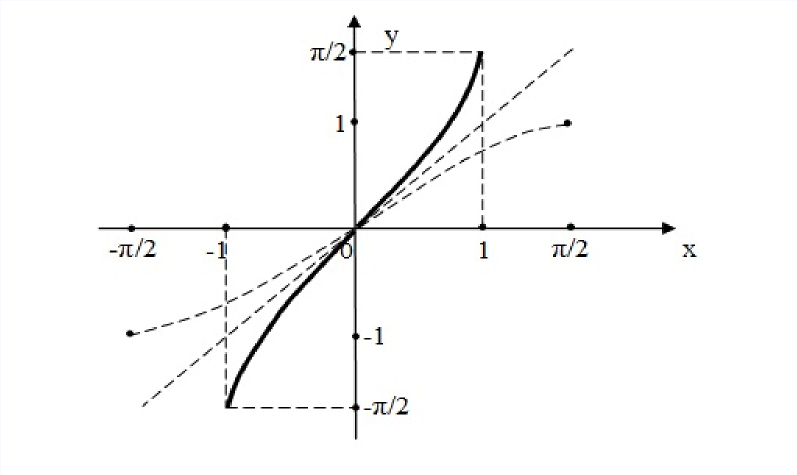

Рис. 10.5:

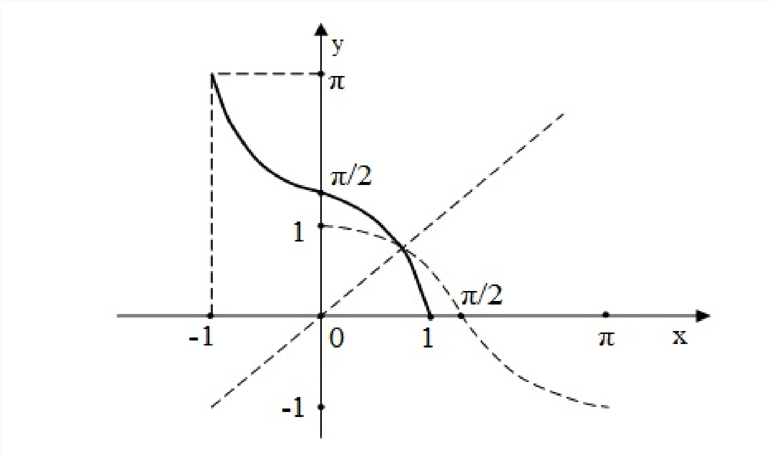

Рис. 10.6:

Функция $f(x) = \mathrm{tg}x$ возрастает и непрерывна на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Ее сужение $f\Big|_{\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)} : \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ имеет обратную функцию, которая обозначается arctg

$$\mathrm{arctg} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

Функция $y = \mathrm{arctg}x$ возрастает и непрерывна на $\mathbb{R}$. График функции $y = \mathrm{arctg}x$ показан на рисунке 10.7.

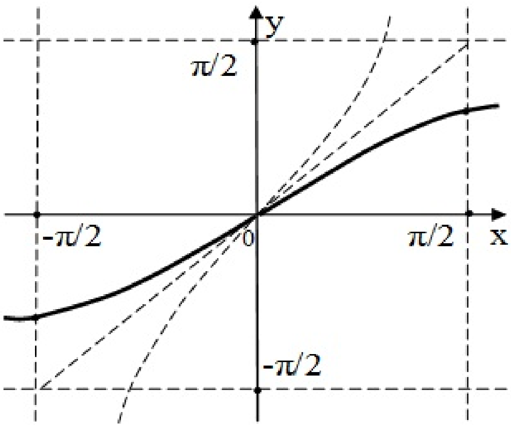

Рис. 10.7:

Функция $f(x) = \mathrm{ctg}x$ убывает и непрерывна на интервале $(0;\pi)$. Ее сужение $f\Big|_{(0;\pi)} : (0;\pi) \to \mathbb{R}$ имеет обратную функцию $f^{-1} : \mathbb{R} \to (0;\pi)$, которая обозначается arcctg. Функция $y = \mathrm{arcctg}x$ убывает и непрерывна на $\mathbb{R}$, ее график изображен на рисунке 10.8.

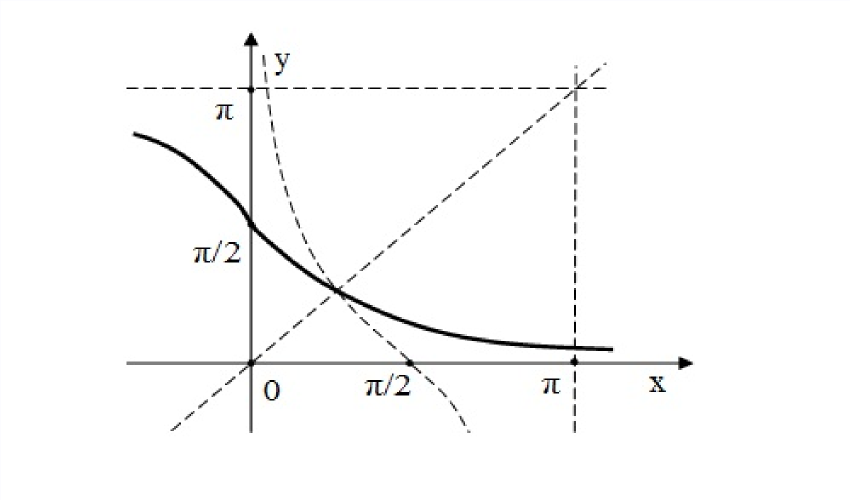

Рис. 10.8:

10.4 Вопросы и задания для самоконтроля

1. Сформулируйте теорему о точках разрыва монотонной функции.
2. При каких условиях монотонная функция является непрерывной?
3. Приведите примеры монотонных функций, имеющих точки разрыва и примеры непрерывных монотонных функций.
4. Каковы достаточные условия существования обратной функции $f^{-1}(y)$ для функции $f(x)$?
5. Сформулируйте теорему о непрерывности обратной функции.
6. Почему функция $y = \sin x$, рассмотренная на $\mathbb{R}$, не имеет обратной функции?
7. Как определяются обратные тригонометрические функции?
8. Изобразите графики функций $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \mathrm{arctg} x$, $y = \mathrm{arcctg} x$.

Часть II

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ

Практические занятия 1, 2. Функции(отображения)

Задание 1. Пусть отображение $f : [0;1] \to [0;3]$. Какие из отображений:

а) $f(x) = 3\sin\dfrac{\pi x}{2}$;

б) $f(x) = \operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}$;

в) $f(x) = 3^x$;

г) $f(x) = 12\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2$;

д) $f(x) = 3 - \dfrac{16}{3}\left(x - \dfrac{1}{4}\right)^2$

являются инъективными, сюръективными, биективными?

Решение: ◀ а) Так как функция $f(x) = 3\sin\dfrac{\pi x}{2}$ возрастает на $[0;1]$, то $f([0;1]) = [0;3]$. Поэтому отображение является сюръективным и инъективным. Следовательно, оно биективное.

б) Функция $f(x) = \operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}$ возрастает на $[0;1]$ и $f([0;1]) = [0;1]$. Отображение является инъективным, не является сюръективным и биективным.

в) Функция $f(x) = 3^x$ возрастает на $[0;1]$ и $f([0;1]) = [1;3] \subset [0;3]$. Поэтому отображение не является сюръективным. Оно инъективно и не биективно.

г) Графиком функции $f(x) = 12\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$ является парабола (рисунок 10.9). $f([0;1]) = [0;3]$. Значит, отображение сюръективно. Отображение не является инъективным, так как существуют $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$, $x_1 \neq x_2$, такие, что $f(x_1) = f(x_2) = 3$. Данное отображение не биективно.

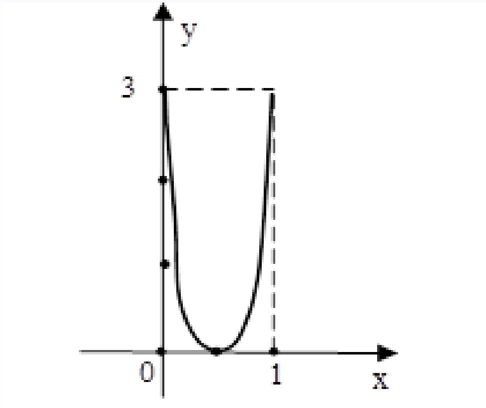

Рис. 10.9:

д) График функции $f(x) = 3 - \dfrac{16}{3}\left(x - \dfrac{1}{4}\right)^2$ изображен на рисунке 10.10. Так как $f([0;1]) = [0;3]$, то отображение сюръективно. Отображение не является инъективным, поскольку существуют $x_1 = 0$ и $x_2 = \dfrac{1}{2}$, $x_1 \neq x_2$, для которых $f(x_1) = f(x_2) = \dfrac{8}{3}$. Следовательно, отображение не является биективным. ►

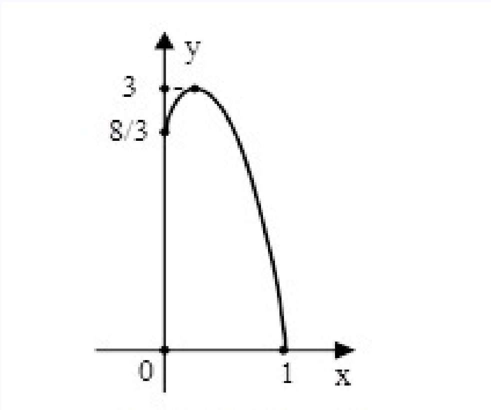

Рис. 10.10:

Задание 2. Составить композиции $\varphi \circ \varphi$, $\varphi \circ \psi$, $\psi \circ \varphi$, $\psi \circ \psi$, если:

а) $\varphi(x) = x^2$, $\psi(x) = 2^x$;

б) $\varphi(x) = \mathrm{sign} x$, $\psi(x) = \dfrac{1}{x}$.

Решение: ◄ а) $\varphi : \mathbb{R} \to [0;+\infty)$, $\psi : \mathbb{R} \to (0;+\infty)$.

$(\varphi\circ\varphi)(x)=\varphi(\varphi(x))=\left(x^2\right)^2=x^4,\quad \varphi\circ\varphi:\mathbb{R}\to[0;+\infty).$

$(\varphi\circ\psi)(x)=\varphi(\psi(x))=(2^x)^2=2^{2x},\quad \varphi\circ\psi:\mathbb{R}\to(0;+\infty).$

$(\psi\circ\varphi)(x)=\psi(\varphi(x))=2^{x^2},\quad \psi\circ\varphi:\mathbb{R}\to[1;+\infty).$

$(\psi\circ\psi)(x)=\psi(\psi(x))=2^{2^x},\quad \psi\circ\psi\ :\mathbb{R}\to(1;+\infty).$

б) $\psi:\mathbb{R}\setminus 0\to\mathbb{R}\setminus 0$. Так как

$$\mathrm{sign}x=\begin{cases}1, & \text{если } x>0,\\ 0, & \text{если } x=0,\\ -1, & \text{если } x<0,\end{cases}$$

то $\varphi\circ\varphi:\mathbb{R}\to\{-1;\ 0;\ 1\}$. $\varphi\circ\varphi:\mathbb{R}\to\{-1;\ 0;\ 1\}$.

$$(\varphi\circ\varphi)(x)=\mathrm{sign}(\mathrm{sign}x)=\begin{cases}1, & \text{если } x>0,\\ 0, & \text{если } x=0,\\ -1, & \text{если } x<0,\end{cases}=\mathrm{sign}x.$$

$(\varphi\circ\varphi):\mathbb{R}\to\{-1;\ 0;\ 1\}.$

$$(\varphi\circ\psi)(x)=\operatorname{sign}\left(\frac{1}{x}\right)=\begin{cases}1, & \text{если } x>0,\\ -1, & \text{если } x<0.\end{cases}$$

$(\varphi\circ\psi):\mathbb{R}\setminus 0\to\{-1;\ 1\}.$

$$(\psi\circ\varphi)(x)=\frac{1}{\operatorname{sign} x}=\begin{cases}1, & \text{если } x>0,\\ -1, & \text{если } x<0.\end{cases}$$

$(\psi\circ\varphi):\mathbb{R}\setminus 0\to\{-1;\ 1\}.$

$$(\psi\circ\psi)(x)=\frac{1}{\frac{1}{x}}=x,\quad x\neq 0.$$

$(\psi\circ\psi):\mathbb{R}\setminus 0\to\mathbb{R}\setminus 0.$ ▶

Задание 3. Найти обратные функции для следующих функций:

а) $y=3x-5$; б) $y=\sqrt{x-2}$; в) $y=2x-x^2$, $x\geqslant 1$.

Решение: ◀ а) Линейная функция $y=3x-5$ возрастает на $\mathbb{R}$. Следовательно, является биекцией $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ и имеет обратную функцию. Решая уравнение $y = 3x - 5$ относительно x, получим: $x = \frac{1}{3}y + \frac{5}{3}$. Эта функция будет обратной для данной функции. Так как функцию обозначают через y, а аргумент через x, то, меняя обозначения в обратной функции на общепринятые, получим для нее выражение $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$.

б) По смыслу уравнения $y = \sqrt{x - 2}$, которым определяется функция, $x \geqslant 2$ и $y \geqslant 0$. Функция возрастает на $[2; +\infty)$ и является биекцией $f : [2; +\infty) \to [0; +\infty)$. Возведя уравнение в квадрат, получим обратную функцию $x = y^2 + 2$. Переходя к обычным обозначениям аргумента и функции, получим $y = x^2 + 2$, $x \in [0; +\infty)$.

в) Графиком функции $y = 2x - x^2$ является парабола, изображенная на рисунке 10.11.

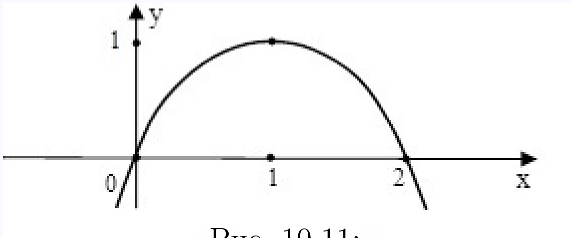

Рис. 10.11:

При $x \geqslant 1$ функция убывает и является биекцией $f : [1; +\infty) \to (-\infty; 1]$. Выразим из уравнения $y = 2x - x^2$ переменную x.

$y = 2x - x^2 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{y} - 1 = -1 + 2x - x^2 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{y} - 1 = -(x - 1)^2$

$$\Leftrightarrow \quad (x-1)^2 = 1 - y \quad \Leftrightarrow \quad x - 1 = \pm\sqrt{1-y} \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \pm \sqrt{1-y}.$$

Так как $x \geqslant 1$, то $x = 1 + \sqrt{1-y}$. Обратная функция: $y = 1 + \sqrt{1-x}$, где $x \in (-\infty; 1]$. ►

Задание 4. Найти области определения следующих функций:

а) $y = \lg(\cos(\lg x))$;

б) $y = \sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}} + \sqrt{\dfrac{1-x}{\sqrt{1+x}}}$;

в) $y = \ln(\sin(x-3)) + \sqrt{16 - x^2}$.

Решение: ◄ а) Для нахождения области определения функции решим систему неравенств:

$$\begin{cases} x > 0, \\ \cos(\lg x) > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k < \lg x < \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \ k \in Z, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x > 0, \\ 10^{-\frac{\pi}{2}+2\pi k} < x < 10^{\frac{\pi}{2}+2\pi k}, \ k \in Z, \end{cases} \Leftrightarrow 10^{-\frac{\pi}{2}+2\pi k} < x < 10^{\frac{\pi}{2}+2\pi k}, \ k \in Z.$$

$$D(f) = \left(10^{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}; 10^{\frac{\pi}{2}+2\pi k}\right), \ k \in Z.$$

б) Область определения функции определяется как совокупность решений системы неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{x+2} \geq 0, \\ \\ \dfrac{1-x}{\sqrt{1+x}} \geq 0, \\ \\ 1+x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-2}{x+2} \geq 0, \\ \\ 1-x \geq 0, \\ \\ x > -1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < -2, \\ x \geq 2, \end{array} \right. \\ \\ x \leq 1, \\ x > -1. \end{cases}$$

Графическое решение системы изображено на рисунке 10.12.

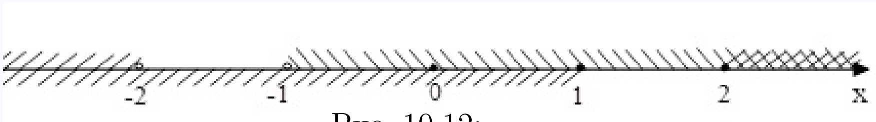

Рис. 10.12:

Так как последняя система не имеет решений, то формула

$$y = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}} + \sqrt{\frac{1-x}{\sqrt{1+x}}}$$ функцию не задает.

в) Решим систему неравенств:

$$\begin{cases} \sin(x-3) > 0, \\ 16 - x^2 \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\pi k < x - 3 < \pi + 2\pi k, \ k \in Z, \\ (x-4)(x+4) \leq 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\pi k + 3 < x < \pi + 3 + 2\pi k, \ k \in Z, \\ -4 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

Графическое решение системы изображено на рисунке 10.13.

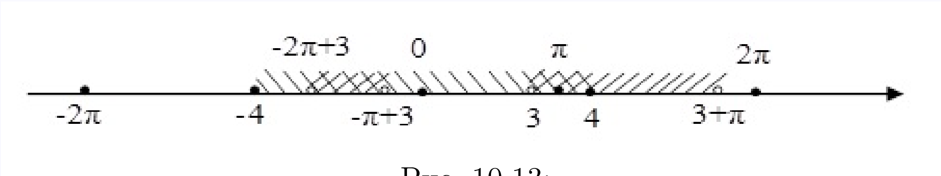

Рис. 10.13:

$D(f) = (-2\pi + 3, -\pi + 3) \cup (3; 4]$. ▶

Задание 5. Исследовать на четность и нечетность функции:

а) $f(x) = \dfrac{x^3 + \sin x}{1 + x^2}$, $x \in [-4; 4)$;

б) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 + 1}$;

Кафедра
математического
анализа и
дифференциальных
уравнений
Начало
Содержание
Страница 217 из 430
Назад
На весь экран
Закрыть

в)

$$f(x)=\begin{cases} x^3+\sin x, & x>0,\\ -x^3-\sin x, & x<0;\end{cases}$$

г)

$$f(x)=\begin{cases} x^2+4, & x\geq 0,\\ -x^2-4, & x<0;\end{cases}$$

д) $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

Решение: ◀ а) Хотя формально $f(-x)=-f(x)$, но функция не является нечетной, так как ее область определения $[-4;4)$ несимметрична относительно начала координат. Функция не является ни четной, ни нечетной.

б) Область определения функции $D(f)=\mathbb{R}$ – множество симметричное относительно начала координат. Функция не является ни четной, ни нечетной, так как $\exists x=2$, такое, что $f(-2)=-\dfrac{3}{5}\neq\dfrac{1}{5}=f(2)$ и $f(-2)=-\dfrac{3}{5}\neq-\dfrac{1}{5}=-f(2)$.

в) $D(f)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ – множество симметричное относительно начала координат. Пусть $x>0$, тогда $-x<0$ и $f(-x)=$

$= -(-x)^3 - \sin(-x) = x^3 + \sin x$. Если $x < 0$, то $-x > 0$ и $f(-x) =$
$= (-x)^3 + \sin(-x) = -x^3 - \sin x$. Получаем для $\forall x \in D(f)$

$$f(-x) = \begin{cases} x^3 + \sin x, & x > 0 \\ -x^3 - \sin x, & x < 0 \end{cases} = f(x).$$

Следовательно, функция четная.

г) $D(f) = \mathbb{R}$ – множество симметричное относительно начала координат. Функция не является ни четной, ни нечетной, так как $\exists x = 1$, такое, что $f(1) = 5, f(-1) = -5$ и $f(-1) \neq f(1)$; $\exists x = 0$, такое, что $f(0) = 4$ и $f(-0) \neq -f(0)$.

д) Областью определения функции является множество решений неравенства $x + \sqrt{1+x^2} > 0$. Очевидно, что $D(f) = \mathbb{R}$. Для $\forall x \in \mathbb{R}$ найдем $f(-x) = \ln\left(-x + \sqrt{1+(-x)^2}\right) = \ln\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) =$

$$= \ln \frac{\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)\left(\sqrt{1+x^2} + x\right)}{\sqrt{1+x^2} + x} = \ln \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + x} =$$

$$= \ln\left(\sqrt{1+x^2} + x\right)^{-1} = -\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) = -f(x).$$

Функция является нечетной. ▶

Задание 6. Доказать, что:

а) если $y = f(x)$ и $x = \varphi(t)$ нечетные функции, то функция $y = f(\varphi(t))$ нечетная;

б) произведение двух четных функций – четная функция.

Решение: ◀ а) Так как $\varphi(t)$ нечетная, то ее область определения $D(\varphi)$ – множество симметричное относительно начала координат. Для $\forall t \in \varphi(t)$ найдем $f(\varphi(-t)) = f(-\varphi(t)) = -f(\varphi(t))$.
Значит, функция $y = f(\varphi(t))$ – нечетная.
б) Пусть функции $f_1 : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $f_2 : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ четные. Тогда функция $(f_1 \cdot f_2)(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$ определена на D. Для $\forall x \in D$ найдем

$$(f_1 \cdot f_2)(-x) = f_1(-x) \cdot f_2(-x) = f_1(x) \cdot f_2(x) = (f_1 \cdot f_2)(x).$$

Следовательно, $(f_1 \cdot f_2)(x)$ четная функция. ▶

Задание 7. Доказать, что любую функцию $f(x)$, определенную на симметричном промежутке $[-l; l]$, можно представить в виде суммы четной и нечетной функций.

Решение: ◀ Рассмотрим функции

$$\varphi(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad \psi(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Так как $f : [-l; l] \to \mathbb{R}$, то $\varphi : [-l; l] \to \mathbb{R}$, $\psi : [-l; l] \to \mathbb{R}$. Отрезок $[-l; l]$ – множество симметричное относительно начала координат. Найдем

$$\varphi(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = \varphi(x), \quad \psi(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} =$$

$$= -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -\psi(x).$$

Значит $\varphi(x)$ – четная функция, $\psi(x)$ – функция нечетная.

$$\varphi(x) + \psi(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = \frac{2f(x)}{2} = f(x). \blacktriangleright$$

Задание 8. Доказать, что если функция $f(x)$ периодическая с основным периодом T, то функция $f(ax+b)$ периодическая с основным периодом $\frac{T}{a}$ $(a \neq 0)$.

Решение: $\blacktriangleleft$ Докажем, что $\frac{T}{a}$ – период функции $f(ax+b)$.

$$f\left(a\left(x + \frac{T}{a}\right) + b\right) = f((ax+b) + T) = f(ax+b),$$

так как T – период функции $f(x)$.

Покажем, что $\frac{T}{a}$ – основной период. Возьмем точку $x' = \frac{x-b}{a}$. Пусть T_1 – еще один период функции $f(ax+b)$, то есть $f(a(x+T_1)+b) =$

$= f(ax+b)$. Рассмотрим

$$f(ax'+b) = f\left(a\frac{x-b}{a} + b\right) = f(x),$$

$$f\left(a\left(x'+T_1\right)+b\right)=f\left(ax'+b+aT_1\right)=f\left(x+aT_1\right).$$

Из равенства левых частей этих соотношений следует, что $f\left(x+aT_1\right)=f(x)$, значит, aT_1 – период функции $f(x)$. Но T – основной ее период, поэтому $T \leqslant aT_1$. Откуда $T_1 \geqslant \dfrac{T}{a}$. Следовательно, $\dfrac{T}{a}$ – основной период функции $f(ax+b)$. ▶

При исследовании функций на периодичность можно использовать следующие утверждения.

Утверждение 1. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ являются периодическими с периодом T, то их сумма, произведение и частное также есть функции периодические с периодом T.

Утверждение 2. Если дана сложная функция $f(\varphi(t))$ и $\varphi(t)$ – периодическая с периодом T, а $f(x)$ – любая функция, то функция $f(\varphi(t))$ тоже периодическая с периодом T.

Задание 9. Исследовать на периодичность следующие функции и найти их период:

а) $y=\cos\dfrac{x}{2}$;

б) $y=2\sin(3x+5)$;

в) $y=\sin^3 x+\cos^3 x$;

г) $y = 2^{|\sin x|}$;

д) $y = \sin \frac{1}{x}, \quad x \neq \frac{1}{2\pi n}$;

е) $y = \cos x^2$.

Решение: ◀ а) Функция $y = \cos x$ периодическая с основным периодом $T = 2\pi$. Используя утверждение, доказанное в задании 8, делаем вывод, что основной период функции $y = \cos \frac{x}{2}$ равен $T_0 = \frac{2\pi}{1/2} = 4\pi$.

б) Так как основной период функции $y = \sin x$ равен $T = 2\pi$, то из задания 8 следует, что основной период функции $y = 2\sin(3x + 5)$ равен $T_0 = \frac{2\pi}{3}$.

в) Функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ периодические с периодом 2π. Из утверждения 1 следует, что период функции $y = \sin^3 x + \cos^3 x$ также равен 2π.

г) Функция $y = 2^{|\sin x|}$ является композицией функций $u = |\sin x|$ и $y = 2^u$. Так как функция $y = |\sin x|$ периодическая с периодом π, то композиция – функция периодическая с периодом π (утверждение 2).

д) Функция $f(x)$ не является периодической, если для $\forall T \neq 0$ $\exists x' \in D(f)$ такое, что $(x' + T) \notin D$ или $\exists x'' \in D(f)$ такое, что

$f\left(x''+T\right) \neq f(x'')$.

Покажем, что функция $y=\sin\frac{1}{x}$, $\left(x \neq \frac{1}{2\pi n}\right)$ не является периодической. Область определения функции $D(f)=\mathbb{R} \setminus \left\{0; \frac{1}{\pi n}\right\}$. Возьмем $\forall T \neq 0$. Если $T \neq \frac{1}{\pi n}$, то $\exists x' = -T$ такое, что $x'+T = 0 \notin D(f)$. Если $T = \frac{1}{\pi n}$, то $\exists x' = \frac{1}{\pi} - T = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi n} = \frac{n-1}{\pi n} \in D(f)\,(n \neq 1, n \neq 2)$ такое, что $x'+T = \frac{1}{\pi} \notin D(f)$. При $n=1$ $T=\frac{1}{\pi}$ и $\exists x' = \frac{1}{3\pi} - T = \frac{1}{3\pi} - \frac{1}{\pi} = -\frac{2}{3\pi} \in D(f)$ такое, что $x'+T = \frac{1}{3\pi} \notin D(f)$. Если $n=2$, то $T=\frac{1}{2\pi}$ и $\exists x' = \frac{1}{5\pi} - T = \frac{1}{5\pi} - \frac{1}{2\pi} = -\frac{3}{10\pi} \in D(f)$ такое, что $x'+T = \frac{1}{5\pi} \notin D(f)$.

е) Предположим, что функция $y=\cos x^2$ является периодической с периодом $T \neq 0$. Значит, для $\forall x \in \mathbb{R}$ имеет место равенство.

$$\cos\left(x+T\right)^2 = \cos x^2.$$

Тогда $(x+T)^2 = \pm x^2 + 2\pi n$, $n \in Z$. Откуда $x^2 + 2Tx + T^2 \pm x^2 = 2\pi n$, $n \in Z$. Последнее равенство смысла не имеет, так как в левой его части — значения линейной или квадратичной функции, которые сплошь заполняют некоторый промежуток, а в правой — дискретная величина $0;\ \pm 2\pi;\ \pm 4\pi;\ \ldots$. Значит, функция $y = \cos x$ не является периодической. ►

Задания для самостоятельного решения (выполнения)

1. Какое из отображений $f : [-1;1] \to [0;1]$:

а) $f(x) = \cos\dfrac{\pi x}{2}$; б) $f(x) = -x^2 + 1$;

в) $f(x) = \dfrac{x+1}{2}$; г) $f(x) = |x|$;

д) $f(x) = \dfrac{x+1}{3}$; е) $f(x) = 2^{x-1}$

является инъективным, сюръективным, биективным?

2. Составить композиции $\varphi \circ \varphi$, $\varphi \circ \psi$, $\psi \circ \varphi$, $\psi \circ \psi$, если:

а)

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \geq 0, \\ x^2, & \text{если } x < 0, \end{cases} \qquad \psi(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ 0, & \text{если } x < 0; \end{cases}$$

б)

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| \leq 1, \\ 0, & \text{если } |x| > 1, \end{cases} \qquad \psi(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & \text{если } |x| \leq 2, \\ 2, & \text{если } |x| > 2. \end{cases}$$

3. Найти $f\left(f\left(f\left(x\right)\right)\right)$, если $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$.

4. Найти область определения композиции функций:

а) $y=\sqrt{4-2^x}, x=t^2-3t+2$; б) $y=\lg\left(x^2-4x+1\right), x=t^2-1$.

5. Найти функции, обратные данным:

а) $y=x^2+4x, x\le -2$; б) $y=\sqrt[3]{x^3-27}$; в) $y=\dfrac{4-x}{4+x}$.

6. Найти области определения следующих функций:

а) $y=\sqrt{3x-x^3}$; д) $y=\log_2\log_3\log_4 x$;

б) $y=\sqrt{\sin\sqrt{x}}$; е) $y=\lg\left(1-2\cos x\right)$;

в) $y=\sqrt{\cos x^2}$; ж) $y=\dfrac{\sqrt{x}}{\sin\pi x}$;

г) $y=\lg\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right)$; з) $y=\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2+6x+9\right)+\sqrt{x^2-2x-8}$.

7. Исследовать на четность и нечетность функции:

а) $y = \sin x - 3\operatorname{sign} x$; г) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$;

б) $y = x + \cos x$; д) $y = \sqrt[3]{(1-x^2)^2} + \sqrt[3]{(1+x^2)^2}$;

в) $y = |\ln|x^2 - 1| - \ln|x^2 + 1||$; е) $y = \ln\dfrac{1-x}{1+x}$.

8. Доказать, что:

а) функция $f(\varphi(t))$, где $\varphi(t)$ – четная функция, четна;

б) если $y = f(x)$ – четная функция, а $x = \varphi(t)$ – нечетная функция, то $y = f(\varphi(t))$ – четная функция;

в) произведение двух нечетных функций – четная функция;

г) произведение четной и нечетной функции – нечетная функция;

д) если $y = f(x)$ – четная функция и $f(x)$ не обращается в нуль, то $y = \dfrac{1}{f(x)}$ – четная функция.

9. Доказать, что период функции $f(x) = \{x\} = x - [x]$ равен 1.

10. Доказать, что для функции Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

периодом является любое рациональное число.

11. Исследовать на периодичность следующие функции и найти их периоды:

а) $f(x) = \sin x + \operatorname{tg} x$;

б) $f(x) = 3^{\sqrt{\lg \sin 5x}}$;

в) $f(x) = \sin x + \dfrac{1}{2}\sin 2x + \dfrac{1}{3}\sin 3x$;

г) $y = 5^{\cos x}$;

д) $y = \sin x^2$;

е) $y = \sqrt{\operatorname{tg} x}$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 3

Действительные числа. Метод математической индукции. Модуль действительного числа

Задание 1. Доказать, что квадрат нечетного натурального числа есть число нечетное.

Решение: ◀ Пусть n – нечетное натуральное число. При делении n на 2 получим в частном некоторое целое число s и в остатке 1. Поэтому $n = 2s + 1$. Тогда $n^2 = (2s+1)^2 = 4s^2 + 4s + 1 = 2\left(2s\left(s+1\right)\right) + 1$.
Обозначим $2s(s+1) = t$, получим $n^2 = 2t + 1$.
Следовательно, n^2 – нечетное число. ▶

Задание 2. Доказать, что не существует такого рационального числа, квадрат которого равен двум.

Решение: ◀ Предположим противное: существует рациональное число r, для которого $r^2 = 2$. Число r не может быть целым, так как $1^2 < 2$, а $2^2 > 2$. Пусть $r = \dfrac{p}{q}$, где $\dfrac{p}{q}$ – несократимая дробь.

Так как $\dfrac{p^2}{q^2} = r^2 = 2$, то $p^2 = 2q^2$. Значит, p^2 – число четное, но тогда и число p также четное (если бы p было нечетным, то (см. задание 1) и p^2 было бы нечетным). Число p можно представить в виде $p = 2p_1$, где p_1 – целое число.
Отсюда $4p_1^2 = 2q^2$ и $2p_1^2 = q^2$, но тогда, так как q^2 – четное число, то и

q – четное число, которое можно представить в виде $q = 2q_1$. Таким образом, данная дробь сократимая. Пришли к противоречию. Следовательно, рациональных чисел, квадрат которых равен 2, не существует. ▶

Задание 3. Применяя метод математической индукции, доказать, что для $\forall n \in \mathbb{N}$ справедливы следующие равенства:

а) $1+2+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$;   б) $1^2+2^2+\ldots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

в) $1^3+2^3+\ldots+n^3 = (1+2+\ldots+n)^2$.

Решение: ◀ а) При $n = 1$ равенство справедливо. Предположим справедливость равенства при $n = k$, т.е. $1+2+\ldots+k = \dfrac{k(k+1)}{2}$. Докажем его справедливость при $n = k+1$.

$$1+2+\ldots+k+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2}+(k+1) = \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = \\ = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

б) При $n = 1$ имеем $1 = \dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{6}$ – истинное равенство. Пусть равенство справедливо при $n = k$, т.е. $1^2+2^2+\ldots+k^2 = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$. Докажем справедливость равенства при $n = k + 1$.

$$1^2 + 2^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 =$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)(k(2k+1) + 6(k+1))}{6} =$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

в) При $n = 1$ равенство справедливо. Предполагая справедливость равенства при $n = k$, т.е. $1^3 + 2^3 + ... + k^3 = (1 + 2 + ...k)^2$, покажем его справедливость при $n = k + 1$.

$$1^3 + 2^3 + ... + k^3 + (k+1)^3 = (1 + 2 + ... + k)^2 + (k+1)^3 =$$

$$= [\text{ пункт а) }] = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} =$$

$$= \frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{2^2} = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2 =$$

$$= [\text{ пункт а) }] = (1 + 2 + ... + (k+1))^2. \blacktriangleright$$

Задание 4. Доказать неравенство

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdot\ldots\cdot(1+x_n) \geq 1+x_1+x_2+\ldots+x_n,$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – числа одного и того же знака, большие -1.

Решение: ◀ Докажем неравенство методом математической индукции. При $n = 1$ неравенство очевидно. Пусть неравенство справедливо при $n = k$, т.е. $(1+x_1)(1+x_2)\cdot\ldots\cdot(1+x_k) \geq 1+x_1+x_2+\ldots+x_k$. Докажем его справедливость при $n = k+1:$
$(1+x_1)(1+x_2)\cdot\ldots\cdot(1+x_k)(1+x_{k+1}) \geq (1+x_1+x_2+\ldots+x_k)\times$

$\times(1+x_{k+1}) = 1+x_1+x_2+\ldots+x_k+x_{k+1}+(x_1+x_2+\ldots+x_k)x_{k+1} \geq$

$\geq 1+x_1+x_2+\ldots+x_k+x_{k+1},$ так как x_i одного знака, то

$(x_1+x_2+\ldots+x_k)x_{k+1} \geq 0.$ ▶

Задание 5. Доказать неравенство Бернулли $(1+h)^m \geq 1+mh$, где $m \in \mathbb{N},\ h > -1$.

Решение: ◀ Для доказательства неравенства применим метод математической индукции. При $m = 1$ неравенство справедливо, так как имеет место знак «=». Пусть неравенство справедливо при $m = k$: $(1+h)^k \geq 1 + kh$. Докажем, что неравенство верно при $m = k+1$:

$$(1+h)^{k+1} = (1+h)^k (1+h) \geq (1+kh)(1+h) = 1 + h + kh + kh^2 \geq$$

$$\geq 1 + h + kh = 1 + (k+1)h. \blacktriangleright$$

Задание 6. Доказать формулу бинома Ньютона:

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m} b^m,$$

где $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ (число сочетаний из n элементов по m), $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$, причем полагают $0! = 1$.

Решение: $\blacktriangleleft$ При $n = 1$ имеем:

$$(a+b) = \sum_{m=0}^{1} C_1^m a^{1-m} b^m = \frac{1!}{0! \cdot 1!} a + \frac{1!}{1! \cdot 0!} b = a + b.$$

Покажем, что из предположения справедливости утверждения для $n = k$

$$(a+b)^k = \sum_{m=0}^{k} C_k^m a^{k-m} b^m$$

следует, что

$$(a+b)^{k+1} = \sum_{m=0}^{k+1} C_{k+1}^m a^{k+1-m} b^m.$$

В самом деле

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)(a+b)^k = (a+b)\sum_{m=0}^{k} C_k^m a^{k-m} b^m =$$

$$= \sum_{m=0}^{k} C_k^m a^{k+1-m} b^m + \sum_{m=0}^{k} C_k^m a^{k-m} b^{m+1} = \sum_{m=0}^{k} C_k^m a^{k+1-m} b^m +$$

$$+ \sum_{m=1}^{k+1} C_k^{m-1} a^{k+1-m} b^m = C_k^0 a^{k+1} + \sum_{m=1}^{k} \left(C_k^m + C_k^{m-1}\right) a^{k+1-m} b^m +$$

$$+ C_k^k b^{k+1} = a^{k+1} + \sum_{m=1}^{k} \left(C_k^m + C_k^{m-1}\right) a^{k+1-m} b^m + b^{k+1}.$$

Преобразуем

$$C_k^m + C_k^{m-1} = \frac{k!}{m!(k-m)!} + \frac{k!}{(m-1)!(k+1-m)!} =$$

$$= \frac{k!(k+1-m) + k!m}{m!(k+1-m)!} = \frac{(k+1)!}{m!(k+1-m)!} = C_{k+1}^m.$$

Учитывая, что $C_{k+1}^0 = \dfrac{(k+1)!}{0!(k+1)!} = 1$, $C_{k+1}^{k+1} = \dfrac{(k+1)!}{(k+1)!0!} = 1$, окончательно получим:

$$(a+b)^{k+1} = a^{k+1} + \sum_{m=1}^{k} C_{k+1}^{m} a^{k+1-m} b^m + b^{k+1} = C_{k+1}^{0} a^{k+1} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{k} C_{k+1}^{m} a^{k+1-m} b^m + C_{k+1}^{k+1} b^{k+1} = \sum_{m=0}^{k+1} C_{k+1}^{m} a^{k+1-m} b^m. \blacktriangleright$$

Задание 7. Доказать, что для $\forall x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$ справедливо равенство:

$$|x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n| = |x_1| \cdot |x_2| \cdot ... \cdot |x_n|.$$

Решение: $\blacktriangleleft$ Доказательство проведем методом математической индукции. Проверим справедливость равенства при $n = 2$, т.е. $|x_1 \cdot x_2| = |x_1| \cdot |x_2|$.

Пусть $x_1 \geq 0$ и $x_2 \geq 0$, тогда $|x_1 \cdot x_2| = x_1 \cdot x_2$. Откуда $|x_1 \cdot x_2| = |x_1| \cdot |x_2|$.

Пусть $x_1 < 0$ и $x_2 < 0$, тогда $|x_1 \cdot x_2| = x_1 \cdot x_2$. Снова $|x_1 \cdot x_2| = |x_1| \cdot |x_2|$.

Пусть $x_1 \geq 0$ и $x_2 < 0$, тогда $|x_1 \cdot x_2| = -x_1 \cdot x_2$, $|x_1| \cdot |x_2| = x_1 \cdot (-x_2) = -x_1 \cdot x_2$. Получаем $|x_1 \cdot x_2| = |x_1| \cdot |x_2|$.

Если $x_1 < 0$, $x_2 \geq 0$, то справедливость равенства проверяется аналогично.

Предположим, что равенство верно при $n = k$, т.е.

$$|x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_k| = |x_1| \cdot |x_2| \cdot ... \cdot |x_k|.$$

Докажем справедливость равенства при $n = k + 1$:
$|x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_k \cdot x_{k+1}| = |(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_k) \cdot x_{k+1}| = |x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_k| \cdot |x_{k+1}| =$
$= |x_1| \cdot |x_2| \cdot \ldots \cdot |x_k| \cdot |x_{k+1}|$. ▶

Задание 8. Решить неравенство $||x + 1| - |x - 1|| < 1$.
Решение: ◀ Данное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} |x+1| - |x-1| < 1, \\ |x+1| - |x-1| > -1. \end{cases}$$

Решим первое неравенство системы.

$$|x+1|-|x-1| < 1 \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le -1, \\ -x-1+x-1 < 1 \end{cases} \\ \\ \begin{cases} -1 < x < 1, \\ x+1+x-1 < 1 \end{cases} \\ \\ \begin{cases} x \ge 1, \\ x+1-x+1 < 1 \end{cases} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le -1, \\ -2 < 1 \end{cases} \\ \\ \begin{cases} -1 < x < 1, \\ x < \dfrac{1}{2} \end{cases} \\ \\ \begin{cases} x \ge 1, \\ 2 < 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -1, \\ -1 < x < \dfrac{1}{2} \end{array} \right. \Longleftrightarrow x < \frac{1}{2}.$$

Решим второе неравенство системы.

$$|x+1|-|x-1| > -1 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le -1, \\ -x-1+x-1 > -1 \end{cases} \\ \begin{cases} -1 < x < 1, \\ x+1+x-1 > -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 1, \\ x+1-x+1 > -1 \end{cases} \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le -1, \\ -2 > -1 \end{cases} \\ \begin{cases} -1 < x < 1, \\ x > -\dfrac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 1, \\ 2 > -1 \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{1}{2} < x < 1, \\ x \ge 1 \end{array} \right. \Longleftrightarrow x > -\frac{1}{2}.$$

Тогда

$$\begin{cases} |x+1| - |x-1| < 1, \\ |x+1| - |x-1| > -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x < \dfrac{1}{2}, \\ x > -\dfrac{1}{2} \end{cases} \iff -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}.$$

Итак, $x \in \left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$. ►

Задание 9. Решить неравенство $\left|\dfrac{x}{x+1}\right| > \dfrac{x}{x+1}$.

Решение: ◄ Так как $|t| > t$, если $t < 0$, то

$$\left|\frac{x}{x+1}\right| > \frac{x}{x+1} <=> \frac{x}{x+1} < 0 <=> -1 < x < 0.$$

Для решения неравенства $\dfrac{x}{x+1} < 0$ применим метод интервалов (рисунок 10.14).

Рис. 10.14:

Значит, $x \in (-1; 0)$. ►

Задание 10. Решить уравнение $|\left(x^2+2x+5\right)+(x-5)|=$

$=|x^2+2x+5|+|x-5|$.

Решение: ◀ Известно, что $|x+y|=|x|+|y|$, если x и y — числа одного знака. Поэтому уравнение равносильно совокупности систем:

$$\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x^2+2x+5\geq 0,\\ x-5\geq 0,\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x^2+2x+5<0,\\ x-5<0.\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Графиком функции x^2+2x+5 является парабола, не имеющая точек пересечения с осью Ox, ветви которой направлены вверх. Поэтому решением неравенства $x^2+2x+5\geq 0$ является $\forall x\in\mathbb{R}$, а неравенство $x^2+2x+5<0$ не имеет решений. Вследствие этого решение первой системы совокупности $x\geq 5$, вторая система решений не имеет.

Решение исходного уравнения: $x\in[5;+\infty)$. ▶

Задание 11. Найти область определения функции $y=\sqrt{1-||x|-2|}$.

Решение: ◀ Данная функция определена для таких значений x, при которых подкоренное выражение неотрицательное.

$1-||x|-2|\geq 0\iff||x|-2|\leq 1\iff -1\leq|x|-2\leq 1\iff 1\leq|x|\leq 3\iff$

Кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений

Начало

Содержание

◀ ▶

◀◀ ▶▶

Назад

На весь экран

Закрыть

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} |x| \geq 1, \\ |x| \leq 3 \end{cases} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x \geq 1, \\ x \leq -1, \end{array} \right. \\ -3 \leq x \leq 3. \end{array} \right.$$

Решением последней системы являются $x \in [-3;-1] \bigcup [1;3]$. Следовательно, область определения функции $D(y) = [-3;-1] \bigcup [1;3]$ ►

Задания для самостоятельного решения (выполнения)

1. Доказать, что не существует рационального числа, такого, что $r^2 = 3$.

2. Методом математической индукции доказать справедливость неравенств:

а) $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2n-1}{2n} < \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$;

г) $n! < \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$ при $n > 1$;

б) $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}(n \geq 2)$;

д) $1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\ldots+\dfrac{1}{n^2} \leq 2-\dfrac{1}{n}$;

в) $n^{n+1} > (n+1)^n(n \geq 3)$;

е) $2^n > n$;

ж) $2!\cdot 4!\cdot\ldots\cdot(2n)! > [(n+1)!]^n$ при $n > 1$;

з) $\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n}$ при $x_k \geq 0,\ k=\overline{1,n}$
(среднее геометрическое n неотрицательных чисел не превосходит их среднего арифметического);

и) $y_1+y_2+\ldots+y_n \geq n$ при $y_k > 0,\ k=\overline{1,n}$ и $y_1\cdot y_2\cdot\ldots\cdot y_n = 1$.

3. Применяя метод математической индукции, доказать тождество

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2 \quad (n \in \mathbb{N})\,.$$

4. Решить следующие уравнения:

а) $\dfrac{1 - 2x}{3 - |x - 1|} = 1;$

б) $|x - |4 - x|| - 2x = 4;$

в) $|3x - 8| - |3x - 2| = 6;$

г) $|x| + |7 - x| + 2|x - 2| = 4;$

д) $|\sin x| = \sin x + 2;$

е) $|x^2 - 5x + 6| = -\left(x^2 - 5x + 6\right);$

ж) $||3 - 2x| + 2| = x;$

з) $\left|\left(x^4 - 4\right) - \left(x^2 + 2\right)\right| = |x^4 - 4| - |x^2 + 2|;$

и) $|\operatorname{tg} x| + \operatorname{tg} x - 2 = 0.$

5. Решить следующие неравенства:

а) $|x| < x + 1$;

д) $|x+1|^{x^2-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}} < 1$;

б) $|x^2 - 2x| > x^2 - |2x|$;

е) $||3-x|-2| \le |x-1|$;

в) $|x+2| + |x-2| \ge 12$;

ж) $\log_2 (x+1)^2 + \log_2 |x+1| \le 6$.

г) $|x^2 - 2x - 3| < 3x - 3$;

6. Найти область определения следующих функций:

а) $y = \lg\left(3|2-x| - (x-2)^2\right)$;

в) $y = \lg\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{|x+2|}{2-|x|}} - 9\right)$;

б) $y = \sqrt{\sqrt{\frac{x}{2}+1} - |x-1| + x}$;

г) $y = \sqrt{\ln\frac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|}}$;

д) $y = \lg\left(\left(\frac{15}{14}\right)^{|x^2-3x+2|} - \left(\frac{15}{14}\right)^{|x+7|}\right)$;

ж) $y = \sqrt{\sqrt{\left|\frac{1}{4}-x\right|} - x - \frac{1}{2}}$.

e) $y = \log_2\left(3^{|x-1|} - \dfrac{3^{2|x-1|}+3}{4}\right).$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 4

Точные грани числового множества

Задание 1. Пусть $\{x+y\}$ есть множество всех сумм $x+y$, где $x \in \{x\}$ и $y \in \{y\}$. Доказать, что $\inf\{x+y\} = \inf\{x\} + \inf\{y\}$.

Решение: ◀ Пусть $\inf\{x\} = a$, $\inf\{y\} = b$. По первому свойству точной нижней грани: для $\forall x \in \{x\}$ $x \geq a$ и для $\forall y \in \{y\}$ $y \geq b$. Тогда $x + y \geq a + b$ для $\forall (x+y) \in \{x+y\}$. Значит, множество $\{x+y\}$ ограничено снизу, следовательно, существует $\inf\{x+y\}$. Докажем, что $\inf\{x+y\} = a+b$.

Справедливость первого свойства точной нижней грани уже проверена: для $\forall (x+y) \in \{x+y\}$ выполняется неравенство $x+y \geq a+b$.

Проверим справедливость второго свойства. Так как $a = \inf\{x\}$, $b = \inf\{y\}$, то для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x' \in \{x\}$ такой, что $x' < a + \frac{\varepsilon}{2}$ и $\exists y' \in \{y\}$ такой, что $y' < b + \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда $\exists (x'+y') \in \{x+y\}$ такой, что

$$x' + y' < a + \frac{\varepsilon}{2} + b + \frac{\varepsilon}{2} = a + b + \varepsilon.$$

Итак, $\inf\{x+y\} = a + b = \inf\{x\} + \inf\{y\}$. ▶

Задание 2. Пусть $\{xy\}$ – множество всех произведений xy , где $x \in \{x\}$ и $y \in \{y\}$, причем $x \geq 0$, $y \geq 0$. Доказать, что $\sup\{xy\} = \sup\{x\} \cdot \sup\{y\}$.

Решение: ◀ Пусть $\sup\{x\} = m$, $\sup\{y\} = n$. Тогда для $\forall x \in \{x\}$ $0 \le x \le m$, для $\forall y \in \{y\}$ $0 \le y \le n$. Из этих неравенств следует, что для $\forall (xy) \in \{xy\}$ выполняется неравенство $xy \le mn$, т.е. множество $\{xy\}$ ограничено сверху и существует $\sup\{xy\}$. Покажем, что $\sup\{xy\} = mn$. Справедливость первого свойства точной верхней грани проверена.

Докажем выполнение второго свойства. По второму свойству sup для множеств $\{x\}$ и $\{y\}$ имеем: для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x' \in \{x\}$ и $\exists y' \in \{y\}$ такие, что $x' > m - \varepsilon$ и $y' > n - \varepsilon$.

Откуда следует, что

$$x'y' > (m-\varepsilon)(n-\varepsilon) = mn - (m\varepsilon + n\varepsilon - \varepsilon^2).$$

Так как величина $m\varepsilon + n\varepsilon - \varepsilon^2$ может быть сколь угодно малой, то

$$\sup\{xy\} = mn = \sup\{x\} \cdot \sup\{y\}. \ \blacktriangleright$$

Задание 3. Пусть B – множество чисел, противоположных по знаку числам из множества A. Доказать, что $\sup B = -\inf A$.

Решение: ◀ Пусть $\inf A = a$. Тогда для $\forall x \in A$ выполняется $x \ge a$, откуда $-x \le -a$ для $\forall (-x) \in B$, т.е. множество B ограничено сверху и существует $\sup B$. Докажем, что $\sup B = -a$.

Имеем: для $\forall (-x) \in B$ $-x \le -a$. Первое свойство точной верхней грани проверено. Установим справедливость второго свойства.

Так как $\inf A = a$, то для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x' \in A$ такой, что $x' < a + \varepsilon$.

Откуда $-x' > -a - \varepsilon$. Значит, для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists (-x') \in B$ такой, что $-x' > -a - \varepsilon$.

Итак, $\sup B = -a = -\inf A$. ▶

Задание 4. Найти точные грани множества всех рациональных дробей $\dfrac{m}{n}$ $(m, n \in \mathbb{N},\ m < n)$ и показать, что это множество не имеет наименьшего и наибольшего элементов.

Решение: ◀ Покажем, что $\inf \left\{\dfrac{m}{n}\right\} = 0$. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$ и $m < n$, тогда $\dfrac{m}{n} > 0$.

Для $\forall \varepsilon > 0$ и $\forall m \in \mathbb{N}$ $\exists n' \in \mathbb{N}$, $n' > m$, такое, что $\dfrac{m}{n'} < \varepsilon$.

Значит, $\exists \dfrac{m}{n'} \in \left\{\dfrac{m}{n}\right\}$ такое, что $\dfrac{m}{n'} < \varepsilon$.

Покажем, что $\sup \left\{\dfrac{m}{n}\right\} = 1$. Очевидно, что так как $m < n$, то $\dfrac{m}{n} < 1$ для $\forall \dfrac{m}{n} \in \left\{\dfrac{m}{n}\right\}$.

Для $\forall \varepsilon > 0$ и $\forall p \in \mathbb{N}$ найдется $m' \in \mathbb{N}$ такое, что $\dfrac{m'}{p + m'} > 1 - \varepsilon$.

Докажем существование такого $m' \in \mathbb{N}$, для этого выразим m'

из последнего неравенства:

$$\frac{m'}{p+m'} > 1-\varepsilon \Leftrightarrow \frac{p+m'}{m'} < \frac{1}{1-\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{p}{m'} + 1 < \frac{1}{1-\varepsilon} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{p}{m'} < \frac{1}{1-\varepsilon} - 1 \Leftrightarrow \frac{p}{m'} < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{m'}{p} > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \Leftrightarrow m' > \frac{p(1-\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Значит, $\exists n' = p + m'$ для которого $\dfrac{m'}{n'} > 1-\varepsilon$.

Итак, $\sup\left\{\dfrac{m}{n}\right\} = 1$, $\inf\left\{\dfrac{m}{n}\right\} = 0$.

Покажем, что множество $\dfrac{m}{n}$ не имеет наибольшего элемента. Предположим, что наибольший элемент во множестве существует и $\max\left\{\dfrac{m}{n}\right\} = a$. По определению наибольшего элемента множества это означает, что $a \in \left\{\dfrac{m}{n}\right\}$ и $\dfrac{m}{n} \le a$ для $\forall \dfrac{m}{n} \in \left\{\dfrac{m}{n}\right\}$. Тогда $\dfrac{m}{n} \le a < 1$.

Это противоречит тому, что 1 – наименьшая из всех верхних границ.

Очевидно, что $\sup\left\{\dfrac{m}{n}\right\} = 1 \notin \left\{\dfrac{m}{n}\right\}$, поскольку $\dfrac{m}{n} = 1$ лишь при $m = n$, что противоречит требованию правильности дроби.

Аналогично доказывается, что множество $\left\{\dfrac{m}{n}\right\}$ не имеет наименьшего элемента. ►

Задание 5. Доказать, что множество
$$X = \{x \in Q \mid x^2 < 2\}$$
не имеет наименьшего и наибольшего элементов. Найти $\sup X$ и $\inf X$.

Решение: ◄ Заметим, что неравенство $x^2 < 2$ равносильно неравенству $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$, где $x \in Q$.

Докажем методом от противного, что во множестве X нет наибольшего элемента. Предположим, что $\max X = b$. По определению наибольшего элемента: $b \in X$ и для $\forall x \in X$ $x \leq b$. Тогда $x \leq b \leq \sqrt{2}$. Известно, что для $\forall c, d \in \mathbb{R}$ $c < d$ найдется $r \in Q$ такое, что $c < r < d$. Значит, $\exists r \in Q$ такое, что $x \leq b < r < \sqrt{2}$. Следовательно, $r = maxX$. Пришли к противоречию. Аналогично доказывается, что во множестве X нет наименьшего элемента.

Покажем, что $\sup X = \sqrt{2}$. Первое свойство точной верхней грани очевидно: для $\forall x \in X$ $x \leq \sqrt{2}$. Проверим выполнение второго свойства. Для $\forall \varepsilon > 0 (\varepsilon < 2\sqrt{2})$ $\exists x' \in X$ такое, что $x' > \sqrt{2} - \varepsilon$. Это следует из существования $x' \in Q$, удовлетворяющего условию $\sqrt{2} - \varepsilon < x' < \varepsilon$.

Покажем, что $\inf X = -\sqrt{2}$. Из определения множества X следует,

Начало
Содержание
◄ ►
◄◄ ►►
Страница 250 из 430
Назад
На весь экран
Закрыть

что для $\forall x \in X \quad x \geq -\sqrt{2}$. Для $\forall \varepsilon > 0(\varepsilon < 2\sqrt{2})$ $\exists x'' \in X$ такое, что $x'' < -\sqrt{2}+\varepsilon$, так как всегда существует рациональное число x'', удовлетворяющее неравенству $-\sqrt{2} < x'' < -\sqrt{2}+\varepsilon$. ►

Задание 6. Доказать, что множество $M = \left\{ \dfrac{n^2-1}{n^2+4} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$ ограничено. Найти $\sup M$ и $\inf M$.

Решение: ◄ Каждый элемент x множества M имеет вид:

$$x = \frac{n^2-1}{n^2+4},$$

где $n \in \mathbb{N}$. Так как для $\forall n \in \mathbb{N}$ имеет место оценка:

$$0 \leq \frac{n^2-1}{n^2+4} = \frac{n^2+4-5}{n^2+4} = 1 - \frac{5}{n^2+4} < 1,$$

то $0 \leq x \leq 1$. Следовательно, данное множество M ограниченное.

Докажем, что $\sup M = 1$, т.е. 1 является наименьшей среди верхних границ множества M. Для этого достаточно установить:

1. для $\forall n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $\dfrac{n^2-1}{n^2+4} \leq 1$;

2. для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x_\varepsilon \in M$ такое, что $x_\varepsilon > 1-\varepsilon$.

Справедливость условия 1) следует из неравенства $0 \leq \dfrac{n^2-1}{n^2+4} < 1$.

Проверим условие 2). Если в качестве ε выбрано число $\varepsilon \geq 1$, то число $1-\varepsilon$ — неположительное и в качестве x_ε можно взять любое из чисел $\dfrac{n^2-1}{n^2+4}$ при $n \geq 2$. Пусть $0 < \varepsilon < 1$. Докажем, что найдется хотя бы одно натуральное число n, удовлетворяющее неравенству $\dfrac{n^2-1}{n^2+4} > 1-\varepsilon$.

Тогда $x_\varepsilon = \dfrac{n^2-1}{n^2+4}$, соответствующее найденному значению n, будет удовлетворять неравенству $x_\varepsilon > 1-\varepsilon$. Неравенство $\dfrac{n^2-1}{n^2+4} > 1-\varepsilon$ можно решить относительно n. Однако, пользуясь тем, что нас устраивает выбор даже очень большого номера n, неравенства такого типа стараются заменить более простыми. Так, в нашем случае:

$$\frac{n^2-1}{n^2+4} > \frac{n^2-4}{n^2+4n+4} = \frac{(n-2)(n+2)}{(n+2^2)} = 1 - \frac{4}{n+2} > 1 - \frac{4}{n}.$$

Поэтому неравенство $\dfrac{n^2-1}{n^2+4} > 1-\varepsilon$ будет заведомо выполняться для тех номеров n, для которых $1-\dfrac{4}{n} > 1-\varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{4}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \dfrac{4}{\varepsilon}$.

Значит, если взять в качестве n $n = \left[\frac{4}{\varepsilon}\right] + 1$, то оно удовлетворяет неравенству $\dfrac{n^2-1}{n^2+4} > 1-\varepsilon$.

Докажем, что $\inf M = 0$, т.е.

1. для $\forall n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $\dfrac{n^2-1}{n^2+4} \geq 0$;

2. для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x_\varepsilon \in M$ такое, что $x_\varepsilon < \varepsilon$.

Выполнение условия 1) доказано ранее. Справедливость условия 2) очевидна. Для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x_\varepsilon = 0$ ($x_\varepsilon = 0$ при $n = 1$) такое, что $x_\varepsilon = 0 < \varepsilon$. ▶

Задание 7. Доказать, что множество $A = \left\{\dfrac{n^2}{n+1} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$ не ограничено сверху и ограничено снизу. Найти $\inf A$.

Решение: ◀ Докажем, что множество A не ограничено сверху, т.е. для $\forall a \in \mathbb{R}$ $\exists n' \in \mathbb{N}$ такое, что $\dfrac{(n')^2}{n'+1} > a$.

Возьмем $\forall a \in \mathbb{R}$ и оценим снизу выражение $\dfrac{n^2}{n+1}$: $\dfrac{n^2}{n+1} \geq \dfrac{n^2}{2n} = \dfrac{n}{2}$.

Кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений

Начало

Содержание

◀ ▶

◀◀ ▶▶

Назад

На весь экран

Закрыть

Потребуем, чтобы $\dfrac{n}{2} > a$, откуда $n > 2a$. Тогда для $n' > [2a] + 1$ будет $\dfrac{(n')^2}{n'+1} > a$.

Покажем ограниченность снизу множества A. Для этого надо показать, что $\exists c \in \mathbb{R}$ такое, что для $\forall n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $\dfrac{n^2}{n+1} \geq c$. Элемент множества A, соответствующий $n = 1$: $\dfrac{n^2}{n+1} = \dfrac{1}{2}$. Решим неравенство $\dfrac{n^2}{n+1} \geq \dfrac{1}{2}$ относительно n.

$$\frac{n^2}{n+1} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2n^2 \geq n+1 \Leftrightarrow 2n^2 - n - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2(n-1)\left(n + \frac{1}{2}\right) \geq 0.$$

Для решения последнего неравенства применим метод интервалов (рисунок 10.15).

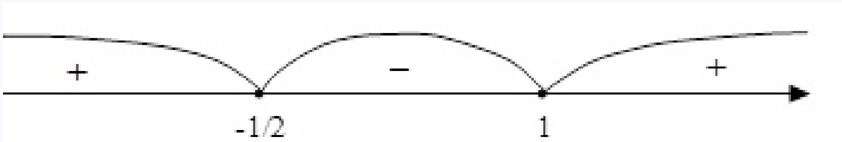

Рис. 10.15:

Так как $n \in \mathbb{N}$, то решениями неравенства $\dfrac{n^2}{n+1} \geq \dfrac{1}{2}$ являются все натуральные числа. Значит, для $\forall n \in \mathbb{N}$ $\dfrac{n^2}{n+1} \geq \dfrac{1}{2}$.

Докажем, что $\inf A = \dfrac{1}{2}$. Для этого достаточно установить:

1. для $\forall n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $\dfrac{n^2}{n+1} \geq \dfrac{1}{2}$;

2. для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n' \in \mathbb{N}$ такое, что $\dfrac{(n')^2}{n'+1} < \dfrac{1}{2} + \varepsilon$.

Справедливость условия 1) доказана ранее. Выполнение условия 2) очевидно: для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n' = 1$ такое, что $\dfrac{1^2}{1+1} = \dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{2} + \varepsilon$. ▶

Задания для самостоятельного решения (выполнения)

1. Пусть $\{x+y\}$ есть множество всех сумм $x+y$, где $x \in \{x\}$ и $y \in \{y\}$. Доказать, что $\sup\{x+y\} = \sup\{x\} + \sup\{y\}$.

2. Пусть $\{xy\}$ есть множество всех произведений xy, где $x \in \{x\}$ и $y \in \{y\}$, причем $x \geq 0$, $y \geq 0$. Доказать, что $\inf\{xy\} = \inf\{x\} \cdot \inf\{y\}$.

3. Пусть B – множество чисел, противоположных по знаку числам из множества A. Доказать, что $\inf B = -\sup A$.

4. Исследовать на ограниченность множества A. В случае ограниченности найти $\sup A$ и $\inf A$:

а) $A = \left\{ \dfrac{n^2}{n^2+5} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$;

б) $A = \left\{ \dfrac{(-1)^n}{3n-1} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$;

в) $A = \left\{ 3 - \dfrac{(-1)^n}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$;

з) $A = \left\{ 2n+5 \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$;

г) $A = \left\{ \dfrac{n+4}{n+7} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$;

и) $A = \left\{ n^2+1 \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$;

д) $A = \left\{ -1 + \dfrac{(-1)^n}{n^2} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$;

к) $A = \left\{ 2n^2-1 \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$;

е) $A = \left\{ \dfrac{1}{3^n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$;

л) $A = \left\{ 5-3n \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$;

ж) $A = \left\{ \dfrac{1+(-1)^n}{n^2} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$;

м) $A = \left\{ \dfrac{1}{2} + \dfrac{n}{2n+1} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 5

Определение предела последовательности

Задание 1. Написать первые пять членов последовательностей, общий член которых имеет следующий вид:

а) $a_n = \dfrac{n!}{n^n + 1}$; б) $a_n = \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$; в) $a_n = \cos\dfrac{\pi n}{2}$.

Решение: ◀ а) По определению $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. Полагая последовательно $n = 1, 2, 3, 4, 5$ по формуле общего члена a_n получаем:

$$n = 1 \qquad a_1 = \frac{1!}{1^1 + 1} = \frac{1}{2};$$

$$n = 2 \qquad a_2 = \frac{2!}{2^2 + 1} = \frac{2}{5};$$

$$n = 3 \qquad a_3 = \frac{3!}{3^3 + 1} = \frac{6}{28} = \frac{3}{14};$$

$$n = 4 \qquad a_4 = \frac{4!}{4^4 + 1} = \frac{24}{257};$$

$$n = 5 \qquad a_5 = \frac{5!}{5^5 + 1} = \frac{120}{3126} = \frac{20}{521}.$$

б) Следуя определению двойных факториалов:

$$(2n-1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots\cdot (2n-1), \qquad (2n)!! = 2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot \ldots\cdot (2n).$$

Из формулы общего члена a_n получаем:

$$n=1 \qquad a_1 = \frac{1!!}{2!!} = \frac{1}{2};$$

$$n=2 \qquad a_2 = \frac{3!!}{4!!} = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} = \frac{3}{8};$$

$$n=3 \qquad a_3 = \frac{5!!}{6!!} = \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6} = \frac{5}{16};$$

$$n=4 \qquad a_4 = \frac{7!!}{8!!} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} = \frac{35}{128};$$

$$n=5 \qquad a_5 = \frac{9!!}{10!!} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10} = \frac{63}{256}.$$

в) Так как $a_n = \cos\dfrac{\pi n}{2}$, то

$$
\begin{array}{ll}
n=1 & a_1 = \cos\dfrac{\pi}{2} = 0; \\
n=2 & a_2 = \cos\pi = -1; \\
n=3 & a_3 = \cos\dfrac{3\pi}{2} = 0; \\
n=4 & a_4 = \cos 2\pi = 1; \\
n=5 & a_5 = \cos\dfrac{5\pi}{2} = \cos\left(2\pi + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\dfrac{\pi}{2} = 0. \ \blacktriangleright
\end{array}
$$

Задание 2. По данным первым числам, являющимся членами последовательностей, подобрать одну из формул общего члена:

а) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2\sqrt{2}}, \dfrac{7}{4}, \dfrac{9}{4\sqrt{2}}, \ldots;$

б) $\dfrac{1}{11}, \dfrac{1}{21}, \dfrac{1}{31}, \dfrac{1}{41}, \ldots;$

в) $\dfrac{3}{4}, -\left(\dfrac{6}{7}\right)^2, \left(\dfrac{9}{10}\right)^3, -\left(\dfrac{12}{13}\right)^4, \ldots;$

г) $\dfrac{2}{1}, \dfrac{2\cdot4}{1\cdot3}, \dfrac{2\cdot4\cdot6}{1\cdot3\cdot5}, \dfrac{2\cdot4\cdot6\cdot8}{1\cdot3\cdot5\cdot7}, \ldots.$

Решение: $\blacktriangleleft$ а) Числа $1, 3, 5, 7, 9$ образуют арифметическую прогрессию с первым членом 1 и разностью 2. Ее n-й член равен $2n-1$.

Общий член геометрической прогрессии $\sqrt{2},\ 2,\ 2\sqrt{2},\ 4,\ 4\sqrt{2}$ выражается формулой $\left(\sqrt{2}\right)^n$. В качестве общего члена данной последовательности можно взять $a_n = \dfrac{2n-1}{\left(\sqrt{2}\right)^n}$.

б) Числа $11, 21, 31, 41$ образуют арифметическую прогрессию с n-м членом $10n+1$. Поэтому $a_n = \dfrac{1}{10n+1}$.

в) Числа $3, 6, 9, 12$ образуют арифметическую прогрессию с n-м членом $3n$, а числа $4, 7, 10, 13$ – это арифметическая прогрессия с n-м членом $3n+1$. Следовательно, можно выбрать $a_n = (-1)^{n-1}\left(\dfrac{3n}{3n+1}\right)^n$.

г) Пользуясь определением двойных факториалов, общий член данной последовательности можно записать в виде $a_n = \dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}$. ▶

Задание 3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3}{3n^2-1} = \frac{2}{3}.$$

Решение: ◀ Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и покажем, что найдется $N \in \mathbb{N}$ такое, что для всех номеров $n > N$ выполняется неравенство

$\left| \dfrac{2n^2+3}{3n^2-1} - \dfrac{2}{3} \right| < \varepsilon$. Имеем:

$$\left| \frac{2n^2+3}{3n^2-1} - \frac{2}{3} \right| = \left| \frac{6n^2+9-6n^2+2}{3(3n^2-1)} \right| = \frac{11}{3\left|3n^2-1\right|} = \frac{11}{3(3n^2-1)}.$$

Потребуем, чтобы было $\dfrac{11}{3(3n^2-1)} < \varepsilon$.

Решим последнее неравенство относительно n:

$$\frac{11}{3(3n^2-1)} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{3n^2-1}{11} > \frac{1}{3\varepsilon} \Leftrightarrow 3n^2-1 > \frac{11}{3\varepsilon} \Leftrightarrow 3n^2 > \frac{11}{3\varepsilon}+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2 > \frac{11}{9\varepsilon}+\frac{1}{3} \Leftrightarrow n > \sqrt{\frac{11}{9\varepsilon}+\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{11+3\varepsilon}{9\varepsilon}}.$$

Следовательно, в качестве искомого N можно взять $N = \left[\sqrt{\dfrac{11+3\varepsilon}{9\varepsilon}}\right]+1$.

Итак, по заданному $\varepsilon > 0$ мы нашли $N = \left[\sqrt{\dfrac{11+3\varepsilon}{9\varepsilon}}\right]+1$ такое, что выполнение неравенства $n > N$ влечет за собой выполнение неравенства

$$\left|\frac{2n^2+3}{3n^2-1}-\frac{2}{3}\right|<\varepsilon.$$

►

Задание 4. Доказать исходя из определения предела последовательности, что:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+5}{7-3n}=-\frac{2}{3}.$$

Решение: ◄ Возьмем $\forall\varepsilon>0$ и покажем, что $\exists N$ такое, что для $\forall n>N$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{2n+5}{7-3n}-\left(-\frac{2}{3}\right)\right|<\varepsilon.$$

Имеем:

$$\left|\frac{2n+5}{7-3n}+\frac{2}{3}\right|=\left|\frac{6n+15+14-6n}{21-9n}\right|=\left|\frac{29}{21-9n}\right|=\frac{29}{|21-9n|}=$$

$$=\frac{29}{9n-21},\quad n>2.$$

Потребуем, чтобы $\dfrac{29}{9n-21}<\varepsilon$. Решив это неравенство относительно n, получим $n > \dfrac{29}{9\varepsilon} + \dfrac{7}{3}$ (учитываем, что $9n - 21 > 0$ для $n > 2$).

Следовательно, можно взять

$$N = \max\left\{2, \left[\frac{29}{9\varepsilon} + \frac{7}{3}\right] + 1\right\} = \left[\frac{29}{9\varepsilon} + \frac{7}{3}\right] + 1.$$

►

Задание 5. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5 \cdot 3^n}{3^n - 2} = 5.$$

Решение: ◄ Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим модуль разности между n-м членом и числом 5:

$$\left| \frac{5 \cdot 3^n}{3^n - 2} - 5 \right| = \frac{10}{3^n - 2}.$$

В соответствии с определением предела последовательности укажем номер N такой, что для $\forall n > N$ будет выполняться неравенство

$$\frac{10}{3^n - 2} < \varepsilon.$$

Для отыскания номера N решим последнее неравенство относительно n.

$$\frac{10}{3^n-2}<\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3^n-2}{10}>\frac{1}{\varepsilon} \quad \Leftrightarrow \quad 3^n-2>\frac{10}{\varepsilon} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 3^n>\frac{10}{\varepsilon}+2 \quad \Leftrightarrow \quad n>\log_3\left(\frac{10}{\varepsilon}+2\right).$$

Из полученного неравенства следует, что в качестве N можно взять

$$N=\left[\log_3\left(\frac{10}{\varepsilon}+2\right)\right]+1.$$

В самом деле, если $n>N$, то $n>\log_3\left(\frac{10}{\varepsilon}+2\right)$, а значит, для $\forall n>N$ выполняется и неравенство $\frac{10}{3^n-2}<\varepsilon.$

Отметим, что при $\varepsilon>10$ имеем $N=1$ и поэтому неравенство $\frac{10}{3^n-2}<\varepsilon$ справедливо для $\forall n\geq 2.$ ▶

Задание 6. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n!}}=0.$$

Решение: ◀ Возьмем $\forall\varepsilon>0$. Нужно указать номер N такой, что при $n>N$ выполняется неравенство $\dfrac{1}{\sqrt{n!}}<\varepsilon$.

Не будем стремиться к тому, чтобы найти наименьший номер N , начиная с которого будет выполняться это неравенство. Укажем номер, решая более простое неравенство. Используя соотношение для $\forall n\in\mathbb{N}:\ n!>\dfrac{n^2}{4}$ (докажите применяя метод математической индукции), получим следующую оценку: $\dfrac{1}{\sqrt{n!}}<\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{n^2}{4}}}=\dfrac{2}{n}$.

Потребуем, чтобы $\dfrac{2}{n}<\varepsilon$. Откуда $n>\dfrac{2}{\varepsilon}$. Положим $N=\left[\dfrac{2}{\varepsilon}\right]+1$. Если $n>N$, то $n>\dfrac{2}{\varepsilon}$ и, следовательно, выполняется неравенство $\dfrac{2}{n}<\varepsilon$. Так как неравенство $\dfrac{1}{\sqrt{n!}}<\varepsilon$ является следствием неравенства $\dfrac{2}{n}<\varepsilon$, то оно также выполняется при всех $n>N$.

Таким образом, для $\forall\varepsilon>0$ $\exists N\left(N=\left[\dfrac{2}{\varepsilon}\right]+1\right)$ такой, что для

$\forall n > N:\ \dfrac{1}{\sqrt{n!}} < \varepsilon$. Тем самым доказано, что $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n!}} = 0$. ▶

Задание 7. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2+4}{n-5} = +\infty$.

Решение: ◀ Следуя определению предела последовательности, надо доказать, что для $\forall E > 0\ \ \exists N$ такой, что для $\forall n > N$ будет выполняться неравенство $x_n > E$. Оценим общий член последовательности $x_n = \dfrac{3n^2+4}{n-5}$ снизу:

$$\frac{3n^2+4}{n-5} > \frac{3n^2}{n-5} > \frac{3n^2}{n} = 3n \ (\text{если}\ \ n > 5).$$

Потребуем, чтобы $3n > E$, откуда $n > \dfrac{E}{3}$. Положим $N = \max\left\{5, \left[\dfrac{E}{3}\right] + 1\right\}$, тогда для $\forall n > N$ будет выполняться неравенство $n > \dfrac{E}{3}$. Следовательно, $3n > E$, а $\dfrac{3n^2+4}{n-5} > E$ подавно. ▶

Задание 8. Доказать, что $\lim_{n\to\infty} \dfrac{5n+6}{n+1} = 5$. Начиная с какого номера n, $\left|\dfrac{5n+6}{n+1} - 5\right|$ не превосходит 0,01?

Решение: ◀ Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем номер N такой, что при $\forall n > N$ будет выполняться неравенство $\left|\dfrac{5n+6}{n+1} - 5\right| < \varepsilon$. Имеем:

$$\left|\frac{5n+6}{n+1} - 5\right| = \left|\frac{5n+6-5n-5}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}.$$

Потребуем, чтобы $\dfrac{1}{n+1} < \varepsilon$. Решая последнее неравенство относительно n, получим $n > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$. Положим $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon} - 1\right] + 1$. Тогда для $\forall n > N$ будет выполняться $\dfrac{1}{n+1} < \varepsilon$, а следовательно, и неравенство $\left|\dfrac{5n+6}{n+1} - 5\right| < \varepsilon$.

Если $\varepsilon = 0,01$, то из неравенства $\dfrac{1}{n+1} \le 0,01$ находим $n \ge 99$. Для членов последовательности с номерами $n \ge 99$ будет выполняться неравенство $\left|\dfrac{5n+6}{n+1} - 5\right| \le 0,01$. Значит, $\left|\dfrac{5n+6}{n+1} - 5\right|$ не превосходит 0,01 начиная с $n = 99$. ▶

Задание 9. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n-1}{6n+4}\neq 2.$

Решение: ◀ Исходя из определения предела последовательности: число 2 не является пределом последовательности $x_n=\dfrac{3n-1}{6n+4}$, если $\exists\varepsilon_0>0$, такое, что для $\forall N\in\mathbb{N}$ $\exists n>N$, для которого $\left|\dfrac{3n-1}{6n+4}-2\right|\geq\varepsilon_0$.

Геометрически это означает, что найдется такая ε_0-окрестность точки 2, вне которой находится бесконечно много членов последовательности.

Для нахождения числа ε_0 оценим общий член последовательности сверху: $\dfrac{3n-1}{6n+4}<\dfrac{3n-1}{6n}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{6n}<\dfrac{1}{2}$ для $\forall n\in\mathbb{N}$.

Значит, расстояние от точки 2 до каждого члена последовательности больше, чем $\dfrac{3}{2}$. Если в качестве ε_0 взять $\varepsilon_0=\dfrac{3}{2}$, то в ε_0-окрестности точки 2 нет ни одного члена последовательности. Чтобы убедиться в этом, решим неравенство:

$$\left|\frac{3n-1}{6n+4}-2\right|>\frac{3}{2}\Leftrightarrow\left|\frac{-9n-9}{6n+4}\right|>\frac{3}{2}\Leftrightarrow\left|\frac{9n+9}{6n+4}\right|>\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{9n+9}{6n+4}>\frac{3}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ \frac{6}{2(6n+4)} > 0 \ \Leftrightarrow \ \frac{3}{6n+4} > 0 \ \Leftrightarrow \ 6n+4>0.$$

Последнее неравенство справедливо для $\forall n \in \mathbb{N}$. Следовательно, исходное неравенство выполняется при $\forall n \in \mathbb{N}$.

Итак, существует $\varepsilon_0 = \dfrac{3}{2}$ такое, что для $\forall n \in \mathbb{N}$ выполняется

$$\left| \frac{3n-1}{6n+4} - 2 \right| > \frac{3}{2}.$$

Значит, число 2 не является пределом последовательности

$x_n = \dfrac{3n-1}{6n+4}$. ►

Задание 10. Доказать, что последовательность $x_n = \dfrac{(-1)^n n+1}{n+2}$ предела не имеет.

Решение: ◄ Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ не имеет предела, если никакое число a не является ее пределом, т.е. для $\forall a \in \mathbb{R}$ $\exists \varepsilon_0 > 0$ такое, что для $\forall N \in \mathbb{N}$ $\exists n > N$, для которого $\left| x_n - a \right| \geq \varepsilon_0$.

Возьмем $\forall a \in \mathbb{R}$ и оценим $\left| x_n - a \right|$ снизу. Возможны случаи:

1. $n = 2k, \quad k \in \mathbb{N}$

$$\left| x_n - a \right| = \left| \frac{n+1}{n+2} - a \right| = \left| \frac{n+2-1}{n+2} - a \right| = \left| 1 - \frac{1}{n+2} - a \right| \geq \frac{1}{3},$$

если $a \leq \dfrac{1}{3}$;

2. $\quad n = 2k-1, \quad k \in \mathbb{N}$

$$\left| x_n - a \right| = \left| \frac{-n+1}{n+2} - a \right| = \left| \frac{-n-2+3}{n+2} - a \right| = \left| -1 + \frac{3}{n+2} - a \right| \geq \frac{1}{3},$$

если $a > \dfrac{1}{3}$.

Получили, что для $\forall a \leq \dfrac{1}{3}$ $\exists \varepsilon_0 = \dfrac{1}{3}$ такое, что для $\forall N \in \mathbb{N}$ $\exists n = 2k > N$ для которого $\left| x_n - a \right| \geq \dfrac{1}{3}$ и для $\forall a > \dfrac{1}{3}$ $\exists \varepsilon_0 = \dfrac{1}{3}$ такое, что для $\forall N \in \mathbb{N}$ $\exists n = 2k-1 > N$ для которого $\left| x_n - a \right| \geq \dfrac{1}{3}$. ►

Задания для самостоятельного решения (выполнения)

1. Написать первые пять членов последовательностей, общий член которых задается формулами:

а) $x_n = \dfrac{n}{3^{n+1}}$; в) $x_n = \dfrac{\sin\dfrac{\pi n}{2}}{n}$;

б) $x_n = (-1)^{n-1}\dfrac{n+1}{n^2+1}$; г) $x_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(n^2+1)$.

2. По данным первым числам, являющимся членами последовательностей, подобрать одну из формул общего члена:

а) $\sqrt{1\cdot 2}, \sqrt{2\cdot 3}, \sqrt{3\cdot 4}, \sqrt{4\cdot 5}, \ldots$;

б) $\dfrac{3}{2^2\cdot 3^2}, -\dfrac{5}{3^2\cdot 4^2}, \dfrac{7}{4^2\cdot 5^2}, -\dfrac{9}{5^2\cdot 6^2}, \ldots$;

в) $\dfrac{1}{1}, -\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}\right)^2, \left(\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\right)^3, -\left(\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\right)^4, \ldots$.

3. Пользуясь определением предела последовательности доказать, что:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1} = 1$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^{\sqrt{n}}} = 0$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-1}{5-3n} = -\dfrac{2}{3}$;

е) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{2^n} = 0$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4} = \dfrac{1}{3}$;

ж) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^3+2n+1} = 0$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2-3n+1}{3n^2+7n+8} = \dfrac{2}{3}$;

з) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n^2}{n+1} = 0$.

4. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-1}{5n+1} = \dfrac{3}{5}$. Начиная с какого n величина $\left| \dfrac{3n-1}{5n+1} - \dfrac{3}{5} \right|$ не превосходит 0,0001 ?

5. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-1}{2-3n} = -\dfrac{2}{3}$. Начиная с какого n величина $\left| \dfrac{2n-1}{2-3n} + \dfrac{2}{3} \right|$ не превосходит 0,0001?

6. Доказать, что:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^2-1}{2n} = +\infty$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-7n^2+2}{3n-1} = -\infty$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+3}{1-2n} = -\infty$.

7. Пользуясь определением предела последовательности доказать, что:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{3n+5}\neq 1;$ в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4-n}{2n+3}\neq 0;$

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+3}{5n^2-1}\neq 2;$ г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+2n+1}{5-n^2}\neq -1.$

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ 6, 7

Существование предела последовательности

Задание 1. Доказать, что последовательность с общим членом $a_n = \dfrac{n}{2n+1}$ является возрастающей.

Решение: ◀ Последовательность $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ возрастающая, если для $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_{n+1} > a_n$, т.е. $a_{n+1} - a_n > 0$.

Оценим разность:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{2n+3} - \frac{n}{2n+1} = \frac{(n+1)(2n+1) - n(2n+3)}{(2n+3)(2n+1)} =$$

$$= \frac{1}{(2n+3)(2n+1)} > 0.$$

Значит, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ возрастающая последовательность. ▶

Задание 2. Доказать, что последовательность с общим членом $x_n = \dfrac{5^n}{n!}$ убывает начиная с некоторого номера.

Решение: ◀ Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ является убывающей с номера n_0, если для $\forall n \geq n_0$ выполняется неравенство $x_{n+1} < x_n$.

Если для $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n > 0$, то неравенство $x_{n+1} < x_n$ равносильно неравенству $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} < 1$.

Рассмотрим $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{5^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot 5^n} = \dfrac{5}{n+1} < 1$.

Решим неравенство относительно n: $\dfrac{5}{n+1} < 1 \Leftrightarrow n+1 > 5 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow n > 4$.

Значит, $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} < 1$ при $n \geq 5$. Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ убывает, начиная с номера $n_0 = 5$. ▶

Задание 3. Исследовать на монотонность последовательность $x_n = \dfrac{100n}{n^2+16}$.

Решение: ◀ Так как для $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n > 0$, то рассмотрим

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{100(n+1)}{(n+1)^2+16} \cdot \frac{n^2+16}{100n} = \frac{(n+1)(n^2+16)}{n(n^2+2n+17)}$$

и решим относительно n неравенство $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} < 1$.

$$\frac{(n+1)(n^2+16)}{n(n^2+2n+17)} < 1 \;\Leftrightarrow\; (n+1)(n^2+16) < n(n^2+2n+17) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; n^3+16n+n^2+16 < n^3+2n^2+17n \;\Leftrightarrow\; n^2+n-16 > 0.$$

Для решения последнего неравенства применим метод интервалов (рисунок 10.16).

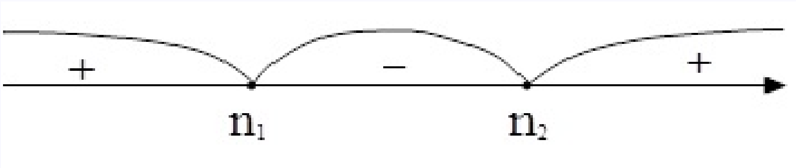

Рис. 10.16:

$$n_1 = \frac{-1-\sqrt{65}}{2} \approx -4,5, \quad n_2 = \frac{-1+\sqrt{65}}{2} \approx 3,5.$$

Учитывая, что $n \in \mathbb{N}$, делаем вывод, что неравенство $n^2+n-16>0$ справедливо при $n \geq 4$.

Следовательно, $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} < 1$ при $n \geq 4$ и последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ убывает, начиная с номера $n_0 = 4$. ▶

Задание 4. Доказать ограниченность последовательности:

$$x_n = \frac{(-1)^n n + 10}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Решение: ◀ Следуя определению ограниченной последовательности, надо доказать, что $\exists M > 0$ такое, что для $\forall n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $|x_n| \le M$. Оценим:

$$\left| \frac{(-1)^n n + 10}{\sqrt{n^2+1}} \right| = \frac{|(-1)^n n + 10|}{\sqrt{n^2+1}} \le \frac{n+10}{\sqrt{n^2+1}} < \frac{n+10}{n} = 1 + \frac{10}{n} \le 11.$$

Итак, $\exists M = 11$ такое, что для $\forall n \in \mathbb{N}$ $|x_n| \le 11$. Значит, последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ограниченная. ▶

Задание 5. Доказать ограниченность последовательности

$$x_n = \frac{5n^6+6}{(n^4+1)(n^2-2)}.$$

Решение: ◀ Оценим:

$$|x_n| = \left| \frac{5n^6+6}{(n^4+1)(n^2-2)} \right| = [\text{при } n > 1] = \frac{5n^6+6}{(n^4+1)(n^2-2)} <$$

$$< \frac{5n^6+6}{n^4(n^2-2)} < \frac{6n^6+6}{n^6-2n^4} = 6\frac{n^6-2n^4+2n^4+1}{n^6-2n^4} = 6\left(1 + \frac{2n^4+1}{n^4(n^2-2)}\right) =$$

$$= 6\left(1 + \frac{2}{n^2-2} + \frac{1}{n^4(n^2-2)}\right) \le [\text{при } \ n \ge 2] \le 6\left(1+1+\frac{1}{32}\right) = 12\frac{3}{16}.$$

Получили, что для $\forall n \ge 2$ выполняется $|x_n| < 12\frac{3}{16}$. Заметим, что $x_1 = -\frac{11}{2}$ и $|x_1| < 12\frac{3}{16}$, поэтому неравенство $|x_n| < 12\frac{3}{16}$ выполняется для $\forall n \in \mathbb{N}$. Значит, последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ограниченная. ▶

Задание 6. Доказать, что последовательность $x_n = 2^{n(-1)^n}$ не ограничена.

Решение: ◀ В силу определения неограниченной последовательности, надо показать, что для $\forall M > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, для которого $|x_{n_0}| > M$. Зададим произвольное $M > 0$ и возьмем любое четное число n_0, удовлетворяющее неравенству $n_0 > \log_2 M$. Для такого n_0 имеем $|x_{n_0}| = 2^{n_0} > 2^{\log_2 M} = M$, что и требовалось доказать. ▶

Задание 7. Доказать неограниченность последовательности

$$x_n = n^2 - n.$$

Решение: ◀ Возьмем $\forall M > 0$. Рассмотрим:

$$|x_n| = |n^2 - n| = n^2 - n = n(n-1) \ge n - 1.$$

Потребуем, чтобы $n - 1 > M$, откуда $n > M + 1$. Пусть $n_0 = [M+1] + 1$, тогда $|x_{n_0}| \ge n_0 - 1 = [M+1] > M$.

Итак, для $\forall M > 0 \quad \exists n_0 = [M+1]+1$ для которого $|x_{n_0}| > M$. ▶

Задание 8. Пользуясь теоремой о пределе монотонной последовательности, доказаь сходимость следующих последовательностей:

а) $x_n = \dfrac{1}{1+1} + \dfrac{1}{2^2+1} + \dfrac{1}{3^2+1} + \ldots + \dfrac{1}{n^2+1}$;

б) $x_n = \left(1+\dfrac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\dfrac{1}{2_n}\right)$;

в) $x_1 = \sqrt{2},\ x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}, \ldots, x_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ корней}}$.

Решение: ◀ а) Исследуем последовательность на монотонность. Так как $(n+1)$-й член последовательности можно представить в виде

$$x_{n+1} = \frac{1}{1+1} + \frac{1}{2^2+1} + \ldots + \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{(n+1)^2+1} = x_n + \frac{1}{(n+1)^2+1},$$

и $\dfrac{1}{(n+1)^2+1} > 0$ для $\forall n \in \mathbb{N}$, то $x_{n+1} > x_n$ для всех номеров n.

Это означает, что последовательность является возрастающей.

Докажем, что последовательность ограничена сверху. Для этого, согласно определению ограниченной сверху последовательности, достаточно указать такое число C, что для $\forall n \in \mathbb{N}$ будет выполняться неравенство $x_n \le C$. Для определения числа C воспользуемся следующей оценкой:

$$x_n = \frac{1}{1+1} + \frac{1}{2^2+1} + \ldots + \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{(n-1)n} = \left[\frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right] = 1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} =$$

$$= 2 - \frac{1}{n} < 2.$$

Итак, $\exists C = 2$ такое, что для $\forall n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $x_n < 2$. Значит, последовательность ограничена сверху.

Мы установили, что данная последовательность является возрастающей и ограниченной сверху. Следовательно, согласно теореме о пределе монотонной последовательности, она сходится.

б) Исследуем последовательность на монотонность. Поскольку для $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n > 0$, оценим:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} : \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 + \frac{1}{2^{n+1}} > 1.$$

Значит, последовательность является возрастающей. Покажем, что она ограничена сверху. Для этого рассмотрим вспомогательную последовательность $y_n = \lg x_n = \lg\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \lg\left(1 + \frac{1}{4}\right) + \ldots + \lg\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$.

Докажем, что последовательность $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ ограничена сверху. Воспользуемся неравенством $\lg(1+x) < x$ при $x > 0$, которое непосредственно вытекает из сравнения степеней роста функций $y = \lg(1+x)$ и $y = x$ (рисунок 10.17).

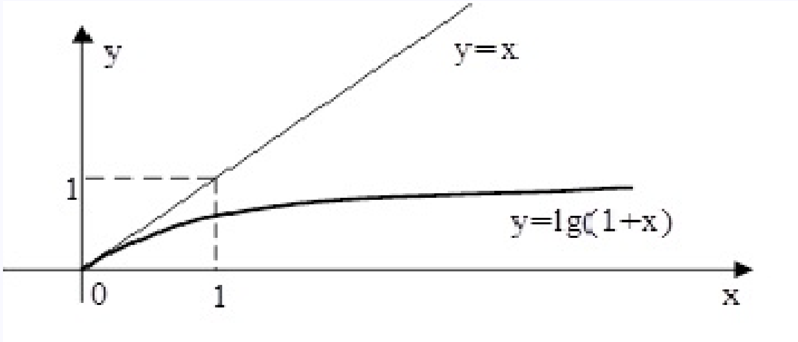

Рис. 10.17:

Оценим сверху y_n :

$$y_n = \lg\left(1+\frac{1}{2}\right) + \lg\left(1+\frac{1}{4}\right) + \ldots + \lg\left(1+\frac{1}{2^n}\right) < \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} <$$

$$< \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots < \left[S = \frac{b_1}{1-q}\right] = \frac{1/2}{1-1/2} = 1.$$

Получили, что для $\forall n \in \mathbb{N}$ $y_n < 1$, тогда $\lg x_n < 1$ или $x_n < 10$ при $\forall n \in \mathbb{N}$. Это означает, что последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ограничена сверху.

Кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений

Начало

Содержание

Назад

На весь экран

Закрыть

Таким образом, данная последовательность является возрастающей и ограниченной сверху, следовательно, она имеет конечный предел, т.е. сходится.

в) С помощью метода математической индукции докажем, что для $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n < 2$.

При $n = 1$ имеем $x_1 = \sqrt{2} < 2$. Предположим, что неравенство $x_n < 2$ справедливо при $n = k$, т.е. $x_k < 2$. Докажем истинность неравенства при $n = k + 1: \ x_{k+1} = \sqrt{2 + x_k} < \sqrt{2 + 2} = 2$.

Получили, что для $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n < 2$, значит, последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ограничена сверху.

Докажем, что последовательность является возрастающей, для этого сравним x_{n+1} и $x_n: \ x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} > \sqrt{x_n + x_n} = \sqrt{2x_n} > \sqrt{x_n \cdot x_n} = x_n$ для $\forall n \in \mathbb{N}$.

Так как последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ является возрастающей и ограниченной сверху, то она сходится, т.е. имеет конечный предел. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$. Для определения A перейдем к пределу в рекуррентном соотношении $x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}$. Получим равенство $A = \sqrt{2 + A}$, откуда $A^2 - A - 2 = 0$. Корнями последнего уравнения являются числа $A = 2$ и $A = -1$. Однако число –1 не может быть пределом данной последовательности, так как для $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n > 0$. Итак, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

▶

Задание 9. Пользуясь критерием Коши, исследовать на сходимость последовательности:

$$\text{а) } x_n = \frac{\cos 1!}{1\cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{\cos n!}{n\cdot(n+1)};$$

$$\text{б) } x_n = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{3^2} + \ldots + \frac{n}{(n+1)^2};$$

$$\text{в) } x_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Решение: ◀ а) Согласно критерию Коши, последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальная. Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называется фундаментальной или удовлетворяющей условию Коши, если для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$, что для всех номеров n и m , удовлетворяющих условию $n > N$ и $m > N$, справедливо неравенство $|x_m - x_n| < \varepsilon$. Определение фундаментальной последовательности можно сформулировать и таким образом: последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называется фундаментальной, если для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$, что для всех номеров $n > N$ и $\forall p \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$. Для того, чтобы убедиться в равносильности этих определений, достаточно положить $p = m - n$, если $m > n$ и $p = n - m$, если $n > m$. Докажем, что последовательность с общим членом

$$x_n = \frac{\cos 1!}{1\cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{\cos n!}{n\cdot(n+1)}$$

является фундаментальной. Для этого оценим $|x_{n+p} - x_n|$:

$$|x_{n+p} - x_n| = \left| \frac{\cos(n+1)!}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{\cos(n+p)!}{(n+p)(n+p+1)} \right| \leq$$

$$\leq \frac{|\cos(n+1)!|}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{|\cos(n+p)!|}{(n+p)(n+p+1)} \leq \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots +$$

$$+\frac{1}{(n+p)(n+p+1)} = \left[\frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right] = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} -$$

$$-\frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{n+p} - \frac{1}{n+p+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} = \frac{p}{(n+1)(n+p+1)} <$$

$$< \frac{n+p+1}{(n+1)(n+p+1)} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}.$$

Получили, что для $\forall n, p \in \mathbb{N}$ имеем $|x_{n+p} - x_n| < \dfrac{1}{n}$.

Возьмем $\forall \varepsilon > 0$ и потребуем, чтобы было $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$. Из последнего неравенства находим, что $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Положим $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. Тогда для

$\forall n > N$ будет выполняться неравенство $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$ или $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$. Значит, для $\forall n > N$ и произвольного натурального числа p имеет место соотношение $|x_{n+p} - x_n| < \dfrac{1}{n} < \varepsilon$. Это доказывает фундаментальность последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, и в силу критерия Коши делаем вывод, что она является сходящейся.

б) Докажем, что последовательность с общим членом

$$x_n = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{3^2} + \ldots + \frac{n}{(n+1)^2}$$

не является фундаментальной, т.е. $\exists \varepsilon_0 > 0$, что для $\forall N \in \mathbb{N}$ $\exists n > N$ и $\exists p \in \mathbb{N}$, для которых будет выполняться неравенство $|x_{n+p} - x_n| \geq \varepsilon_0$.

Оценим выражение $|x_{n+p} - x_n|$ снизу:

$$|x_{n+p} - x_n| = \left| \frac{n+1}{(n+2)^2} + \frac{n+2}{(n+3)^2} + \ldots + \frac{n+p}{(n+p+1)^2} \right| = \frac{n+1}{(n+2)^2} +$$

$$+ \frac{n+2}{(n+3)^2} + \ldots + \frac{n+p}{(n+p+1)^2} \geq \frac{n+1}{(n+2)^2} + \frac{n+1}{(n+3)^2} + \ldots + \frac{n+1}{(n+p+1)^2} \geq$$

$$\geq \frac{n+1}{(n+p+1)^2} + \ldots + \frac{n+1}{(n+p+1)^2} = p \cdot \frac{n+1}{(n+p+1)^2}.$$

Получили, что для $\forall n, p \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $|x_{n+p} - x_n| \geq$

$\geq \dfrac{p(n+1)}{(n+p+1)^2}$. В частности, если $p = n$, то имеет место неравенство

$$|x_{2n} - x_n| \geq \frac{n(n+1)}{(2n+1)^2} > \frac{n(n+1)}{4(n+1)^2} = \frac{n}{4(n+1)}.$$

Покажем, что для $\forall n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $\dfrac{n}{4(n+1)} \geq \dfrac{1}{8}$.

$$\frac{n}{4(n+1)} \geq \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{n}{n+1} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2n \geq n+1 \Leftrightarrow n \geq 1.$$

Положим $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{8}$. Очевидно, что для $\forall N \in \mathbb{N}$ всегда можно найти $n > N$ (в силу неограниченности сверху множества натуральных чисел) и взять $p = n$. Так как неравенство $|x_{2n} - x_n| \geq \dfrac{1}{8}$ выполняется для $\forall n \in \mathbb{N}$, то для выбранных ε_0, n, p будет справедливо неравенство $|x_{n+p} - x_n| \geq \varepsilon_0$.

Значит, для $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{8}$ для $\forall N$ $\exists n > N$ и $p = n$, для которых имеет место неравенство $|x_{n+p} - x_n| \geq \varepsilon_0$. Это означает, что данная последовательность не является фундаментальной и, согласно критерию Коши, она расходится.

в) Покажем, что последовательность не является фундаментальной.

Оценим снизу выражение $|x_{n+p} - x_n|$:

$$|x_{n+p} - x_n| = \left| \sum_{k=1}^{n+p} \frac{1}{\sqrt{k}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{\sqrt{k}} \right| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{n+p}} \geq \frac{1}{\sqrt{n+p}} + \frac{1}{\sqrt{n+p}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n+p}} = \frac{p}{\sqrt{n+p}}.$$

Получили, что для $\forall n, p \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство $|x_{n+p} - x_n| \geq$ $\geq \dfrac{p}{\sqrt{n+p}}$.

Пусть $p = n$, тогда $|x_{2n} - x_n| \geq \dfrac{n}{\sqrt{2n}} = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ для $\forall n \in \mathbb{N}$.

Возьмем $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Так как неравенство $|x_{2n} - x_n| \geq \dfrac{1}{2}$ выполняется для $\forall n \in \mathbb{N}$, то для $p = n$ будет справедливо неравенство $|x_{n+p} - x_n| \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Таким образом, $\exists \varepsilon_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, для $\forall N$ $\exists n > N$ и $p = n$ такие, что имеет место неравенство $|x_{n+p} - x_n| \geq \varepsilon_0$. Данная последовательность не является фундаментальной, поэтому она расходится. ►

Задание 10. Доказать расходимость последовательности $x_n = 2^{n(-1)^n}$.

Решение: ◄ **I способ.** Воспользуемся теоремой об ограниченности сходящейся последовательности, которая выражает необходимое условие сходимости числовой последовательности. Если докажем, что последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ не ограничена, то это будет означать, что она является расходящейся.

В задании 6 установлено, что последовательность с общим членом $x_n = 2^{n(-1)^n}$ не ограничена. Следовательно, она является расходящейся.

II способ. Докажем расходимость последовательности, используя теорему о пределе подпоследовательности сходящейся последовательности. Согласно этой теореме, если бы данная последовательность имела предел, равный числу a, то любая ее подпоследовательность также сходилась бы к a. Рассмотрим две подпоследовательности данной последовательности, одну с четными номерами, другую — с нечетными:

$$x_{2k} = 2^{2k}, \quad x_{2k-1} = 2^{-(2k-1)} = \frac{1}{2^{2k-1}} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Очевидно, что $x_{2k} \to +\infty$, а $x_{2k-1} \to 0$ при $k \to \infty$.

Поэтому последовательность $x_n = 2^{n(-1)^n}$ не может быть сходящейся. ►

Задание 11. Доказать, что последовательность $x_n = n^{(-1)^n}$ не имеет предела.

Решение: ◄ Так как для $\forall n \in \mathbb{N}$ имеем $x_n > 0$, то любой частичный предел этой последовательности неотрицателен. Поскольку $x_{2n} = 2n$ и $x_{2n-1} = \dfrac{1}{2n-1}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = +\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1} = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 0$.

Условие существования предела последовательности эквивалентно условию равенства верхнего и нижнего пределов этой последовательности. Так как $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \neq \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$, то данная последовательность предела не имеет. ▶

Задания для самостоятельного решения (выполнения)

1. Возрастающей или убывающей является последовательность с общим членом x_n ?

а) $x_n = \dfrac{n}{3n+1}$; в) $x_n = \dfrac{n}{7^n}$; д) $x_n = |n-1|$;

б) $x_n = \dfrac{n^2-1}{n}$; г) $x_n = 1 + \dfrac{1}{2^n}$; е) $x_n = -9n^2 + 10n + 25$.

2. Доказать, что начиная с некоторого номера последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ является монотонной и установить характер монотонности:

а) $x_n = \dfrac{n+1}{2n-1}$; б) $x_n = \dfrac{3n+4}{n+2}$; в) $x_n = \dfrac{n^2+24}{n+1}$;

г) $x_n = \dfrac{n^3}{n^2-3}$.

3. Доказать ограниченность последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, если:

а) $x_n = \dfrac{2n^2-1}{2+n^2}$; б) $x_n = \dfrac{1-n}{\sqrt{n^2+1}}$; в) $x_n = \dfrac{n+(-1)^n}{3n-1}$;

г) $x_n = \dfrac{n^2+4n+8}{(n+1)^2}$.

4. Доказать, что последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ не является ограниченной:

а) $x_n = (-1)^n n$; б) $x_n = \dfrac{1-n}{\sqrt{n}}$; в) $x_n = n + (-1)^n n$; г) $x_n = n^{(-1)^n}$.

5. Ограничены ли последовательности:

а) $x_n = \ln n$; б) $x_n = \sin n$; в) $x_n = (-1)^n \dfrac{1}{n}$; г) $x_n = 2n$?

6. Пользуясь теоремой о пределе монотонной последовательности, доказать сходимость последовательностей:

а) $x_n = \dfrac{10}{1} \cdot \dfrac{11}{3} \cdot \ldots \cdot \dfrac{n+9}{2n-1}$;

б) $x_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n}$;

в) $x_n = \dfrac{2n^2+1}{n^2}$;

г) $x_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2}$;

д) $x_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \ldots + \dfrac{1}{2^n}$;

е) $x_n = 1 + 1 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \ldots + \dfrac{1}{n!}$;

ж) $x_n = 1 + \frac{1}{2\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 2^2} + \frac{1}{4\cdot 2^3} + \ldots + \frac{1}{n\cdot 2^{n-1}}$;

з) $x_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$;

и) $x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$.

7. Пользуясь критерием Коши, исследовать на сходимость последовательности:

а) $x_n = a_0 + a_1 q + \ldots + a_n q^n$, где $|a_k| < M$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ и $|q| < 1$;

б) $x_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \ldots + \frac{\sin n}{2^n}$;

в) $x_n = \frac{\cos\alpha}{3} + \frac{\cos 2\alpha}{3^2} + \ldots + \frac{\cos n\alpha}{3^n}$;

г) $x_n = \frac{\sin 1}{1^2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \ldots + \frac{\sin n}{n^2}$;

д) $x_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$.

8. Доказать расходимость последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, если:

а) $x_n = (-1)^n \ln n$; г) $x_n = \frac{1}{n} + n^{(-1)^n}$; ж) $x_n = 3^{(-1)^n n}$;

б) $x_n = n^2 \sin \frac{\pi n}{4}$; д) $x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{(-1)^n n}$; з) $x_n = \cos \frac{\pi n}{3}$;

в) $x_n = \sqrt{n} \cos \frac{\pi n}{2}$; е) $x_n = (-1)^n \frac{2n+1}{n}$; и) $x_n = (2 + (-1)^n)^n$.

Вычисление пределов последовательностей

Задание 1. Пользуясь свойствами бесконечно малых последовательностей, найти предел последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, если:

а) $x_n = \dfrac{\sqrt{n}\cos n}{n+1}$; б) $x_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{\frac{n}{2} - \left[\frac{n}{2}\right]}{\ln(n+1)}$; в) $x_n = \dfrac{\operatorname{sign}(\operatorname{tg} n)}{n}$.

Решение: ◀ а) Последовательность $(y_n)_{n=1}^{\infty}$, где $y_n = \cos n$ является ограниченной, поскольку для $\forall n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $|\cos n| \leq 1$, а последовательность $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ с общим членом $z_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$ — бесконечно малая, так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)} = 0.$$

Очевидно, что $x_n = z_n \cdot y_n$. По свойствам бесконечно малых последовательностей: произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную есть бесконечно малая последовательность, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}\cos n}{n+1}=0.$

б) Заметим, что выражение $\dfrac{n}{2}-\left[\dfrac{n}{2}\right]$ принимает только два значения: значение $\dfrac{1}{2}$, если n – нечетное число, и значение 0, если n – четное. Это означает, что последовательность с общим членом $y_n=\dfrac{n}{2}-\left[\dfrac{n}{2}\right]$

является ограниченной, так как для $\forall n\in\mathbb{N}$ справедливо неравенство

$0\le y_n\le\dfrac{1}{2}$. Величина $\ln(n+1)\to+\infty$, при $n\to\infty$, поэтому

$\dfrac{1}{\ln(n+1)}\to 0$ при $n\to\infty$, т.е. последовательность $z_n=$
$=\dfrac{1}{\ln(n+1)}$ – бесконечно малая. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}(y_n\cdot z_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n}{2}-\left[\dfrac{n}{2}\right]}{\ln(n+1)}=0.$$

Последовательность с общим членом $\dfrac{1}{n}$ также является бесконечно малой. Известно, что сумма двух бесконечно малых последовательностей есть последовательность бесконечно малая. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} - \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{2} - \left[\frac{n}{2}\right]}{\ln(n+1)} = 0.$$

в) Представим x_n в виде $x_n = y_n \cdot z_n$, где $y_n = \frac{1}{n}$, $z_n = \operatorname{sign}(\operatorname{tg} x)$. Последовательность $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ – бесконечно малая, а последовательность $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ – ограниченная. Поскольку функция $y = \operatorname{sign} x$ принимает только три значения: -1, 0, 1, то для $\forall n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $-1 \le z_n \le 1$ или $|z_n| \le 1$.

Так как последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ есть произведение бесконечно малой последовательности и ограниченной, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sign}(\operatorname{tg} n)}{n} = 0$. ►

Задание 2. Пользуясь теоремой о предельном переходе в двойном неравенстве, найти предел последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, если:

а) $x_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n}$; б) $x_n = \frac{2^n}{n!}$; в) $x_n = \frac{3^n}{n^n}$;

г) $x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$; д) $x_n = \frac{a^n}{n!}$, где $|a| > 1$.

Решение: ◄ а) Известно, что для $\forall n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство

Кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений

Начало
Содержание
◄ ►
◄◄ ►►

Назад
На весь экран
Закрыть

$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ (доказано с помощью метода математической индукции на практическом занятии 3).

Тогда для $\forall n \in \mathbb{N}$ справедливо двойное неравенство $0 < x_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = 0$, то по теореме о предельном переходе в двойном неравенстве $\lim\limits_{n\to\infty} x_n =$ $= \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\right) = 0.$

б) Оценим сверху общий член последовательности x_n :

$$x_n = \frac{2^n}{n!} = \frac{2\cdot 2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n} \leq \frac{2\cdot 2}{1\cdot 2}\cdot\frac{2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2}{3\cdot 3\cdot\ldots\cdot 3} = 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} =$$
$$= \frac{2\cdot 3^2}{2^2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{9}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n, \text{ если } n \geq 3.$$

Получили, что для всякого $n \geq 3$ имеет место двойное неравенство

$$0 < x_n \leq \frac{9}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{9}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!} = 0.$

Кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений

в) Заметим, что $\dfrac{3}{n} \le \dfrac{1}{2}$ при $n \ge 6$. Тогда для $\forall n \ge 6$ имеет место двойное неравенство $0 < x_n = \left(\dfrac{3}{n}\right)^n \le \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Учитывая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$, и используя теорему о предельном переходе в двойном неравенстве, получим, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n}{n^n} = 0$.

г) Оценим x_n сверху и снизу:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} < \frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2}} = n \cdot \frac{1}{n} = 1,$$

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \ge \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}.$$

Таким образом, для $\forall n \in \mathbb{N}$ справедливо двойное равенство

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \le x_n < 1.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}} = 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

д) Из определения предела последовательности следует, что

Кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений

Начало

Содержание

Назад

На весь экран

Закрыть

если $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = 0$, то и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Рассмотрим последовательность $z_n = |x_n| = \dfrac{|a|^n}{n!}$ и докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$. Пусть $k \in \mathbb{N}$ такое число, что $k \geq |a|$, и пусть $n > 2k$. Представим z_n в виде произведения n сомножителей:

$$z_n = |x_n| = \frac{|a|^n}{n!} = \frac{|a|}{1} \cdot \frac{|a|}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{|a|}{2k} \cdot \frac{|a|}{2k+1} \cdot \ldots \cdot \frac{|a|}{n}.$$

Поскольку $k \geq |a|$, дробь $\dfrac{|a|}{2k}$ и все дроби, следующие за ней, не больше, чем $\dfrac{1}{2}$. Поэтому получим оценку

$$z_n = \frac{|a|^n}{n!} \leq |a|^{2k-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = (2|a|)^{2k-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Для $\forall n > 2k \geq 2|a|$ имеет место двойное неравенство

$$0 < z_n = \frac{|a|^n}{n!} \leq (2|a|)^{2k-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} (2|a|)^{2k-1} \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$, то по теореме о предельном переходе в двойном неравенстве $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$. Отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$.

Это означает, что последовательность $a_n = n!$ имеет более высокий порядок роста, чем последовательность $b_n = a^n$ при $|a| > 1$. ▶

Задание 3. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{10n}{n^2+1}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_0n^k + a_1n^{k-1} + \ldots + a_k}{b_0n^m + b_1n^{m-1} + \ldots + b_m}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-n}{n-\sqrt{n}}$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}$;

е) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+a+a^2+\ldots+a^n}{1+b+b^2+\ldots+b^n}$ $(|a|<1, |b|<1)$;

ж) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\ldots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$;

з) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1^2}{n^3}+\dfrac{2^2}{n^3}+\ldots+\dfrac{(n-1)^2}{n^3}\right)$;

и) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$;

к) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2^n]{2}\right)$;

л) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^4+2^4+\ldots+n^4}{n^5}$;

м) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{2^n}$.

Решение: ◀ а) В данном пределе имеем неопределенность вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{10n}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{10}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}=\left[\begin{array}{c}\frac{10}{n}\to 0,\ \frac{1}{n^2}\to 0\\ \text{при } n\to\infty\end{array}\right]=0$$

б) Преобразуем общий член последовательности:

$$x_n=\frac{n^k\left(a_0+\frac{a_1}{n}+\ldots+\frac{a_k}{n^k}\right)}{n^m\left(b_0+\frac{b_1}{n}+\ldots+\frac{b_m}{n^m}\right)}=n^{k-m}\cdot\frac{a_0+\frac{a_1}{n}+\ldots+\frac{a_k}{n^k}}{b_0+\frac{b_1}{n}+\ldots+\frac{b_m}{n^m}}.$$

Пусть $y_n=\dfrac{a_0+\frac{a_1}{n}+\ldots+\frac{a_k}{n^k}}{b_0+\frac{b_1}{n}+\ldots+\frac{b_m}{n^m}}$.

Найдем предел последовательности $(y_n)_{n=1}^{\infty}$, используя теорему об арифметических операциях над пределами последовательностей и тот факт, что $\dfrac{1}{n^s}\to 0$ при $n\to\infty$ для $\forall s>0$:

$$\lim_{n\to\infty}y_n=\frac{a_0+a_1\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\ldots+a_k\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}}{b_0+b_1\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\ldots+b_m\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^m}}=\frac{a_0}{b_0}.$$

Существование предела последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ и его значение зависит от того, к чему стремится величина n^{k-m} при $n\to\infty$. Возможны следующие случаи. Если $k = m$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \dfrac{a_0}{b_0}$. Пусть $k > m$, тогда $n^{k-m} \to +\infty$ при $n \to \infty$ и $x_n = n^{k-m} y_n \to +\infty$ при $n \to \infty$, если $\dfrac{a_0}{b_0} > 0$, и $x_n \to -\infty$ при $n \to \infty$, если $\dfrac{a_0}{b_0} < 0$. Пусть $k < m$, тогда $n^{k-m} \to 0$ при $n \to \infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Итак,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0}, & \text{если } k = m; \\ 0, & \text{если } k < m; \\ +\infty, & \text{если } k > m \text{ и } \dfrac{a_0}{b_0} > 0; \\ -\infty, & \text{если } k > m \text{ и } \dfrac{a_0}{b_0} < 0. \end{cases}$$

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 - n}{n - \sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n^2 - n)(n + \sqrt{n})}{(n - \sqrt{n})(n + \sqrt{n})} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n^2 - n)(n + \sqrt{n})}{n^2 - n} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} (n + \sqrt{n}) = +\infty.$

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\sqrt{n^2+n}+n}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1}=\frac{1}{2}.$$

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{2^n}{3^{n+1}}+\dfrac{3^n}{3^{n+1}}}{\dfrac{2^{n+1}}{3^{n+1}}+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+\dfrac{1}{3}}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}+1}=$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+1}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}+1}=\frac{1}{3},\quad \text{так как } \left(\frac{2}{3}\right)^n\to 0,\quad \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\to 0$$

при $n\to\infty$.

е) Выражения, стоящие в числителе и знаменателе дроби x_n, представляют собой сумму n членов геометрической прогрессии. Применим формулу $S_n=\dfrac{b_1\left(q^n-1\right)}{q-1}$ для преобразования x_n :

Начало
Содержание
Страница 304 из 430
Назад
На весь экран
Закрыть

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1+a+a^2+\ldots+a^n}{1+b+b^2+\ldots+b^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{a^n-1}{a-1}}{\dfrac{b^n-1}{b-1}} = \frac{b-1}{a-1} \lim_{n\to\infty} \frac{a^n-1}{b^n-1} =$$

$$= \frac{b-1}{a-1},$$

так как $a^n \to 0$, $b^n \to 0$ при $n \to \infty$, если $|a| < 1$ и $|b| < 1$.

ж) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \ldots + \dfrac{n-1}{n^2} \right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+\ldots+(n-1)}{n^2}$.

Выражение $1+2+\ldots+(n-1)$ – сумма $(n-1)$ членов арифметической

прогрессии с разностью $d=1$, поэтому $S_{n-1} = \dfrac{2+(n-2)}{2}(n-1) =$
$= \dfrac{n(n-1)}{2}$.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{n(n-1)}{2}}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-n}{2n^2} = \frac{1}{2}.$$

При нахождении $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-n}{2n^2}$ воспользовались результатом пункта б).

з) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\ldots+\frac{(n-1)^2}{n^3}\right)=$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2}{n^3}.$$

Известно, что $1^2+2^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (доказано с помощью метода математической индукции на практическом занятии 3).

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}}{n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3} = \frac{1}{3}.$$

Воспользовались результатом пункта б).

и) При вычислении данного предела будем использовать следующее равенство: $\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

к) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2^n]{2}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{8}}\cdot\ldots\cdot 2^{\frac{1}{2^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}}$.

Выражение $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}$ представляет собой сумму n членов геометрической прогрессии со знаменателем $q=\dfrac{1}{2}$. Поэтому

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^n}-1\right)}{\frac{1}{2}-1} = 1-\frac{1}{2^n}.$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} 2^{\left(1-\frac{1}{2^n}\right)} = 2$, так как $\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)\to 1$ при $n\to\infty$.

л) Обозначим $S_n = 1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4$. Будем искать S_n в виде $S_n = An^5+Bn^4+Cn^3+Dn^2+En+F$.

Тогда

$$S_{n+1}-S_n = A\left((n+1)^5-n^5\right)+B\left((n+1)^4-n^4\right)+C\left((n+1)^3-n^3\right)+$$

$$+D\left((n+1)^2-n^2\right)+E\left((n+1)-n\right)=$$

$$=A\left(C_5^0n^5+C_5^1n^4+C_5^2n^3+C_5^3n^2+C_5^4n+C_5^5-n^5\right)+$$

$$+B\left(C_4^0n^4+C_4^1n^3+C_4^2n^2+C_4^3n+C_4^4-n^4\right)+$$

$$+C\left(n^3+3n^2+3n+1-n^3\right)+D\left(n^2+2n+1-n^2\right)+E=$$

$$=A\left(5n^4+10n^3+10n^2+5n+1\right)+B\left(4n^3+6n^2+4n+1\right)+$$

$$+C\left(3n^2+3n+1\right)+D\left(2n+1\right)+E=5An^4+\left(10A+4B\right)n^3+$$

$$+\left(10A+6B+3C\right)n^2+\left(5A+4B+3C+2D\right)n+A+B+C+D+E.$$

С другой стороны:

$$S_{n+1}-S_n = \left(1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4+(n+1)^4\right)-\left(1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4\right) =$$

$$= (n+1)^4.$$

Для $\forall n \in \mathbb{N}$ имеем:

$$(n+1)^4 = 5An^4 + (10A+4B)\,n^3 + (10A+6B+3C)\,n^2+$$
$$+(5A+4B+3C+2D)\,n + A+B+C+D+E$$

или

$$n^4+4n^3+6n^2+4n+1 = 5An^4 + (10A+4B)\,n^3 + (10A+6B+3C)\,n^2+$$
$$+(5A+4B+3C+2D)\,n + A+B+C+D+E.$$

Приравнивая коэффициенты при равных степенях n в левой и правой частях равенства, получим систему:

$$\begin{cases} 5A = 1, \\ 10A+4B = 4, \\ 10A+6B+3C = 6, \\ 5A+4B+3C+2D = 4, \\ A+B+C+D+E = 1. \end{cases}$$

Отсюда $A = \frac{1}{5},\ B = \frac{1}{2},\ C = \frac{1}{3},\ D = 0,\ E = -\frac{1}{30}.$

Таким образом, для $\forall n \in \mathbb{N}$ имеем $S_n = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n + F.$

Положим $n = 1$, получим $1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{30} + F$, откуда $F = 0$.

Следовательно, $S_n = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4 = \dfrac{6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n}{30}.$
Итак,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4}{n^5} = \lim_{n\to\infty} \frac{6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n}{30n^5} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}.$$

м) **I способ.** Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{2^n} = 0$. Исследуем последовательность на монотонность. Рассмотрим разность $x_{n+1} - x_n$:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} - \frac{n^2}{2^n} = \frac{-n^2 + 2n + 1}{2^{n+1}}.$$

Решим относительно n неравенство

$$\frac{-n^2 + 2n + 1}{2^{n+1}} < 0 \ \Leftrightarrow\ -n^2 + 2n + 1 < 0 \ \Leftrightarrow\ n^2 - 2n - 1 > 0.$$

Для решения последнего неравенства применим метод интервалов (рисунок 10.18).

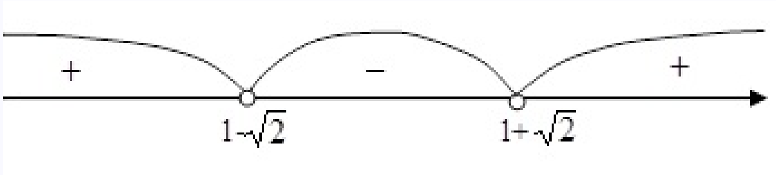

Рис. 10.18:

Это неравенство выполняется при $n \geq 3$. Значит, последовательность является убывающей. Так как для $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n > 0$, то она ограничена снизу и по теореме о пределе монотонной последовательности она имеет предел. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{2^n} = a$.

В равенстве $\dfrac{(n+1)^2}{2^{n+1}} = \dfrac{(n+1)^2}{2n^2} \cdot \dfrac{n^2}{2^n}$ перейдем к пределу при $n \to \infty$, получим $a = \dfrac{1}{2}a$, откуда следует, что $a = 0$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{2^n} = 0$.

II способ. Пусть $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ – бесконечно большие последовательности. Запись $a_n \ll b_n$ означает, что последовательность $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ имеет более высокий порядок роста, чем последовательность $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, т.е. она быстрее стремится в бесконечность, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{a_n} = \infty$ и

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0.$

Сравнивая порядок роста некоторых бесконечно больших последовательностей, можно прийти к следующим результатам:

$$\log_a n \ll n^\alpha \ll a^n \ll n!\ ,$$

где $a > 1,\ \alpha \geq 1.$

Так как $n^2 \ll 2^n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{2^n} = 0.$ ▶

Задание 4. Построить график функции $y = f(x)$, если:

$$\text{а)} f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n - x^{-n}}{x^n + x^{-n}}; \quad \text{б)} f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(2^n + x^n)}{n}, \ (x \geq 0).$$

Решение: ◀ а) Областью определения функции является множество $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Преобразуем $f(x)$:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n - x^{-n}}{x^n + x^{-n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n - \dfrac{1}{x^n}}{x^n + \dfrac{1}{x^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}.$$

Если $|x| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1} = -1.$

Если $|x| = 1$, т.е. $x = \pm 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1} = 0.$

Если $|x| > 1$, то

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n}\left(1-\dfrac{1}{x^{2n}}\right)}{x^{2n}\left(1+\dfrac{1}{x^{2n}}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\dfrac{1}{x^{2n}}}{1+\dfrac{1}{x^{2n}}} = 1.$$

Таким образом,

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } |x| < 1; \\ 0, & \text{если } x = \pm 1; \\ 1, & \text{если } |x| > 1. \end{cases}$$

График функции $y = f(x)$ изображен на рисунке 10.19.

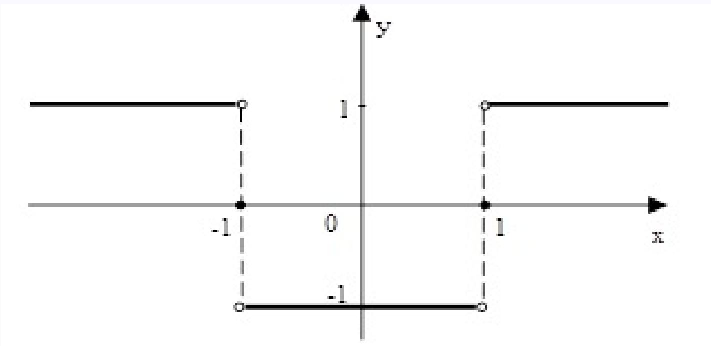

Рис. 10.19:

б) Если $0 \le x < 1$, то

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(2^n + x^n)}{n} = \ln 2.$$

Если $x = 1$, то

$$f(1) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(2^n + 1)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(2^n\left(1 + \dfrac{1}{2^n}\right)\right)}{n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n\ln 2 + \ln\left(1 + \dfrac{1}{2^n}\right)}{n} = \ln 2.$$

Если $1 < x < 2$, то

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(2^n + x^n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(2^n\left(1 + \left(\frac{x}{2}\right)^n\right)\right)}{n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n\ln 2 + \ln\left(1 + \left(\frac{x}{2}\right)^n\right)}{n} = \ln 2.$$

Если $x = 2$, то

$$f(2) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(2^n + 2^n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 2^{n+1}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\ln 2}{n} = \ln 2.$$

Если $x > 2$, то

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(2^n + x^n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(x^n\left(\left(\frac{2}{x}\right)^n + 1\right)\right)}{n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n\ln x + \ln\left(\left(\frac{2}{x}\right)^n + 1\right)}{n} = \ln x.$$

Таким образом,

$$f(x) = \begin{cases} \ln 2, & \text{если } 0 \le x \le 2; \\ \ln x, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

График функции изображен на рисунке 10.20.

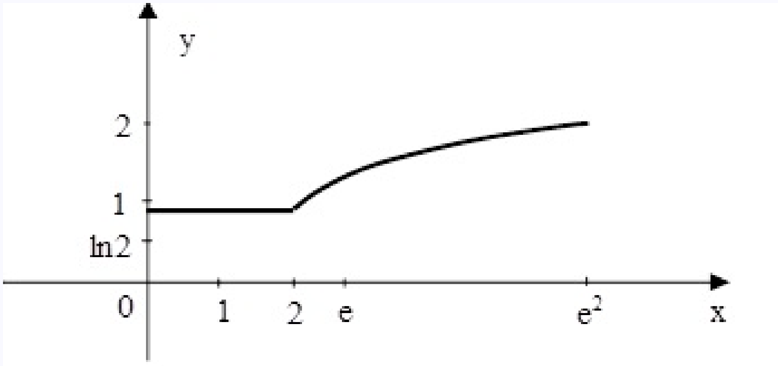

Рис. 10.20:

Задания для самостоятельного решения (выполнения)

1. Пользуясь свойствами бесконечно малых последовательностей, вычислить предел последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, если:

а) $x_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{n+2}$; в) $x_n = \dfrac{1}{n^2(2+(-1)^n)}$; д) $x_n = \dfrac{\sin\dfrac{\pi n}{4}}{n^2}$;

б) $x_n = \dfrac{1}{n(8+\sin n)}$; г) $x_n = \dfrac{\cos \pi n}{\sqrt{n}}$; е) $x_n = \dfrac{n+1}{n^2(5+\cos n)}$.

2. Пользуясь теоремой о предельном переходе в двойном неравенстве, найти предел последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, если:

а) $x_n = \left(\dfrac{5}{n}\right)^n$; б) $x_n = (-1)^n\dfrac{1}{n}$; в) $x_n = \dfrac{3^n}{(2n)!}$.

3. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3+4}{n^2+5}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3}{n^2+1}-\dfrac{3n^2}{3n-1}\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-n}{n+\sqrt{n}}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2-4}}$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{\sqrt{n^4+n^2}}$; е) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n+6}{n^2-3n+1}$;

ж) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^2-3}{7n^2-4n+1}$; з) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2}{n+1}-\dfrac{3n^3}{3n^2-1}\right)$.

4. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5\cdot 3^n}{3^n-2}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)!}{(n-1)!-n!}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{(n+1)!+n!}$; е) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n-3^n}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n-5}-\sqrt{n}\right)$; ж) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n-1}-\sqrt{n^2-n+1}\right)$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{9\cdot 2^n}{2^n-1}$; з) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n}{5n+11}+\dfrac{\cos n}{10n}\right)$.

5. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n+n\cdot 2^n}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+\lg n+2^n}{n^2+\lg n-2^n}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+3^n}{n+3^{n+1}}$; е) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n}-\ldots+\dfrac{(-1^n n)}{n}\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}}{1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\ldots+\dfrac{1}{3^n}}$; ж) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^2}{n^3}+\dfrac{3^2}{n^3}+\ldots+\dfrac{(2n-1)^2}{n^3}\right)$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^2-n^3}+n\right)$; з) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n+2}-2\sqrt[3]{n+1}+\sqrt[3]{n}\right)$;

и) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}-+\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}\right)$;

к) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{4\cdot 7}-+\dfrac{1}{7\cdot 10}+\ldots+\dfrac{1}{(3n+1)(3n+4)}\right)$;

6. Построить график функции $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+2}}{\sqrt{2^{2n}+x^{2n}}}$ $(x\geq 0)$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 10

Предел функции

Задание 1. Используя определение предела функции, доказать, что $\lim\limits_{x\to 1}(2x+1)=3$.

Решение. ◀ Зададим произвольное $\varepsilon>0$ и покажем, что найдется число $\delta>0$,такое, что для всех $x\in D(f)$,удовлетворяющих условию $0<|x-1|<\delta$ выполняется неравенство $|f(x)-3|=|(2x+1)-3|<\varepsilon$.

Имеем: $|(2x+1)-3|=|2x-2|=2|x-1|$. Потребуем, чтобы $2|x-1|<\varepsilon$. Тогда $|x-1|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

Следовательно, можем взять $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$.

Задание 2. Доказать, что $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x=1$.

Решение. ◀ Следуя определению предела функции в точке по Коши, надо доказать, что для $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ такое, что для $\forall x\in D(f)$, удовлетворяющих условию $0<|x-\dfrac{\pi}{2}|<\delta$, будет выполняться неравенство $|\sin x-1|=1-\sin x=\sin\dfrac{\pi}{2}-\sin x=2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2}\right)\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}\right)$.

Так как для $\forall x\in\mathbb{R}$ справедливы неравенства

$$\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|\leqslant 1$$

Начало
Содержание
◀ ▶
◀◀ ▶▶
Страница 320 из 430
Назад
На весь экран
Закрыть

и

$$\left|\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right| \leqslant \left|\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right|,$$

то $|\sin x - 1| \leqslant 2\left|\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right| = \left|\frac{\pi}{2}-x\right| = \left|x-\frac{\pi}{2}\right|$. Потребуем, чтобы $|x-\frac{\pi}{2}| < \varepsilon$, тогда взяв в качестве δ $\delta = \varepsilon$ получим, что из неравенства $0 < \left|x-\frac{\pi}{2}\right| < \delta$ следует неравенство $|\sin x - 1| < \varepsilon$.

Таким образом, для $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \varepsilon,\ \forall x : 0 < \left|x-\frac{\pi}{2}\right| < \delta \Rightarrow$
$\Rightarrow |\sin x - 1| < \varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x = 1$.▶

Задание 3. Используя определение предела функции в точке по Коши, доказать, что $\lim\limits_{x\to -3} x^2 = 9$.

Решение. ◀ Возьмем $\forall\varepsilon > 0$ и оценим разность $|x^2-9|$:
$|x^2-9| = |x-3|\cdot|x+3|$. Так как на всей числовой прямой множитель $x-3$ не ограничен, то оценку произведения сделаем, выделив некоторую $\delta-$ окрестность точки $x_0 = -3$. Пусть $\delta_1 = 1$, тогда $|x+3| < 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -1 < x+3 < 1 \Leftrightarrow -4 < x < -2 \Leftrightarrow -7 < x-3 < -5 \Leftrightarrow 5 < |x-3| < 7.$

Для всех x из δ_1- окрестности точки $x_0 = -3$ имеем $5 < |x-3| < 7$, следовательно, $|x-3|\cdot|x+3| < 7|x+3|$. Потребуем, чтобы $7|x+3| < \varepsilon$, откуда $|x+3| < \frac{\varepsilon}{7}$.

Так как $\delta-$ окрестность точки $x_0 = -3$ не должна выходить за пределы δ_1— окрестности, то выберем в качестве $\delta = \min\left\{1; \frac{\varepsilon}{7}\right\}$, и из предыдущих оценок видно, что из неравенства $0 < |x+3| < \delta$ следует неравенство $|x^2 - 9| < \varepsilon$. Таким образом, $\lim\limits_{x\to -3} x^2 = 9$. ▶

Задание 4. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2 - 2x + 4) = 12$.

Решение. ◀ Зададим $\forall\varepsilon > 0$ и покажем, что для него найдется такое $\delta > 0$, для которого выполняется цепочка

$$(\forall x \in D(f))(0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |(3x^2 - 2x + 4) - 12| < \varepsilon).$$

Имеем: $|(3x^2 - 2x + 4) - 12| = |3x^2 - 2x - 8| = |x-2| \cdot |3x+4|$.

Для оценки множителя $|3x+4|$ возьмем $\delta_1 = 1$, тогда $|x-2| < 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -1 < x - 2 < 1 \Leftrightarrow 1 < x < 3 \Leftrightarrow 7 < 3x + 4 < 13 \Leftrightarrow 7 < |3x+4| < 13$, а значит, $|(3x^2 - 2x + 4) - 12| < 13|x-2|$. Потребуем, чтобы $13|x-2| < \varepsilon$, откуда $|x-2| < \frac{\varepsilon}{13} = \delta_2$. Следовательно, искомое δ существует и $\delta = \min\{1; \frac{\varepsilon}{13}\}$. ▶

Задание 5. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+3}{x-2} = -4$.

Решение. ◀ Зададим $\forall\varepsilon > 0$ и покажем, что $\exists\delta > 0$ такое, что для $\forall x \in D(f)$, удовлетворяющих условию $0 < |x-1| < \delta$, выполняется неравенство $\left|\frac{x+3}{x-2} + 4\right| < \epsilon$. Имеем: $\left|\frac{x+3}{x-2} + 4\right| = \left|\frac{5x-5}{x-2}\right| = \frac{5|x-1|}{|x-2|}$.

Для оценки $|x-2|$ рассмотрим проколотую δ_1- окрестность точки $x_0 = 1$ такую, что $x = 2$ не принадлежит этой окрестности и не является ее концевой точкой. Возьмем $\delta_1 = \dfrac{1}{2}$, тогда

$$|x-1| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x-1 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < x-2 < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} < |x-2| < \frac{3}{2}.$$

Получим $\left|\dfrac{x+3}{x-2}+4\right| = \dfrac{5|x-1|}{|x-2|} < \dfrac{5|x-1|}{\dfrac{1}{2}} = 10\cdot|x-1|$. Потребуем, чтобы $10|x-1| < \epsilon$, т.е. чтобы $|x-1| < \dfrac{\varepsilon}{10} = \delta_2$. Следовательно, $\delta = \min\left\{\dfrac{1}{2}; \dfrac{\varepsilon}{10}\right\}$. ►

Задание 6. Доказать, что

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\sin x}{x^2-100x+3000} = 0.$$

Решение. ◄ Надо доказать, что для $\forall\varepsilon > 0\ \exists\triangle > 0$ такое, что из неравенства $x > \triangle$ следует неравенство $\left|\dfrac{x\sin x}{x^2-100x+3000}\right| < \varepsilon$.

Возьмем $\forall\varepsilon > 0$ и оценим сверху:

$$\left|\frac{x\sin x}{x^2-100x+3000}\right| \leqslant \frac{|x|}{|x^2-100x+3000|} = \frac{|x|}{x^2-100x+3000},$$

так как $x^2 - 100x + 3000 > 0$ для $\forall x \in \mathbb{R}$.

Выделим удобную для дальнейших оценок окрестность точки $+\infty$, пусть $\triangle_1 = 200$. Для $x > \triangle_1$ имеем $x^2 - 100x + 3000 > x(x-100) >$ $> x \cdot \dfrac{x}{2} = \dfrac{x^2}{2}$, следовательно, $\left|\dfrac{x \sin x}{x^2 - 100x + 3000}\right| < \dfrac{x}{\frac{x^2}{2}} = \dfrac{2}{x}$.

Потребуем, чтобы $\dfrac{2}{x} < \varepsilon$ откуда $x > \dfrac{2}{\varepsilon} = \triangle_2$. Если взять $\triangle = \max\left\{200; \dfrac{2}{\varepsilon}\right\}$,то из неравенства $x > \triangle$ следует

$$\left|\frac{x \sin x}{x^2 - 100x + 3000}\right| < \varepsilon, \text{ т.е. } \lim_{x\to+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 - 100x + 3000} = 0.$$

►

Задание 7. Исходя из определения предела функции, доказать, что

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x+1}{3x+9} = \frac{5}{3}.$$

Решение. ◄ Возьмем $\forall \varepsilon > 0$ и оценим сверху выражение:

$$\left|\frac{5x+1}{3x+9} - \frac{5}{3}\right| = \left|\frac{-14}{3(x+3)}\right| = \frac{14}{3|x+3|} = \frac{14}{3|x-(-3)|} \leqslant \frac{14}{3(|x| - |-3|)} =$$
$$= \frac{14}{3(|x|-3)} < \frac{5}{|x|-3}.$$

Потребуем, чтобы $\dfrac{5}{|x|-3} < \varepsilon$. Тогда $\dfrac{|x|-3}{5} > \dfrac{1}{\varepsilon}$ или $|x| > \dfrac{5}{\varepsilon} + 3$.

Возьмем в качестве $\triangle = \frac{5}{\varepsilon} + 3$. При таком выборе $\triangle$ получаем, что для $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \triangle = \frac{5}{\varepsilon} + 3 > 0$ такое, что из неравенства $|x| > \triangle$ следует неравенство $\frac{5}{|x| - 3} < \varepsilon$. А, значит, $\left|\frac{5x+1}{3x+9} - \frac{5}{3}\right| < \varepsilon$. ►

Задание 8. Доказать, что $\lim\limits_{x\to\infty}(2 - 3x^2) = -\infty$.

Решение. ◄ Следуя определению предела функции по Коши, надо доказать, что для $\forall E > 0 \quad \exists \triangle > 0$ такое, что из неравенства $|x| > \triangle$ вытекает неравенство $f(x) < -E$, т.е. $2 - 3x^2 < -E$. Заменим последнее неравенство равносильным, домножив его на $-1 : 3x^2 - 2 > E$. Решим его относительно x :

$$3x^2 - 2 > E <=> 3x^2 > E + 2 <=> x^2 > \frac{E+2}{3} <=> |x| > \sqrt{\frac{E+2}{3}}.$$

Возьмем $\triangle = \sqrt{\frac{E+2}{3}}$, тогда из неравенства $|x| > \triangle$ будет следовать неравенство $2 - 3x^2 < -E$ ►

Задание 9. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{sign}x$ не существует.

Решение. ◄ **I способ.** Докажем утверждение, пользуясь отрицанием определения предела функции по Коши. Покажем, что никакое действительное число A не может быть пределом функции $f(x) = \mathrm{sign}x$

при $x \to 0$, т.е. для $\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists \varepsilon > 0$ такое, что для $\forall \delta > 0$ найдется точка $x' \in \mathbb{R}$, удовлетворяющая условию $0 < |x'| < \delta$ такая, что $|f(x') - A| \geqslant \varepsilon$.

Множество значений функции $\operatorname{sign} x$ состоит из трех элементов: $-1; 0; 1$. Пусть $A \notin \{-1; 0; 1\}$. Если взять ε сколь угодно малым, то интервал $(A - \varepsilon; A + \varepsilon)$ не будет содержать точек $-1; 0; 1$.Тогда какую бы проколотую $\delta-$окрестность точки $x = 0$ мы не взяли, для всех значений x из этой окрестности соответствующие значения функции -1 и 1 не попадут в интервал $(A - \varepsilon; A + \varepsilon)$,т.е. удовлетворяют неравенству $|f(x) - A| > \varepsilon$. Значит, в качестве x' можно взять любую точку из проколотой окрестности $0 < |x| < \delta$ (рисунок 10.21).

Если $A \in \{-1; 0; 1\}$, то выберем $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$. Очевидно, что в интервал $\left(A - \dfrac{1}{2}; A + \dfrac{1}{2}\right)$ не попадают одновременно точки -1 и 1. Но в любой проколотой δ-окрестности точки $x = 0$ есть значения x, при которых $f(x) = 1$ и $f(x) = -1$.

Поэтому всегда найдется x' в этой окрестности, что $f(x') \notin \left(A - \dfrac{1}{2}; A + \dfrac{1}{2}\right)$, следовательно, $|f(x') - A| > \dfrac{1}{2}$ (рисунок 10.22).

Таким образом, мы показали, что ни одно действительное число A не может быть пределом функции $\operatorname{sign} x$ при $x \to 0$. Аналогично доказывается, что $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sign} x \neq -\infty; +\infty; \infty$.

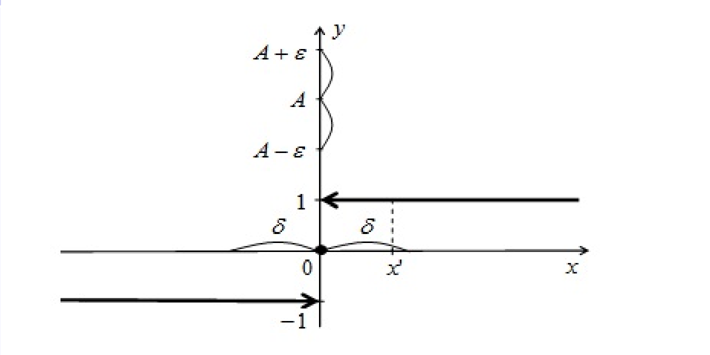

Рис. 10.21:

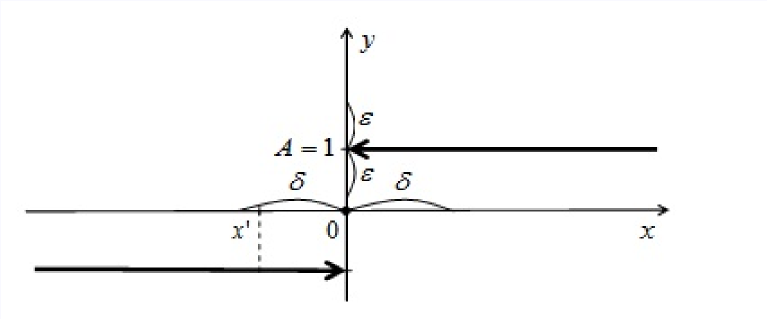

Рис. 10.22:

II способ. Доказательство проведем с использованием отрицания предела функции по Гейне. Для этого достаточно указать две последовательности значений аргумента, сходящиеся к точке $x = 0$ такие, что соответствующие последовательности значений функции $f(x) = \operatorname{sign} x$ сходились бы к различным числам.

Рассмотрим последовательность с общим членом $x'_n = \frac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Соответствующая последовательность значений функции $(f(x'_n))_{n=1}^{\infty} : 1; 1; 1; \ldots; 1, \ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) = 1$. В качестве второй последовательности возьмем последовательность с общим членом $x''_n = -\frac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x''_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = 0$. Соответствующая последовательность значений функции $(f(x''_n))_{n=1}^{\infty} : -1; -1; -1; \ldots; -1, \ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(x''_n) = -1$. Значит, функция $\operatorname{sign} x$ не имеет предела при $x \to 0$. ▶

Задание 10. Доказать, что функция Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное число;} \\ 1, & \text{если } x \text{ — рациональное число,} \end{cases}$$

не имеет предела ни в одной точке.

Решение. ◀ Возьмем $\forall a \in \mathbb{R}$ и докажем, что в этой точке функция $D(x)$ не удовлетворяет определению предела функции по Гейне. Для этого укажем две последовательности $(x'_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(x''_n)_{n=1}^{\infty}$, сходящиеся к a и такие, что $\lim\limits_{n\to\infty} D(x'_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} D(x''_n)$. Сначала рассмотрим последовательность $(x'_n)_{n=1}^{\infty}$ рациональных точек, сходящуюся к a. Для нее $D(x'_n) = 1$ для $\forall n \in \mathbb{N}$ и поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} D(x'_n) = 1$. Далее рассмотрим последовательность $(x''_n)_{n=1}^{\infty}$ иррациональных точек, сходящуюся к a. Для нее $D((x''_n)_{n=1}^{\infty}) = 0$ для $\forall n \in \mathbb{N}$ и поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} D(x''_n) = 0$. Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} D(x'_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} D(x''_n)$. Следовательно, предел функции $D(x)$ в точке a не существует. ▶

Задания для самостоятельного решения (выполнения)

1. Доказать, используя определение предела функции, что:

а) $\lim\limits_{x\to2}(3x+5)=11;$ б) $\lim\limits_{x\to2}(5x^2-4)=16;$

в) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x+2}{2x-3}=4;$ г) $\lim\limits_{x\to3}(x^2+3x-1)=17;$

д) $\lim\limits_{x\to-2}(x^3-1)=-9;$ е) $\lim\limits_{x\to-2}(-2+x+x^2)=0;$

ж) $\lim\limits_{x\to5}\sqrt{x}=\sqrt{5};$ з) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x+4}{x+2}=-1;$

и) $\lim\limits_{x\to-4}(x^2-3x-8)=20;$ к) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x+7}{x-3}=11;$

л) $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{x+4}=2;$ м) $\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}=0.$

2. Доказать, что:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-3}{x+4}=2;$ б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2}{4-x^2}=-1;$

в) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2-x}{3x+4}=-\dfrac{1}{3};$ г) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{4x}{x-2}=\infty;$

д) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-2x^2}{3x+2}=-\infty;$ е) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+2}{1-3x}=+\infty;$

ж) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x}{(x-2)^2} = +\infty;$ з) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-4x}{(1-x)^2} = -\infty.$

3. Доказать, что следующие пределы не существуют:

а) $\lim\limits_{x\to +\infty} \cos x;$ б) $\lim\limits_{x\to -\infty} \sin x;$ в) $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{tg}\dfrac{1}{x};$ г) $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{ctg}\dfrac{1}{x};$

д) $\lim\limits_{x\to 0} 3^{\frac{1}{x}};$ е) $\lim\limits_{x\to 0} (\dfrac{1}{2})^{\frac{1}{x}};$ ж) $\lim\limits_{x\to \infty} e^{x};$ з) $\lim\limits_{x\to \infty} (\dfrac{1}{5})^{x}.$

4. Существует ли $\lim\limits_{x\to 0}\{x\}$, где $\{x\} = x - [x]$– дробная часть числа x?

5. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \text{ — иррациональное число;} \\ 1, & \text{если } x \text{ — рациональное число.} \end{cases}$$

Доказать, что $f(x)$ имеет предел в точках $x = 1$ и $x = -1$ и не имеет предела в остальных точках.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ 11, 12

Вычисление пределов функций

Задание 1. Найти значения выражений:

$$\text{а)}\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1};\quad \text{б)}\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1};\quad \text{в)}\lim_{x\to \infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}.$$

Решение. ◀

$$\text{а)}\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=1,\text{ так как }\lim_{x\to 0}(x^2-1)=-1\text{ и }\lim_{x\to 0}(2x^2-x-1)=-1.$$

$$\text{б)}\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{2x+1}=\frac{2}{3}.$$

$$\text{в)}\lim_{x\to \infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\lim_{x\to \infty}\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to \infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}.$$ ▶

Задание 2. Пусть $R(x)=\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}$, $a_0\neq 0$, $b_0\neq 0$.

Доказать, что:

$$\lim_{x\to\infty} R(x) = \begin{cases} \infty, & \text{если } n > m, \\ \dfrac{a_0}{b_0}, & \text{если } n = m, \\ 0, & \text{если } n < m. \end{cases}$$

Решение. ◀

$$\lim_{x\to\infty} R(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^n\left(a_0 + \dfrac{a_1}{x} + \ldots + \dfrac{a_n}{x^n}\right)}{x^m\left(b_0 + \dfrac{b_1}{x} + \ldots + \dfrac{b_m}{x^m}\right)} = \lim_{x\to\infty} x^{n-m} \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{a_0 + \dfrac{a_1}{x} + \ldots + \dfrac{a_n}{x^n}}{b_0 + \dfrac{b_1}{x} + \ldots + \dfrac{b_m}{x^m}} =$$

$$= \frac{a_0}{b_0} \lim_{x\to\infty} x^{n-m}.$$

Если $n > m$,то $\lim\limits_{x\to\infty} x^{n-m} = \infty$ и $\lim\limits_{x\to\infty} R(x) = \infty$. Если $n = m$, то $\lim\limits_{x\to\infty} x^{n-m} = 1$ и $\lim\limits_{x\to\infty} R(x) = \dfrac{a_0}{b_0}$. При $n < m$ $\lim\limits_{x\to\infty} x^{n-m} = 0$, поэтому $\lim\limits_{x\to\infty} R(x) = 0$. ▶

Задание 3. Вычислить пределы:

а) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5}$; б) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{(x-3)^{40}(5x+1)^{10}}{(3x^2-2)^{25}}$.

Решение. ◀ а) В числителе дроби стоит многочлен пятой степени со старшим коэффициентом 1, в знаменателе – многочлен пятой степени со старшим коэффициентом 5^5. Так как в пределе имеем неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, то воспользуемся результатом задания 2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5}=\frac{1}{5^5}.$$

б) В пределе имеем неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.В числителе дроби – многочлен 50—й степени со старшим коэффициентом 5^{10}, в знаменателе – многочлен той же степени со старшим коэффициентом 3^{25}. Поэтому (смотри задание 2):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x-3)^{40}(5x+1)^{10}}{(3x^2-2)^{25}}=\frac{5^{10}}{3^{25}}.$$ ▶

Задание 4. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\ldots+x^n-n}{x-1}$.

Решение. ◀ а) В пределе имеем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Так как 1 является корнем многочленов x^3-3x+2 и x^4-4x+3, то в разложении этих многочленов на множители обязательно присутствует множитель $(x-1)$.

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x-2)}{(x-1)(x^3+x^2+x-3)}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x^3+x^2+x-3}=$$

$$=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+2x+3)}=\lim_{x\to1}\frac{x+2}{x^2+2x+3}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+x^2+\ldots+x^n-n}{x-1}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)+(x^2-1)+(x^3-1)+\ldots+(x^n-1)}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)+(x-1)(x+1)+\ldots+(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+1)}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(1+(x+1)+(x^2+x+1)+\ldots+(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+1))}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to1}(1+(x+1)+(x^2+x+1)+\ldots+(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+1))=1+2+3+\ldots+n=$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}.\blacktriangleright$$

Задание 5. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$;

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x)$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^4+8x^2+3}-\sqrt{x^4+x^2})$;

г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x}$;

д) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{x+11}-2\sqrt{x-1}}{x^2-25}$;

е) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[5]{32+x}-2}{x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2-1}}{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[5]{x^4+1}}$;

з) $\lim\limits_{x\to\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$.

Решение. ◄ а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt[6]{x}}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)}{\sqrt{x}\sqrt{2+\dfrac{1}{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{\sqrt[6]{x}}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{2+\dfrac{1}{x}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x)=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+a)(x+b)-x^2}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x}=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a+b)x+ab}{x\left(\sqrt{(1+\dfrac{a}{x})(1+\dfrac{b}{x})}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a+b+\dfrac{ab}{x}}{\sqrt{(1+\dfrac{a}{x})(1+\dfrac{b}{x})}+1}=\frac{a+b}{2}.$$

в) $$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x+11}-2\sqrt{x-1}}{x^2-25}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 5}\frac{x+11-4(x-1)}{(x^2-25)(\sqrt{x+11}+2\sqrt{x-1})}=$$
$$=\lim_{x\to 5}\frac{15-3x}{(x^2-25)(\sqrt{x+11}+2\sqrt{x-1})}=$$
$$=-3\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{(x-5)(x+5)(\sqrt{x+11}+2\sqrt{x-1})}=$$
$$=-3\lim_{x\to 5}\frac{1}{(x+5)(\sqrt{x+11}+2\sqrt{x-1})}=-\frac{3}{80};$$

г) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{32+x}-2}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left[\begin{array}{c}\sqrt[5]{32+x}=y\\ x=y^5-32\\ x\to 0\Leftrightarrow y\to 2\end{array}\right]=\lim_{y\to 2}\frac{y-2}{y^5-32}=$$
$$=\lim_{y\to 2}\frac{y-2}{(y-2)(y^4+2y^3+4y^2+8y+16)}=$$
$$=\lim_{y\to 2}\frac{1}{y^4+2y^3+4y^2+8y+16}=\frac{1}{80}.$$

д) $$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^4+8x^2+3}-\sqrt{x^4+x^2})=[\infty-\infty]=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+8x^2+3-x^4-x^2}{\sqrt{x^4+8x^2+3}+\sqrt{x^4+x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{7x^2+3}{x^2\left(\sqrt{1+\frac{8}{x^2}+\frac{3}{x^4}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}=$$

$$= \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{7+\frac{3}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{8}{x^2}+\frac{3}{x^4}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{7}{2} = 3,5.$$

$$\text{е)} \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x\sqrt{\frac{1}{x}}}{x\sqrt[4]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}-x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{\frac{1}{x}}}{\sqrt[4]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}-1} = -1.$$

$$\text{ж)} \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2-1}}{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[5]{x^4+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x\sqrt[3]{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}}}{|x|\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^4}}-x\sqrt[5]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^5}}} =$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}} - x\sqrt[3]{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^3}}}{x\sqrt[4]{1+\dfrac{1}{x^4}} - x\sqrt[5]{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^5}}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}} - \sqrt[3]{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^3}}}{\sqrt[4]{1+\dfrac{1}{x^4}} - \sqrt[5]{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^5}}} = 1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}} - x\sqrt[3]{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^3}}}{-x\sqrt[4]{1+\dfrac{1}{x^4}} - x\sqrt[5]{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^5}}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}} + \sqrt[3]{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^3}}}{\sqrt[4]{1+\dfrac{1}{x^4}} + \sqrt[5]{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^5}}} = 1 \end{cases} =$$

$$= 1.$$

з) $\lim\limits_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+1} - x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x(x^2+1-x^2)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}+x} =$

$$= \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+x} =$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1} = \dfrac{1}{2}, \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x\left(1-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\right)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{1-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}} = \infty. \end{cases}$$

Данный предел не существует. ▶

Задание 6. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x}-(1+x)}$;

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\dots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$;

г) $\lim\limits_{x\to\pi+0}\sqrt{1+\cos x}tg\dfrac{x}{2}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x^2+4x+2)}{\ln(x^{10}+x^3+x)}$;

е) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2^x}$.

Решение.◀

$$\text{а)}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x}-(1+x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left[\begin{array}{c}\sqrt[5]{1+5x}=y\\ x=\frac{y^5-1}{5}\\ x\to 0\Leftrightarrow y\to 1\end{array}\right]=\lim_{y\to 1}\frac{(\dfrac{y^5-1}{5})^2}{y-\dfrac{y^5+4}{5}}=$$

$$=-\frac{1}{5}\lim_{y\to 1}\frac{(y^5-1)^2}{y^5-5y+4}=-\frac{1}{5}\lim_{y\to 1}\frac{(y-1)^2(y^4+y^3+y^2+y+1)^2}{(y-1)^2(y^3+2y^2+3y+4)}=$$

$$=-\frac{1}{5}\lim_{y\to 1}\frac{(y^4+y^3+y^2+y+1)^2}{y^3+2y^2+3y+4}=-\frac{1}{5}\cdot\frac{5^2}{10}=-\frac{1}{2}.$$

б) $$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left[\begin{array}{c}\sqrt[mn]{x}=y\\ x=y^{mn}\\ x\to 1\Leftrightarrow y\to 1\end{array}\right]=\lim_{y\to 1}\frac{y^n-1}{y^m-1}=$$

$$=\lim_{y\to 1}\frac{(y-1)(y^{n-1}+y^{n-2}+\ldots+1)}{(y-1)(y^{m-1}+y^{m-2}+\ldots+1)}=$$

$$=\lim_{y\to 1}\frac{y^{n-1}+y^{n-2}+\ldots+1}{y^{m-1}+y^{m-2}+\ldots+1}=\frac{n}{m}.$$

в) $$\lim_{x\to 1}\frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\ldots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\ldots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)(1-x)\ldots(1-x)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\ldots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-\sqrt{x})\ldots(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})\ldots(1-\sqrt[n]{x})(1+\sqrt[n]{x}+\ldots+\sqrt[n]{x^{n-1}})}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})\ldots(1-\sqrt[n]{x})(1+\sqrt[n]{x}+\ldots+\sqrt[n]{x^{n-1}})}=$$

$$=\frac{1}{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}=\frac{1}{n!}.$$

г) $$\lim_{x\to\pi+0}\sqrt{1+\cos x}\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to\pi+0}\sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}}\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}=$$

$$= \left[\pi < x < \frac{3\pi}{2}\right] = \sqrt{2}\lim_{x\to\pi+0}\left(-\cos\frac{x}{2}\right)\operatorname{tg}\frac{x}{2} = -\sqrt{2}\lim_{x\to\pi+0}\sin\frac{x}{2} = -\sqrt{2}$$
.

д) $$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x^2+4x+2)}{\ln(x^{10}+x^3+x)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(x^2\left(1+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\right)}{\ln\left(x^{10}\left(1+\frac{1}{x^7}+\frac{1}{x^9}\right)\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2\ln|x| + \ln\left(1+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{10\ln|x| + \ln\left(1+\frac{1}{x^7}+\frac{1}{x^9})\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{\ln\left(1+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{\ln|x|}}{10+\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x^7}+\frac{1}{x^9}\right)}{\ln|x|}}.$$

Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(1+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{\ln|x|} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\ln|x|}\cdot\ln\left(1+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}\right) = 0$ и

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x^7}+\frac{1}{x^9}\right)}{\ln|x|} = 0$, то $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x^2+4x+2)}{\ln(x^{10}+x^3+x)} = \dfrac{2+0}{10+0} = \dfrac{1}{5}$.

е) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2^x}$ представляет собой неопределенность вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Методом математической индукции доказывается, что для $\forall n \in \mathbb{N}$ справедливо

Кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений

Начало

Содержание

◀ ▶

◀◀ ▶▶

Назад

На весь экран

Закрыть

неравенство $n < 2^n$. Используя монотонность показательной функции 2^x, получаем, что для $\forall x > 0$ $\dfrac{x}{2} < \left[\dfrac{x}{2}\right] + 1 < 2^{\left[\frac{x}{2}\right]+1} \leq 2^{\frac{x}{2}+1}$. Откуда $\dfrac{x^4}{4} < 2^{x+2}$. Домножим последнее неравенство на $\dfrac{4}{2^x x}$, учитывая, что $x > 0$ получим соотношение $0 < \dfrac{x}{2^x} < \dfrac{16}{x}$. Используя теорему о предельном переходе в двойном неравенстве, заключаем, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{2^x} = 0$. ►

Задания для самостоятельного решения (выполнения)

1. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-5x^2+5}{x^3+4x^2-x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+9x+4}{x^5+2x-7}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+x^2-2}{2x^2+3x+1}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{x^2+4}}{3x^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$; е) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{\sqrt{3x+17}-\sqrt{2x+12}}{x^2+8x+15}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$; з) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)(3x+5)(4x-6)}{3x^3+x-1}$;

и) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{x}$; к) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^5-(1-5x)}{x^2+x^5}$;

л) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$; м) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$;

н) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}$; о) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$.

2. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$; б) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$; г) $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$;

д) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$; е) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$; з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$;

и) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$; к) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x\right)$.

3. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{1-\sqrt{x}}-\dfrac{2}{1-\sqrt[3]{x}}\right)$;

б) $\lim\limits_{x\to +0}\left(\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}}}}-\sqrt{\dfrac{1}{x}-\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}}}}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2+1}\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{3}}\left((x+1)^{\frac{2}{3}}-(x-1)^{\frac{2}{3}}\right)$;

д) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x});$

е) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[n]{(x+a_1)\ldots(x+a_n)}-x).$

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ 13, 14

Принцип замены эквивалентных функций. Асимптотические формулы

Задание 1. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$.

Решение. ◀

а) $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1\cdot 1 = 1.$$

б) $$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \left[\begin{array}{c} \arcsin x = t \\ x = \sin t \\ x\to 0 \Leftrightarrow t\to 0 \end{array}\right] = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t} = \lim_{1\to 0}\frac{1}{\frac{\sin t}{t}} =$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}} = 1.$$

Вывод: $\operatorname{tg} x \sim x$ при $x\to 0$, $\arcsin x \sim x$ при $x \to 0$. ▶

Задание 2. Найти пределы, пользуясь принципом замены эквивалентных функций:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 \ln\cos\dfrac{a}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{7x}-e^{x}}{\sin 7x - \sin x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sqrt{1+x}-1}$;   г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{5+x}-\sqrt[5]{5}}{5^{3x}-1}$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\ln(2a+n)-\ln(a+n))$;   е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{2x}-3^{3x}}{\operatorname{tg}3x-\operatorname{tg}2x}$;

Решение. ◀

а) $$\lim_{x\to\infty} x^2\ln\cos\frac{a}{x}=[\infty\cdot 0]=\left[\begin{array}{c}\ln\cos\dfrac{a}{x}\sim\cos\dfrac{a}{x}-1\\ x\to\infty\end{array}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}x^2\left(\cos\frac{a}{x}-1\right)=-2\lim_{x\to\infty}x^2\cdot\sin^2\frac{a}{2x}=\left[\begin{array}{c}\sin\dfrac{a}{2x}\sim\dfrac{a}{2x}\\ x\to\infty\end{array}\right]=$$

$$=-2\lim_{x\to\infty}x^2\cdot\frac{a^2}{4x^2}=-\frac{a^2}{2}.$$

б) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{7x}-e^{x}}{\sin 7x-\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}\left(e^{6x}-1\right)}{2\sin 3x\cdot\cos 4x}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}}{\cos 4x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{6x}-1}{\sin 3x}=\left[\begin{array}{c}e^{6x}-1\sim 6x\\ \sin 3x\sim 3x\\ x\to 0\end{array}\right]=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{6x}{3x}=\frac{1}{2}\cdot 2=1.$$

в) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sqrt{1+x}-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left[\begin{array}{c}\sin 3x\sim 3x\\ (1+x)^{\frac{1}{2}}-1\sim\dfrac{1}{2}x\\ x\to 0\end{array}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\frac{1}{2}x}=6.$$

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[5]{5+x}-\sqrt[5]{5}}{5^{3x}-1}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\sqrt[5]{5}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[5]{1+\frac{x}{5}}-1}{5^{3x}-1}=$

$$=\begin{bmatrix}(1+\frac{x}{5})^{\frac{1}{5}}-1\sim\frac{x}{25}\\ 5^{3x}-1\sim3x\ln5\\ x\to0\end{bmatrix}=\sqrt[5]{5}\lim_{x\to0}\frac{\frac{x}{25}}{3x\ln5}=\frac{\sqrt[5]{5}}{75\ln5}.$$

д) $\lim\limits_{n\to\infty}n(\ln(2a+n)-\ln(a+n))=[\infty\cdot(\infty-\infty)]=\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\ln\dfrac{2a+n}{a+n}=$

$$=[\infty\cdot0]=\begin{bmatrix}\ln\frac{2a+n}{a+n}\sim\frac{2a+n}{a+n}-1\\ n\to\infty\end{bmatrix}=\lim_{n\to\infty}n\cdot\left(\frac{2a+n}{a+n}-1\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{a}{a+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{an}{a+n}=a.$$

е) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3^{2x}-3^{3x}}{\operatorname{tg}3x-\operatorname{tg}2x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3^{2x}(1-3^{x})}{\dfrac{\sin x}{\cos3x\cdot\cos2x}}=$

$$=\lim_{x\to0}3^{2x}\cdot\cos3x\cdot\cos2x\cdot\lim_{x\to0}\frac{1-3^{x}}{\sin x}=-\lim_{x\to0}\frac{3^{x}-1}{\sin x}=\begin{bmatrix}3^{x}-1\sim x\ln3\\ \sin x\sim x\\ x\to0\end{bmatrix}=$$

$$=-\lim_{x\to0}\frac{x\ln3}{x}=-\ln3.\blacktriangleright$$

Задание 3. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2+x)^\pi - 2^\pi}{\operatorname{tg} 3x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+\dfrac{x}{3}}-\sqrt[4]{1+\dfrac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\dfrac{x}{2}}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{\ln(\sqrt{2}+x)-\dfrac{1}{2}\ln 2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$;

д) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^{x+h}+a^{x-h}-2a^x}{h^2}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$.

Решение. ◀

а) $$\lim_{x\to 0}\frac{(2+x)^\pi - 2^\pi}{\operatorname{tg} 3x} = \left[\frac{0}{0}\right] = 2^\pi \lim_{x\to 0}\frac{\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^\pi - 1}{\operatorname{tg} 3x} =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \left(1+\dfrac{x}{2}\right)^\pi - 1 \sim \dfrac{\pi x}{2} \\ \operatorname{tg} 3x \sim 3x \\ x \to 0 \end{array}\right] = 2^\pi \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\pi x}{2}}{3x} = 2^\pi \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi 2^{\pi-1}}{3}.$$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+\dfrac{x}{3}}-\sqrt[4]{1+\dfrac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\dfrac{x}{2}}}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+\dfrac{x}{3}}-1-\sqrt[4]{1+\dfrac{x}{4}}+1}{\sqrt{1-\dfrac{x}{2}}-1}=$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+\dfrac{x}{3}}-1}{\sqrt{1-\dfrac{x}{2}}-1}+\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{1+\dfrac{x}{4}}-1}{\sqrt{1-\dfrac{x}{2}}-1}=\left[\begin{array}{c}\left(1+\dfrac{x}{3}\right)^{\frac{1}{3}}-1\sim\dfrac{x}{9}\\ \left(1+\dfrac{x}{4}\right)^{\frac{1}{4}}-1\sim\dfrac{x}{16}\\ \left(1+\left(-\dfrac{x}{2}\right)\right)^{\frac{1}{2}}-1\sim-\dfrac{x}{4}\\ x\to 0\end{array}\right]=$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x}{9}}{-\dfrac{x}{4}}+\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x}{16}}{-\dfrac{x}{4}}=\frac{4}{9}-\frac{1}{4}=\frac{7}{36}.$$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{\ln(\sqrt{2}+x)-\dfrac{1}{2}\ln 2}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{\cos x}-1)(\sqrt{\cos x}+1)}{\ln\dfrac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{2}}\cdot(\sqrt{\cos x}+1)}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\ln\dfrac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{2}}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{\cos x}+1}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\ln\dfrac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{2}}}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{\ln\dfrac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{2}}}=$$

$$= \left[\begin{array}{c} \sin\frac{x}{2} \sim \frac{x}{2} \\ \ln\frac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{2}} \sim \frac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{2}} - 1 \\ x \to 0 \end{array}\right] = -\lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{4}}{\frac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{2}} - 1} =$$

$$= -\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}x^2}{x} = -\frac{\sqrt{2}}{4}\lim_{x\to 0} x = 0.$$

г) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x} - \sqrt{1+\sin x}}{x^3} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+\operatorname{tg} x} - \sqrt{1+\sin x}\right)\left(\sqrt{1+\operatorname{tg} x} + \sqrt{1+\sin x}\right)}{x^3\left(\sqrt{1+\operatorname{tg} x} + \sqrt{1+\sin x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1+\operatorname{tg} x - 1 - \sin x}{x^3\left(\sqrt{1+\operatorname{tg} x} + \sqrt{1+\sin x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg} x} + \sqrt{1+\sin x}} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^3} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \sin x\cdot\cos x}{x^3\cos x} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot\sin^2\frac{x}{2}}{x^3} = \left[\begin{array}{c} \sin x \sim x \\ \sin\frac{x}{2} \sim \frac{x}{2} \\ x \to 0 \end{array}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot \dfrac{x^2}{4}}{x^3} = \frac{1}{4}.$$

д) $$\lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} + a^{x-h} - 2a^x}{h^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h + a^{-h} - 2}{h^2} =$$

$$= a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h + \dfrac{1}{a^h} - 2}{h^2} = a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^{2h} - 2a^h + 1}{a^h h^2} = a^x \lim_{h\to 0} \frac{(a^h - 1)^2}{h^2} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{1}{a^h} =$$

$$= a^x \lim_{h\to 0} \frac{(a^h - 1)^2}{h^2} = \left[\begin{matrix} a^h - 1 \sim h \ln a \\ h \to 0 \end{matrix}\right] = a^x \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \ln^2 a}{h^2} = a^x \ln^2 a.$$

е) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x^2}}{1 - \cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \frac{\sqrt{2}}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\sin^2 \dfrac{x^2}{2}}}{\sin^2 \dfrac{x}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\left|\sin \dfrac{x^2}{2}\right|}{\sin^2 \dfrac{x}{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\sin \dfrac{x^2}{2}}{\sin^2 \dfrac{x}{2}} = \left[\begin{matrix} \sin \dfrac{x^2}{2} \sim \dfrac{x^2}{2} \\ \sin \dfrac{x}{2} \sim \dfrac{x}{2} \\ x \to 0 \end{matrix}\right] = \frac{\sqrt{2}}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{x^2}{2}}{\dfrac{x^2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 = \sqrt{2}. \blacktriangleright$$

Задание 4. Найти пределы:

а) $\displaystyle\lim_{\alpha\to\pi} \frac{\sin \alpha}{1 - \dfrac{\alpha^2}{\pi^2}}$; б) $\displaystyle\lim_{x\to 7} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9} - 2}$;

в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$; г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}$;

д) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{3})}{1 - 2\cos x}$; е) $\lim\limits_{x\to a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a}$;

ж) $\lim\limits_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$; з) $\lim\limits_{x\to a} \frac{a^x - x^a}{x - a}$.

Решение. ◀

а) $$\lim_{a\to\pi} \frac{\sin\alpha}{1 - \frac{\alpha^2}{\pi^2}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \pi^2 \lim_{a\to\pi} \frac{\sin\alpha}{(\pi - \alpha)(\pi + \alpha)} = \left[\begin{array}{c} \pi - \alpha = y \\ \alpha = \pi - y \\ \alpha \to \pi \Leftrightarrow y \to 0 \end{array}\right] =$$

$$= \pi^2 \lim_{y\to 0} \frac{\sin(\pi - y)}{y(2\pi - y)} = \pi^2 \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} \cdot \lim_{y\to 0} \frac{1}{2\pi - y} = \pi^2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

б) $$\lim_{x\to 7} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9} - 2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \left[\begin{array}{c} x - 7 = y \\ x = y + 7 \\ x \to 7 \Leftrightarrow y \to 0 \end{array}\right] =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\sqrt{y+9} - \sqrt[3]{y+27}}{\sqrt[4]{y+16} - 2} = \lim_{y\to 0} \frac{3\sqrt{\frac{y}{9} + 1} - 3\sqrt[3]{\frac{y}{27} + 1}}{2\sqrt[4]{\frac{y}{16} + 1} - 2} =$$

$$= \frac{3}{2}\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{\frac{y}{9}+1}-\sqrt[3]{\frac{y}{27}+1}-1+1}{\sqrt[4]{\frac{y}{16}+1}-1} =$$

$$= \frac{3}{2}\left(\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{\frac{y}{9}+1}-1}{\sqrt[4]{\frac{y}{16}+1}-1}-\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt[3]{\frac{y}{27}+1}-1}{\sqrt[4]{\frac{y}{16}+1}-1}\right) =$$

$$= \left[\begin{array}{c}\left(\frac{y}{9}+1\right)^{\frac{1}{2}}-1\sim\frac{y}{18}\\ \left(\frac{y}{27}+1\right)^{\frac{1}{3}}-1\sim\frac{y}{81}\\ \left(\frac{y}{16}+1\right)^{\frac{1}{4}}-1\sim\frac{y}{64}\\ y\to 0\end{array}\right] = \frac{3}{2}\left(\lim_{y\to 0}\frac{\frac{y}{18}}{\frac{y}{64}}-\lim_{y\to 0}\frac{\frac{y}{81}}{\frac{y}{64}}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{64}{18}-\frac{64}{81}\right) =$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{32}{9}-\frac{64}{81}\right) = \frac{16}{3}-\frac{32}{27} = \frac{112}{27}.$$

в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = [\infty \cdot 0] = \left[\begin{array}{c} \frac{\pi}{4} - x = y \\ x = \frac{\pi}{4} - y \\ x \to \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow y \to 0 \end{array}\right] =$

$= \lim\limits_{y\to 0} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 2y\right) \cdot \operatorname{tg} y = \lim\limits_{y\to 0} \operatorname{ctg} 2y \cdot \operatorname{tg} y = \lim\limits_{y\to 0} \frac{\operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} 2y} = \left[\begin{array}{c} \operatorname{tg} y \sim y \\ \operatorname{tg} 2y \sim 2y \\ y \to 0 \end{array}\right] =$

$= \lim\limits_{y\to 0} \frac{y}{2y} = \frac{1}{2}.$

г) $\lim\limits_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \left[\frac{0}{0}\right] = \left[\begin{array}{c} x - a = y \\ x = y - a \\ x \to a \Leftrightarrow y \to 0 \end{array}\right] =$

$= \lim\limits_{y\to 0} \frac{\sin(y + a) - \sin a}{y} = 2 \lim\limits_{y\to 0} \frac{\sin \frac{y}{2} \cos\left(\frac{y}{2} + a\right)}{y} =$

$= 2 \lim\limits_{y\to 0} \frac{\sin \frac{y}{2}}{y} \cdot \lim\limits_{y\to 0} \cos\left(\frac{y}{2} + a\right) = \left[\begin{array}{c} \sin \frac{y}{2} \sim \frac{y}{2} \\ y \to 0 \end{array}\right] = 2 \cos a \cdot \lim\limits_{y\to 0} \frac{\frac{y}{2}}{y} =$

$= 2 \cos a \cdot \frac{1}{2} = \cos a.$

д) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{2(\sin x+1)\left(\sin x-\dfrac{1}{2}\right)}{2(\sin x-1)\left(\sin x-\dfrac{1}{2}\right)} =$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x+1}{\sin x-1} = \frac{3}{2} : \left(-\frac{1}{2}\right) = -3.$$

е) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \begin{bmatrix} x-\dfrac{\pi}{3}=y \\ x=y+\dfrac{\pi}{3} \\ x\to\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow y\to 0 \end{bmatrix} =$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{1-2\cos\left(y+\dfrac{\pi}{3}\right)} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{1-2\left(\dfrac{1}{2}\cos y-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin y\right)} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{1-\cos y+\sqrt{3}\sin y} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{2\sin^2\dfrac{y}{2}+2\sqrt{3}\sin\dfrac{y}{2}\cdot\cos\dfrac{y}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{\sin\dfrac{y}{2}} \cdot \lim_{y\to 0}\frac{1}{\sin\dfrac{y}{2}+\sqrt{3}\cos\dfrac{y}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{\sin\dfrac{y}{2}} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sin y \sim y \\ \sin\dfrac{y}{2} \sim \dfrac{y}{2} \\ y\to 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\lim_{y\to 0}\frac{y}{\dfrac{y}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

ж) $$\lim_{x\to a}\frac{\ln x-\ln a}{x-a}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x-a=y\\x=y+a\\x\to a\Leftrightarrow y\to 0\end{bmatrix}=\lim_{y\to 0}\frac{\ln(y+a)-\ln a}{y}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{\ln\dfrac{y+a}{a}}{y}=\begin{bmatrix}\ln\dfrac{y+a}{a}\sim\dfrac{y+a}{a}-1\\y\to 0\end{bmatrix}=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{y+a}{a}-1}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{ay}=\frac{1}{a}.$$

з) $$\lim_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x-a=y\\x=y+a\\x\to a\Leftrightarrow y\to 0\end{bmatrix}=\lim_{y\to 0}\frac{a^{y+a}-(y+a)^a}{y}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{a^y\cdot a^a-a^a\left(\dfrac{y}{a}+1\right)^a}{y}=a^a\lim_{y\to 0}\frac{a^y-\left(\dfrac{y}{a}+1\right)^a}{y}=$$

$$=a^a\left(\lim_{y\to 0}\frac{a^y-1}{y}-\lim_{y\to 0}\frac{\left(\dfrac{y}{a}+1\right)^a-1}{y}\right)=\begin{bmatrix}a^y-1\sim y\ln a\\\left(\dfrac{y}{a}+1\right)^a-1\sim y\\y\to 0\end{bmatrix}=$$

$$=a^a\left(\lim_{y\to 0}\frac{y\ln a}{y}-\lim_{y\to 0}\frac{y}{y}\right)=a^a(\ln a-1).\blacktriangleright$$

Задание 5. Вычислить пределы, используя асимптотические равенства для элементарных функций:

а) $$\lim_{x\to 0}\frac{1+\operatorname{tg}5x-\cos x}{\sqrt{1-x^2}-\sqrt[5]{1+x}};$$ б) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x+x)-\sin 3x}{\operatorname{arctg}4x};$$

в) $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$; г) $\lim\limits_{x\to +0} \dfrac{\ln\left(e^{x^2}+2\sqrt{x}\right)}{\operatorname{tg}\sqrt{x}}$.

Решение. ◀ Запишем асимптотические равенства при $x \to 0$ для элементарных функций:

$$\sin x = x + o(x), \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$
$$\operatorname{tg} x = x + o(x), \qquad \arcsin x = x + o(x),$$
$$\operatorname{arctg} x = x + o(x), \qquad e^x = 1 + x + o(x),$$
$$\ln(1+x) = x + o(x), \qquad (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x).$$

а) $$\lim_{x\to 0} \frac{1+\operatorname{tg} 5x - \cos x}{\sqrt{1-x^2}-\sqrt[5]{1+x}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{1+5x+o(x)-1+\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)}{1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)-1-\dfrac{x}{5}+o(x)} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{5x+o(x)}{-\dfrac{x}{5}+o(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{5+o(1)}{-\dfrac{1}{5}+o(1)} = -25.$$

б) $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(e^x+x)-\sin 3x}{\operatorname{arctg} 4x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x+o(x)+x)-3x+o(x)}{4x+o(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x+o(x))-3x+o(x)}{4x+o(x)} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x+o(x)-3x+o(x)}{4x+o(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-x+o(x)}{4x+o(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-1+o(1)}{4+o(1)} = -\frac{1}{4}.$$

в) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}=\left[\begin{array}{c} x-7=y\\ x=y+7\\ x\to 7\Leftrightarrow y\to 0\end{array}\right]=$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{y+9}-\sqrt[3]{y+27}}{\sqrt[4]{y+16}-2}=\lim_{y\to 0}\frac{3\sqrt{1+\dfrac{y}{9}}-3\sqrt[3]{1+\dfrac{y}{27}}}{2\sqrt[4]{1+\dfrac{y}{16}}-2}=$$

$$=\frac{3}{2}\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{1+\dfrac{y}{9}}-\sqrt[3]{1+\dfrac{y}{27}}}{\sqrt[4]{1+\dfrac{y}{16}}-1}=\frac{3}{2}\lim_{y\to 0}\frac{1+\dfrac{y}{18}+o(y)-1-\dfrac{y}{81}+o(y)}{1+\dfrac{y}{64}+o(y)-1}=$$

$$=\frac{3}{2}\lim_{y\to 0}\frac{\dfrac{y}{18}-\dfrac{y}{81}+o(y)}{\dfrac{y}{64}+o(y)}=\frac{3}{2}\lim_{y\to 0}\frac{\dfrac{1}{18}-\dfrac{1}{81}+o(1)}{\dfrac{1}{64}+o(1)}=$$

$$=\frac{3}{2}\cdot 64\left(\frac{1}{18}-\frac{1}{81}\right)=3\cdot 32\left(\frac{1}{18}-\frac{1}{81}\right)=32\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{27}\right)=\frac{112}{27}.$$

г) $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln\left(e^{x^2}+2\sqrt{x}\right)}{\operatorname{tg}\sqrt{x}}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=$

$$= \begin{bmatrix} \ln\left(e^{x^2} + 2\sqrt{x}\right) \sim e^{x^2} + 2\sqrt{x} - 1 \\ \operatorname{tg}\sqrt{x} \sim \sqrt{x} \\ x \to +0 \end{bmatrix} = \lim_{x\to+0} \frac{e^{x^2} + 2\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x\to+0} \frac{e^{x^2} - 1}{\sqrt{x}} + 2 = \lim_{x\to+0} \frac{1 + x^2 + o(x^2) - 1}{\sqrt{x}} + 2 =$$

$$= \lim_{x\to+0} \frac{x^2(1 + o(1))}{\sqrt{x}} + 2 = \lim_{x\to+0} x\sqrt{x} + 2 = 2. \blacktriangleright$$

Задания для самостоятельного решения (выполнения)

1. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x^2)}{x^3-5x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\operatorname{arctg} 2x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\operatorname{tg} 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{3x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{\sqrt{1-3x^2}-1}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{1+x}-1}{\sqrt[5]{1+2x}-1}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 8x}{\ln(1+3x)}$; з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{3x^2}$;

и) $\lim\limits_{x\to\infty} x\ln\dfrac{3x-1}{3x-6}$; к) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{tg} 3x}{\cos x-\cos^3 x}$.

2. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin 2x}{\sin 5x-\sin 4x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 2x}{\ln\cos 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+ax\right)}{\sin bx}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(xe^x) - \cos(xe^{-x})}{x^3}$; е) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 \sin\left(\ln\sqrt{\cos\dfrac{\pi}{n}}\right)$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2} - e^{3x}}{\sin\dfrac{x^2}{2} - \sin x}$; з) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sqrt{1 + x\sin x} - \sqrt{\cos x}}$;

и) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos\sqrt{x}}$; к) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(2 + e^{3x})}{\ln(3 + e^{2x})}$.

3. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 1}(1 - x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$; б) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\cos x - \cos a}{x - a}$;

в) $\lim\limits_{x\to b} \dfrac{a^x - a^b}{x - b}$; г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{\operatorname{tg}^3 x - 3\operatorname{tg} x}{\cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)}$;

д) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin^2(\pi\cdot 2^x)}{\ln\cos(\pi\cdot 2^x)}$; е) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^x - a^a}{x - a}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 1}(1 - x)\log_x 2$; з) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x - \cos x}{1 - \operatorname{tg} x}$.

4. Вычислить пределы, используя асимптотические равенства:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\sqrt[3]{1+x} - 4\sqrt[4]{1+x} + 1}{2 - 2\sqrt{1+x} + x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{\operatorname{tg} x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cos \dfrac{3\pi x^2}{2}}{\ln(2x - \sqrt[7]{x})}$;

г) $\lim\limits_{x\to 1} \operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{2} \cdot \ln(\sin \pi x + x)$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 15

Предел степенно-показательной функции

Рассмотрим вычисление предела при $x \to a$ степенно-показательной функции $u(x)^{v(x)}$,где функции $u(x)$ и $v(x)$ определены в некоторой проколотой окрестности точки a, причем $u(x) > 0$.

Возможны следующие случаи неопределенностей в пределе степенно-показательной функции:

1. Если $\lim\limits_{x\to a} u(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} v(x) = 0$, то $\lim\limits_{x\to a} u(x)^{v(x)}$ называется неопределенностью вида $\left[0^0\right]$.
2. Если $\lim\limits_{x\to a} u(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to a} v(x) = 0$, то $\lim\limits_{x\to a} u(x)^{v(x)}$ называется неопределенностью вида $\left[\infty^0\right]$.
3. Если $\lim\limits_{x\to a} u(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to a} v(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x\to a} u(x)^{v(x)}$ называется неопределенностью вида $[1^\infty]$.

Примером неопределенности вида $[1^\infty]$ является второй замечательный предел: $\lim\limits_{x\to a}(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x \longrightarrow a$.

Задание 1. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{1-2x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x+2}{3x-1}\right)^{4x-1}$.

Решение. ◀ а) Имеем неопределенность вида $[1^\infty]$. Непосредственно использовать второй замечательный предел нельзя, поэтому преобразуем функцию, стоящую под знаком предела:

$$\lim_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}=\lim_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left((1+(-2x))^{-\frac{1}{2x}}\right)^{-2}=e^{-2}=\frac{1}{e^2}.$$

б) Сведем данный предел ко второму замечательному пределу:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-1}\right)^{4x-1}=[1^{\infty}]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1+3}{3x-1}\right)^{4x-1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{3x-1}\right)^{4x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{3}{3x-1}\right)^{\frac{3x-1}{3}}\right)^{\frac{3(4x-1)}{3x-1}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3(4x-1)}{3x-1}}=e^4.$$

Так как показательная функция $y=e^t$ непрерывна на $\mathbb{R}$, то $\lim\limits_{x\to a}e^{\alpha(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)}$ (теорема о предельном переходе под знаком непрерывной функции). ►

Для раскрытия неопределенности вида $[1^{\infty}]$ применяется формула:

$$\lim_{\substack{u\to 1\\ v\to\infty}}u^v=e^{\lim\limits_{\substack{u\to 1\\ v\to\infty}}v(u-1)}.$$

Задание 2. Найти пределы:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$; b) $\lim\limits_{x\to0}\left(\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)\right)^{\operatorname{ctg}2x}$;

c) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$; d) $\lim\limits_{x\to0}\left(2e^{\frac{x}{x+1}}-1\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$.

Решение.◀

$$\text{a) } \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}=[1^\infty]=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}-1\right)}=e^3,\ \text{так как}$$

$$\lim_{x\to\infty}x^2\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}-1\right)=\lim_{x\to\infty}x^2\cdot\frac{3}{x^2-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{x^2-2}=3.$$

$$\text{b) } \lim_{x\to0}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right)^{\operatorname{ctg}2x}=[1^\infty]=\exp^{\lim\limits_{x\to0}\operatorname{ctg}2x\cdot\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-1\right)}=e,$$

$$\text{так как } \lim_{x\to0}\operatorname{ctg}2x\cdot\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-1\right)=[\infty\cdot0]=\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{\operatorname{tg}2x}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x\cdot\cos 2x}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\cdot\cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin 2x}=\begin{bmatrix}\sin x\sim x\\ \sin 2x\sim 2x\\ x\to0\end{bmatrix}=$$

$$= \sqrt{2}\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\cos 2x}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\cdot 2x} = \frac{\sqrt{2}}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{2}} = 1.$$

c) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x} = [1^\infty] = e^{\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{ctg}^2 x\cdot(\cos x-1)} = e^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{e}},$

так как $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{ctg}^2 x(\cos x-1) = [\infty\cdot 0] = -\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\operatorname{tg}^2 x} =$

$$= -2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2 x} = \left[\begin{array}{c}\sin\frac{x}{2}\sim\frac{x}{2}\\ \operatorname{tg} x\sim x\\ x\to 0\end{array}\right] = -2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{4}}{x^2} = -2\cdot\frac{1}{4} = -\frac{1}{2}.$$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2e^{\frac{x}{x+1}}-1\right)^{\dfrac{x^2+1}{x}} = [1^\infty] =$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x}\left(2e^{\frac{x}{x+1}}-2\right)} = e^2, \text{ так как}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x}\cdot\left(2e^{\frac{x}{x+1}}-2\right) = 2\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x}\cdot\left(e^{\frac{x}{x+1}}-1\right) =$$

$$= \left[\begin{array}{c}e^{\frac{x}{x+1}}-1\sim\dfrac{x}{x+1}\\ x\to 0\end{array}\right] = 2\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x}\cdot\frac{x}{x+1} = 2\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x+1} = 2\ . \blacktriangleright$$

Если u^v представить в виде $e^{\ln u^v} = e^{v\ln u}$, то каждая из неопределенностей $[1^\infty]$, $[0^0]$, $[\infty^0]$ сводится к неопределенности вида $[0\cdot\infty]$ для функции $v \ln u$. Если при этом $\lim\limits_{x \to a} v \ln u = b$, то $\lim\limits_{x \to a} u^v = e^b$.

Задание 3. Вычислить пределы:

a) $\lim\limits_{x \to +0} x^x$;

b) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{1}{n}\right)^{\operatorname{tg} \frac{1}{n}}$;

c) $\lim\limits_{x \to 1} \ln(e^x + x - 1)^{\dfrac{1}{\sqrt[3]{x} - 1}}$;

d) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{4}\right)^{\dfrac{1}{\sqrt{x+3} - 2}}$.

Решение. ◀ a) В пределе имеем неопределенность вида $[0^0]$

$$\lim_{x \to +0} x^x = e^{\lim\limits_{x \to +0} x \ln x}.$$

Необходимо найти $\lim\limits_{x \to +0} x \ln x$. Положим $x = 2^{-t}$, тогда условие $x \longrightarrow +0$ эквивалентно условию $t \to +\infty$, получим:

$$\lim_{x \to +0} x \ln x = \lim_{t \to +\infty} 2^{-t} \ln(2^{-t}) = -\lim_{t \to +\infty} \frac{t \ln 2}{2^t} = -\ln 2 \lim_{t \to +\infty} \frac{t}{2^t} = 0,$$

так как $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{t}{2^t} = 0$ (см. задание 6 e) из практических занятий 11, 12).

Следовательно, $\lim\limits_{x\to+0} x^x = e^{\lim\limits_{x\to+0} x\ln x} = e^0 = 1.$

b) Данный предел является неопределенностью вида $\left[0^0\right]$. Для его вычисления запишем $\left(\dfrac{1}{n}\right)^{\operatorname{tg}\frac{1}{n}}$ в виде $e^{\operatorname{tg}\frac{1}{n}\cdot\ln\frac{1}{n}}$ и вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{tg}\frac{1}{n}\cdot\ln\frac{1}{n} = [0\cdot\infty] = \lim_{n\to\infty}\operatorname{tg}\cdot\frac{1}{n}(\ln 1 - \ln n) = -\lim_{n\to\infty}\operatorname{tg}\frac{1}{n}\cdot\ln n =$$

$$= \left[\begin{matrix}\operatorname{tg}\dfrac{1}{n}\sim\dfrac{1}{n}\\ n\to\infty\end{matrix}\right] = -\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n} = 0,$$

так как последовательность $a_n = n$ растет быстрее, чем последовательность $b_n = \ln n$ при $n\to\infty$ (см. задание 3 м) из практических занятий 8, 9).

Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)^{\operatorname{tg}\frac{1}{n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{tg}\frac{1}{n}\cdot\ln\frac{1}{n}} = e^0 = 1.$

c) $\lim\limits_{x\to1}\ln(e^x + x - 1)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}}$ является неопределенностью вида $[1^\infty]$. Вычислим предел вида $\lim\limits_{x\to1} v(x)\cdot\ln u(x)$:

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}\cdot\ln\left(\ln\left(e^x + x - 1\right)\right) = [\infty\cdot 0] =$$

Кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений

Начало

Содержание

◀ ▶

◀◀ ▶▶

Назад

На весь экран

Закрыть

$$= \begin{bmatrix} \ln(\ln(e^x + x - 1)) \sim \ln(e^x + x - 1) - 1 \\ x \to 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\ln(e^x + x - 1) - 1}{\sqrt[3]{x} - 1} = \begin{bmatrix} x - 1 = t \\ x = t + 1 \\ x \to 1 \Leftrightarrow t \to 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\ln\left(e^{t+1} + t\right) - 1}{\sqrt[3]{t+1} - 1} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln\left(e\left(e^t + \frac{t}{e}\right)\right) - 1}{\sqrt[3]{t+1} - 1} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1 + \ln\left(e^t + \frac{t}{e}\right) - 1}{\sqrt[3]{t+1} - 1} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln\left(e^t + \frac{t}{e}\right)}{\sqrt[3]{t+1} - 1} =$$

$$= \begin{bmatrix} \ln\left(e^t + \frac{t}{e}\right) \sim e^t + \frac{t}{e} - 1 \\ t \to 0 \end{bmatrix} = \lim_{t\to 0} \frac{e^t + \frac{t}{e} - 1}{\sqrt[3]{t+1} - 1} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{\sqrt[3]{t+1} - 1} + \frac{1}{e} \lim_{t\to 0} \frac{t}{\sqrt[3]{t+1} - 1} = \begin{bmatrix} e^t - 1 \sim t \\ (1+t)^{\frac{1}{3}} - 1 \sim \frac{t}{3} \\ t \to 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t}{\frac{t}{3}} + \frac{1}{e} \lim_{t\to 0} \frac{t}{\frac{t}{3}} = 3 + \frac{3}{e} = 3\left(1 + \frac{1}{e}\right).$$

Тогда

$$\lim_{x\to 1} \ln\left(e^x + x - 1\right)^{\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}-1}} = e^{3\left(1+\dfrac{1}{e}\right)}.$$

d) В пределе имеем неопределенность вида $[1^\infty]$. Вычислим предел вида $\lim\limits_{x\to 1} v(x)\ln u(x)$:

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x+3}-2}\cdot \ln \operatorname{tg}\frac{\pi x}{4} = [\infty\cdot 0] = \begin{bmatrix} x-1=t \\ x=t+1 \\ x\to 1 \Leftrightarrow t\to 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\ln\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi(t+1)}{4}\right)}{\sqrt{t+4}-2} = \begin{bmatrix} \ln\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi(t+1)}{4}\right) \sim \operatorname{tg}\dfrac{\pi(t+1)}{4} - 1 \\ t\to 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{tg}\dfrac{\pi(t+1)}{4} - 1}{2\left(\sqrt{1+\dfrac{t}{4}} - 1\right)} = \begin{bmatrix} \left(1+\dfrac{t}{4}\right)^{\dfrac{1}{2}} - 1 \sim \dfrac{t}{8} \\ t\to 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{tg}\dfrac{\pi(t+1)}{4} - \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}}{\dfrac{t}{8}} = 4\lim_{t\to 0} \frac{\sin\dfrac{\pi t}{4}}{t\cdot\cos\left(\dfrac{\pi t}{4}+\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\dfrac{\pi}{4}} =$$

$$= 4 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \lim_{t\to 0} \frac{\sin \dfrac{\pi t}{4}}{t \cdot \cos\left(\dfrac{\pi t}{4} + \dfrac{\pi}{4}\right)} =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \sin \dfrac{\pi t}{4} \sim \dfrac{\pi t}{4} \\ t \to 0 \end{array}\right] = \frac{8}{\sqrt{2}} \lim_{t\to 0} \frac{\dfrac{\pi t}{4}}{t \cdot \cos\left(\dfrac{\pi t}{4} + \dfrac{\pi}{4}\right)} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \lim_{t\to 0} \frac{1}{\cos\left(\dfrac{\pi t}{4} + \dfrac{\pi}{4}\right)} =$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = 2\pi.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 1} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4}\right)^{\dfrac{1}{\sqrt{x+3}-2}} = e^{\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x+3}-2} \cdot \ln \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4}} = e^{2\pi}. \blacktriangleright$$

Кафедра

математического анализа и дифференциальных уравнений

Задания для самостоятельного решения (выполнения)

1. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^{-3x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x}{1+4x}\right)^{-4x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+5}{3x+1}\right)^{-5x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+7}{x}\right)^{2x+1}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x}\right)^{-5x}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2-2}{2x^2}\right)^{2x^2}$.

2. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-2x+1}{3x^2+4x-5}\right)^{2x+2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2+n}\right)^{\dfrac{3n^3+2}{2n}}$.

3. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a-1+\sqrt[n]{b}}{a}\right)^{n}$ $(a>0, b>0)$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos^n\dfrac{x}{\sqrt{n}}$;

д) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\left(2\pi\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{\alpha}\right)\right)^{x^2}$;

з) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{\alpha}+\sin\dfrac{1}{n}\right)^{n}$.

4. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{\sin x}+b^{\sin x}}{2}\right)^{\dfrac{1}{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to\beta}\left(\dfrac{\sin\alpha x}{\sin\alpha\beta}\right)^{\dfrac{1}{x-\beta}}$;

в) $\lim\limits_{x\to\alpha}\left(2-\dfrac{x}{\alpha}\right)^{\operatorname{ctg}\dfrac{\pi x}{\alpha}}$ $(\alpha\neq 0)$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(2^x+\sin x)^{\operatorname{ctg}x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}^2 x)^{\dfrac{1}{\ln\cos x}}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\ln(x^2+e^{x+1})\right)^{\operatorname{ctg}x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x\cdot 2^x+1}{x\cdot 3^x}\right)^{\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}}$; з) $\lim\limits_{x\to 1}(\cos 2\pi x)^{\dfrac{1}{\ln(x^2-2x+2)}}$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 16

Непрерывность функции в точке

Задание 1. Используя определение непрерывности функции в точке по Коши (на языке $\ll \varepsilon - \delta \gg$), доказать непрерывность функции $f(x)$ в точке x_0, если:
а) $f(x) = 5x - 2, x_0 = 1$;
б) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x}, x_0 = 2.$

Решение. ◀а) Очевидно, что $D(f) = \mathbb{R}$ и $x_0 = 1 \in D(f)$. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и покажем, что найдется число $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in D(f)$, удовлетворяющих условию $|x - 1| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Имеем: $|f(x) - f(x_0)| = |5x - 2 - 3| = |5x - 5| = 5|x - 1|$. Потребуем, чтобы $5|x-1| < \varepsilon$. Тогда $|x-1| < \dfrac{\varepsilon}{5}$. Следовательно, можно взять $\delta = \dfrac{\varepsilon}{5}$.

Таким образом, $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \dfrac{\varepsilon}{5} |x - 1| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Согласно определению непрерывности функции в точке по Коши, функция $f(x) = 5x - 2$ непрерывна в точке $x_0 = 1$.

б) $D(f) = \mathbb{R}\backslash\{0\}, x_0 = 2 \in D(f)$. Возьмем $\forall \varepsilon > 0$ и оценим выражение $|f(x) - f(x_0)|$:

$$|f(x)-f(x_0)|=\left|\frac{2x+3}{x}-\frac{7}{2}\right|=\left|\frac{4x-6-7x}{2x}\right|=\left|\frac{6-3x}{2x}\right|=$$
$$=\left|\frac{3(2-x)}{2x}\right|=\frac{3}{2}\cdot\frac{|x-2|}{|x|}.$$

Для оценки $|x|$ выделим некоторую δ-окрестность точки $x_0=2$. Пусть $\delta_1=1$,тогда $|x-2|<1 \Leftrightarrow -1<x-2<1 \Leftrightarrow 1<x<3 \Leftrightarrow 1<|x|<3$.

Для всех x из δ_1-окрестности точки $x_0=2$ имеем $1<|x|<3$, следовательно, $\frac{3}{2}\cdot\frac{|x-2|}{|x|}<\frac{3}{2}\cdot|x-2|$. Потребуем, чтобы $\frac{3}{2}\cdot|x-2|<\varepsilon$,откуда $|x-2|<\frac{2\varepsilon}{3}$.

Так как δ-окрестность точки $x_0=2$ не должна выходить за пределы δ_1– окрестности, то выберем в качестве δ $\delta=\min\left\{1;\frac{2\varepsilon}{3}\right\}$, и из предыдущих оценок видно, что из неравенства $|x-2|<\delta$ следует неравенство $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

Таким образом, функция $f(x)=\dfrac{2x+3}{x}$ непрерывна в точке $x_0=2$ согласно определению по Коши.▶

Задание 2. Пользуясь определением непрерывности функции в точке по Коши, доказать непрерывность функций:

а) $f(x) = \sqrt{x}$; б) $f(x) = x^2$.

Решение. ◀ а) Область определения функции $f(x) = \sqrt{x}$ $D(f) = [0; +\infty)$. Возьмем $\forall x_0 \in [0; +\infty)$ и докажем непрерывность функции в точке x_0. Зададим $\forall \varepsilon > 0$ и оценим:

$$|f(x) - f(x_0)| = |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \left|\frac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}\right| = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} =$$

$$= [x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 0] \leq \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}}.$$

Потребуем, чтобы $\dfrac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}} < \varepsilon$, откуда $|x - x_0| < \varepsilon \cdot \sqrt{x_0}$. Возьмем $\delta = \varepsilon \cdot \sqrt{x_0}$, тогда из неравенства $|x - x_0| < \delta$ будет следовать неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

б) $D(f) = \mathbb{R}$, возьмем $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ и докажем непрерывность функции $f(x) = x^2$ в точке x_0 .

Выберем $\forall \varepsilon > 0$и оценим:

$$|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| = |x - x_0| \cdot |x + x_0| \leq |x - x_0| \cdot (|x| + |x_0|).$$

Для оценки $|x|$ выделим δ_1- окрестность точки x_0. Пусть $\delta_1 = 1$, тогда $|x - x_0| < 1 \Leftrightarrow -1 < x - x_0 < 1 \Leftrightarrow x_0 - 1 < x < x_0 + 1$.

Если $x_0 > 1$, то $0 < x_0 - 1 < x < x_0 + 1$ и $x_0 - 1 < |x| < x_0 + 1$. Получим $|f(x) - f(x_0)| \leq |x - x_0| \cdot (|x| + |x_0|) < |x - x_0| \cdot (x_0 + 1 + x_0) =$ $= |x - x_0| \cdot (2x_0 + 1)$.

Потребуем, чтобы $|x-x_0|\cdot(2x_0+1) < \varepsilon$, откуда $|x-x_0| < \dfrac{\varepsilon}{2x_0+1}$. В качестве δ возьмем $\delta = \min\left\{1; \dfrac{\varepsilon}{2x_0+1}\right\}$. Тогда из неравенства $|x-x_0| < \delta$ будет следовать неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Если $x_0 < -1$, то $x_0-1 < x < x_0+1 < 0$ и $-(x_0+1) < |x| < -(x_0-1)$. В этом случае $|f(x)-f(x_0)| = |x-x_0|\cdot(|x|+|x_0|) < |x-x_0|\cdot(-x_0+1-x_0) = |x - x_0| \cdot (1 - 2x_0)$.

Потребуем, чтобы $|x-x_0|\cdot(1-2x_0) < \varepsilon$. Будем иметь $|x-x_0| < \dfrac{\varepsilon}{1-2x_0}$. Возьмем в качестве δ $\delta = \left\{1; \dfrac{\varepsilon}{1-2x_0}\right\}$. При таком выборе δ неравенство $|f(x) - f(x_0)|$ является следствием неравенства $|x - x_0| < \delta$.

Если $|x_0| \le 1$, то $|x| < p$, где $p = \max\{|x_0 - 1|; |x_0 + 1|\}$. Тогда

$$|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| \cdot (|x| + |x_0|) < |x - x_0| \cdot (p + 1).$$

Потребуем, чтобы $|x - x_0| \cdot (p + 1) < \varepsilon$, откуда $|x - x_0| < \dfrac{\varepsilon}{p+1}$. Выберем $\delta = \min\left\{1; \dfrac{\varepsilon}{p+1}\right\}$. При выбранном δ из неравенства $|x - x_0| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Таким образом, для $\forall\varepsilon > 0\ \ \exists\delta > 0$ такое, что $\forall x \in \mathbb{R}$ и удовлетворяющего неравенству $|x - x_0| < \delta$ будет выполняться неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Так как x_0- произвольная точка из $\mathbb{R}$, то функция $y = x^2$ непрерывна на $\mathbb{R}$. ►

Задание 3. Доказать непрерывность функции $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ на $\mathbb{R}$, пользуясь определением непрерывности функции в точке на языке «бесконечно малых».

Решение. ◀ Возьмем $\forall x_0 \in \mathbb{R}$.Докажем непрерывность функции $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ в точке x_0. Следуя определению непрерывности функции в точке на языке «бесконечно малых», надо доказать, что
$\lim\limits_{\triangle x\to 0} \triangle f(x_0) = 0$.

Придадим точке x_0 приращение $\triangle x \neq 0$. Функция $f(x)$ получит приращение:

$$\triangle f(x_0) = f(x_0+\triangle x) - f(x_0) = \frac{x_0+\triangle x}{1+(x_0+\triangle x)^2} - \frac{x_0}{1+x_0^2} =$$

$$= \frac{(x_0+\triangle x)(1+x_0^2) - x_0(1+(x_0+\triangle x)^2)}{(1+(x_0+\triangle x)^2)(1+x_0^2)} = \frac{\triangle x - \triangle x \cdot x_0^2 - x_0(\triangle x)^2}{(1+(x_0+\triangle x)^2)(1+x_0^2)} =$$

$$= \frac{\triangle x(1 - x_0^2 - x_0 \cdot \triangle x)}{(1+(x_0+\triangle x)^2)(1+x_0^2)}.$$

Вычислим

$$\lim_{\triangle x\to 0} \triangle f(x_0) = \lim_{x\to 0} \frac{\triangle x(1 - x_0^2 - x_0 \cdot \triangle x)}{(1+(x_0+\triangle x)^2)(1+x_0^2)} = 0.$$

Следовательно, функция непрерывна в точке x_0, где x_0– произвольное число из $\mathbb{R}$. ▶

Задание 4. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} \pi, & \text{если } x \text{ - рациональное число,} \\ 4, & \text{если } x \text{ - иррациональное число.} \end{cases}$$

Решение. ◀ Возьмем $\forall x_0 \in \mathbb{Q}$, тогда $f(x_0) = \pi$. Рассмотрим последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, где для $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \quad x_n \to x_0$. Соответствующая последовательность значений функции $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ сходится к числу $4 \neq f(x_0)$. Значит, согласно определению непрерывности функции в точке по Гейне (на языке «последовательностей») функция $f(x)$ не является непрерывной в точке x_0, где x_0– произвольное рациональное число.

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, тогда $f(x_0) = 4$. Возьмем последовательность $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ такую, что для $\forall k \in \mathbb{N} \quad x_k \in Q$ и $x_k \to x_0$. Соответствующая последовательность значений функции $(f(x_k))_{k=1}^{\infty}$ сходится к числу $\pi \neq f(x_0)$. Поэтому функция не является непрерывной в точке x_0, где x_0– любое иррациональное число.

Таким образом, данная функция разрывна в каждой точке области определения.▶

Задание 5. Доопределить функцию $f(x)$ в точке x_0 так, чтобы она стала непрерывной в точке x_0 ,если:

а) $f(x)=\dfrac{\sqrt[5]{2+x}-\sqrt[5]{2-x}}{\operatorname{tg}4x}, \quad x_0=0;$

б) $f(x)=(1-x)\operatorname{ctg}\pi x, \quad x_0=1.$

Решение. ◀

а) Функция $f(x)$ определена в окрестности точки $x_0=0$,исключая саму точку $x_0=0$. Доопределим функцию $f(x)$,задав $f(x_0)$ так, чтобы функция стала непрерывной в этой точке, т.е. $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)$. Для этого вычислим

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{2+x}-\sqrt[5]{2-x}}{\operatorname{tg}4x}=\sqrt[5]{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{1+\frac{x}{2}}-\sqrt[5]{1-\frac{x}{2}}}{\operatorname{tg}4x}=$$

$$=\sqrt[5]{2}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{1+\frac{x}{2}}-1}{\operatorname{tg}4x}-\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{1-\frac{x}{2}}-1}{\operatorname{tg}4x}\right)=$$

$$=\left[\begin{array}{c}\sqrt[5]{1+\frac{x}{2}}-1\sim\frac{x}{10}\\ \sqrt[5]{1-\frac{x}{2}}-1\sim-\frac{x}{10}\\ \operatorname{tg}4x\sim 4x\\ x\to 0\end{array}\right]=\sqrt[5]{2}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{10}}{4x}+\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{10}}{4x}\right)=\frac{\sqrt[5]{2}}{20}.$$

Кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений

Начало

Содержание

◀ ▶

◀◀ ▶▶

Назад

На весь экран

Закрыть

Если $f(0)=\dfrac{\sqrt[5]{2}}{20}$, то $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\dfrac{\sqrt[5]{2}}{20}=f(x_0)$ и согласно общему определению непрерывности функции в точке, функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0=0$.

б) Найдем $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$:

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{ctg}\pi x=[0\cdot\infty]=\begin{bmatrix} 1-x=y \\ x=1-y \\ x\to 1\Leftrightarrow y\to 0\end{bmatrix}=\lim_{y\to 0} y\cdot\operatorname{ctg}(\pi-\pi y)=$$

$$=-\lim_{y\to 0} y\cdot\operatorname{ctg}\pi y=-\lim_{y\to 0}\frac{y}{\operatorname{tg}\pi y}=\begin{bmatrix}\operatorname{tg}\pi y\sim\pi y \\ y\to 0\end{bmatrix}=-\lim_{y\to 0}\frac{y}{\pi y}=-\frac{1}{\pi}.$$

Пусть $f(1)=-\dfrac{1}{\pi}$, тогда $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=-\dfrac{1}{\pi}=f(1)$ и функция $f(x)$ является непрерывной в точке $x_0=1$. ▶

Задание 6. Установить, существует ли значение a, при котором функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0=0$, если:

а)

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & \text{если } x\neq 0,\\ a, & \text{если } x=0;\end{cases}$$

б)

$$f(x)=\begin{cases} x^2+a, & \text{если } x>0,\\ 1-x^2, & \text{если } x\leq 0.\end{cases}$$

Решение. ◀ а) Так как $f(0)=a$, то функция $f(x)$ является непрерывной в точке $x_0=0$, если $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=a$. Вычислим $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Функция $g(x)=x$ является бесконечно малой при $x\to 0$, так как $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{x\to 0} x=0$. Функция $h(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ является ограниченной на $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, поскольку $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$. Произведение бесконечно малой функции при $x\to x_0$ и функции ограниченной есть бесконечно малая функция при $x\to x_0$ (свойства бесконечно малых функций). Поэтому $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\sin\dfrac{1}{x}=0$. Если $a=0$, то $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$ и функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0=0$.

б) Выясним, существует ли предел у функции $f(x)$ в точке $x_0=0$. Для этого найдем односторонние пределы функции в точке $x_0=0$:

$$\lim_{x\to -0} f(x)=\lim_{x\to -0}(1-x^2)=1;\quad \lim_{x\to +0} f(x)=\lim_{x\to +0}(x^2+a)=a.$$

Если $a=1$, то $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to +0} f(x)=\lim\limits_{x\to -0} f(x)=1$. Так как $f(0)=1$, то $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1=f(0)$ и функция $f(x)$ является непрерывной в точке $x_0=0$. ▶

Задания для самостоятельного решения (выполнения)

1. Используя определение непрерывности функции в точке по Коши, доказать непрерывность функции $f(x)$ в точке x_0, если:

а) $f(x) = 2x^2 - 1, \quad x_0 = -1;$ б) $f(x) = 3x^3 - 2, \quad x_0 = 1;$

в) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + x - 2, \quad x_0 = -1;$ г) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 2x}{x+1}, \quad x_0 = 1;$

д) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^3+x}, \quad x_0 = -1;$ е) $f(x) = \dfrac{x^2+4}{2-x}, \quad x_0 = -2.$

2. Пользуясь определением непрерывности функции в точке по Коши, доказать непрерывность функций:

а) $f(x) = ax + b;$

б) $f(x) = x^3;$

в) $f(x) = \sqrt[3]{x}.$

3. Доказать, что функция Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$$

разрывна в каждой точке области определения.

4. Пользуясь определением непрерывности функции в точке на языке «бесконечно малых», доказать непрерывность функции $f(x)$ на $\mathbb{R}$, если:

а)$f(x) = \sqrt[3]{x}$;

б) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+4}$;

в) $f(x) = \cos x$.

5. Доопределить функцию $f(x)$ в точке $x_0 = 1$ так, чтобы она стала непрерывной в этой точке, если:

а) $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$;

б) $f(x) = \dfrac{\sin(x-1)}{1-x}$;

в) $f(x) = \dfrac{1+\cos \pi x}{(1-x)^2}$.

6. Установить, существует ли значение a, при котором функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 = 0$ если:

а)

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{если } x \le 0, \\ a(x-1), & \text{если } x > 0; \end{cases}$$

б)

$$f(x) = \begin{cases} 2^x, & \text{если } x \ge 0, \\ a(x-1), & \text{если } x < 0; \end{cases}$$

в)

$$f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x}, & \text{если } x > 0, \\ ax, & \text{если } x \le 0. \end{cases}$$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 17

Классификация точек разрыва

Задание 1. Исследовать функцию f(x) на непрерывность в точке x_0:

а) f$(x)= 8^{\frac{1}{x-3}} + 1, \quad x_0 = 3;$

б)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}, & \text{при } x \neq 1, \\ 1, & \text{при } x = 1, \end{cases} \qquad x_0 = 1$$

Решение: ◀

а) Область определения функции D$(f)= (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$. Для точки $x_0 = 3$ имеем:

$$\lim_{x\to 3-0} \mathrm{f}(x) = \lim_{x\to 3-0} \left(8^{\frac{1}{x-3}} + 1\right) = 1, \lim_{x\to 3+0} \mathrm{f}(x) = \lim_{x\to 3+0} \left(8^{\frac{1}{x-3}} + 1\right) = +\infty.$$

Так как один из односторонних пределов бесконечен, то точка $x_0 = 3$ является точкой разрыва второго рода.

б) Данная функция определена на $\mathbb{R}$. В точке $x_0 = 1$ имеем:

$$\lim_{x\to 1-0} \mathrm{f}(x) = \lim_{x\to 1-0} \left(\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}\right) = 1, \ \lim_{x\to 1+0} \mathrm{f}(x) = \lim_{x\to 1+0} \left(\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}\right) = 0.$$

Точка $x_0 = 1$ является точкой разрыва первого рода со скачком, скачок

$$h = \left| \lim_{x\to 1-0} f(x) - \lim_{x\to 1+0} f(x) \right| = |1-0| = 1.$$

Так как $\lim\limits_{x\to 1-0} \mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(1)$, то функция непрерывна в точке $x_0 = 1$ слева. ▶

<u>Задание 2.</u> Исследовать функцию $\mathrm{f}(x)$ на непрерывность, установить характер точек разрыва, построить график, если:

а)

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{если x<-1}, \\ 1.5, & \text{если x=-1}, \\ \ln|x|, & \text{если -1<x<0}, \\ x, & \text{если } 0 \leq x \leq 1, \\ x^2+1, & \text{если } 1< x \leq 2, \\ 5, & \text{если x>2}; \end{cases}$$

б)

$$f(x) = \begin{cases} \log_{\frac{1}{3}} |x|, & \text{если -3} \leq \text{ x } < 0, \\ \{x\}, & \text{если } 0 \leq \text{ x } \leq 2, \\ \dfrac{2}{x}, & \text{если } 2 < \text{x} < 4, \\ 3, & \text{если } 4 \leq \text{ x } \leq 5; \end{cases}$$

в)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+4}, & \text{если -4} < \text{x } \leq 0, \\ \\ \dfrac{1}{4}, & \text{если } 0 < \text{x} < 1, \\ [x]\,, & \text{если } 1 \leq \text{x} \leq 3, \\ |x-5|, & \text{если } 3 < \text{ x } < 5, \\ 1, & \text{если } 5 \leq \text{ x } \leq 6; \end{cases}$$

г)

$$f(x)=\begin{cases}\operatorname{ctg}|x|, & \text{если } -\pi< x \le \dfrac{\pi}{2},\\ \{x\}, & \text{если } \dfrac{\pi}{2}< x \le 3,\\ \dfrac{3}{x}, & \text{если } 3<x\le 6,\\ \dfrac{1}{2}, & \text{если } 6< x \le 7.\end{cases}$$

Решение: Данная функция определена на $\mathbb{R}$. Функция непрерывна на множестве $(-\infty;-1)\bigcup(-1;0)\bigcup(0;1)\bigcup(1;2)\bigcup(2;+\infty)$. К точкам, подозрительным на разрыв, отнесем точки $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=1$, $x_4=2$, в которых меняется аналитическое выражение функции $f(x)$. Найдём односторонние пределы и значения функции в этих точках.

$x_1=-1:\ \lim\limits_{x\to-1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to-1-0}(x+1)=0,\quad \lim\limits_{x\to-1+0} f(x)=$
$=\lim\limits_{x\to-1+0}\ln|x|=0,\ f(-1)=1{,}5.$

Точка $x_1=-1$ является точкой разрыва первого рода устранимого разрыва.

$x_2=0:\ \lim\limits_{x\to-0} f(x)=\lim\limits_{x\to-0}\ln|x|=-\infty,\quad \lim\limits_{x\to+0} f(x)=\lim\limits_{x\to+0} x=0,\ f(0)=0.$

Точка $x_2=0$ является точкой разрыва второго рода. Функция непрерывна в точке $x_2=0$ справа.

$x_3=1:\ \lim\limits_{x\to1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to1-0} x=1,\quad \lim\limits_{x\to1+0} f(x)=\lim\limits_{x\to1+0}\left(x^2+1\right)=2,$

$f(1) = 1$.

Точка $x_3 = 1$ является точкой разрыва первого рода со скачком. Скачок h=1. Функция непрерывна в точке $x_3 = 1$ слева.

$x_4 = 2: \lim\limits_{x\to 2-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 2-0}\left(x^2+1\right)$=5, $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 2+0} 5 = 5$, f(2)=5.

Функция непрерывна в точке $x_4 = 2$.

График функции показан на рисунке 10.23 .

б) $D(f) = [-3; 5]$. К точкам подозрительным на разрыв отнесем точ-

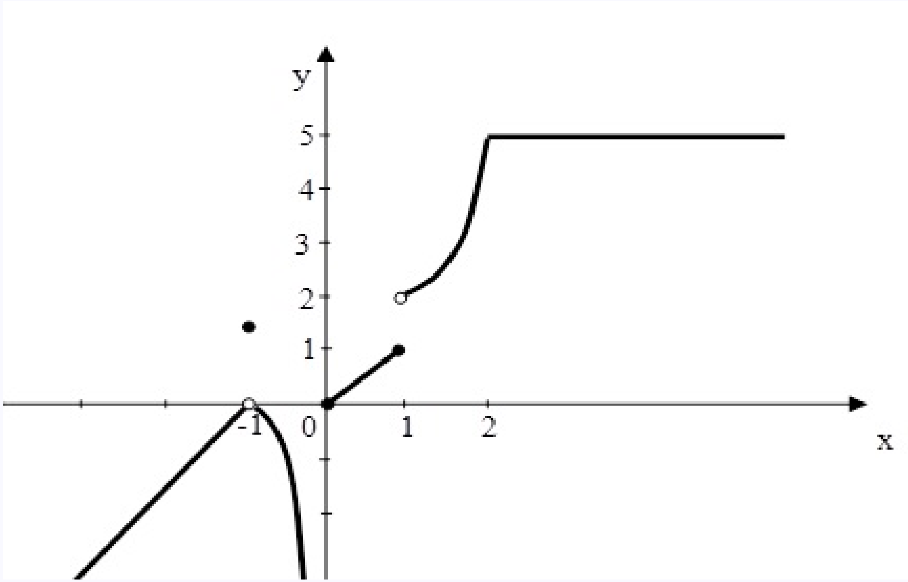

Рис. 10.23:

ки $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$ – точки стыка функции $\mathrm{f}(x)$ и точку $x_4 = 1$ – точку разрыва функции $\{x\}$.

$x_1 = 0: \lim\limits_{x\to -0} \mathrm{f}(x) = \lim\limits_{x\to -0} \log_{\frac{1}{3}} |x| = +\infty$, $\lim\limits_{x\to +0} \mathrm{f}(x) = \lim\limits_{x\to +0} \{x\} = 0$, $\mathrm{f}(x){=}0$.

Точка $x_1 = 0$ является точкой разрыва второго рода, функция непрерывна в точке $x_1 = 0$ справа.

$x_2 = 2: \lim\limits_{x\to 2-0} \mathrm{f}(x){=} \lim\limits_{x\to 2-0} \{x\} {=}1$, $\lim\limits_{x\to 2+0} \dfrac{2}{x} {=}1$, $\mathrm{f}(2){=}\{2\}{=}0$.

Точка $x_2 = 2$ является точкой разрыва первого рода устранимого разрыва.

$x_3 = 4: \lim\limits_{x\to 4-0} \mathrm{f}(x) = \lim\limits_{x\to 4-0} \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to 4+0} \mathrm{f}(x) = \lim\limits_{x\to 4+0} 3 = 3$, $\mathrm{f}(4){=}3$.

Точка $x_3 = 4$ является точкой разрыва первого рода со скачком. Скачок $h{=}2{,}5$, функция непрерывна в точке $x_3 = 4$ справа.

$x_4 = 1: \lim\limits_{x\to 1-0} \mathrm{f}(x) = \lim\limits_{x\to 1-0} \{x\}{=}1$, $\lim\limits_{x\to 1+0} \mathrm{f}(x) = \lim\limits_{x\to 1+0} \{x\} = 0$, $\mathrm{f}(1){=}\{1\}{=}0$.

Точка $x_4 = 1$ является точкой разрыва со скачком, скачок $h{=}1$, функция непрерывна в точке $x_4 = 1$ справа.

График функции показан на рисунке 10.24.

в) $\mathrm{D}(f) = (-4; 6]$. Точками, подозрительными на разрыв, являются точки $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$, $x_5 = 5$.

$x_1 = 0: \lim\limits_{x\to -0} \mathrm{f}(x) = \lim\limits_{x\to -0} \dfrac{1}{x+4} = \dfrac{1}{4}$, $\lim\limits_{x\to +0} \mathrm{f}(x) = \lim\limits_{x\to +0} \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}$, $\mathrm{f}(0) = \dfrac{1}{4}$.

Функция непрерывна в точке $x_1 = 0$.

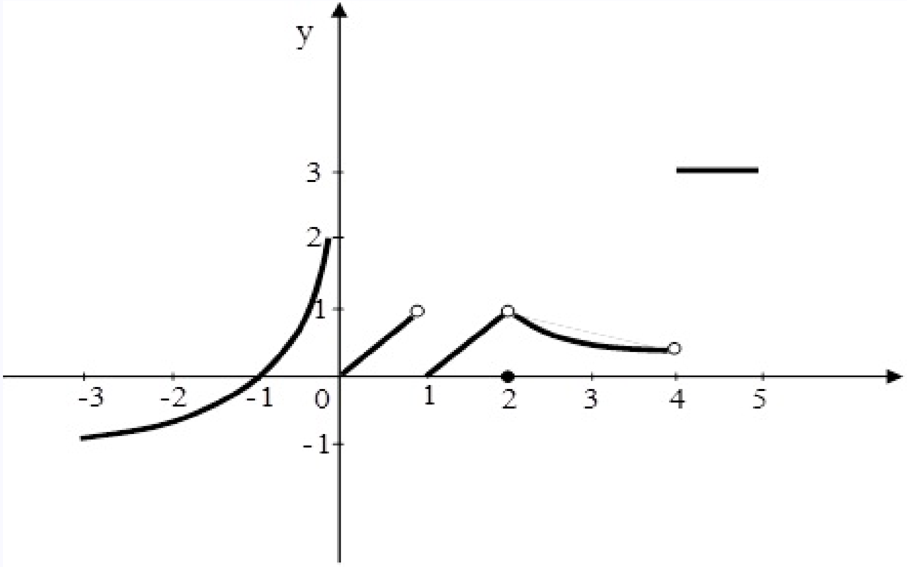

Рис. 10.24:

$x_2 = 1: \lim\limits_{x\to 1-0} \mathrm{f}(x) = \lim\limits_{x\to 1-0} \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}, \quad \lim\limits_{x\to 1+0} \mathrm{f}(x) = \lim\limits_{x\to 1+0} [x] = 1,$
$\mathrm{f}(1) = [1] = 1.$

Точка $x_2 = 1$ является точко разрыва первого рода со скачком, скачок $h = \dfrac{3}{4}$, функция непрерывна в точке $x_2 = 1$ справа.

$x_3 = 2: \lim\limits_{x\to 2-0} \mathrm{f}(x) = \lim\limits_{x\to 2-0} [x] = 1, \quad \lim\limits_{x\to 2+0} \mathrm{f}(x) = \lim\limits_{x\to 2+0} [x] = 2,$
$\mathrm{f}(2) = [2] = 2.$

Точка $x_3 = 2$ является точкой разрыва первого рода со скачком, скачок h= 1, функция непрерывна в точке $x_3 = 2$ справа.

$x_4 = 3: \lim\limits_{x\to 3-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 3-0} [x] = 2, \quad \lim\limits_{x\to 3+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 3+0} |x-5| = 2,$
$f(3) = [3] = 3.$

Точка $x_4 = 3$ является точкой разрыва первого рода устранимого разрыва.

$x_5 = 5: \lim\limits_{x\to 5-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 5-0} |x-5| = 0, \quad \lim\limits_{x\to 5+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 5+0} 1 = 1,$
$f(5) = 1.$

Точка $x_5 = 5$ является точкой разрыва первого рода со скачком, скачок h=1, функция непрерывна в точке $x_5 = 5$ справа.

График функции показан на рисунке 10.25.

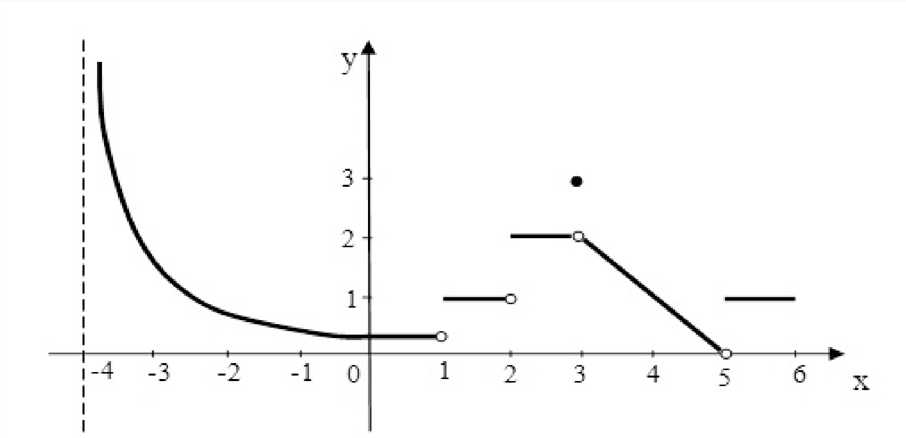

Рис. 10.25:

г) $D(f)=(-\pi;0)\bigcup(0;7]$. К точкам, подозрительным на разрыв, отнесем точки $x_1=0$, $x_2=\dfrac{\pi}{2}$, $x_3=2$, $x_4=3$, $x_5=6$.

$x_1=0:\ \lim\limits_{x\to-0} f(x)=\lim\limits_{x\to-0}\operatorname{ctg}|x|=+\infty,\quad \lim\limits_{x\to+0} f(x)=\lim\limits_{x\to+0}\operatorname{ctg}|x|=+\infty.$

Точка $x_1=0$ является точкой разрыва второго рода.

$x_2=\dfrac{\pi}{2}:\ \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\operatorname{ctg}|x|=0,\ \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\{x\}=\left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$, $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{2}=0.$

Точка $x_2=\dfrac{\pi}{2}$ является точкой разрыва первого рода со скачком, скачок $h=\left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$, функция непрерывна в точке $x_2=\dfrac{\pi}{2}$ слева.

$x_3=2:\ \lim\limits_{x\to2-0} f(x)=\lim\limits_{x\to2-0}\{x\}=1,\quad \lim\limits_{x\to2+0} f(x)=\lim\limits_{x\to2+0}\{x\}=0,$ $f(2)=\{2\}=0.$

Точка $x_3=2$ является точкой разрыва первого рода со скачком, скачок $h=1$, функция непрерывна в точке $x_3=2$ справа.

$x_4=3:\ \lim\limits_{x\to3-0} f(x)=\lim\limits_{x\to3-0}\{x\}=1,\quad \lim\limits_{x\to3+0} f(x)=\lim\limits_{x\to3+0}\dfrac{3}{x}=1,$ $f(3)=\{3\}=0.$

Точка $x_4=3$ является точкой разрыва первого рода устранимого разрыва.

$x_5=6:\ \lim\limits_{x\to6-0} f(x)=\lim\limits_{x\to6-0}\dfrac{3}{x}=\dfrac{1}{2},\quad \lim\limits_{x\to6+0} f(x)=\lim\limits_{x\to6+0}\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2},\quad f(6)=\dfrac{1}{2}.$

Функция непрерывна в точке $x_5=6$.

График функции изображен на рисунке 10.26.

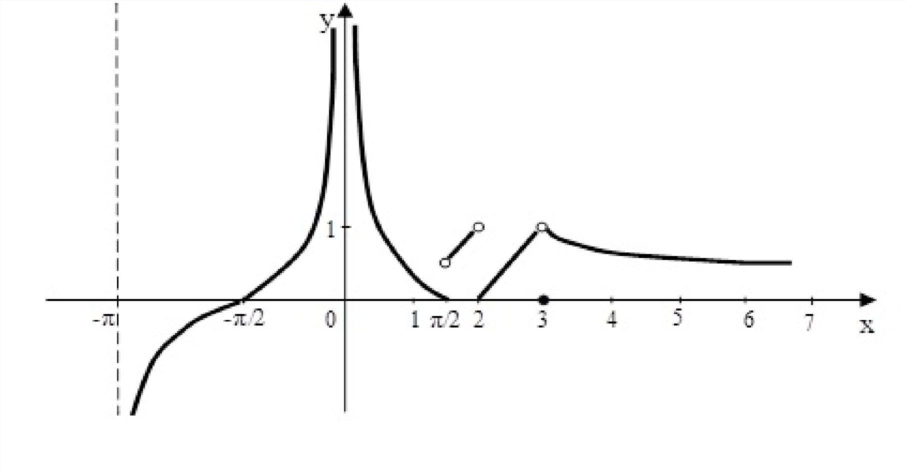

Рис. 10.26:

Задания для самостоятельного решения (выполнения)

1. Исследовать на непрерывность функцию $f(x)$ в точке $x_0 = 0$, если:

   а)
$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{если x}\neq 0, \\ 0, & \text{если x}=0; \end{cases}$$

   б)
$$f(x) = \begin{cases} x \ln x^2, & \text{если x } \neq 0, \\ a, & \text{если x } = 0. \end{cases}$$

2. Определить точки разрыва функции $f(x)$ и исследовать характер этих точек, если:

   а) $\mathrm{f}(x) = \dfrac{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x}}$;

   б) $\mathrm{f}(x) = \dfrac{x}{\sin x}$;

   в) $\mathrm{f}(x) = \operatorname{sign}\left(\sin \dfrac{\pi}{x}\right)$;

г) $f(x) = e^{x+\frac{1}{x}}$.

3. Исследовать функцию $f(x)$ на непрерывность, установить характер точек разрыва, построить график, если:

а)

$$f(x) = \begin{cases} |\operatorname{tg} x|, & \text{если } |x| < \frac{\pi}{2}, \\ [x], & \text{если } \frac{\pi}{2} \le x \le 3, \\ \frac{1}{x - 2.5}, & \text{если } 3 < x \le 5, \\ 0.4, & \text{если } 5 < x \le 6; \end{cases}$$

б)

$$f(x) = \begin{cases} [x], & \text{если } -2 \le x \le 0, \\ x^2 - 1, & \text{если } 0 < x \le 1, \\ \{x\}, & \text{если } 1 < x \le 3, \\ \ln|x - 4|, & \text{если } 3 < x < 4, \\ 6 - x, & \text{если } 4 \le x \le 6, \\ \{x\}, & \text{если } 6 < x < 7; \end{cases}$$

в)

$$f(x) = \begin{cases} (x+3)^2, & \text{если -3} \le \text{x} < \text{-1}, \\ 2, & \text{если x} = \text{-1}, \\ \{x\}, & \text{если } |x| < 1, \\ \dfrac{1}{x-1}, & \text{если } 1 < \text{x} \le 2, \\ 3x-5, & \text{если } 2 < \text{x} \le 3; \end{cases}$$

г)

$$f(x) = \begin{cases} [x], & \text{если -2} \le \text{x} \le 0, \\ (x-1)^2, & \text{если } 0 < \text{x} < 3, \\ |7-x|, & \text{если } 3 \le \text{x} \le 5, \\ \dfrac{1}{|5-x|}, & \text{если } 5 < \text{x} \le 7, \\ \{x\}+1, & \text{если } 7 < \text{x} \le 9. \end{cases}$$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 18

Глобальные свойства непрерывных функций

Задание 1. Установить, имеет ли уравнение $\operatorname{tg} x + x^2 - 0,5 = 0$ действительный корень на отрезке $\left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$.

Решение: ◀ Рассмотрим функцию $f(x) = \operatorname{tg} x + x^2 - 0,5$. Эта функция непрерывна на отрезке $\left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$ как сумма трех непрерывных на $\left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$ функций. Так как $f(0) = -0,5 < 0$, а $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi^2}{16} + 0,5 > 0$, то по теореме Больцано-Коши, найдется хотя бы одна точка $c \in \left(0; \dfrac{\pi}{4}\right)$ такая, что $f(c) = 0$. Значит, $\operatorname{tg} c + c^2 - 0,5 = 0$, т.е. c – действительный корень этого уравнения. ▶

Задание 2. Доказать, что уравнение $x^3 - 3x + 1 = 0$ имеет корень, принадлежащий отрезку $[0; 1]$. Вычислить один из корней этого уравнения с точностью до 0,1.

Решение: ◀ Функция $f(x) = x^3 - 3x + 1$ непрерывна на отрезке $[0; 1]$ и $f(0) = 1 > 0$, $f(1) = -1 < 0$. Следуя теореме Больцано-Коши, $\exists c \in (0; 1)$ в которой $f(c) = 0$, т.е. c - корень данного уравнения. Вычислим

$f(0) = 1$; $f(0,1) = 0.701$; $f(0,2) = 0.408$; $f(0,3) = 0.127$; $f(0,4) = -0.136$.

Заметим, что $f(0,3) > 0$, $f(0,4) < 0$, следовательно, на отрезке $[0,3; 0,4]$

имеется корень уравнения f(x)=0. Число 0,3 является его приближенным значением (с недостатком) с точностью до 0,1. ►

Задание 3. Доказать, что уравнение $x2^x = a$, $a>0$ имеет хотя бы один действительный корень.

Решение: ◄ Рассмотрим функцию f(x)= $x2^x - a$. Она определена и непрерывна на $\mathbb{R}$. Найдем

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{f}(x) = \lim_{x\to+\infty} (x2^x - a) = +\infty;$$

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{f}(x) = \lim_{x\to-\infty} (x2^x - a) = \lim_{x\to-\infty} x2^x - \lim_{x\to-\infty} a = -a + \lim_{x\to-\infty} x2^x =$$

$$= [\infty \cdot 0] = \left[\begin{array}{c} x = -t \\ x \to -\infty \Leftrightarrow t \to +\infty \end{array}\right] = -a + \lim_{t\to+\infty} (-t)\, 2^{-t} =$$

$$= -a - \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{2^t} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = -a.$$

Так как функция $y = 2^t$ стремится в бесконечность быстрее, чем функция $y = t$, то $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{t}{2^t} = 0$.

Итак, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{f}(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{f}(x) = -a < 0$ и функция f(x) непрерывна на $\mathbb{R}$, поэтому график функции f(x) хотя бы один раз пересечет ось Ox, т.е. $\exists c \in \mathbb{R}$ такое, что f(c)=0. Значит, исходное уравнение имеет хотя бы один корень. ►

Задание 4. Доказать, что уравнение $x^3 + 2x + 6 = 0$ имеет единственный корень.

Решение: ◀ Рассмотрим функцию $\mathrm{f}(x) = x^3 + 2x + 6$. Имеем: $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{f}(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{f}(x) = +\infty$. Функция $\mathrm{f}(x)$ определена и непрерывна на $\mathbb{R}$.

Исследуем функцию $\mathrm{f}(x)$ на монотонность. Возьмем $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$. Оценим разность $\mathrm{f}(x_2) - \mathrm{f}(x_1)$:

$$\mathrm{f}(x_2) - \mathrm{f}(x_1) = x_2^3 + 2x_2 + 6 - x_1^3 - 2x_1 - 6 = x_2^3 - x_1^3 + 2\,(x_2 - x_1) =$$
$$= (x_2 - x_1)\left(x_2^2 + x_1 x_2 + x_1^2 + 2\right) =$$
$$= (x_2 - x_1)\left(\left(x_2^2 + 2x_2\frac{x_1}{2} + \frac{x_1^2}{4}\right) - \frac{x_1^2}{4} + x_1^2 + 2\right) =$$
$$= (x_2 - x_1)\left(\left(x_2 + \frac{x_1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x_1^2 + 2\right) > 0.$$

Так как $\mathrm{f}(x_1) < \mathrm{f}(x_2)$, то функция $\mathrm{f}(x)$ возрастает на $\mathbb{R}$. Следовательно, существует единственная точка $c \in \mathbb{R}$, в которой $\mathrm{f}(c) = 0$. Это означает, что уравнение $x^3 + 2x + 6 = 0$ имеет единственный корень. ▶

Задание 5. Пусть функция $\mathrm{f}(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, и множество ее значений включено в отрезок $[a; b]$. Доказать ,что на этом отрезке существует, по крайней мере, одна такая точка c, что $\mathrm{f}(c) = c$ (всякое непрерывное отображение отрезка в себя имеет хотя бы одну неподвижную точку).

Решение: ◀ Рассмотрим на отрезке $[a;b]$ вспомогательную функцию $\varphi\ (x)$ = f$(x) - x$. В силу теоремы об арифметических операциях над непрерывными функциями $\varphi\ (x)$ непрерывна на $[a;b]$, на концах отрезка она принимает значение $\varphi\ (a)$= f(a) - a и $\varphi\ (b)$ = f(b) - b.

Покажем, что $\varphi\ (a) \geq 0$. Предположим противное, пусть $\varphi\ (a) < 0$, но тогда f$(a) < a$, что невозможно, так как по условию множество значений функций f(x) включено в $[a;b]$. Аналогично можно показать, что $\varphi\,(b) \leq 0$.

Если $\varphi\ (a)=0$, то f$(a)=a$ и точка $x = a$ является неподвижной точкой отображения f(x). Если $\varphi\ (b)=0$, тогда f(b)=b и в этом случае точка $x = b$ будет неподвижной точкой отображения f(x).

Пусть $\varphi\ (a)>0$ и $\varphi\ (b)<0$. Тогда функция $\varphi\ (x)$ на отрезке $[a;b]$ удовлетворяет условиям теоремы Больцано-Коши. Согласно этой теореме, найдется хотя бы одна точка c на интервале $(a;$ b$)$ такая, что $\varphi\ (c)=0$, т.е. f$(c) - c = 0$ или f$(c) = c$. Следовательно, c – неподвижная точка отображения f(x).

Геометрическая интерпретация доказанного утверждения состоит в том, что прямая $y = x$ пересекает график непрерывной функции f(x), заданной на отрезке $[a;b]$, хотя бы один раз (рисунок 10.27).

f$(c_1) = c_1$, f$(c_2) = c_2$, f$(c_3) = c_3$. ▶

Задание 6. Исследовать на равномерную непрерывность функцию $y = \sin x^2$ на промежутке I, если:

а) I$=(-2;3)$; б) I$=(-\infty;+\infty)$.

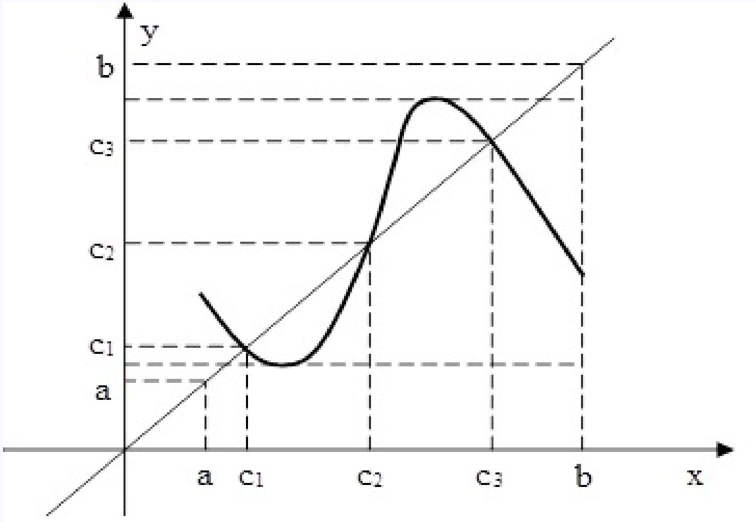

Рис. 10.27:

Решение: ◀ а) Докажем, что функция $y = \sin x^2$ равномерно непрерывна на интервале $(-2; 3)$. Для этого достаточно доказать, что $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$, такое, что $\forall x_1, x_2 \in (-2; 3)$ и $|x_1 - x_2| < \delta$ выполняется неравенство $|\sin (x_1)^2 - \sin (x_2)^2| < \varepsilon$.

Зададим $\forall \varepsilon > 0$ и оценим:

$$|\sin (x_1)^2 - \sin (x_2)^2| = 2 \cdot \left| \sin \frac{(x_1)^2 - (x_2)^2}{2} \right| \cdot \left| \cos \frac{(x_1)^2 + (x_2)^2}{2} \right| \leq$$

$$\leq 2 \cdot \left| \sin \frac{(x_1)^2 - (x_2)^2}{2} \right| \cdot 1 \leq 2 \cdot \left| \frac{(x_1)^2 - (x_2)^2}{2} \right| = |x_1 - x_2| \cdot |x_1 + x_2| \leq$$

$$\le |x_1 - x_2| \cdot (|x_1| + |x_2|) < \left[\begin{array}{c} x_1, x_2 \in (-2;3) \Rightarrow \\ |x_1| < 3, |x_2| < 3 \end{array}\right] < |x_1 - x_2| \cdot (3+3) =$$
$$= 6 \cdot |x_1 - x_2|.$$

Потребуем, чтобы $6|x_1 - x_2| < \varepsilon$. Откуда $|x_1 - x_2| < \frac{\varepsilon}{6}$. Положим $\delta = \frac{\varepsilon}{6}$, тогда из неравенства $|x_1 - x_2| < \delta = \frac{\varepsilon}{6}$ будет следовать неравенство

$$|\sin (x_1)^2 - \sin (x_2)^2| < \varepsilon.$$

б) Докажем, что функция $y = \sin x^2$ не является равномерно непрерывной на $\mathbb{R}$. Для этого надо доказать, что $\exists \varepsilon > 0$ такое, что $\forall \delta > 0$ найдутся $x', x'' \in \mathbb{R}$ такие, что из неравенства $|x' - x''| < \delta$ будет следовать неравенство

$$|\sin (x')^2 - \sin (x'')^2| \ge \varepsilon.$$

Рассмотрим последовательности $x'_n = \sqrt{2\pi n}$ и $x''_n = \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$.

$$\lim_{n\to+\infty} (x'_n - x''_n) = \lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{2\pi n} - \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}\right) =$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2\pi n - \frac{\pi}{2} - 2\pi n}{\sqrt{2\pi n} + \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}} = -\frac{\pi}{2} \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi n} + \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}} = 0.$$

По определению предела последовательности это означает, что для $\forall \delta > 0$ $\exists N$ такое, что для $\forall n > N$ выполняется $|x' - x''| < \delta$.

Оценим $\left|\sin\left(x_n'\right)^2 - \sin\left(x_n''\right)^2\right| = \left|\sin\left(\sqrt{2\pi n}\right)^2 - \sin\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}+2\pi n}\right)^2\right| = 1.$

Итак, $\exists\varepsilon \le 1$ такое, что для $\forall\delta > 0$ $\exists x_{n_0}', x_{n_0}'' \in \mathbb{R}\,(n_0 > N)$ такие, что из неравенства $|x_{n_0}' - x_{n_0}''| < \delta$ следует неравенство

$$\left|\sin\left(x_{n_0}'\right)^2 - \sin\left(x_{n_0}''\right)^2\right| = 1 \ge \varepsilon.$$

►

Задание 7. Исследовать на равномерную непрерывность функции на указанных промежутках:

а) $y = \sqrt{x}$ на $[1; +\infty)$;

б) $y = e^x$ на $(-\infty; +\infty)$.

Решение: ◄ а) Докажем, что функция $y = \sqrt{x}$ равномерно непрерывна на $[1; +\infty)$. Возьмем $\forall\varepsilon>0$ и оценим для $\forall x_1, x_2 \in [1; +\infty)$

$$|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| = \left|\frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}\right| = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \le \frac{|x_1 - x_2|}{1+1} = \frac{1}{2}|x_1 - x_2|.$$

Потребуем, чтобы $\frac{1}{2}|x_1 - x_2| < \varepsilon$, тогда $|x_1 - x_2| < 2\varepsilon$. Положим $\delta = 2\varepsilon$.

Итак, для $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta=2\varepsilon$ такое, что для $\forall x_1, x_2 \in [1; +\infty)$ и $|x_1 - x_2| < \delta=2\varepsilon$ следует неравенство $|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| < \varepsilon$.

б) Докажем, что функция $y = e^x$ не является равномерно непрерывной на $\mathbb{R}$.

Возьмем $\forall\delta>0$, положим $x' = \ln\frac{1}{\delta}$, $x'' = \ln\left(1+\frac{1}{\delta}\right)$. Тогда

$$|x'-x''| = \left|\ln\frac{1}{\delta} - \ln\left(1+\frac{1}{\delta}\right)\right| = \left|\ln\frac{\frac{1}{\delta}}{1+\frac{1}{\delta}}\right| = \left|\ln\frac{1}{1+\delta}\right| =$$

$$= |\ln 1 - \ln(1+\delta)| = |\ln(1+\delta)| = \ln(1+\delta) < \delta,$$

так как $\ln(1+x)<x$ для $x>0$ (будет доказано позже в разделе "Дифференциальное исчисление функций одной переменной").

Оценим $|e^{x'} - e^{x''}| = \left|e^{\ln\frac{1}{\delta}} - e^{\ln\left(1+\frac{1}{\delta}\right)}\right| = \left|\frac{1}{\delta} - 1 - \frac{1}{\delta}\right| = |-1| = 1.$

Таким образом, $\exists\varepsilon \le 1$ такое, что $\forall\delta>0$ $\exists x' = \ln\frac{1}{\delta}$ и $\exists x'' = \ln\left(1+\frac{1}{\delta}\right)$ такие, что из неравенства $|x'-x''|<\delta$ следует неравенство $|e^{x'} - e^{x''}| = 1 \ge \varepsilon$. ▶

Задания для самостоятельного решения (выполнения)

1. Доказать, что уравнение имеет по меньшей мере один действительный корень на указанном промежутке:

а) $x^2 + \operatorname{tg} 2x - 0,5 = 0, \left[0; \dfrac{\pi}{8}\right]$; в) $1 - x3^x = 0, (0; 2)$;

б) $\sin 2x - x^2 - 0,1 = 0, \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$; г) $3 - (x+2)\,2^x = 0, (0; 2)$.

2. Доказать, что уравнение имеет хотя бы один корень:

а) $x^2 \operatorname{arctg} x = a, a \in \mathbb{R}$; в) $10^{x-1} = \dfrac{x(x-1)}{1-x}$;

б) $xe^x = a^2, a \in \mathbb{R}$; г) $2^x = \dfrac{4x(x-4)}{4-x}$.

3. Доказать, что уравнение имеет единственный корень:

а) $x^3 + 3x + 24 = 0$;

б) $5 - x - x^3 = 0$;

в) $x^3 + x - 11 = 0$;

г) $20 - x - x^3 = 0$.

4. Привести пример функции, непрерывной на $(0;1)$ и такой, что множество ее значений является: 1) отрезком; 2) интервалом; 3) полуинтервалом; 4) открытым лучом; 5) замкнутым лучом; 6) $\mathbb{R}$.

5. Доказать, что следующие функции равномерно непрерывны на заданных множествах:
а) $f(x)=x^2, \quad [0;10]$;
б) $f(x)=\sin(\cos x), \quad \mathbb{R}$;
в) $f(x) = x\sin\frac{1}{x}, \quad x>0$;
г) $f(x) = \frac{x}{4-x^2}, \quad [-1;1]$; д) $f(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad (0;\pi)$;
е) $f(x)=\operatorname{arctg} x, \quad \mathbb{R}$.

6. Доказать, что следующие функции не являются равномерно непрерывными на заданных множествах:
а) $f(x)=\frac{1}{x}, \quad (0;1]$;
б) $f(x)=x\sin x, \quad x\geq 0$;
в) $f(x) = \ln x, \quad (0;1)$;
г) $f(x) = \sin(x\sin x), \quad x\geq 0$;
д) $f(x) = \operatorname{ctg} x, \quad (0;1)$;
е) $f(x)=e^x\cos\frac{1}{x}, \quad (0;1)$.

7. Доказать, что:
а) сумма равномерно непрерывных на множестве A функций равномерно непрерывна на A;
б) произведение равномерно непрерывных на множестве A функций не обязательно равномерно непрерывно на A.

1. Найти область определения функции:

1.1. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \log_{|x+1|^{-1}}(x^2 - x)}}$;

1.2. $f(x) = \lg\left(\sqrt{\left|\dfrac{1}{4} - x\right|} - x - \dfrac{1}{2}\right)$;

1.3. $f(x) = \lg\left(\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\dfrac{|x+2|}{2-|x|}} - 9\right)$;

1.4. $f(x) = \lg\left(4 \cdot 3^{|x-1|} - 3^{2|x-1|} - 3\right)$;

1.5. $f(x) = \sqrt{\left|\log_3 \dfrac{x}{9}\right| - \left|\log_3 x\right|}$;

1.6. $f(x) = \lg\left(1 - \left|\dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4}\right|\right)$;

1.7. $f(x) = \lg\left(3 - \left|2^{4x^2-1} - 5\right|\right)$;

1.8. $f(x) = \dfrac{1}{\log_2\left(1 + \log_{|3-x|}(x-3)\right)}$;

1.9. $f(x) = \lg\left(1 - \log_{|x-2|}\dfrac{1}{x-2}\right)$;

1.10. $f(x) = \sqrt[6]{\log_{\frac{1}{x}}|x+2| + 1}$.

2. Доказать, что множество M ограничено. Найти $\sup M$ и $\inf M$:

2.1. $M = \left\{\dfrac{n^2}{n^2+3}|n \in \mathbb{N}\right\}$;

2.2. $M = \{x|x \in \mathbb{Q} \wedge x^2 < 2\}$;

2.3. $M = \left\{1 + \dfrac{(-1)^n}{n}|n \in \mathbb{N}\right\}$;

2.4. $M = \left\{(-1)^{n-1}\left(2 + \dfrac{3}{n}\right)|n \in \mathbb{N}\right\}$;

2.5. $M = \left\{\dfrac{2+(-1)^n}{n+3}|n \in \mathbb{N}\right\}$;

2.6. $M = \left\{\dfrac{1+(-1)^n}{2n}|n \in \mathbb{N}\right\}$;

2.7. $M = \{x|x \in \mathbb{R} \wedge x^2 < 3\}$;

2.8. $M = \left\{\dfrac{n+2}{n+5}|n \in \mathbb{N}\right\}$;

2.9. $M = \left\{2 + \dfrac{(-1)^n}{n^2}|n \in \mathbb{N}\right\}$;

2.10. $M = \left\{\dfrac{(-1)^n}{2n+1}|n \in \mathbb{N}\right\}$.

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что :

3.1. *а*) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n-8}{9-4n} = -\dfrac{5}{4}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left((-1)^n + \dfrac{1}{n}\right) \neq 1$;

3.2. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^2+1}{3n^2-3} = \dfrac{4}{3}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \cos\dfrac{\pi n}{3} \neq \dfrac{1}{2}$;

3.3. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} ((-1)^n + 1) \neq 0$;

3.4. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-3n^2+n+1}{n^2+1} = -3$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\dfrac{\pi n}{6} \neq \dfrac{1}{2}$;

3.5. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{8-3n}{5n+1} = -\dfrac{3}{5}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{(-1)^n\cdot n} \neq 0$;

3.6. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} n\,(1+(-1)^n) \neq 0$;

3.7. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3-2n}{n+4} = -2$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \cos\dfrac{\pi n}{100} \neq -1$;

3.8. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^2-n+1}{1-n^2} = -5$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n\dfrac{2n+1}{n} \neq 2$;

3.9. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3-4n}{2n+1} = -2$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} (0,5)^{(-1)^n\cdot n} \neq 0$;

3.10. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2-3}{4-7n^2} = -\dfrac{2}{7}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} (2+(-1)^n)^n \neq 1$.

4. Пользуясь критерием Коши или теоремой о пределе монотонной последовательности, доказать сходимость последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, если :

4.1. $x_n = \dfrac{n+1}{2n-1}$;

4.2. $x_n = \dfrac{10}{1} \cdot \dfrac{11}{3} \cdot \ldots \cdot \dfrac{n+9}{2n-1}$;

4.3. $x_n = \left(1 - \dfrac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \dfrac{1}{4}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \dfrac{1}{2n}\right)$;

4.4. $x_n = 1 + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{n!}$;

4.5. $x_n = \dfrac{|\sin 1|}{2} + \dfrac{|\sin 2|}{2^2} + \ldots + \dfrac{|\sin n|}{2^n}$;

4.6. $x_n = \dfrac{\cos 1!}{1 \cdot 2} + \dfrac{\cos 2!}{2 \cdot 3} + \ldots + \dfrac{\cos n!}{n(n+1)}$;

4.7. $x_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2}$;

4.8. $x_n = \dfrac{\sin \alpha}{2} + \dfrac{\sin 2\alpha}{2^2} + \ldots + \dfrac{\sin n\alpha}{2^n}$;

4.9. $x_n = \dfrac{1}{3+1} + \dfrac{1}{3^2+1} + \ldots + \dfrac{1}{3^n+1}$;

4.10. $x_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2+1} + \ldots + \dfrac{1}{n^2+1}$.

5. Доказать, используя определение предела функции, что :

5.1. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-4}{2+x}=-\dfrac{1}{3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{ctg}\dfrac{1}{x}$ не существует;

5.2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-1}{3x+2}=\dfrac{1}{3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$ не существует;

5.3. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-3}{x+2}=+\infty$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ не существует;

5.4. а) $\lim\limits_{x\to-2}\left(3-5x^3\right)=43$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{tg}\dfrac{1}{x}$ не существует;

5.5. а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x}{x-5}=\infty$; б) $\lim\limits_{x\to 0}2^{\frac{1}{x}}$ не существует;

5.6. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{10-x^2}{x}=-\infty$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$ не существует;

5.7. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2+x}=\dfrac{1}{2}$; б) $\lim\limits_{n\to 0}e^{\frac{1}{x}}$ не существует;

5.8. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-1}{x+3}=+\infty$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}$ не существует;

5.9. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x}{x-3}=\infty$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}e^{x}$ не существует;

5.10. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-3x^2}{15x-1}=-\infty$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x}$ не существует.

6. Вычислить пределы:

6.1. $a)$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-1}{x\cdot\operatorname{tg}2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$;

6.2. $a)$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$;

6.3. $a)$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}$;

6.4. $a)$ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg}x$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x\cdot\sin 2x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2x}}$;

6.5. $a)$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{\cos x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln\operatorname{tg}x}{\cos 2x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}x)^{\operatorname{ctg}x}$;

6.6. а) $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{\sqrt[3]{(1-\cos x)^2}}$;

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x}$;

6.7. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x-\sin 2x}{\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-\sin x)}{3^{\operatorname{tg}x}-1}$;

6.8. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\cdot\operatorname{tg}4x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x^3-3}{x-e}$;

6.9. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{x^2-\sqrt{x}}{1-x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{x}$;

6.10. а) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$;

7. Выполнить задание, используя свойства непрерывных функций:

7.1. Доказать, что уравнение $x^5 - 3x - 1 = 0$ имеет по крайней мере один действительный корень, заключённый между 1 и 2.

7.2. Доказать, что всякий многочлен нечётной степени имеет хотя бы один действительный корень .

7.3. Показать, что уравнение $x \cdot 2^x = 1$ имеет по меньшей мере один положительный корень, не превосходящий 1.

7.4. Показать, что уравнение $x = a\sin x + б$, где $0 < a < 1$, $б > 0$ имеет по меньшей мере один положительный корень и притом не превосходящий $a + б$.

7.5. Для функции

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & \text{если } 0 \le x < 2, \\ (x-4)^2 + 6, & \text{если } 2 \le x \le 4 \end{cases}$$

мы имеем $f(0) = -4$; $f(2) = 10$; $f(4) = 6$. Существует ли значение

a, такое, что $f(a) = 1$?

7.6. Для функции $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-2x-24}$ мы имеем $f(5) = -\dfrac{4}{9}$, $f(7) = \dfrac{6}{11}$. Следует ли отсюда существование такого a, что $5 \le a \le 7$ и $f(a) = 0$. Существует ли такое a ?

7.7. Пусть функция f непрерывна на $[a; b]$ и множество ее значений включается в $[a; b]$. Доказать, что существует точка $c \in [a; b]$ такая, что $f(c) = c$. Привести пример такой функции .

7.8. Функция f определена на отрезке $[a; b]$ и обладает следующим свойством: для любых $x_1, x_2 \in [a; b]$ и для всякого $c \in \mathbb{R}$, лежащего между $f(x_1)$ и $f(x_2)$ $(f(x_1) \ne f(x_2))$ существует точка $\xi \in (x_1; x_2)$, что $f(\xi) = c$. Указать функцию, обладающую таким свойством, но не являющуюся непрерывной на $[a; b]$.

7.9. Пусть функция f непрерывна на $(0; 1)$. Может ли множество ее значений не быть промежутком? Привести пример функции непрерывной на $(0; 1)$ и такой, что множество ее значений является:
1) отрезком; 2) интервалом; 3) полуинтервалом; 4) открытым

лучом;   5) $\mathbb{R}$.

7.10. Доказать, что уравнение $x^2 \operatorname{arctg} x = a$, $a \in \mathbb{R}$ имеет хотя бы один корень.

8. Исследовать функцию на непрерывность, установить характер точек разрыва, построить график :

8.1.

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right), & \text{если } x > 3, \\ \ln|x|, & \text{если } |x-1| \leq 2, \\ \{-x+2\}, & \text{если } x < -1; \end{cases}$$

8.2.

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-x+1}, & \text{если } |x| < 1, \\ \{2x+1\}+1, & \text{если } 1 \leq x \leq 2, \\ \dfrac{3}{x-2}, & \text{если } |x| > 2; \end{cases}$$

8.3.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-4}+1, & \text{если } x>4,\\[2mm] \dfrac{1}{3}, & \text{если } x=4,\\[2mm] \left\{-\dfrac{2}{3}x\right\}, & \text{если } \dfrac{3}{2}\le |x|<4,\\[2mm] -\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2, & \text{если } |x|<\dfrac{3}{2};\end{cases}$$

8.4.

$$f(x)=\begin{cases}\left[1-\dfrac{1}{2}x\right]+3, & \text{если } |x|<3,\\[2mm] x^2-10x+23, & \text{если } x\ge 3,\\ \operatorname{tg}(x+3)+6, & \text{если } x<-3,\\ 0, & \text{если } x=-3;\end{cases}$$

8.5.

$$f(x)=\begin{cases}[2x+3], & \text{если } -\dfrac{3}{2}\le x<-\dfrac{1}{2},\\[2mm] 0, & \text{если } x=-\dfrac{1}{2},\\[2mm] \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^{-2}, & \text{если } x<-\dfrac{3}{2},\ x>-\dfrac{1}{2};\end{cases}$$

8.6.

$$f(x)=\begin{cases}\arcsin(3-2x)+1, & \text{если } 1\le x<\dfrac{3}{2},\\ 0, & \text{если } x=\dfrac{3}{2},\\ x-\dfrac{1}{2}, & \text{если } x>\dfrac{3}{2},\\ (x+1)^{-1}, & \text{если } x<1;\end{cases}$$

8.7.

$$f(x)=\begin{cases}2^{-|x|}, & \text{если } 0<|x|<1,\\ 0, & \text{если } x=0,\\ -x^2+2x, & \text{если } x\ge 1,\\ \operatorname{ctg}(x+1), & \text{если } x<-1;\end{cases}$$

8.8.

$$f(x)=\begin{cases}2[x-4]-2, & \text{если } 4\le x<5,\\ -5x+x^2, & \text{если } |x-3,5|\ge 1,5,\\ \dfrac{-3x+2}{x-2}, & \text{если } |x-3|<1;\end{cases}$$

8.9.

$$f(x) = \begin{cases} -3\sqrt{1-2x}+2, & \text{если } |x+2| < 2, \\ -(x+2)^2-3, & \text{если } x \le -4, \\ [1+2x], & \text{если } 0 \le x \le 0,5, \\ \log_{0,5}(x-0,5), & \text{если } x > 0,5; \end{cases}$$

8.10.

$$f(x) = \begin{cases} -3[1-x]+2, & \text{если } |x-1| \le 1, \\ (x-1)^{-2}+2, & \text{если } x > 2, \\ \operatorname{tg}\left(x+1+\dfrac{\pi}{4}\right), & \text{если } x \in (-\infty; -1) \cap D\left(\operatorname{tg}\left(x+1+\dfrac{\pi}{4}\right)\right). \end{cases}$$

Вопросы для подготовки к экзамену

1. Понятие функции отображения.(см.) Классификация отображений.(см.) Ком-позиция функций.(см.)

2. Аксиоматика множества действительных чисел.(см.)

3. Модуль действительного числа.(см.)

4. Ограниченный числовые множества.(см.) Критерий ограниченности множества.(см.)

5. Аксиома полноты и существование точных граней числового множества.(см.) Принцип Архимеда.(см.)

6. Лемма о вложенных отрезках.(см.)

7. Лемма о конечном покрытии.(см.)

8. Лемма о предельной точке.(см.)

9. Мощность множества.(см.) Счетные множества.(см.) Несчетность множества действительных чисел.(см.)

10. Предел числовой последовательности.(см.) Общие свойства предела последовательности.(см.)

11. Бесконечно малые последовательности и их свойства.(см.)

12. Арифметическин операции над сходящимися последовательностями.(см.)

13. Предел числовой последовательности.(см.) Предельный переход в неравенствах.(см.)

14. Подпоследовательность.(см.) Теорема о пределе подпоследовательности сходящейся последовательности.(см.)

15. Критерий предельной точки.(см.)

16. Теорема Больцано-Вейерштрасса о сходящейся подпоследовательности ограниченной последовательности.(см.)

17. Критерий Коши сходимости числовой последовательности.(см.)

18. Критерий существования предела монотонной последовательности.(см.)

19. Число e.(см.)

20. Определения предела функции.(см.) Эквивалентность определений предела функции по Коши и по Гейне.(см.)

21. Односторонние пределы.(см.) Критерий существования предела функции.(см.)

22. Критерий Коши существования предела функции.(см.)

23. Общие свойства предела функции.(см.)

24. Предел функции.(см.) Предельный переход и арифметические операции.(см.)

25. Предел функции.(см.) Предельный переход в неравенствах.(см.)

26. Первый замечательный предел.(см.)

27. Предел композиции функций.(см.)

28. Второй замечательный предел.(см.)

29. Предел монотонной функции.(см.)

30. O-символика.(см.)

31. Эквивалентные функции.(см.)

32. Непрерывность функции в точке.(см.) Точки разрыва и их классификация.(см.)

33. Локальные свойства непрерывных функций.(см.)

34. Теоремы о предельном переходе под знаком непрерывной функции и о непрерывности композиции.(см.)

35. Степенно показательная функция и ее предел.(см.)

Литература

1. Кудрявцев, Л.Д. Курс математического анализа : в 2 т. / Л.Д. Кудрявцев. – М. : Высшая школа, 1988. – Т. 1 : Курс математического анализа. – 687 с.

2. Зорич, В.А. Математический анализ : в 2 ч. / В.А. Зорич. – М. : Фазис, 1997. – Ч. 1 : Математический анализ. – 543 с.

3. Ильин, В.А. Основы математического анализа : в 2 т. / В.А. Ильин, З.Г. Позняк. – М. : Наука, 1982. – Т. 1 : Основы математического анализа. – 599 с.

4. Фихтенгольц, Г.М. Основы математического анализа : в 3 т. / Г.М. Фихтенгольц. – СПб. : Лань, 2001. – Т. 1 : Основы математического анализа. – 440 с.

5. Уваренков, И.М. Курс математического анализа : в 2 т. / И.М. Уваренков, М.З. Маллер. – М. : Просвещение, 1966. – Т. 1 : Курс математического анализа. – 639 с.

6. Зверович, Э.И. Вещественный и комплексный анализ : в 6 ч. / Э.И. Зверович. – Минск : Вышэйшая школа, 2006. – Ч. 1 : Введение в анализ и дифференциальное исчисление. – 319 с.

7. Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б.П. Демидович. – М. : Наука, 1990. – 624 с.

8. Виноградова, И.А. Задачи и упражнения по математическому анализу: в 2 ч. / И.А. Виноградова, С.Н. Олехник, В.А. Садовничий; под ред. В.А. Садовничего. – 2-е изд.; перераб. – М. : Высшая школа, 2002. – Кн. 1 : Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной. – 725 с.

9. Кудрявцев, Л.Д. Сборник задач по математическому анализу: в 2 ч. / Л.Д. Кудрявцев. – М. : Наука, 1984. – Ч. 1 : Предел. Непрерывность. Дифференцируемость. – 520 с.

10. Давыдов, Н.А. Сборник задач по математическому анализу / Н.А. Давыдов, П.П. Коровкин, В.Н. Никольский; под ред. Н.А. Давыдова. – М. : Просвещение, 1973. – 256 с.