

Учреждение образования
«Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
В четырех частях

Часть 3

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И
ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ
ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ**

*Допущено
Министерством образования Республики Беларусь
в качестве учебного пособия
для студентов учреждений высшего образования
по физическим специальностям*

Брест
БрГУ имени А.С. Пушкина
2015

УДК 517
ББК 22.16
М 34

Допущено
Министерством образования Республики Беларусь
в качестве учебного пособия
для студентов учреждений высшего образования
по физическим специальностям

Авторы–составители:
кандидат физико-математических наук, доцент Н.П. Семенчук
кандидат физико-математических наук, доцент Н.Н. Сендер
кандидат физико-математических наук, доцент С.А. Марзан
кандидат физико-математических наук, доцент А.Н. Сендер

Рецензенты:
кафедра математических методов теории управления БГУ,
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой теории функций БГУ
В.Г. Кротов,
доктор физико-математических наук, доцент,
заведующий кафедрой теоретической физики ВГУ имени П.М. Машерова
Ю.В. Трубников

Под общей редакцией Н.Н. Сендера

М 34 **Математический анализ** : учеб. пособие : в 4 ч. / Н.П. Семенчук [и др.], под общ. ред. Н.Н. Сендера ; Брест. гос. ун-т имени А.С. Пушкина. – Брест : БрГУ, 2015. – Ч. 4: Дифференциальное и интегральное исчисление функций многих переменных. – 186 с.

Учебное пособие содержит курс лекций и практических занятий, а также задания для подготовки к экзамену и зачету, варианты заданий для индивидуальной работы по разделу «Дифференциальное и интегральное исчисление функций многих переменных».

Предназначено студентам физических специальностей учреждений высшего образования.

ISBN 978-985-473-464-4

УДК 517
ББК 22.16

ISBN 978-985-473-464-4

© УО «Брестский государственный
университет имени А.С. Пушкина»

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	8
Примерный тематический план	9
Лекция 1. Метрические пространства	10
1.1 Понятие метрического пространства	10
1.1.1 Примеры метрических пространств	11
1.2 Топология метрического пространства	13
1.2.1 Примеры открытых множеств	14
1.3 Некоторые свойства открытых и замкнутых множеств	15
1.4 Связанность. Связные компоненты. Области	15
1.5 Последовательности элементов метрических пространств, их сходимость .	16
1.6 Отображения метрических пространств. Предел, непрерывность и равномерная непрерывность отображений	18
Лекция 2. Функции многих переменных	19
2.1 Понятие функции многих переменных	19
2.2 Предел функции по совокупности аргументов	23
2.3 Непрерывные функции и их свойства	26
2.4 Свойства непрерывных функций	28
2.4.1 Арифметические операции над непрерывными функциями	28
2.5 О непрерывности сложной функции	29
2.5.1 Об устойчивости знака непрерывной функции	29
2.5.2 О прохождении непрерывной функции через любые промежуточные значения	29
2.5.3 Теорема Вейерштрасса	30
2.6 Равномерная непрерывность функций	30
Лекция 3. Частные производные и дифференциал функции многих переменных .	31
3.1 Частные производные функции многих переменных	31
3.2 Дифференцирование функций многих переменных и дифференциал	34
3.3 О связи непрерывности и существования частных производных с дифференцируемостью	36
3.4 Достаточное условие дифференцируемости	36
3.5 Касательная плоскость и нормаль к поверхности	38
3.6 Геометрический смысл дифференциала функции	40
3.7 Производные и дифференциалы сложных функций	40
3.8 Дифференциалы сложных функций. Инвариантность формы первого дифференциала	42
3.9 Дифференциал функции и приближенные вычисления	43
Лекция 4. Производная по направлению. Градиент. Производные и дифференциалы высших порядков	43
4.1 Производная по направлению. Градиент	43
4.2 Производные высших порядков. Теорема Шварца	47
4.3 Дифференциалы высших порядков функции многих переменных	50
4.4 Формула Тейлора	52
Лекция 5. Экстремум функции многих переменных	55

5.1 Понятие экстремума функции многих переменных	55
5.2 Необходимое условие локального экстремума	55
5.3 Достаточное условие локального экстремума	57
5.4 Нахождение наибольших и наименьших значений функций многих переменных	60
Лекция 6. Условный экстремум. Дифференцирование неявно заданных функций	61
6.1 Условный (относительный) экстремум. Сведение условного экстремума к безусловному	61
6.2 Необходимые условия существования условного экстремума в точке	63
6.3 Метод неопределённых множителей Лагранжа	64
6.4 Достаточный признак условного экстремума	66
6.5 Понятие неявной функции	67
6.6 Частные производные высших порядков неявных функций	71
6.6.1 Полная частная производная	71
Лекция 7. Двойной интеграл. Суммы Дарбу	72
7.1 Двойной интеграл	72
7.1.1 Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла	72
7.1.2 Понятие двойного интеграла	73
7.2 Суммы Дарбу. Условия существования двойного интеграла	73
7.2.1 Суммы Дарбу, их свойства	74
7.2.2 Условия существования двойного интеграла	76
7.3 Основные классы интегрируемых функций	77
7.4 Основные свойства двойного интеграла	78
Лекция 8. Вычисление двойного интеграла	79
8.1 Приведение двойного интеграла к повторному	79
8.2 Криволинейные координаты	86
8.3 Площадь в криволинейных координатах	86
8.4 Замена переменных в двойном интеграле	87
8.5 Якобиан в полярных криволинейных координатах	89
Лекция 9. Геометрические и физические приложения двойного интеграла	90
9.1 Геометрические приложения двойного интеграла	90
9.2 Масса плоской неоднородной фигуры	93
9.3 Статические моменты	94
9.4 Координаты центра масс материальной пластинки	95
9.5 Момент инерции материальной пластинки	96
9.6 Площадь поверхности	98
9.6.1 Площадь гладкой поверхности	98
Лекция 10. Тройные интегралы	100
10.1 Задача о массе материального кубируемого тела	100
10.2 Понятие тройного интеграла	101
10.3 Свойства тройных интегралов	102
Лекция 11. Вычисление тройных интегралов. Криволинейные координаты. Замена переменных в тройном интеграле	103
11.1 Способы вычисления тройных интегралов	103

11.2 Криволинейные координаты	106
11.2.1 Отображение пространственных областей	106
11.2.2 Цилиндрические координаты	107
11.2.3 Сферические координаты	108
11.2.4 Элемент объема в криволинейных координатах	109
11.3 Замена переменных в тройном интеграле	110

Лекция 12. Геометрические и физические приложения тройных интегралов	112
12.1 Вычисление массы тела	112
12.2 Вычисление объемов тел	114
12.3 Статические моменты, момент инерции и центры тяжести материальных тел	117
Лекция 13. Криволинейные интегралы первого рода	120
13.1 Задача о массе материальной дуги	120
13.2 Понятие криволинейного интеграла первого рода	121
13.3 Существование и вычисление криволинейного интеграла первого рода	121
13.4 Свойства криволинейного интеграла первого рода	125
13.5 Некоторые приложения криволинейных интегралов первого рода	126
13.5.1 Масса материальной кривой	126
13.5.2 Статические моменты материальной кривой относительно координатных осей	128
13.5.3 Центры тяжести материальных кривых	129
13.5.4 Момент инерции плоской материальной спрямляемой кривой относительно координатных осей	130
13.5.5 Площадь конечной части цилиндрической поверхности	131
13.5.6 Притяжение точечной массы материальной кривой	132
Лекция 14. Криволинейные интегралы второго рода	133
14.1 Задача о работе плоского силового поля	133
14.2 Понятие криволинейного интеграла второго рода	134
14.3 Теорема о существовании и вычислении криволинейного интеграла второго рода	134
14.4 Свойства криволинейного интеграла второго рода	137
14.5 Криволинейный интеграл по замкнутому контуру	139
14.6 Формула Грина	140
14.7 Приложения формулы Грина к вычислению площадей плоских фигур	142
14.8 Четыре равносильных условия для криволинейного интеграла второго рода	143
14.9 Восстановление функции по ее полному дифференциалу с помощью криволинейного интеграла	146
Лекция 15. Поверхностные интегралы первого рода	148
15.1 Задача о притяжении поверхности, с распределённой массой по ней, материальной точки, находящейся вне поверхности	148
15.2 Понятие поверхностного интеграла первого рода	149
15.3 Теорема о существовании и вычислении поверхностного интеграла первого рода	149
15.4 Вычисление поверхностного интеграла первого рода при параметрическом задании поверхности	154
15.5 Свойства поверхностного интеграла первого рода	156
15.6 Некоторые приложения поверхностных интегралов первого рода	157
15.6.1 Масса материальной поверхности	157
15.6.2 Статические моменты конечной материальной кусочно-гладкой поверхности относительно координатных плоскостей	158
15.6.3 Центры масс материальной конечной кусочно-гладкой поверхности .	159

15.6.4 Момент инерции конечной материальной кусочно-гладкой поверхности относительно координатных плоскостей и осей	160
Лекция 16. Поверхностные интегралы второго рода	162
16.1 Двусторонние и односторонние поверхности в \mathbb{R}^3	162
16.2 Задача о количестве жидкости, протекающей через замкнутую поверхность	163
16.3 Понятие поверхностного интеграла второго рода	164
16.4 Существование и вычисление поверхностного интеграла второго рода	165
16.5 О существовании и вычислении поверхностного интеграла второго рода по поверхности, заданной параметрически	169
16.6 Формула Остроградского – Гаусса	171
16.7 Формула Остроградского – Гаусса в векторной форме	173
16.8 Вычисление объемов тел с помощью поверхностных интегралов второго рода	178
16.9 Формула Стокса. Потенциальное векторное поле	179
Литература	186

Предисловие

Предлагаемое вниманию читателей издание является третьей частью учебного пособия «Математический анализ».

При его разработке авторы руководствовались учебными программами по дисциплине «Математический анализ» для физических специальностей университетов. В соответствии с учебными программами на изучение раздела «Дифференциальное и интегральное исчисление функций многих переменных» отводится ?? часов лекций и ?? часов практических занятий.

Учебное пособие обеспечивает достижение основной дидактической цели – самообразования. В условиях постоянно возрастающего объема научной (а значит, и учебной) информации количество часов, предусматриваемых учебными планами на преподавание традиционно изучаемых дисциплин, имеет устойчивую тенденцию к сокращению. В этой связи необходимо, чтобы учебные дисциплины, еще не потерявшие своей актуальности, преподавались на современном научном уровне, полноценно и кратко. При этом глубокое изучение материала студентами возможно только при условии успешной организации самостоятельной работы студентов.

Изложение материала в учебном пособии приводится в оптимальной, по мнению авторов, последовательности. При изложении материала приводятся стандартные и специфические способы решения многих задач с целью обучения на конкретных примерах поиску наиболее рационального способа решения. В конце каждой лекции приводятся вопросы и задания для самоконтроля с целью помочь студентам в проверке усвоения ими теоретического материала. Наряду с примерами, аналогичными решенным на практических занятиях, учебное пособие содержит достаточно большое количество нетривиальных задач, не все из которых могут быть решены в аудитории или самостоятельно, многие задачи окажутся полезными для кружковой работы с наиболее сильными студентами. Учебное пособие содержит достаточно обширный материал для контрольных и индивидуальных работ, а также вопросы для подготовки к экзамену и зачету по разделу «Дифференциальное и интегральное исчисление функций многих переменных».

ПРИМЕРНЫЙ ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

№	Название темы, перечень изучаемых вопросов	ЛК	ПР
1	Понятие числового ряда, его частичной суммы, суммы. Ряды сходящиеся и расходящиеся. Ряды, составленные из слагаемых геометрической прогрессии. Остаток ряда. Необходимый признак сходимости ряда. Гармонический ряд. Арифметические операции над сходящимися рядами. Критерий Коши сходимости ряда.	2	2
2	Знакопостоянные ряды. Критерий сходимости положительных рядов. Теоремы сравнения положительных рядов.	2	2
3	Признаки Даламбера. Признаки Коши.	2	1
4	Частичные пределы. Верхний и нижний пределы последовательности. Обобщенный признак Коши сходимости положительных рядов. Интегральный признак Коши – Маклорена сходимости рядов.	2	1
5	Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница. Абсолютно и условно сходящиеся ряды. Признак Абеля – Дирихле.	2	2
6	Функциональные последовательности и ряды, их сходимость. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и функциональных рядов. Критерий Коши равномерной сходимости функциональных последовательностей и функциональных рядов. Мажорантный признак Вейерштрасса. Признак Абеля – Дирихле.	2	2
7	Свойства предела функциональной последовательности и суммы ряда. Почленный переход к пределу. Непрерывности суммы функционального ряда и предельной функции функциональной последовательности. Почленное интегрирование функциональных рядов и функциональных последовательностей. Почленное дифференцирование функциональных рядов и функциональных последовательностей.	2	2
8	Понятие степенного ряда. Теорема Коши – Адамара. Радиус, интервал и область сходимости степенного ряда. Свойства степенных рядов. Ряд Тейлора. Понятие аналитической функции.	2	2
9	Разложение функций в степенные ряды. Разложение в ряд Маклорена функций $f(x) = e^x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = \sin x$, $f(x) = \ln(1+x)$, $f(x) = (1+x)^\alpha$.	2	2
10	Приложения степенных рядов для приближенных вычислений значений функций и интегралов.		4

ЛЕКЦИЯ 1

Метрические пространства

1.1 Понятие метрического пространства

Определение 1.1. Линейным или векторным пространством (над полем K) называется множество элементов L , если выполнены следующие условия:

1. Для любых двух элементов x и y множества L однозначно определен третий элемент z этого множества, называемый их **суммой** и обозначаемый символом $x + y$, причем справедливы следующие свойства:

- a) $x + y = y + x$ (коммутативность);
- б) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (ассоциативность);
- в) существует такой элемент $0 \in L$, что для любого элемента $x \in L$ $x + 0 = x$ (элемент 0 называется **нулевым** или **нулем** пространства L);
- г) для любого элемента $x \in L$ существует такой элемент $x' \in L$, что $x + x' = 0$ (элемент x' называется **противоположным** к элементу x).

2. Для любого числа $\alpha \in K$ и любого элемента x пространства L определен элемент пространства L , называемый **произведением** α на x и обозначаемый символом αx , причем справедливы следующие свойства:

- а) $\alpha(\beta x) = (\alpha \cdot \beta)x$ (для любых чисел $\alpha, \beta \in K$ и любого элемента $x \in L$);
- б) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ (для любых чисел $\alpha, \beta \in K$ и любого элемента $x \in L$);
- в) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ (для любого числа $\alpha \in K$ и любых элементов $x, y \in L$);
- г) $1 \cdot x = x$ для любого элемента $x \in L$.

Замечание 1.1. Если в условии 2 определения 1.1 используются действительные числа ($K = \mathbb{R}$), то пространство L называется **действительным пространством**, а если комплексные числа ($K = \mathbb{C}$), то и пространство L называется **комплексным**.

Определение 1.2. Скалярным произведением в действительном линейном пространстве L называется действительная функция (x, y) , определённая на декартовом квадрате $L^2 = L \times L$ и удовлетворяющая для любых $x, y, z \in L$ следующим условиям:

- 1) $(x, y) = (y, x)$ (свойство коммутативности);
- 2) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ (свойство дистрибутивности);
- 3) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ для любых $\lambda \in \mathbb{R}$ (свойство однородности);
- 4) $(x, x) \geq 0$, причём $(x, x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0 \in L$.

Определение 1.3. Линейное пространство L с фиксированным в нём скалярным произведением называется **евклидовым пространством**.

Замечание 1.2. Можно рассматривать евклидовые пространства и над полем комплексных чисел. В этом случае условие 1 из определения 1.2 примет вид: $(x, y) = \overline{(y, x)}$, где черта есть знак комплексного сопряжения (остальные свойства сохраняются). В дальнейшем мы будем рассматривать только действительные евклидовые пространства.

В основе изучения математического анализа функций одной переменной лежала операция предельного перехода, которая базировалась на понятии расстояния между точками числовой прямой.

Обобщая представление о числовой прямой \mathbb{R} как о множестве, на котором вве-

дено расстояние между действительными числами, приходим к понятию метрического пространства.

Определение 1.4. *Метрическим пространством* называется любая пара (E, ρ) , где E – множество элементов любой природы, а $\rho = \rho(x, y)$ – расстояние между элементами x и y множества E (**метрика**), то есть отображение декартова квадрата $E^2 = E \times E$ (множества пар (x, y) , $x \in E$ и $y \in E$) во множество действительных неотрицательных чисел $(\rho(x, y) \geq 0)$, удовлетворяющее следующим трём аксиомам:

- 1) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (аксиома тождества);
- 2) $\forall x, y \in E \Rightarrow \rho(x, y) = \rho(y, x)$ (аксиома симметрии);
- 3) $\forall x, y, z \in E \Rightarrow \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (аксиома треугольника).

Замечание 1.3. Если (E, ρ) – любое метрическое пространство и взято любое $F \subset E$ (подмножество из E – непустое), то сужение функции ρ , определённой в $E \times E$ на $F \times F$, превращает множество F в новое метрическое пространство. Его называют метрическим подпространством E , а определённую в нём метрику ρ – индуцированной метрикой $((F, \rho))$ – метрическое пространство, так как любые элементы x, y, z из F будут элементами из E , а поэтому для них выполняются аксиомы метрики).

Замечание 1.4. Неотрицательность метрики следует из 2-ой и 3-ей аксиом метрики. Положим $x = z$. Тогда $\rho(x, x) \leq \rho(x, y) + \rho(y, x)$ или $0 \leq \rho(x, y) + \rho(x, y)$, то есть $\rho(x, y) \geq 0$.

1.1.1 Примеры метрических пространств

1. Числовая прямая \mathbb{R} с метрикой $\rho(x, y) = |x - y|$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Справедливость аксиом метрики следует из свойств модуля действительных чисел. Известно, что $|x - y| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0$, то есть $x = y$. Модули противоположных чисел равны, то есть $|x - y| = |-(x - y)| = |y - x|$ ($\rho(x, y) = \rho(y, x)$). Для модулей действительных чисел справедливо неравенство треугольника ($|a + b| \leq |a| + |b|$). Тогда для любых $x, y, z \in \mathbb{R}$ имеем:

$$|x - z| = |x - y + y - z| \leq |x - y| + |y - z| \quad (\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)).$$

2. Множество упорядоченных групп из n действительных чисел (кортежей)

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad x_i \in \mathbb{R}, \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_n), \quad y_i \in \mathbb{R} \quad (i = \overline{1, n})$$

с метрикой

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}. \quad (1.1)$$

Указанное метрическое пространство называется **n -мерным арифметическим евклидовым пространством \mathbb{R}^n** .

Проверим аксиомы метрики. Справедливость аксиом 1–2 очевидна (проверьте самостоятельно). Покажем справедливость и третьей аксиомы метрики для \mathbb{R}^n .

Теорема 1.1. Для любых

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \quad z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$$

справедливо неравенство треугольника

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (z_i - x_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2}. \quad (1.2)$$

◀ Сначала покажем, что для любых действительных чисел a_i и b_i , $i = \overline{1, n}$, справедливо неравенство Коши – Буняковского

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}. \quad (1.3)$$

Если все a_i или все b_i , а также a_i и b_i равны нулю, то неравенство (1.3) справедливо ($0 = 0$). В противном случае введём обозначения:

$$A = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}, \quad B = \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}.$$

Тогда неравенство (1.3) примет вид:

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq AB. \quad (1.4)$$

Дальше разделим левую и правую части неравенства (1.4) на $AB > 0$ и воспользуемся очевидным неравенством

$$xy \leq \frac{1}{2} (x^2 + y^2), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{i=1}^n a_i b_i}{AB} &= \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{A} \cdot \frac{b_i}{B} \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \left(\left(\frac{a_i}{A} \right)^2 + \left(\frac{b_i}{B} \right)^2 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{A^2} \sum_{i=1}^n a_i^2 + \frac{1}{B^2} \sum_{i=1}^n b_i^2 \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{A^2} A^2 + \frac{1}{B^2} B^2 \right) = 1. \end{aligned}$$

Введём обозначения $y_i - x_i = a_i$, $z_i - y_i = b_i$. Тогда $z_i - x_i = a_i + b_i$.

Преобразуем квадрат левой части неравенства (1.2) в новых обозначениях с использованием неравенства Коши – Буняковского (1.3).

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 &= \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=1}^n b_i^2 \leq \\ &\leq \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \right)^2 + 2 \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \right) \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \right) + \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \right)^2 = \\ &= \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \right)^2. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Из неравенства (1.6) следует справедливость неравенства треугольника для метрики пространства \mathbb{R}^n . ►

3. Множество непрерывных функций, определённых на отрезке $[a, b]$, с метрикой

$$\rho(f, g) = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)|, \quad (1.7)$$

для любых таких функций $f(x)$ и $g(x)$ образует метрическое пространство $C[a, b]$. Метрика (1.7) называется Чебышевской метрикой¹.

◀ Справедливость первой и второй аксиом метрики для (1.7) практически очевидна (докажите самостоятельно).

Докажем неравенство треугольника для метрики (1.7). Возьмём любые элементы $f(x)$, $g(x)$ и $\psi(x)$ из $C[a, b]$. Тогда

$$|f - g| = |f - g + \psi - \psi| \leq |f - \psi| + |\psi - g| \leq \rho(f, \psi) + \rho(\psi, g). \quad (1.8)$$

В неравенстве (1.8) действительное число $\rho(f, \psi) + \rho(\psi, g)$ будет верхней гранью для множества модулей $|f - g|$. Число $\rho(f, g)$ есть точная верхняя грань указанного множества модулей $|f - g|$, которая не превосходит любую из названных верхних граней, то есть справедливо неравенство

$$\rho(f, g) \leq \rho(f, \psi) + \rho(\psi, g). \quad (1.9)$$

Неравенство треугольника для метрики (1.7) доказано. ►

Замечание 1.5. Одно и то же множество E может быть по-разному метризовано. Например:

1. Для множества точек вида $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}$, метрические пространства:

$$a) \mathbb{R}^n - \rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2};$$

$$b) \mathbb{R}_1^n - \rho(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|.$$

2. Для множества непрерывных на отрезке функций метрические пространства:

$$a) C[a, b] - \rho(f, g) = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)|;$$

$$b) C_2[a, b] - \rho(f, g) = \left(\int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx \right)^{0,5}.$$

1.2 Топология метрического пространства

Определение 1.5. Открытым шаром $B(x_0, r)$ радиуса $r > 0$ с центром в точке $x_0 = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ метрического пространства (E, ρ) называется множество точек $x \in E$, удовлетворяющих неравенству $\rho(x, x_0) < r$ (замкнутый шар $B(x_0, r)$: $\forall x \in E \rho(x, x_0) \leq r$).

Определение 1.6. Открытый шар радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке $x_0 \in E$ называется ε -окрестностью точки x_0 (сферической окрестностью точки x_0) и обозначается $O_\varepsilon(x_0)$ или $U(x_0, \varepsilon)$.

¹Пафнутий Львович Чебышев (1821–1824) – выдающийся русский математик и механик, внёсший большой вклад в теорию приближений, интегральное исчисление, теорию чисел, теорию вероятностей, механику и многие другие области науки и техники

Если $x_0 \in E$ не принадлежит открытому шару, то такая окрестность называется ε -**проколотой окрестностью** и обозначается $\overset{\circ}{O}_\varepsilon(x_0)$ или $\overset{\circ}{U}(x_0, \varepsilon)$.

Определение 1.7. Множество $M \subset E$ называется **открытым** в метрическом пространстве (E, ρ) , если вместе с каждой своей точкой $x_0 \in M$ оно содержит некоторый открытый шар $B(x_0, r) \subset M$.

Определение 1.8. Окрестностью точки x метрического пространства (E, ρ) называется любое открытое множество M (обозначается M_x), содержащее точку x .

1.2.1 Примеры открытых множеств

1. Любой интервал (a, b) , $a < b$, числовой прямой \mathbb{R} есть открытое множество.

◀ Возьмём $\alpha \in (a, b)$. Тогда открытый шар $B(\alpha, r)$ ($0 < r \leq \min\{\alpha - a, b - \alpha\}$) включается в интервал (a, b) . Вывод: интервал (a, b) есть открытое множество. ►

2. Любой открытый шар $B(x_0, r)$ в любом метрическом пространстве (E, ρ) есть открытое множество.

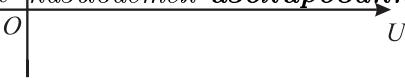
◀ Возьмём геометрическую иллюстрацию для \mathbb{R}^2 , хотя метод доказательства справедлив для любого метрического пространства (E, ρ) .

Берём любое $x \in B(x_0, r)$. Очевидно, что $\rho(x_0, x) < r$. Пусть $0 < r_1 \leq r - \rho(x_0, x)$. Тогда $B(x, r_1) \subset B(x_0, r)$, так как

$$\forall x' \in B(x, r_1) \quad \rho(x', x_0) \leq \rho(x', x) + \rho(x, x_0) < r_1 + (r - r_1) = r. \blacksquare$$

Определение 1.9. Точка $x \in M \subset E$ называется **внутренней точкой** множества M метрического пространства (E, ρ) , если точка x содержится в M вместе с некоторой её окрестностью (множество M , все точки которого внутренние, называется **открытым**). Точки, внутренние для дополнения $CM = E \setminus M$, называются **внешними** для множества M . Если точка $x \in E$ не является ни внутренней, ни внешней для множества M , то она называется **граничной точкой** множества M . Множество граничных точек множества M называется **границей множества** M и обозначается ∂M .

Определение 1.10. Точка x метрического пространства (E, ρ) называется **точкой прикосновения** множества $M \subset E$, если в любой её окрестности M_x содержится хотя бы одна точка множества M . Если же эта точка отлична от точки x , то точка x называется **пределальной точкой** множества M . В противном случае точка x называется **изолированной точкой** M .



Пример 1.1. Рассмотрим на числовой прямой \mathbb{R} множество $M = [a, b) \cup \{c\}$, где $c > b$, $a < b$. Множество предельных точек множества M будет $M' = [a, b]$, а точек прикосновения – $[M] = [a, b] \cup \{c\}$. Тогда c – изолированная точка множества M .

Определение 1.11. Множество точек прикосновения $[M]$ множества M называется замыканием множества M . Множество M называется замкнутым, если оно совпадает со своим замыканием, то есть $[M] = M$.

Примером замкнутого множества будет любой отрезок числовой прямой.

Определение 1.12. Замкнутое ограниченное множество M называется компактом.

1.3 Некоторые свойства открытых и замкнутых множеств

Теорема 1.2. Множество $G \subset E$ метрического пространства (E, ρ) открыто тогда и только тогда, когда его дополнение замкнуто.

◀ **Необходимость.** Так как G – открытое множество, то для любой точки $x \in G$ существует открытый шар $B(x, \varepsilon) \subset G$ и $B(x, \varepsilon) \cap CG = \emptyset$. Значит, x не есть точка прикосновения CG . А тогда любая точка прикосновения CG ему принадлежит, что означает замкнутость множества CG .

Достаточность. Берем любую точку $x \in G$ и покажем, что существует открытый шар $B(x, r) \subset G$. Если допустить, что в любом открытом шаре $B(x, r)$ есть точки из CG , то $x \in CG$, так как множество CG замкнуто. Получили противоречие. ►

Следствие 1.1. Если (E, ρ) – метрическое пространство, то множества E и \emptyset одновременно являются открытыми и замкнутыми множествами.

◀ \emptyset не содержит предельных точек, ему не принадлежащих, то есть \emptyset – замкнутое множество. Но тогда $C\emptyset = E$ – открытое множество. С другой стороны E – замкнутое множество, так как все предельные точки E ему принадлежат. А тогда $CE = \emptyset$ – открытое множество. ►

1.4 Связанность. Связные компоненты. Области

Определение 1.13. Метрическое пространство (E, ρ) называется связным, если его невозможно представить в виде объединения двух непересекающихся непустых замкнутых подмножеств Φ_1 и Φ_2 . В противном случае (E, ρ) называется несвязным.

Замечание 1.6. В определении несвязности (E, ρ) множества Φ_1 и Φ_2 должны быть непустыми, замкнутыми и непересекающимися. Каждое из этих множеств есть дополнение второго до множества E . По этой причине из теоремы 1.2 следует, что Φ_1 и Φ_2 одновременно и замкнуты и открыты. Дополнительно известно, что всё метрическое пространство (E, ρ) и пустое множество \emptyset являются так называемыми тривиальными открыто-замкнутыми множествами. Справедлива теорема.

Теорема 1.3. Метрическое пространство (E, ρ) несвязно тогда и только тогда, когда в нём существует нетривиальное открыто-замкнутое множество.

Замечание 1.7. Так как любое подмножество $M \subset E$ метрического пространства (E, ρ) есть метрическое пространство (M, ρ) , то можно говорить о связности (несвязности) множества M в пространстве (E, ρ) как метрического пространства (M, ρ) , но

надо помнить, что речь будет идти (при разбиении множества M на сумму двух замкнутых подмножеств или при рассмотрении открыто-замкнутого подмножества) о множествах, замкнутых и открытых в M . Например, E – плоскость (\mathbb{R}^2) , а $M = (0, 1) \cup (2, 3)$ (на оси абсцисс \mathbb{R}). Тогда и $(0, 1)$, и $(2, 3)$ есть открыто-замкнутые множества в M , но в E они будут и ни открытыми, и ни замкнутыми.

Теорема 1.4. *Любой отрезок числовой прямой есть связное множество.*

◀ Допустим, что отрезок $[a, b]$ есть несвязное множество. Тогда существуют непустые, непересекающиеся открыто-замкнутые множества Φ_1 и Φ_2 , что $[a, b] = \Phi_1 \cup \Phi_2$. Пусть, например, $a \in \Phi_1$. Но Φ_1 открыто в $[a, b]$. Тогда существует такое действительное число $\varepsilon > 0$, что $[a, a + \varepsilon) \subset \Phi_1$. Назовём точку $x \in [a, b]$ «отмеченной», если $[a, x) \subset \Phi_1$. Тогда все точки полуинтервала $[a, a + \varepsilon)$ – «отмеченные». Обозначим через c ($c > a$) точную верхнюю грань множества «отмеченные» точек. Покажем, что c – «отмеченная» точка. Берём любое $x \in [a, c)$. По второму свойству точных верхних граней существует «отмеченная» точка $x' > x$, то есть $[a, x') \subset \Phi_1$. Тогда и точка x – «отмеченная» ($[a, x) \subset [a, x') \subset \Phi_1$), то есть весь полуинтервал $[a, c)$ «заполнен» «отмеченными» точками, значит, $[a, c) \subset \Phi_1$. Доказано, что c – «отмеченная» точка. Также c – предельная точка Φ_1 . Но Φ_1 – замкнутое множество, поэтому $c \in \Phi_1$. С другой стороны, Φ_1 – открытое множество, то есть c – внутренняя точка Φ_1 . Также $c \neq b$, так как при $c = b$ мы получили бы, что Φ_2 – пустое множество (противоречие). Тогда $\exists \varepsilon_1 > 0$, что $[a, c + \varepsilon_1) \subset \Phi_1$, то есть $c + \varepsilon_1$ – «отмеченная» точка. Получили, что c – не есть точная верхняя грань «отмеченные» точек. Противоречие. ►

Определение 1.14. *Областью в метрическом пространстве называется любое открытое связное множество в этом пространстве.*

Определение 1.15. *Область G метрического пространства (E, ρ) называется односвязной, если её граница ∂G есть связное множество (состоит из одной связной компоненты, то есть наибольшего подмножества метрического пространства (E, ρ)). В противном случае область G называется многосвязной (∂G состоит из двух связных компонент – G двухсвязная область; из трёх – трёхсвязная область и т.д.). Если число связных компонент (число – порядок связности области G) бесконечно, то область G называется бесконечносвязной.*

Примеры

1. Любой открытый шар $B(x_0, r)$ в любом метрическом пространстве (E, ρ) есть односвязная область (в \mathbb{R}^2 – любой круг без границы; в \mathbb{R}^3 – любой шар без его сферы).
2. Двухсвязная область (рисунок 1.1).
3. Трёхсвязная область (рисунок 1.2).
4. Область бесконечномерной связности (рисунок 1.3) – граница состоит из периметра квадрата – внешняя граница, а также выброшенных отрезков: $\{x = \frac{1}{2^n}, y \in [\frac{1}{3}; \frac{2}{3}], n \in N\}$.

1.5 Последовательности элементов метрических пространств, их сходимость

Пусть дано метрическое пространство (E, ρ) . Если каждому натуральному числу $n \in \mathbb{N}$ соответствует единственный элемент $x_n \in E$ метрического пространства (E, ρ) , то указанное соответствие называется **последовательностью** (обозначается (x_n)) в (E, ρ) .

Определение 1.16. *Последовательность $(x_n) \subset E$ называется сходящейся к*

Рисунок 1.1 – Двухсвязная область

Рисунок 1.2 – Трёхсвязная область

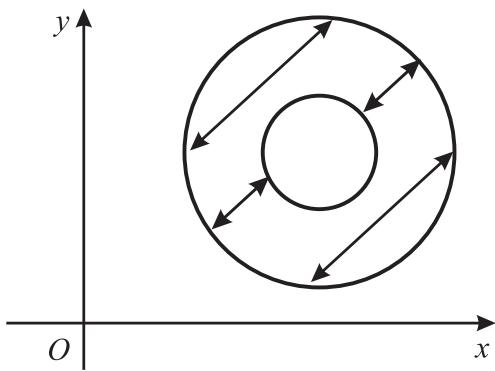


Рисунок 1.3 – Область бесконечномерной связности



Замечание 1.8. Можно сформулировать определение сходимости последовательности $\{x_n\}$ метрического пространства (E, ρ) к $x \in E$ на «языке» окрестностей:

$$\forall B(x, \varepsilon) \subset E \exists U(+\infty, n_0) \forall n \in \mathbb{N} n \in U(+\infty, n_0) x_n \in B(x, \varepsilon),$$

другими словами, последовательность $(x_n) \subset E$ точек метрического пространства (E, ρ) называется **сходящейся** к точке $x \in E$, если любая окрестность точки x , входящая в E , содержит все точки последовательности (x_n) за исключением, может быть, их конечного числа.

Замечание 1.9. Можно показать (аналогично как и в случае \mathbb{R}), что в любом метрическом пространстве справедливы утверждения:

1) предел любой последовательности метрического пространства, если он существует, единственен (это сразу следует из определения предела на «языке» окрестностей);

2) если последовательность (x_n) метрического пространства (E, ρ) сходится к $x \in E$, то и любая подпоследовательность указанной последовательности также сходится к x (самостоятельно дайте понятие подпоследовательности указанной последовательности).

Справедливы также следующие теоремы.

Теорема 1.5. Для того чтобы точка x была точкой прикосновения множества M метрического пространства (E, ρ) , необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность $(x_n) \subset M$, сходящаяся к $x \in E$.

◀ При доказательстве необходимого условия рассматривается открытый шар $B(x, \frac{1}{n})$, для которого существует $(x_n) \subset (M \cap B(x, \frac{1}{n}))$. Тогда и получим требуемую последовательность $(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x)$.

При доказательстве достаточного условия используем определение сходимости последовательности метрического пространства. ►

Аналогично, как и в случае \mathbb{R} , доказывается следующая телема.

Теорема 1.6. Для того, чтобы точка $x \in E$ метрического пространства (E, ρ) была предельной точкой множества $M \subset E$, необходимо и достаточно, чтобы в M существовала последовательность попарно различных точек, сходящихся к x .

Определение 1.17. Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется **компактом**, если для любой последовательности его точек можно выделить сходящуюся подпоследовательность, предел которой принадлежит множеству M .

Важное свойство, характеризующее компакты в \mathbb{R}^n , устанавливает следующая теорема.

Теорема 1.7. Для того чтобы множество $M \subset \mathbb{R}^n$ было компактом, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограниченным и замкнутым.

1.6 Отображения метрических пространств. Предел, непрерывность и равномерная непрерывность отображений

Определение 1.18. Пусть (E, ρ) и (F, d) два произвольных метрических пространства. Если каждому элементу $x \in M \subset E$ по определённому правилу (закону) f соответствует единственный элемент $y \in F$, то мы говорим, что множество M метрического пространства (E, ρ) отображается в метрическое пространство (F, d) , а f – **отображение** M в F .

Замечание 1.10. В зависимости от «природы» элементов множеств E и F отображение f называют **функцией** ($E \in \mathbb{R}$ или $E = \mathbb{C}$, или $E \in \mathbb{R}^n$ а $F = \mathbb{R}$ или

$F = \mathbb{C}$), **функционалом** ($E \neq \mathbb{R}$ и $E \neq \mathbb{C}$, а $F = \mathbb{R}$), **оператором** ($E \neq \mathbb{R}$ и $E \neq \mathbb{C}$, а $F \neq \mathbb{R}$ и $F \neq \mathbb{C}$).

Определение 1.19. Пусть даны два метрических пространства (E, ρ) и (F, d) , а f есть отображение $M \subset E$ в F . Элемент $y_0 \in F$ называется **пределом отображения** f при $x \rightarrow x_0$ ($x \in M$, $x_0 \in E$), если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in M \cap \{x \mid x \in M, 0 < \rho(x, x_0) < \delta\} \quad d(f(x), y_0) < \varepsilon.$$

Определение 1.20. Отображение f из метрического пространства (E, ρ) в метрическое пространство (F, d) называется **непрерывным** в точке $x_0 \in E$, если для любой окрестности $M_{f(x_0)}$ точки $y_0 = f(x_0) \in F$ найдётся такая окрестность $M_{x_0} \subset E$ точки $x_0 \in E$, что $f(M_{x_0}) \subset M_{f(x_0)}$, то есть $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Самостоятельно сформулируйте определение непрерывности отображения $f(x)$ в точке по Коши («язык $\varepsilon - \delta$ »), на «языке» последовательностей.

Определение 1.21. Пусть f – отображение из метрического пространства (E, ρ) в метрическое пространство (F, d) . Говорят, что f **равномерно непрерывно** в области своего определения $M \subset E$, если

$$\forall \delta > 0 \quad \forall x_1, x_2 \in M \quad \rho(x_1, x_2) < \delta \quad d(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon.$$

Самостоятельно покажите, что если отображение f равномерно непрерывно на $M \subset E$, то оно будет непрерывно и на M .

ЛЕКЦИЯ 2

Функции многих переменных

2.1 Понятие функции многих переменных

При изучении физических явлений приходится встречаться с величинами, значения которых зависят от некоторого числа других величин. Например, известно, что электрический ток в проводнике нагревает его. Количество выделившегося при этом тепла зависит и от электрического напряжения на концах проводника, и от силы тока в проводнике, и от продолжительности времени прохождения тока через проводник. Для изучения таких зависимостей и вводится понятие функции многих переменных. Такое понятие есть частный случай отображения из одного метрического пространства в другое.

Определение 2.1. Отображение из метрического пространства \mathbb{R}^n , $n > 1$, в метрическое пространство \mathbb{R} называется **действительной функцией многих переменных** (n -переменных).

Замечание 2.1. Указанные в определении 2.1 функции n ($n \in N$) переменных можно описать следующим образом. Если каждой точке $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}$, некоторого непустого множества $G \subset \mathbb{R}^n$, однозначно поставить в соответствие f определённый элемент $f(x)$, $f(x) \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, то это соответствие f и есть функция n -переменных ($f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$).

Указанное выше множество $G = D(f)$ называется областью определения функции, а $f(x)$ – значением функции в точке $x \in \mathbb{R}^n$. Множество всех чисел $f(x)$ из рассмотренной числовой прямой $\overline{\mathbb{R}}$ называется множеством значений функции (обозначается:

$E(f)$). Для функции двух переменных ($x_1 = x, x_2 = y$) существует геометрическая иллюстрация в виде множества точек $M(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3$ и таких, что ортогональная проекция их на плоскость $z = 0$ совпадает с областью определения функции (это множество точек пространства \mathbb{R}^3 , удовлетворяющих уравнению $z = f(x, y)$).

Геометрическое место точек $M(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3$ называется **пространственным графиком** функции $z = f(x, y)$, который является некоторой поверхностью.

Пример 2.1. Найти область определения функции $z = \arccos \frac{x}{x+y}$.

◀ Область определения функции совпадает со множеством решений неравенства

$$\left| \frac{x}{x+y} \right| \leq 1. \quad (2.1)$$

Неравенство (2.1) равносильно следующим системам:

$$\begin{cases} \frac{x}{x+y} \leq 1, \\ \frac{x}{x+y} \geq -1. \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{-y}{x+y} \leq 0, \\ \frac{2x+y}{x+y} \geq 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Система (2.2) равносильна совокупности двух систем

$$\begin{cases} x + y > 0, \\ -y \leq 0, \\ 2x + y \geq 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

или

$$\begin{cases} x + y < 0, \\ -y \geq 0, \\ 2x + y \leq 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Совокупность систем (2.3), (2.4) определяет множество точек плоскости \mathbb{R}^2 , в которых функция принимает действительные значения. Изобразим это множество в системе xOy (рисунок 2.1). ►

Рисунок 2.1

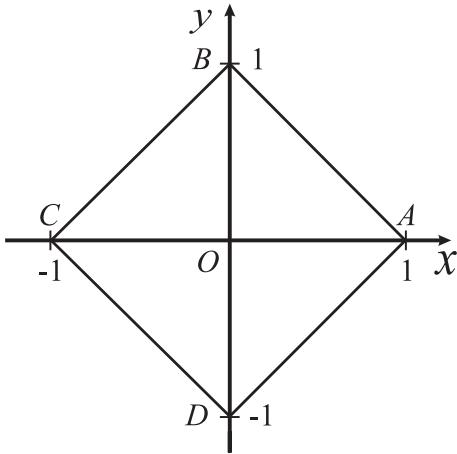


Рисунок 2.2

Пример 2.2. Найти множество значений функции $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ с областью определения $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| = 1\}$.

◀ Изобразим на рисунке 2.2 область определения функции.

Значит, $D(f)$ – это множество точек границы изображённого на рисунке квадрата. Выразим стороны квадрата аналитически.

$$AB : x + y = 1; CD : x + y = -1; AD : x - y = 1; CB : y - x = 1.$$

Очевидно, что на отрезках AB и CD наша функция принимает одинаковые значения (отрезки симметричны относительно точки O , поэтому знаки координат этих точек противоположны, а значение выражения xy в симметричных точках одно и тоже, кроме того $(-x)^2 = x^2$ и $(-y)^2 = y^2$).

Найдём множество значений нашей функции, заданной в точках отрезка AB :

$$\begin{aligned} y &= 1 - x, \quad f(x, y) \Big|_{y=1-x} = (x+y)^2 - 3xy \Big|_{y=1-x} = \\ &= 1 - 3x(1-x) = 3x^2 - 3x + 1, \quad z = 3x^2 - 3x + 1. \end{aligned}$$

Ордината вершины параболы $y = \frac{1}{4}$ – наименьшее значение функции z на отрезках AB и CD .

Так как для отрезка AB $0 \leq x \leq 1$, где точки $x = 0$ и $x = 1$ – симметричны относительно прямой $x = \frac{1}{2}$, то $z(1) = z(0) = 1$ – наибольшее значение функции на отрезках AB и CD .

Тогда множеством значений функции $f(x, y)$, заданной на отрезках AB и CD , будет отрезок $[\frac{1}{4}, 1]$.

Аналогично проводим рассуждения и для отрезков CB и AD .

$$f(x, y) = (x-y)^2 + xy \text{ или } f(x, y) = 1 + xy.$$

Для отрезка CB : $y = x + 1$. Тогда

$$f(x, x+1) = g(x) = 1 + x(x+1), \quad g(x) = x^2 + x + 1.$$

Ордината вершины параболы $g\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4} = y$ – наименьшее значение функции $f(x, y)$, заданной на отрезках CB и AD . Находим наибольшее значение (отрезок CB): $g(-1) = g(0) = 1$. Отрезок $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$ – множество значений функции $f(x, y)$, заданной на отрезках CB и AD . Тогда множество значений функции, заданной на указанной области определения, будет:

$$\left[\frac{1}{4}, 1\right] \cup \left[\frac{3}{4}, 1\right] = \left[\frac{1}{4}, 1\right] = D(f). \blacktriangleright$$

Определение 2.2. Уровнем (c -уровнем, $c \in \mathbb{R}$) функции $f(x)$, $x \in D(f) \subset \mathbb{R}^n$ ($x = (x_1, \dots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$) называется множество точек $x \in D(f)$, удовлетворяющих уравнению $f(x) = c$. Уровни функции двух переменных ещё называют линиями уровня, а для трёх переменных – поверхностями уровня.

Пример 2.3. Найти линии уровня функции $z = \min(x^2, y)$.

◀ а) возьмём $c > 0$. Требуется найти множество точек плоскости \mathbb{R}^2 , для которых $\min(x^2, y) = c$. Это будут перпендикулярные лучи, параллельные соответственной координатной оси, исходящие из точки (\sqrt{c}, c) и расположенные в первой четверти или исходящие из точки $(-\sqrt{c}, c)$ и расположенные во второй четверти (рисунок 2.3);

Рисунок 2.3 – $c > 0$

б) если $c < 0$, то множество точек плоскости \mathbb{R}^2 , удовлетворяющих соотношению $\min(x^2, y) = c$ – прямая $y = c$ (рисунок 2.4).

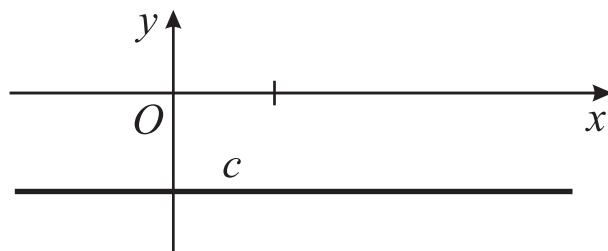


Рисунок 2.4 – $c < 0$

в) если $c = 0$, то соотношению $\min(x^2, y) = 0$ удовлетворяют точки и лежащие на оси абсцисс ($y = 0$), и лежащие на луче $\begin{cases} y \geq 0, \\ x = 0, \end{cases}$ (рисунок 2.4).

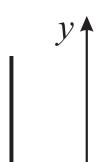


Рисунок 2.5 – $c = 0$

2.2 Предел функции по совокупности аргументов

Рассмотрим функцию $u = f(x)$ с областью определения $D(f) = G \subset \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$, а также $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \in \mathbb{R}^n$ – предельная точка области определения функции f .

Определение 2.3. Точка $A \in \bar{\mathbb{R}}$ называется *пределом функции* f в предельной точке $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, если $\forall U(A, \varepsilon) \exists \delta > 0$, что для любых точек $x \in D(f) \cap \dot{U}(x^{(0)}, \delta)$ значения функции f будут принадлежать окрестности $U(A, \varepsilon)$.

Замечание 2.2. Владея понятием окрестностей точек в $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ и в \mathbb{R}^n , определение 2.3 легко сформулировать по Коши (на «языке $\varepsilon - \delta$ »). Покажем это, например, для функции двух переменных и для конечного предела $A \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = A :$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall (x, y) \in D(f) \begin{cases} 0 < |x - x_0| < \delta, \\ 0 < |y - y_0| < \delta \end{cases} \Rightarrow |f(x, y) - A| < \varepsilon.$$

В приведённом выше определении взята квадратная проколотая окрестность предельной точки (x_0, y_0) . Вместо неё можно взять сферическую проколотую окрестность, определяемую двойным неравенством: $0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2$.

Пример 2.4. Доказать, используя определение предела функции по Коши, что

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ y \rightarrow -1}} \frac{x+y}{x^2+1} = -1. \quad (2.5)$$

◀ Зададимся любым $\varepsilon > 0$. Для нахождения указанного в определении $\delta > 0$ оценим сверху $\left| \frac{x+y}{x^2+1} - (-1) \right|$:

$$\left| \frac{x+y}{x^2+1} + 1 \right| = \frac{|x+y+x^2+1|}{x^2+1} \leqslant \frac{|x||x+1| + |y+1|}{1}.$$

Введем ограничения для предельной точки $M_0(-1, -1)$, взяв в качестве «радиуса» её квадратной окрестности меньше половины расстояния между предельной точкой и прямой $x = 0$. Например, $\begin{cases} |x+1| < \frac{1}{2}, \\ |y+1| < \frac{1}{2} \end{cases}$. С учётом указанного ограничения оценим сверху $|x|$.

$$|x+1| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x+1 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{2}.$$

Тогда $\frac{1}{2} < |x| < \frac{3}{2} < 2$. Искомая оценка примет вид:

$$\left| \frac{x+y}{x^2+1} - (-1) \right| \leq |x||x+1| + |y+1| < 2|x+1| + |y+1|.$$

Потребуем, чтобы

$$\begin{cases} 2|x+1| < \frac{\varepsilon}{2}, \\ |y+1| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x+1| < \frac{\varepsilon}{4}, \\ |y+1| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}.$$

В качестве δ возьмём $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{4}, \frac{1}{2}\right\}$. При таком выборе δ будет выполняться в нашем случае определение предела функции по Коши. ►

Замечание 2.3. Определение функции многих переменных, например, двух переменных, вводится и на «языке последовательностей» (по Гейне).

Определение 2.4. Точка $A \in \bar{\mathbb{R}}$ называется **пределом функции** $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ (пределной для $D(f)$), если для любой сходящейся к M_0 последовательности точек $(M_n(x_n, y_n))$ из $D(f)$, элементы которой отличны от $M_0(x_0, y_0)$, соответствующая числовая последовательность значений функции $(f(M_n))$ сходится к числу A .

Для указанной выше каждой последовательности $(M_n(x_n, y_n))$ соответствующий предел числовой последовательности $(f(M_n))$ называется **частичным пределом** функции $f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$. Частичным пределом функции f в точке M_0 называется также предел этой функции в точке M_0 не по всей области определения $D(f)$, а по любому подмножеству этой области. Тогда определение 2.4 можно обобщить и сформулировать в виде критерия.

Теорема 2.1. Существует $\lim_{M \rightarrow M_0} f(x, y) = A \in \bar{\mathbb{R}}$ тогда и только тогда, когда любые частичные пределы будут существовать и равняться A .

Замечание 2.4. Указанный критерий можно использовать для доказательства того, что для функции не существует предела в некоторой точке (если для функции в указанной точке можно найти два различных частичных предела, то эта функция в указанной точке предела не имеет).

Пример 2.5. Доказать, что не существует предела функции $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ в точке $M_0(0, 0)$.

◀ **1-ый способ.** $D(f) = \mathbb{R}^2 \setminus M_0(0, 0)$. Рассмотрим частичные пределы функции по двум подмножествам области определения функции:

а) первое подмножество

$$F_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x, (x, y) \neq (0, 0) \right\}.$$

Тогда

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2};$$

б) второе подмножество

$$F_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sqrt{x}, x > 0 \right\}.$$

В этом случае

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\sqrt{x}}{x^2 + x} = 0.$$

Так как частичные пределы разные, то функция в указанной точке предела не имеет.

2-ой способ. Перейдём к полярным координатам.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} = \lim_{\substack{r \rightarrow +0 \\ \varphi \in [0; 2\pi]}} \frac{r \cos \varphi \cdot r \sin \varphi}{r^2} = \lim_{\substack{r \rightarrow +0 \\ \varphi \in [0; 2\pi]}} \frac{\sin 2\varphi}{2}.$$

Очевидно, что существуют такие значения $\varphi \in [0; 2\pi]$, для которых частичные пределы будут различными. Например, если $\varphi = \frac{\pi}{4}$, то частичный предел равен $\frac{1}{2}$, но если $\varphi = 0$, то частичный предел равен 0. Значит, указанный предел не существует. ►

Замечание 2.5. Переход к полярным координатам с центром в точке $A(a; b)$ часто облегчает вычисление предела $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y)$. Мы полагаем $x = a + r \cos \varphi$, $y = b + r \sin \varphi$ и переходим от функции $z = f(x; y)$ к функции $F(r; \varphi) = f(a + r \cos \varphi; b + r \sin \varphi)$. Равенство $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y) = c$ равносильно тому, что равномерно по φ выполняется соотношение $\lim_{r \rightarrow 0} F(r; \varphi) = c$. Иными словами, $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, не зависящее от φ , что из $0 < r < \delta$ вытекает $|F(r, \varphi) - c| < \varepsilon$. Это имеет место, во всяком случае, если $F(r; \varphi)$ имеет вид:

$$F(r; \varphi) = c + r^\lambda \psi(r; \varphi),$$

где $\lambda > 0$, а функция $\psi(r; \varphi)$ ограничена в области $0 < r < \alpha$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Пример 2.6. Найти $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2y + xy^2}{x^2 - xy + y^2} = I$.

◀ При вычислении указанного предела перейдём к полярным координатам $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$.

$$I = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy(x + y)}{x^2 - xy + y^2} = \lim_{r \rightarrow +0} \frac{r^3 \frac{\sin 2\varphi}{2} (\sin \varphi + \cos \varphi)}{r^2 \left(1 - \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)} = 0. ▶$$

Замечание 2.6. Для функций многих переменных будут справедливы многие положения теории пределов, аналогичные соответствующей теории для функции одной переменной. Например, аналогично вводится понятие бесконечно малых и бесконечно больших в точке для этих функций, а также свойства таких функций и, во многом, техника вычислений пределов. Покажем некоторые положения такой теории и практики на конкретных примерах.

Пример 2.7. Найти $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 1}} \frac{x^2 - 4y^2}{x^2 + 2x - 2xy - 4y} = I$.

◀ Имеем неопределённость $\left(\frac{0}{0}\right)$ (аналогично, как и для функции одной переменной, доказывается теорема о пределе суммы, произведения и частного, как следствие устанавливается, что предел многочлена в любой точке плоскости \mathbb{R}^2 равен значению многочлена в этой точке; предел дробно-рациональной функции в любой точке области её определения равен значению функции в этой точке).

Раскроем неопределённость, разложив числитель и знаменатель дроби на множители.

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 1}} \frac{(x - 2y)(x + 2y)}{x(x - 2y) + 2(x - 2y)} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 1}} \frac{(x - 2y)(x + 2y)}{(x - 2y)(x + 2y)} = \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 1}} \frac{x + 2y}{x + 2} = 1. \blacksquare \end{aligned}$$

Пример 2.8. Найти $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} (x + 1)^{\frac{1}{x+x^2y}} = I$.

◀ Имеем неопределённость (1^∞) . Воспользуемся формулой

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{U \rightarrow 1 \\ V \rightarrow \infty}} U^V &= e^{\lim_{\substack{U \rightarrow 1 \\ V \rightarrow \infty}} (U-1)V} \\ I &= e^{\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} (x+1-1) \frac{1}{x+x^2y}} = e^{\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{x}{x+x^2y}} = e^{\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{1}{1+xy}} = e. \blacksquare \end{aligned}$$

2.3 Непрерывные функции и их свойства

Определение 2.5. Функция $y = f(x)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, называется **непрерывной** в точке $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \in D(f)$, если $\lim_{x \rightarrow x^{(0)}} f(x) = f(x^{(0)})$ при условии, что функция f определена в некоторой окрестности (хотя бы односторонней) точки $x^{(0)}$.

Если функция f непрерывна в каждой точке множества $M \subset D(f)$, то говорят, что она непрерывна на множестве M .

Замечание 2.7. Любая элементарная функция n -переменных (элементарная функция – это функция, которая может быть задана с помощью конечного числа арифметических операций и композиций элементарных функций одного переменного) непрерывна в своей области определения.

Также (по определению) считают, что функция непрерывна в изолированных точках области её определения.

Определение 2.6. Функция $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, называется **непрерывной** в точке $x^{(0)} \in D(f)$ по множеству $E \subset D(f)$, если

$$\lim_{x \rightarrow x^{(0)}} f(x) = f(x^{(0)}) \text{ при } x \in E.$$

Пример 2.9. Функция $f(x, y) = \begin{cases} y \cos \frac{1}{xy}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ не является непрерывной в точке $(0, 0)$, так как не существует окрестности этой точки, в которой функция определена. Однако, функция f непрерывна в точке $(0, 0)$ по множеству $E = D(f)$.

Замечание 2.8. Если функция f не является непрерывной в точке $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, но точка $x^{(0)} \in D(f)$ или в любой проколотой окрестности этой точки есть точки области определения функции, то точка $x^{(0)}$ называется **точкой разрыва** функции f . Если при этом $\exists \lim_{x \rightarrow x^{(0)}} f(x)$, но $f(x)$ не определена в точке $x^{(0)}$ или $f(x^{(0)}) \neq \lim_{x \rightarrow x^{(0)}} f(x)$, то точку $x^{(0)}$ называют **точкой устранимого разрыва**. Если $x^{(0)}$ – точка разрыва функции f и хотя бы один из частичных пределов функции f в точке $x^{(0)}$ равен

бесконечности, то точка $x^{(0)}$ называется **точкой разрыва второго рода**, в противном случае – **точкой разрыва первого рода**.

Кроме точек разрыва, например, для функций двух переменных (некоторых) существуют линии разрыва, для трёх переменных – линии разрыва и поверхности разрыва и т.д.

Можно рассматривать также непрерывность функции многих переменных по одной переменной.

Пример 2.10. Найти значение a , при котором функция

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{если } x^2 + y^2 \neq 0, \\ a, & \text{если } x^2 + y^2 = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

в точке $(0, 0)$ является: 1) непрерывной по x ; 2) непрерывной по y ; 3) непрерывной по кривой $y = \alpha\sqrt{x}$, $\alpha \neq 0$; 4) непрерывной.

◀ 1. При исследовании непрерывности функции f в точке $(0, 0)$ по x полагаем, что точки области определения функции находятся на прямой $y = 0$ и стремятся к началу координат.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1 = a.$$

Значит, при $a = 1$ функция $f(x; y)$ будет непрерывной по x в точке $(0, 0)$.

2. Аналогично (непрерывность по y):

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1 = a.$$

Значит, при $a = -1$ функция $f(x; y)$ будет непрерывной по y в точке $(0, 0)$.

3. Аналогично (непрерывность по кривой $y = \alpha\sqrt{x}$, $\alpha \neq 0$):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, \alpha\sqrt{x}) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \alpha^2 x}{x^2 + \alpha^2 x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x - \alpha^2)}{x(x + \alpha^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \alpha^2}{x + \alpha^2} = \frac{-\alpha^2}{\alpha^2} = a = -1. \end{aligned}$$

Значит, при $a = -1$ функция $f(x; y)$ будет непрерывной по кривой $y = \alpha\sqrt{x}$.

4. Проверим функцию f на непрерывность в точке $(0, 0)$.

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} &= \left[\begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{array} \right| \begin{array}{l} r \geq 0, \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right] = \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \cos 2\varphi. \end{aligned}$$

Указанный предел не существует, так как частичные пределы, например, будут: при $\varphi = 0 = 1$; при $\varphi = \frac{\pi}{4} = 0$, то есть не существует значения a , при котором функция f будет непрерывной в точке $(0, 0)$. ▶

Пример 2.11. Найти точки разрыва функции $f(x, y) = \frac{1}{\ln|1-x^2-4y^2|}$.

Указать точки устранимого разрыва.

◀ Множество точек разрыва функции совпадает со множеством решений системы неравенств.

$$\begin{cases} \ln|1-x^2-4y^2| \neq 0, \\ 1-x^2-4y^2 \neq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |1-x^2-4y^2| \neq 1, \\ x^2 + \frac{y^2}{(\frac{1}{2})^2} \neq 1. \end{cases} \quad (2.7)$$

Из второго неравенства системы (2.7) следует, что любая точка эллипса $x^2 + \frac{y^2}{(\frac{1}{2})^2} = 1$ будет точкой разрыва, то есть указанный эллипс есть линия разрыва функции, причём все точки этого эллипса будут точками устранимого разрыва, так как $\lim_{1-x^2-4y^2 \rightarrow 0} \frac{1}{\ln|1-x^2-4y^2|} = 0$. А значит функция $g(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & 1-x^2-4y^2 \neq 0, \\ 0, & 1-x^2-4y^2 = 0 \end{cases}$ будет непрерывной в точках указанного эллипса.

Решаем первое неравенство системы (2.7). Оно равносильно системе

$$\begin{cases} 1-x^2-4y^2 \neq 1, \\ 1-x^2-4y^2 \neq -1. \end{cases} \quad (2.8)$$

Первое неравенство системы равносильно неравенству $x^2 + 4y^2 \neq 0$. Из последнего неравенства следует, что точка $(0, 0)$ – точка разрыва нашей функции, причём второго рода, так как $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1}{\ln|1-x^2-4y^2|} = \infty$.

Второе неравенство системы (2.8) равносильно неравенству

$$\frac{x^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} \neq 1. \quad (2.9)$$

Из неравенства (2.9) следует, что точки эллипса $\frac{x^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$ будут точками разрыва функции второго рода, так как предел функции в этих точках будет бесконечным. ►

2.4 Свойства непрерывных функций

2.4.1 Арифметические операции над непрерывными функциями

Теорема 2.2. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ ($x = (x_1, \dots, x_n)$) непрерывны в точке $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$, то и функции

$$\mu(x) = f_1(x) \pm f_2(x), \quad q(x) = f_1(x) \cdot f_2(x), \quad l(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \quad (f_2(x^{(0)}) \neq 0)$$

непрерывны в точке $(x^{(0)})$.

◀ Справедливость заключений теоремы есть очевидное следствие из соответствующих теорем об арифметических операциях над пределами функций многих переменных, которые доказываются аналогично соответствующим теоремам для функции одной переменной. ►

2.5 О непрерывности сложной функции

Вначале дадим понятие сложной функции.

Определение 2.7. Пусть на множестве \mathbb{R}^n задана функция n переменных $U = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, где функции $x_i = \varphi_i(t) = \varphi_i(t_1, t_2, \dots, t_m)$ ($i = \overline{1, n}$, $t_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1, m}$) определены на множестве $T \subset \mathbb{R}^m$, причём $E(\varphi_i) \subset X$. Тогда говорят, что на множестве T задана сложная функция

$$U = f(\varphi(t)) = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)).$$

Теорема 2.3. Пусть на множестве $T \subset \mathbb{R}^n$ определена сложная функция $U = f(\varphi(t))$. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \in X$, а функции $x_i = \varphi_i(t)$ ($i = \overline{1, n}$) непрерывны в точке $t^{(0)} = (t_1^{(0)}, t_2^{(0)}, \dots, t_m^{(0)}) \in T$, то сложная функция $U = f(\varphi(t))$ непрерывна в точке $t^{(0)}$.

Замечание 2.9. Справедливость заключения теоремы 2.3 есть очевидное следствие из теоремы о пределе сложной функции многих переменных, доказательство которой мы опускаем (оно во многом аналогично доказательству теоремы о пределе сложной функции одной переменной). Доказательства последующих теорем для непрерывных функций многих переменных также будут опущены (их доказательства также во многом аналогичны доказательствам соответствующих теорем для функций одной переменной).

2.5.1 Об устойчивости знака непрерывной функции

Теорема 2.4. Пусть функция $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, непрерывна в точке $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ и $f(x^{(0)}) > 0$ ($f(x^{(0)}) < 0$). Тогда существует окрестность точки из области определения функции, в которой $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$).

Замечание 2.10. Справедливость заключения теоремы непосредственно следует из определения по Коши непрерывности функции в точке и теоремы о сохранении функцией знака предела (обоснование проведите самостоятельно).

2.5.2 О прохождении непрерывной функции через любые промежуточные значения

Теорема 2.5. Пусть функция $f(x)$ непрерывна во всех точках связного множества $G \subset D(f) \subset \mathbb{R}^n$, причём $f(x^{(0)})$ и $f(\bar{x}^{(0)})$ – значения этой функции в некоторых точках $x^{(0)}, \bar{x}^{(0)} \in G$.

Пусть $f(x^{(0)}) < f(\bar{x}^{(0)})$ и $c \in (f(x^{(0)}); f(\bar{x}^{(0)}))$ – любое действительное число. Тогда на любой непрерывной спрямляемой кривой L , соединяющей точки $x^{(0)}$ и $\bar{x}^{(0)}$ и целиком расположенной в G , существует точка $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ такая, что $f(x^*) = c$.

◀ Указанную в теореме кривую L можем представить следующим образом:

$$x_i = \varphi_i(t), \quad i = \overline{1, n}, \quad t \in [\alpha, \beta],$$

где функции $\varphi_i(t) \in C[\alpha, \beta]$ (непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$). Тогда сложная функция $U = f(\varphi(t)) = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)) = \mu(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, непрерывна на указанном отрезке $[\alpha, \beta]$ и её значения совпадают со значениями функции $f(x)$, заданной на кривой L .

Имеем условия второй теоремы Больцано – Коши для функции одной переменной: функция $\mu(t)$ определена и непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$, $\alpha < \beta$; значения функции $\mu(\alpha) < \mu(\beta)$ ($\mu(\alpha) = f(\varphi(\alpha)) = f(x^{(0)})$; $\mu(\beta) = f(\varphi(\beta)) = f(\bar{x}^{(0)})$), тогда в некоторой точке $\gamma \in [\alpha, \beta]$ сложная функция $f(\varphi(t)) = \mu(t)$ принимает значение, равное C , то есть $f(\varphi(\gamma)) = f(x^*) = C$. ►

2.5.3 Теорема Вейерштрасса

Теорема 2.6 (первая теорема Вейерштрасса). *Если функция многих переменных определена и непрерывна на компакте, то она ограничена на этом компакте.*

◀ Доказательство теоремы аналогично доказательству такой же теоремы для функции одной переменной. ►

Теорема 2.7 (вторая теорема Вейерштрасса). *Если функция определена и непрерывна на компакте, то она достигает на этом компакте своих точных граней.*

◀ Доказательство теоремы аналогично доказательству такой же теоремы для функции одной переменной. ►

Пример 2.12. Найти множество значений функции

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1},$$

определенной на квадрате

$$\overline{P} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1, \\ 0 \leq y \leq 1 \end{array} \right\}.$$

◀ Функция f определена на компакте \overline{P} . По второй теореме Вейерштрасса она достигает на этом компакте своих точных граней (своего наибольшего и наименьшего значений). Очевидно, что в точке $O(0, 0)$ функция имеет наибольшее значение, равное 1, а в точке $A(1, 1)$ – наименьшее, равное $\frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{2}}{1-2} = \sqrt{2}-1$. $E(f) = [\sqrt{2}-1; 1]$. ►

2.6 Равномерная непрерывность функций

Определение 2.8. *Функция $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, называется равномерно непрерывной на множестве $G \subset D(f) \subset \mathbb{R}^n$, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x', x'' \in G \quad (x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n), \quad x'' = (x''_1, x''_2, \dots, x''_n))$$

$$\rho(x', x'') = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x'_i - x''_i)^2} < \delta \quad |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Замечание 2.11. Если функция $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, равномерно непрерывна на множестве $G \subset D(f) \subset \mathbb{R}^n$, то она будет и непрерывной на этом множестве. Для доказательства достаточно в определении 2.8 вместо x' взять любую точку $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \in G$ и зафиксировать её, а в качестве x'' взять $x \in G$ (x – текущая точка в G). При таком выборе будем иметь определение непрерывности функции $f(x)$ в точке $x^{(0)} \in G$ ($\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in G \quad \rho(x^{(0)}, x) < \delta \Rightarrow |f(x^{(0)}) - f(x)| < \varepsilon$).

Пример 2.13. Доказать по определению 2.8, что функция $f(x, y) = x + y$ будет равномерно непрерывной на \mathbb{R}^2 .

◀ Возьмём любое $\varepsilon > 0$. Для нахождения $\delta > 0$ (из определения 2.8) для любых точек $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ из \mathbb{R}^2 запишем оценки

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{|x_1 - x_2|}{|y_1 - y_2|}} &\leq \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \leq \\ &\leq \sqrt{|x_1 - x_2|^2 + 2|x_1 - x_2||y_1 - y_2| + |y_1 - y_2|^2} = \\ &= |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Потребуем, чтобы $\begin{cases} |x_1 - x_2| < \frac{\varepsilon}{2}, \\ |y_1 - y_2| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$. Тогда в качестве δ возьмём ε . Получим: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \varepsilon > 0 \forall M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, удовлетворяющих неравенству

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < \delta = \varepsilon,$$

$$f(M_1) - f(M_2) = |x_1 + y_1 - x_2 - y_2| \leq |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \blacktriangleright$$

Теорема 2.8 (теорема Кантора). Если функция $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, определена и непрерывна на компакте $K \subset \mathbb{R}^n$, то она будет равномерно непрерывной на компакте K .

Замечание 2.12. Доказательство теоремы 2.8 проводится аналогично доказательству теоремы Кантора о равномерной непрерывности функции одной переменной, непрерывной на отрезке (замените термин «отрезок $[a, b]$ » термином «компакт K », точку $x \in \mathbb{R}$ – точкой $M \in \mathbb{R}^n$, выражения $|x_1 - x_2|$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, выражением $\rho(M_1, M_2)$ и проведите доказательство теоремы самостоятельно).

ЛЕКЦИЯ 3

Частные производные и дифференциал функции многих переменных

3.1 Частные производные функции многих переменных

Через $x \in \text{Int}X$ будем обозначать внутреннюю точку множества X . Рассмотрим функцию $U = f(x)$, $x = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$, $D(f) = G \subset \mathbb{R}^n$. Пусть $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_i^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \in \text{Int}D(f)$. **Частным приращением** функции f в точке $x^{(0)}$ по аргументу $x_i^{(0)}$ называется разность

$$\Delta_{x_i} f(x^{(0)}) = f\left(x_1^{(0)}, \dots, x_i^{(0)} + \Delta x_i, \dots, x_n^{(0)}\right) - f\left(x_1^{(0)}, \dots, x_i^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\right), \quad (3.1)$$

где $\Delta x_i \neq 0$ – любое, но такое, чтобы приращённая точка принадлежала окрестности $U(x_0, \delta)$.

Полным приращением функции $f(x)$ в точке x_0 называется разность

$$\Delta u(x_0) = \Delta f(x_0) = f\left(x_1^{(0)} + \Delta x_1, x_2^{(0)} + \Delta x_2, \dots, x_n^{(0)} + \Delta x_n\right) - f\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\right),$$

где точка $M' \left(x_1^{(0)} + \Delta x_1, x_2^{(0)} + \Delta x_2, \dots, x_n^{(0)} + \Delta x_n \right) \in U(x_0, \varepsilon) \subset G$.

Замечание 3.1. Так как в физических задачах, используются чаще функции двух и трех переменных, то геометрические иллюстрации математических понятий и примеры будем приводить для функций двух и трех переменных.

Проиллюстрируем на примере функции двух переменных $z = f(x, y)$ геометрический смысл частных приращений $\Delta_x f(P_0)$, $\Delta_y f(P_0)$ и полного приращения $\Delta f(P_0)$ в точке $P_0(x_0, y_0)$ (рисунок 8.8).

Точка $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ и кривые M_0B_1 , M_0B_2 , B_1B_3 , B_2B_3 принадлежит графику функции $z = f(x, y)$, частные приращения функции $z = f(x, y)$ по переменным x и y равны длине отрезка A_1B_1 ($\Delta_x f(P_0) = |A_1B_1|$) и длине отрезка A_2B_2 ($\Delta_y f(P_0) = |A_2B_2|$), а полное приращение функции $z = f(x, y)$ равно длине отрезка A_3B_3 ($\Delta f(P_0) = |A_3B_3|$).

Определение 3.1. Функция $f(x)$ называется **непрерывной** в точке $x^{(0)}$ по переменной x_i , если

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \Delta_{x_i} f(x^{(0)}) = 0. \quad (3.2)$$

Определение 3.2. Частной производной функции $f(x)$ в точке $x^{(0)} \in \text{Int}D(f)$ по аргументу x_i называется предел (если он существует и конечен)

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\Delta_{x_i} f(x^{(0)})}{\Delta x_i}. \quad (3.3)$$

Обозначения частных производных:

$$\frac{\partial U(x^{(0)})}{\partial x_i}, \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i}, U'_{x_i}(x^{(0)}), f'_{x_i}(x^{(0)}).$$

Например:

$$\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\Delta_{x_i} f(x^{(0)})}{\Delta x_i}. \quad (3.4)$$

Проиллюстрируем геометрический смысл частных производных на примере функции двух переменных $z = f(x, y)$ (рисунок 8.9).

Точка $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ принадлежит графику функции $z = f(x, y)$ (некоторой поверхности), графики функций $z = f(x, y_0)$ (кривая AB) и $z = f(x_0, y)$ (кривая CD) есть линии пересечения этой поверхности с плоскостями $y = y_0$ и $x = x_0$, l_1 и l_2 касательные к кривым AB и CD в точке M_0 . Исходя из геометрического смысла производной для функции одной переменной $f'_x(x_0, y_0) = \tan \alpha$, где α – угол между осью Ox и касательной l_1 и $f'_y(x_0, y_0) = \tan \beta$, где β – угол между осью Oy и касательной l_2 .

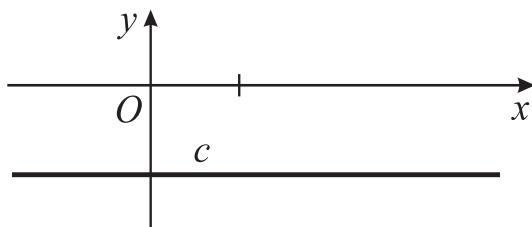


Рисунок 3.1

Замечание 3.2. Так как при введении понятия частной производной функции $f(x)$ по аргументу x_i остальные аргументы фиксируются, то эта частная производная в такой ситуации есть обычная производная функции одной переменной. По этой причине вычисление частных производных проводится по формулам вычисления производных функций одной переменной.

Пример 3.1. Найти частные производные функции $f(x; y) = \frac{x}{y}$ в точке $M_0(0, 1)$, используя определение 3.2.

$$\blacktriangleleft f'_x(0; 1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x; 1) - f(0; 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x - 0}{\Delta x} = 1,$$

$$f'_y(0; 1) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0; 1 + \Delta y) - f(0; 1)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{1+\Delta y} - 0}{\Delta y} = 0. \blacktriangleright$$

Пример 3.2. Найти частные производные функций, используя формулы для нахождения производных функций одной переменной.

a) $f(x, y) = 3 \cdot 2^{-4 \sin^{20} \frac{1-y}{x}}$.

$$\blacktriangleleft f'_x(x, y) = 3 \cdot 2^{-4 \sin^{20} \frac{1-y}{x}} \cdot \ln 2(-4) \cdot 20 \sin^{19} \frac{1-y}{x} \cos \frac{1-y}{x} (1-y) \left(-\frac{1}{x^2} \right);$$

$$f'_y(x, y) = 3 \cdot 2^{-4 \sin^{20} \frac{1-y}{x}} \cdot \ln 2(-4) \cdot 20 \sin^{19} \frac{1-y}{x} \cos \frac{1-y}{x} \frac{1}{x} (-1). \blacktriangleright$$

6) $f(x, y) = (\arcsin(x^2 \sqrt{y}))^{\operatorname{ctg}^3 \frac{1}{x-4x^2}}$.

$$\blacktriangleleft f'_x(x, y) = (\arcsin(x^2 \sqrt{y}))^{\operatorname{ctg}^3 \frac{1}{x-4x^2}} \cdot \ln(\arcsin(x^2 \sqrt{y})) 3 \operatorname{ctg}^2 \frac{1}{x-4x^2} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \left(-\frac{1}{\sin^2 \frac{1}{x-4x^2}} \right) \frac{-(1-8x)}{(x-4x^2)} + \operatorname{ctg}^3 \frac{1}{x-4x^2} (\arcsin(x^2 \sqrt{y}))^{\operatorname{ctg}^3 \frac{1}{x-4x^2}-1} \times \\ & \quad \times \frac{1}{\sqrt{1 - (x^2 \sqrt{y})^2}} \sqrt{y} \cdot 2x; \end{aligned}$$

$$f'_y(x, y) = \operatorname{ctg}^3 \frac{1}{x-4x^2} (\arcsin(x^2 \sqrt{y}))^{\operatorname{ctg}^3 \frac{1}{x-4x^2}-1} \frac{1}{\sqrt{1 - (x^2 \sqrt{y})^2}} x^2 \frac{1}{2\sqrt{y}}. \blacktriangleright$$

Замечание 3.3. Существование частных производных функции даже по всем переменным в точке не является достаточным условием непрерывности функции в этой точке в отличие от функции одной переменной. Например, нами ранее было показано, что функция

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

терпит разрыв в точке $(0, 0)$. Покажем, что в этой точке существуют обе частные производные.

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x \cdot 0 - 0}{\Delta x} = 0.$$

Аналогично и $f'_y(0, 0) = 0$.

Замечание 3.4. Нами введены понятия и частных производных функции для внутренних точек её области определения. Если же точка граничная, то не всегда можно вычислить частные производные функции в этой точке.

По этой причине частные производные в граничных точках определяются как пределы производных при стремлении точек к границе.

Пример 3.3. Найти односторонние частные производные функции $f(x, y) = x^2y$ в точке $M_0(1, 1)$, заданной на квадрате

$$\overline{P} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{array} \right\}.$$

◀ Находим частные производные функции f во внутренних точках квадрата. $f'_x(x, y) = 2xy$, $f'_y(x, y) = x^2$. Тогда $f'_x(1, 1) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1-0 \\ y \rightarrow 1-0}} 2xy = 2$, $f'_y(1, 1) = \lim_{x \rightarrow 1-0} x^2 = 1$. ►

3.2 Дифференцируемость функции многих переменных и дифференциал

Пусть дана функция $U = f(x)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in G = D(f)$, и

$$x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \in \text{Int}D(f).$$

Определение 3.3. Функция $U = f(x)$, $x \in G = D(f) \subset \mathbb{R}^n$ называется **дифференцируемой** в $x^{(0)} \in \text{Int}D(f)$, если полное приращение функции f в точке $x^{(0)}$ представимо в виде

$$\Delta f(x^{(0)}) = \sum_{i=1}^n A_i \Delta x_i + \sum_{i=1}^n \alpha_i(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n) \Delta x_i, \quad (3.5)$$

где A_i – некоторые действительные константы, не зависящие от Δx_i , $i = \overline{1, n}$; а $\alpha_i(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$ – бесконечно малые при $\Delta x_i \rightarrow 0$, $i = \overline{1, n}$, то есть

$$\lim_{\substack{\Delta x_i \rightarrow 0 \\ i=\overline{1,n}}} \alpha_i(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n) = 0. \quad (3.6)$$

Если функция $f(x)$ дифференцируема в каждой точке множества $M \subset D(f)$, то она называется **дифференцируемой на множестве** M .

Замечание 3.5. Обозначим через

$$\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2}. \quad (3.7)$$

Видно, что $\rho \rightarrow +0 \Leftrightarrow \Delta x_i \rightarrow 0$, $i = \overline{1, n}$. Оценим сверху $\left| \sum_{i=1}^n \alpha_i \Delta x_i \right|$.

$$\left| \sum_{i=1}^n \alpha_i \Delta x_i \right| \leq \rho \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \frac{|\Delta x_i|}{\rho} = \left[\frac{|x_i|}{\rho} = \frac{|x_i|}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \Delta x_i^2}} \leq \frac{|x_i|}{|x_i|} = 1 \right] \leq$$

$$\leq \rho \sum_{i=1}^n |\alpha_i| = o(\rho), \quad (3.8)$$

где $o(\rho)$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем ρ , при $\rho \rightarrow +0$.

С учётом (3.8) соотношение (3.5) примет вид:

$$\Delta f(x^{(0)}) = \sum_{i=1}^n A_i \Delta x_i + o(\rho), \quad \rho \rightarrow +0. \quad (3.9)$$

Условия (3.9) и (3.5) эквивалентны.

Определение 3.4. Пусть функция $f(x)$, $x \in D(f) \subset \mathbb{R}^n$, дифференцируема в точке $x \in \text{Int}D(f)$, то есть, справедливо представление (3.5). В этом случае первое слагаемое в правой части (3.5) называется **дифференциалом функции** f в точке $x^{(0)}$. Дифференциал обозначают

$$df(x^{(0)}) = \sum_{i=1}^n A_i \Delta x_i. \quad (3.10)$$

Если хотя бы одна из констант A_i , $i = \overline{1, n}$, не равна нулю, то дифференциал функции в точке есть главная линейная относительно приращений аргументов часть полного приращения дифференцируемой функции.

Пример 3.4. Доказать, используя определение, что функция $f(x, y) = x^2y$ дифференцируема на числовой плоскости \mathbb{R}^2 . Найти полное приращение и дифференциал функции в точке $M_0(1, 0)$.

◀ Запишем полное приращение функции в любой точке $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \Delta f(x_0, y_0) &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \\ &= (x_0 + \Delta x)^2(y_0 + \Delta y) - x_0^2y_0 = (x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2)(y_0 + \Delta y) - x_0^2y_0 = \\ &= x_0^2\Delta y + 2x_0y_0\Delta x + 2x_0\Delta x\Delta y + y_0(\Delta x)^2 + \Delta y(\Delta x)^2 = \\ &= 2x_0y_0\Delta x + x_0\Delta y + (2x_0\Delta y + y_0\Delta x)\Delta x + (\Delta x)^2\Delta y. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Правая часть (3.11) имеет вид (3.5), где

$$A_1 = 2x_0y_0, \quad A_2 = x_0, \quad \alpha_1 = 2x_0\Delta y + y_0\Delta x, \quad \alpha_2 = (\Delta x)^2.$$

Дифференцируемость на \mathbb{R}^2 доказана.

Тогда дифференциал функции в точке (x_0, y_0) будет

$$df(x_0, y_0) = 2x_0y_0\Delta x + x_0\Delta y. \quad (3.12)$$

Если $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, то

$$df(1, 0) = \Delta y. \quad (3.13)$$

Полное приращение функции f в точке $(1, 0)$ будет:

$$\Delta f(1, 0) = \Delta y + 2\Delta y\Delta x + (\Delta x)^2\Delta y \blacktriangleright.$$

3.3 О связи непрерывности и существования частных производных с дифференцируемостью

Теорема 3.1. Если функция $f(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, дифференцируема в точке $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \in \text{Int}D(f)$, то в этой точке функция непрерывна и существуют частные производные функции в этой точке, причём $\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} = A_i$, где A_i ($i = \overline{1, n}$) определяется (3.5).

◀ Переходим к пределу в (3.5) при всех $\Delta x_i \rightarrow 0$, $i = \overline{1, n}$. Получим:

$$\lim \Delta f(x^{(0)}) = 0, \text{ при } \Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n \rightarrow 0.$$

Из определения непрерывности функции в точке «на языке приращений» получим, что функция f непрерывна в точке $x^{(0)}$.

Дальше разделим левую и правую части равенства (3.5) на Δx_i и перейдём при $\Delta x_i \rightarrow 0$ к пределу (считаем в (3.5) все приращения аргументов, за исключением Δx_i , равными нулю). Тогда $\Delta f(x^{(0)}) = \Delta_{x_i} f(x^{(0)})$.

Получим:

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\Delta_{x_i} f(x^{(0)})}{\Delta x_i} = A_i, \quad (i = \overline{1, n}). \blacktriangleright$$

Следствие 3.1. С учётом заключения теоремы 3.1 и определения 3.4 дифференциала (полного дифференциала) функции в точке, получим:

$$df(x^{(0)}) = \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(x^{(0)}) dx_i, \quad (3.14)$$

где (по определению) $\Delta x_i = dx_i$.

Пример 3.5. Найти дифференциал функции $f(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x}} + \frac{x}{\sqrt{y}}$.

◀ Находим частные производные функции.

$$f'_x(x, y) = y \left(-\frac{1}{2} \right) x^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{y}{2\sqrt{x^3}}, \quad f'_y = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{x}{2\sqrt{y^3}}.$$

$$df(x, y) = \left(\frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{y}{2\sqrt{x^3}} \right) dx + \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{x}{2\sqrt{y^3}} \right) dy, \quad \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}. \blacktriangleright$$

3.4 Достаточное условие дифференцируемости

Теорема 3.2. Если функция $U = f(x)$, где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D(f) \subset \mathbb{R}^n$, имеет частные производные в некоторой окрестности точки $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$, а в самой точке $x^{(0)}$ эти частные производные непрерывны, то функция f дифференцируема в точке $x^{(0)}$.

◀ Доказательство приведём для функции двух переменных (доказательство теоремы в общем случае аналогично).

Рассмотрим функцию $U = f(x, y)$, удовлетворяющую условиям теоремы и точку $x^{(0)} = (x_0, y_0)$.

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) =$$

$$= (f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)) + (f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)).$$

Применяя теорему Лагранжа, получим:

$$\Delta f(x_0, y_0) = f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) \Delta x + f'_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y) \Delta y, \quad (3.15)$$

где θ_1 и $\theta_2 \in (0, 1)$.

Дальше воспользуемся аналогом известного для функции одной переменной критерия: $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$, где $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$. Получим:

$$\begin{aligned} \Delta f(x_0, y_0) &= (f'_x(x_0, y_0) + \alpha(\Delta x, \Delta y)) \Delta x + \\ &+ (f'_y(x_0, y_0) + \beta(\Delta x, \Delta y)) \Delta y = f'_x(x_0, y_0) \Delta x + \\ &+ f'_y(x_0, y_0) \Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y) \Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y) \Delta y, \end{aligned} \quad (3.16)$$

где $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \alpha(\Delta x, \Delta y) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \beta(\Delta x, \Delta y) = 0$.

При выводе равенства (3.16) учтено, что частные производные $f'_x(x, y)$ $f'_y(x, y)$ непрерывны в точке (x_0, y_0) . ►

Замечание 3.6. Непрерывность частных производных функции в точке не есть необходимое условие её дифференцируемости в этой точке. Покажем это на конкретном примере. Рассмотрим функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{если } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x^2 + y^2 = 0. \end{cases} \quad (3.17)$$

Найдём частные производные функции в точке $(0, 0)$:

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^2 \sin \frac{1}{|\Delta x|}}{\Delta x} = 0.$$

Аналогично и $f'_y(0, 0) = 0$.

Частная производная функции f в любой точке из \mathbb{R}^2 , отличной от точки $(0, 0)$, будет:

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= 2x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \\ &+ (x^2 + y^2) \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left(-\frac{1}{2} \right) (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} 2x = \\ &= x \left(2 \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{\cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Покажем, что для функции $f'_x(x, y)$ не существует предела при Δx и $\Delta y \rightarrow 0$. Переайдём к полярным координатам $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$.

$$\lim_{r \rightarrow +0} r \cos \varphi \left(2 \sin \frac{1}{r} - \frac{\cos \frac{1}{r}}{r} \right) = \lim_{r \rightarrow +0} \left(2r \cos \varphi \sin \frac{1}{r} - \cos \varphi \cos \frac{1}{r} \right). \quad (3.19)$$

Видно, что $\lim_{r \rightarrow +0} 2r \cos \varphi \sin \frac{1}{r} = 0$, но предела $\lim_{r \rightarrow +0} \cos \varphi \cos \frac{1}{r}$ не существует, так как частичный предел при $\varphi = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$, равен нулю, а при $\varphi = 2\pi n$ частичного предела не существует. Значит, не существует предела (3.19), то есть частная производная $f'_x(x, y)$ терпит разрыв в точке $(0, 0)$.

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \Delta f(0, 0) &= f(0 + \Delta x, 0 + \Delta y) - f(0, 0) = 0 \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y + \\ &+ \Delta x \sin \frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \Delta x + \Delta y \sin \frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \Delta y. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Представление (3.20) доказывает дифференцируемость функции f в точке $(0, 0)$.

3.5 Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Пусть функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные в области G (функция будет дифференцируемой в области G – теорема 3.2).

Графиком функции f будет поверхность; обозначим её через S .

Определение 3.5. *Касательной плоскостью Π к поверхности S в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, где $z_0 = f(x_0, y_0)$, $P_0(x_0, y_0) \in G$, называется плоскость, определяемая уравнением*

$$Z - z_0 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} (X - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} (Y - y_0). \quad (3.21)$$

Теорема 3.3. *Касательная плоскость Π к поверхности S в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ проходит через точку M_0 и обладает характерным для касательной плоскости Π свойством: расстояние в направлении оси Oz от любой точки $M(x, y, f(x, y)) \in S$ до плоскости Π (до точки $T \in \Pi$) есть бесконечно малая величина более высокого порядка, чем $\rho = (P_0, P)$, $\rho \rightarrow +0$ (есть $o(\rho)$, $\rho \rightarrow +0$), где P_0 и P соответственно проекции точек M_0 и M на плоскость $Z = 0$ (рисунок 3.2).*

◀ С учётом формулы (3.9) получим:

$$\begin{aligned} |MT| &= \left| f(x, y) - \left(f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(P_0)}{\partial x} (X - x_0) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial f(P_0)}{\partial y} (Y - y_0) \right) \right| = o(\rho), \quad \rho \rightarrow +0. \end{aligned}$$

Замечание 3.7. Справедливо и обратное утверждение, то есть если есть такая плоскость Π' , уравнение которой

$$Z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0), \quad (3.22)$$

где $z_0 = f(x - x_0)$, то для этой плоскости справедливо равенство

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0) + o(\rho), \quad \rho \rightarrow +0, \quad (3.23)$$

или

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y + o(\rho) \quad (3.24)$$

Рисунок 3.2

($f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0) , $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$).

Представление (3.24) означает, что Π' есть касательная плоскость к поверхности S в точке $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Справедлива теорема-критерий.

Теорема 3.4. Для того, чтобы поверхность S имела касательную плоскость Π в точке $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x, y)$ была дифференцируемой в точке $P_0(x_0, y_0) \in G \subset D(f)$.

Определение 3.6. Нормалью к поверхности S в точке $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \in S$ называется прямая, определяемая системой уравнений

$$\frac{X - x_0}{M'_x(P_0)} = \frac{Y - y_0}{f'_y(P_0)} = \frac{Z - z_0}{-1} \quad (3.25)$$

(обозначения и условия определены выше).

Другими словами, нормалью к поверхности S в точке $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \in S$ называется прямая, для которой нормальный вектор $\vec{n} = \left(\frac{\partial f(P_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(P_0)}{\partial y}, -1 \right)$ касательной плоскости к поверхности S в точке M_0 является направляющей.

Пример 3.6. Написать уравнения касательных плоскостей и нормалей к поверхности – графику функции $z = xy$ в точках: а) $(0, 0, 0)$, б) $(2, 1, 2)$.

а) $z'_x = y \Big|_{y=0} = 0$, $z'_y = x \Big|_{x=0} = 0$.

Уравнение касательной плоскости:

$$z - 0 = 0(x - 0) + 0(y - 0), \quad z = 0.$$

Через точку $P_0(0, 0)$ проходит ось Oz , которая и будет нормалью к касательной плоскости $z = 0$.

б) $z'_x = y \Big|_{y=1} = 1$, $z'_y = x \Big|_{x=2} = 2$.

Уравнение касательной плоскости:

$$z - 2 = x - 2 + 2(y - 1), \quad x + 2y - z - 2 = 0.$$

Уравнение нормали:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-1}. \blacktriangleright$$

3.6 Геометрический смысл дифференциала функции

Пусть функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $P_0(x_0, y_0)$. Тогда $df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$. С другой стороны, $df(x_0, y_0) = Z - z_0$.

Таким образом, дифференциал $df(P_0)$ функции f в точке $P_0(x_0, y_0)$ с геометрической точки зрения есть приращение аппликаты точки касательной плоскости к поверхности $z = f(x, y)$ в точке $P_0(x_0, y_0)$ при переходе от точки (x_0, y_0) к её приращённой точке $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = (x, y)$. На рисунке 3.2 у нас $df(P_0) = NT$.

3.7 Производные и дифференциалы сложных функций

Пусть в области $G \subset \mathbb{R}^3$ задана функция $u = f(x, y, z)$, где $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, а множество

$$\{x(t), y(t), z(t)\} \subset D(f), t \in I,$$

где I – промежуток. Имеем на промежутке I сложную функцию $u = f(x(t), y(t), z(t))$.

Теорема 3.5. Если функция $f(x, y, z)$ дифференцируема в точке $M(x, y, z) \in G$, где $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, а для функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ существуют производные в точке $t \in I$, то сложная функция $f(x(t), y(t), z(t))$ имеет производную в точке t , которая вычисляется по формуле

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt}. \quad (3.26)$$

◀ Точке t придаём любое приращение $\Delta t \neq 0$, но такое, чтобы $t + \Delta t \in I$. Указанное приращение порождает приращения функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ соответственно Δx , Δy , Δz . Так как функция $f(x, y, z)$ дифференцируема в точке $M(x, y, z)$, где $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, то справедливо равенство

$$\Delta u = \Delta f(x, y, z) = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z + \alpha \Delta x + \beta \Delta y + \gamma \Delta z, \quad (3.27)$$

где $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$, $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$, $\gamma = \gamma(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ есть бесконечно малые при $\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0$.

Разделив левую и правую части равенства (3.27) на $\Delta t \neq 0$, получим:

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\Delta z}{\Delta t} + \alpha \frac{\Delta x}{\Delta t} + \beta \frac{\Delta y}{\Delta t} + \gamma \frac{\Delta z}{\Delta t}. \quad (3.28)$$

Переходим к пределу в равенстве (3.28) при $\Delta t \rightarrow 0$.

Так как функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ дифференцируемы в точке t , то они и непрерывны в этой точке, поэтому при $\Delta t \rightarrow 0$ будут $\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0$.

Тогда

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt}. \blacktriangleright$$

Замечание 3.8. Если $x = x(t, \tau)$, $y = y(t, \tau)$, $z = z(t, \tau)$ и указанные функции дифференцируемы в точке (t, τ) и выполняются остальные условия теоремы 3.5, то сложная функция $f(x(t, \tau), y(t, \tau), z(t, \tau)) = \mu(t, \tau)$ дифференцируема в точке (t, τ) и для существующих частных производных функции $\mu(t, \tau)$ справедливы формулы

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t}, \quad (3.29)$$

и

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \tau} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \tau}. \quad (3.30)$$

◀ При выводе формул (3.29) (3.30) сначала фиксируем τ , а потом t и, учитывая (3.26), получаем требуемые формулы.

Для доказательства дифференцируемости функции μ записываем полные приращения функций $f(x, y, z)$, $x(t, \tau)$, $y(t, \tau)$, $z(t, \tau)$, и в равенство для $\Delta f(x, y, z)$ подставляем представления для $\Delta x(t, \tau)$, $\Delta y(t, \tau)$, $\Delta z(t, \tau)$. ►

Замечание 3.9. Если функция $u = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M(x, y)$, где $y = y(x)$, и существует $y'(x)$, то функция $f(x, y(x))$ – дифференцируема в точке x и справедлива формула (множество $\{(x, y(x))\} \subset D(f)$)

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dx}. \quad (3.31)$$

Справедливость указанных предложений следует из аналога теоремы 3.5 для функции двух переменных (учесть, что $\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dx} = 1$).

Производная, определяемая формулой (3.31), называется полной производной функции u по x .

Пример 3.7. Дано: $z = \arcsin(x - y)$, где $x = 3t$, $y = 4t^3$. Найти промежуток I изменения переменной t , где существует $\frac{dz}{dt}$. Записать формулу для этой производной.

◀ Область определения функции $\arcsin(x - y)$ есть множество решений неравенства

$$|x - y| \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y \leq 1, \\ x - y \geq -1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq y + 1, \\ x \geq y - 1. \end{cases} \quad (3.32)$$

Изобразим множество решений системы (3.32) на рисунке 3.3.

Рисунок 3.3

В систему (3.32) подставляем $x = 3t$, $y = 4t^3$.

$$\begin{cases} 3t \leq 4t^3 + 1, \\ 3t \geq 4t^3 - 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4t^3 - 3t + 1 \geq 0, \\ 4t^3 - 3t - 1 \leq 1, \end{cases} \quad -1 \leq t \leq 1$$

На промежутке $I = (-1, 1)$ выполняется аналог теоремы 3.5 для функции двух переменных. Тогда существует

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1 - (x-y)^2}} \left|_{\substack{x=3t \\ y=4t^3}} \right. \cdot 3 + \frac{-1}{\sqrt{1 - (x-t)^2}} \left|_{\substack{x=3t \\ y=4t^3}} \right. \cdot 12t^2 = \\ &= \frac{3}{\sqrt{1 - (3t - 4t^3)^2}} (1 - 4t^2). \end{aligned}$$

3.8 Дифференциалы сложных функций. Инвариантность формы первого дифференциала

Если функция $u = f(x)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in G \subset \mathbb{R}^n$, и $x_i \in \mathbb{R}$ ($i = \overline{1, n}$) – независимые переменные, а функция f – дифференцируема в точке $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$, принадлежащей области G , то существует полный дифференциал функции f в точке $x^{(0)}$, определяемый формулой

$$df(x^{(0)}) = \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_n} dx_n. \quad (3.33)$$

Покажем, что формула (3.33) является универсальной в том смысле, что она сохраняет свою форму и в том случае, когда аргументы x_i , $i = \overline{1, n}$, сами являются функциями аргументов t_k , $k = \overline{1, m}$.

Обоснование предложения докажем для функции $u = f(x, y)$, где $x = x(t, v)$, $y = y(t, v)$. Сложная функция $u = f(x(t, v), y(t, v)) = \mu(t, v)$ будет дифференцируемой в точке (t, v) – внутренней точке области определения (следует из замечания 3.9). Тогда дифференциал сложной функции

$$du = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial v} dv, \quad (3.34)$$

но

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}, \quad (3.35)$$

и

$$\frac{\partial u}{\partial v} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}. \quad (3.36)$$

Подставляя (3.36) и (3.35) в (3.34), получим:

$$\begin{aligned} du &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \right) dt + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \right) dv = \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial x}{\partial t} dt + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) + \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial y}{\partial t} dt + \frac{\partial y}{\partial v} dv \right) = \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy. \blacksquare \end{aligned} \quad (3.37)$$

Указанное свойство называется **инвариантной** (неизменной) формой первого дифференциала.

3.9 Дифференциал функции и приближенные вычисления

Определим для функции $z = f(x, y)$ предельную абсолютную погрешность Δz , зная предельные абсолютные погрешности Δx и Δy аргументов x, y : $|\Delta x| \geq \Delta x$ и $|\Delta y| \geq \Delta y$.

Имеем $|\Delta z| = |f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)|$. Заменяя приращение функции ее дифференциалом, получим

$$|\Delta z| \approx |f'_x(x, y) \Delta x + f'_y(x, y) \Delta y|.$$

Отсюда выводим приближенную оценку:

$$|\Delta z| \leq \left| \frac{\partial z}{\partial x} \right| |\Delta x| + \left| \frac{\partial z}{\partial y} \right| |\Delta y|. \quad (3.38)$$

Следовательно, за предельную абсолютную погрешность функции z можно принять

$$\Delta z = \left| \frac{\partial z}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial z}{\partial y} \right| \Delta y.$$

Пример 3.8. Гипотенуза прямоугольного треугольника $x = 122$ см, а острый угол $y = 30^\circ \pm 1^\circ$. С какой точностью можно найти противолежащий данному углу катет z этого треугольника?

◀ Имеем:

$$z = x \sin y. \quad (3.39)$$

Отсюда $\frac{\partial z}{\partial x} = \sin y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x \cos y$. Полагая $x = 120$, $\Delta x = 2$ и $y = \frac{\pi}{6}$, $\Delta y = \frac{\pi}{180}$, по формулам (3.38) и (3.39) находим $z = 120 \sin 30^\circ = 60$ (см) и

$$\Delta z = \sin 30^\circ \cdot 2 + 120 \cdot \cos 30^\circ \cdot \frac{\pi}{180} = 1 + 1,8 = 2,8 \text{ (см)}.$$

Следовательно, $z = 60 \text{ см} \pm 2,8$. Используя формулу (3.38), можно определить также предельную относительную погрешность функции: $\delta_z = \frac{\Delta z}{|z|}$.

В частности, положим $z = xy$ ($x \neq 0$, $y \neq 0$). Тогда $\Delta z = |y| \Delta x + |x| \Delta y$ и, следовательно, $\delta_z = \frac{\Delta x}{|x|} + \frac{\Delta y}{|y|}$, или $\delta_z = \delta_x + \delta_y$, т.е. предельная относительная погрешность произведения равна сумме предельных относительных погрешностей сомножителей. ►

ЛЕКЦИЯ 4

Производная по направлению. Градиент. Производные и дифференциалы высших порядков

4.1 Производная по направлению. Градиент

Частные производные от функции многих переменных, являются производными «в направлении координатных осей». Поставим вопрос об определении и вычислении производной на случай произвольного направления. Рассмотрим этот вопрос на примере функции трех переменных.

Пусть функция $u = f(x, y, z)$, определена в области $D(f) = G \subset \mathbb{R}^3$. Рассмотрим некоторую точку $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \text{Int}G$ и найдем скорость изменения функции $u = f(x, y, z)$ при движении точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ в произвольном направлении \vec{l} . Пусть

вектор \vec{l} имеет начало в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и направляющие косинусы $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ ($\cos \alpha, \cos \beta$ и $\cos \gamma$ – косинусы углов, образованных вектором \vec{l} с положительными направлениями осей координат Ox, Oy и Oz). При перемещении в направлении вектора \vec{l} точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ в точку $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) \in U(M_0, \delta) \subset G$ функция $u = f(x, y, z)$ получает приращение

$$\Delta_l u = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z), \quad (4.1)$$

которое называется **приращением функции u в данном направлении \vec{l}** (рисунок 4.1). Если $|M_0 M_1| = \Delta l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$ есть величина перемещения точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, то получаем

Рисунок 4.1

$$\Delta x = \Delta l \cos \alpha, \quad \Delta y = \Delta l \cos \beta, \quad \Delta z = \Delta l \cos \gamma, \quad (4.2)$$

следовательно,

$$\Delta_l u = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z).$$

Определение 4.1. Производной функции $u = f(x, y, z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ по направлению называется предел (если он существует) отношения приращения функции $\frac{\Delta u}{\Delta l}$ к величине перемещения $|M_0 M_1|$, когда последнее стремится к нулю. Производная по направлению в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ в направлении вектора \vec{l} обозначается $\frac{\partial u(M_0)}{\partial l}$.

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta_l u}{\Delta l}. \quad (4.3)$$

С точки зрения определения 4.1 производные $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial z}$ можно рассматривать как производные функции $u = f(x, y, z)$ в положительных направлениях осей координат Ox, Oy и Oz .

Отметим, что производной функции $u = f(x, y, z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ по направлению не зависит от выбора системы координат, то есть $\frac{\partial u(M_0)}{\partial l}$ инвариантно по отношению к системе координат.

Производная по направлению вектора \vec{l} характеризует скорость изменения функции в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ по этому направлению. Если $\frac{\partial u(M_0)}{\partial l} > 0$, то функция $u = f(x, y, z)$ возрастает в направлении вектора \vec{l} , если $\frac{\partial u(M_0)}{\partial l} < 0$ то функция $u = f(x, y, z)$ убывает в направлении вектора \vec{l} . Кроме того, величина $\left| \frac{\partial u(M_0)}{\partial l} \right|$ представляет собой мгновенную скорость изменения функции $u = f(x, y, z)$ в направлении вектора \vec{l} в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$: чем больше $\left| \frac{\partial u(M_0)}{\partial l} \right|$, тем быстрее изменяется функция $u = f(x, y, z)$. В этом состоит **физический смысл производной по направлению**.

Выведем формулу для производной $\frac{\partial u(M_0)}{\partial l}$, предполагая, что функция $u = f(x, y, z)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Тогда полное приращение функции $u = f(x, y, z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ может быть представлено в виде

$$\Delta_l u = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z} \Delta z + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y + \alpha_3 \Delta z,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ бесконечно малые функции при $\Delta E \rightarrow 0, \Delta C \rightarrow 0$ и $\Delta z \rightarrow 0$.

Откуда в силу соотношения (8.12) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_l u}{\Delta l} &= \frac{\partial u(M_0)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z} \cos \gamma + \\ &\quad + \alpha_1 \cos \alpha + \alpha_2 \cos \beta + \alpha_3 \cos \gamma. \end{aligned}$$

Переходя к пределу в последней формуле при $\Delta l \rightarrow 0$, то есть при $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$ и $\Delta z \rightarrow 0$ и основываясь на определении (8.13), получим исковую формулу для производной функции в данном направлении:

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial l} = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z} \cos \gamma. \quad (4.4)$$

В случае функции двух переменных $u = f(x, y) \cos \beta = \sin \alpha, \cos \gamma = 0$. Тогда формула (8.14) примет вид

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial l} = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y} \sin \alpha.$$

Пример 4.1. Найти производную функции

$$u = f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4xz$$

в точке $M_0(0, 1, 2)$ в направлении от этой точки к точке $M_1(2, 3, 3)$.

◀ Находим вектор $\overrightarrow{M_0 M_1}$ и его направляющие косинусы:

$$\overrightarrow{M_0 M_1} = (2, 2, 1), \quad \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{2}{3}, \quad \cos \beta = \frac{2}{3}, \quad \cos \gamma = \frac{1}{3}.$$

Находим частные производные функции и вычисляем их значения в точке $M_0(0, 1, 2)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(M_0)}{\partial x} &= 2x, \quad \frac{\partial u(M_0)}{\partial y} = 2y - 4z, \quad \frac{\partial u(M_0)}{\partial z} = -4y, \\ \frac{\partial u(M_0)}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial u(M_0)}{\partial y} = -6, \quad \frac{\partial u(M_0)}{\partial z} = -4. \end{aligned}$$

Следовательно, по формуле (8.14) имеем:

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial l} = 0 \cdot \frac{2}{3} - 6 \cdot \frac{2}{3} - 4 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{16}{3}.$$

Поскольку $\frac{\partial u(M_0)}{\partial l} < 0$, то функция в данном направлении убывает. ►

Определение 4.2. Градиентом функции $u = f(x, y, z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ называется вектор, обозначаемый $\overrightarrow{\text{grad}f(M_0)}$, проекциями которого на оси декартовой прямоугольной системы координат являются частные производные функции $u = f(x, y, z)$ по соответствующим переменным, то есть

$$\overrightarrow{\text{grad}f(M_0)} = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z} \vec{k}. \quad (4.5)$$

Установим зависимость между производной по направлению $\frac{\partial u(M_0)}{\partial l}$ и векторной характеристикой $\overrightarrow{\text{grad}f(M_0)}$.

Покажем, что производная по направлению, заданной формулой (8.14), равна проекции вектора $\overrightarrow{\text{grad}f(M_0)}$ на это направление. Можно заметить, что правая часть равенства (8.14) представляет собой скалярное произведение единичного вектора $\vec{e} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ и вектора $\overrightarrow{\text{grad}f(M_0)}$

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = \vec{e} \cdot \overrightarrow{\text{grad}f(M_0)}$$

или

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = \left| \overrightarrow{\text{grad}f(M_0)} \right| \cos \varphi = \text{пр}_{\vec{l}} \overrightarrow{\text{grad}f(M_0)}, \quad (4.6)$$

где φ – угол между вектором $\overrightarrow{\text{grad}f(M_0)}$ и направлением \vec{l} (рисунок 4.2).

Рисунок 4.2

Соотношение (8.16) позволяет определить направление наибыстрейшего возрастания функции в данной точке: если $\frac{\partial f(M_0)}{\partial l}$ достигает наибольшего значения, то правая часть равенства (8.16) принимает наибольшее положительное значение, что имеет место, когда вектор \vec{l} направлен так же, как и $\overrightarrow{\text{grad}f(M_0)}$. Следовательно, направление градиента является направлением наибыстрейшего возрастания скалярного поля в данной точке. Отметим, что модуль градиента равен наибольшей скорости возрастания функции $u = f(x, y, z)$ в данной точке, поскольку максимальное значение проекции вектора равно его модулю. В этом состоит физический смысл градиента.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(M_0)}{\partial l} &= \left| \overrightarrow{\text{grad}f(M_0)} \right| = \\ &= \sqrt{\left(\frac{\partial f(M_0)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f(M_0)}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f(M_0)}{\partial z} \right)^2}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Замечание 4.1. Вектор $\overrightarrow{\text{grad}f(M_0)}$ направлен по нормали к поверхности уровня в данной точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Можно сформулировать и инвариантное по отношению к системе координат определение градиента.

Определение 4.3. Градиентом функции $u = f(x, y, z)$ называется вектор, имеющий направление наибольшего возрастания функции $u = f(x, y, z)$ в данной точке и модуль, равный значению производной от функции $u = f(x, y, z)$ по этому направлению.

Пример 4.2. Найти наибольшую скорость возрастания функции

$$u = f(x, y, z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$$

в точке $M_0(-1, 1, -1)$.

◀ Найдем частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ и их значения в точке $M_0(-1, 1, -1)$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{y} - \frac{z}{x^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{z}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{y}{z^2} + \frac{1}{x}, \\ \frac{\partial f(M_0)}{\partial x} &= 2, \quad \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f(M_0)}{\partial z} = -2, \\ \overrightarrow{\text{grad}f(M_0)} &= 2\vec{i} + 0\vec{j} - 2\vec{k} = 2\vec{i} - 2\vec{k}.\end{aligned}$$

Наибольшая скорость возрастания функции равна

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = \left| \overrightarrow{\text{grad}f(M_0)} \right| = \sqrt{4 + 0 + 4} = 2\sqrt{2}.$$

Отметим, что функция $u = f(x, y, z)$ будет убывать с наибольшей скоростью $(2\sqrt{2})$, если точка $M_0(-1, 1, -1)$ движется в направлении $\overrightarrow{\text{grad}f(M_0)} = -2\vec{i} + 2\vec{k}$ (антиградиентное направление).

Ответ: $\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = \left| \overrightarrow{\text{grad}f(M_0)} \right| = 2\sqrt{2}$. ►

Приведем основные свойства градиента без доказательств.

1. $\overrightarrow{\text{grad}c} = 0, c = \text{const.}$
2. $\overrightarrow{\text{grad}(f_1(M_0) + f_2(M_0))} = \overrightarrow{\text{grad}f_1(M_0)} + \overrightarrow{\text{grad}f_2(M_0)}$.
3. $\overrightarrow{\text{grad}cf(M_0)} = c\overrightarrow{\text{grad}f(M_0)}$.
4. $\overrightarrow{\text{grad}(c_1f_1(M_0) + c_2f_2(M_0))} = c_1\overrightarrow{\text{grad}f_1(M_0)} + c_2\overrightarrow{\text{grad}f_2(M_0)}$.
5. $\overrightarrow{\text{grad}(f_1(M_0) \cdot f_2(M_0))} = f_1(M_0) \cdot \overrightarrow{\text{grad}f_2(M_0)} + f_2(M_0) \cdot \overrightarrow{\text{grad}f_1(M_0)}$.
6. $\overrightarrow{\text{grad}}_{\frac{f_1(M_0)}{f_2(M_0)}} = \frac{f_2(M_0) \cdot \overrightarrow{\text{grad}f_1(M_0)} - f_1(M_0) \cdot \overrightarrow{\text{grad}f_2(M_0)}}{f_2^2(M_0)}, f_2(M_0) \neq 0$.
7. $\overrightarrow{\text{grad}F(f(M_0))} = \frac{\partial F}{\partial f} \cdot \overrightarrow{\text{grad}f(M_0)}$.

4.2 Производные высших порядков. Теорема Шварца

Пусть функция $u = f(x), x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in G$, где G – область, $G \subset D(f)$, и $\forall x \in G \exists \frac{\partial u}{\partial x_i} = \varphi(x)$ ($i = \overline{1, n}$) – функция, определенная на G . Если $\exists \varphi'_{x_k}(x^{(0)})$, $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \in G$, то $\varphi'_{x_k}(x^{(0)})$ называется **производной второго порядка** функции $f(x)$ в точке $x^{(0)}$, причём при $k \neq i$ ($k, i = \overline{1, n}$) эта производная называется **смешанной производной**. Обозначение: $\frac{\partial^2 f(x^{(0)})}{\partial x_k \partial x_i} = f''_{x_i x_k}(x^{(0)})$ (если

$k = i$, то обозначение: $\frac{\partial^2 f(x^{(0)})}{\partial x_i^2} = f''_{x_i^2}(x^{(0)})$. Аналогично по индукции выводятся частные производные в точке любого порядка. Например, пусть введено понятие частной производной порядка $(m - 1)$ функции f по аргументам $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n-1}}$, пусть также $\exists f_{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n-1}}}^{(m-1)}(x) \forall x \in G$. Тогда эта производная есть некоторая функция $\varphi(x)$ на G . Если $\exists \varphi'_{x_{i_m}}(x^{(0)})$, то эта частная производная называется частной производной порядка m ($m \in N$) функции f в точке $x^{(0)}$. Обозначения: $\frac{\partial^m f(x^{(0)})}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}} = f_{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}}^{(m)}(x^{(0)})$ (среди индексов x_k ($k = \overline{1, m}$) должно быть не более n различных).

Определение 4.4. Функция $u = f(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in D(f)$, называется m раз ($m \in N$) дифференцируемой в точке $x^{(0)} \in \text{Int}D(f)$, если все её частные производные до порядка $m - 1$ дифференцируемы в точке $x^{(0)}$.

Теорема 4.1 (достаточный признак дифференцируемости). Если для функции $u = f(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in D(f)$ в точке $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \in \text{Int}D(f)$ существуют и непрерывны все её частные производные до порядка n ($n \in N$), то функция f будет n -раз дифференцируемой в точке $x^{(0)}$.

◀ Справедливость заключения теоремы следует из определения 4.4 и теоремы 3.2. ►

Теорема 4.2 (теорема Шварца). Если функция $f(x, y)$ имеет частные производные f'_x и f'_y , а также смешанные частные производные f''_{xy} и f''_{yx} в некоторой окрестности точки $M_0(x, y)$, в самой же точке $M_0(x, y)$ указанные смешанные производные непрерывны, то

$$f''_{xy}(M_0) = f''_{yx}(M_0). \quad (4.8)$$

◀ Распишем повторное действие операторов – частных приращений на функцию f :

$$\begin{aligned} \Delta_x(\Delta_y f(x, y)) &= \Delta_x(f(x, y + \Delta y) - f(x, y)) = \\ &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) + f(x, y) = \\ &= (f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)) - (f(x + \Delta x, y) - f(x, y)). \end{aligned} \quad (4.9)$$

К уменьшающему и вычитаемому последней разности применим теорему Лагранжа (по x):

$$\Delta_x(\Delta_y f(x, y)) = (f'_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) - f'_x(x + \theta_1 \Delta x, y)) \Delta x. \quad (4.10)$$

Дальше к разности в правой части равенства (4.10) также применим теорему Лагранжа (по y), получим:

$$\Delta_x(\Delta_y f(x, y)) = f''_{xy}(x + \theta_1 \Delta x, y + \theta_2 \Delta y) \Delta x \Delta y. \quad (4.11)$$

С другой стороны, $\Delta_x(\Delta_y f(x, y)) =$

$$= (f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)) - (f(x, y + \Delta y) - f(x, y)). \quad (4.12)$$

К соответствующим разностям в правой части (4.12) вначале применим теорему Лагранжа по y , а потом – по x .

$$\begin{aligned} \Delta_x(\Delta_y f(x, y)) &= (f'_y(x + \Delta x, y + \theta_3 \Delta y) - f'_y(x, y + \theta_3 \Delta y)) \Delta y = \\ &= f''_{yx}(x + \theta_4 \Delta x, y + \theta_3 \Delta y) \Delta y \Delta x. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Из (4.11) и (4.12) следует, что

$$f''_{xy}(x + \theta_1\Delta x, y + \theta_2\Delta y)\Delta y\Delta x = f''_{yx}(x + \theta_4\Delta x, y + \theta_3\Delta y)\Delta y\Delta x. \quad (4.14)$$

В последнем равенстве левую и правую части делим на $\Delta y\Delta x \neq 0$ и переходим к пределу при $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$, то есть $(x + \theta_1\Delta x, y + \theta_2\Delta y)$ и $(x + \theta_4\Delta x, y + \theta_3\Delta y)$ стремимся к точке $M_0(x, y)$. В силу непрерывности смешанных частных производных в точке M_0 получим справедливость равенства (4.8). ►

Замечание 4.2. Теорема 4.2 будет справедливой и при условии, что функция $f(x, y)$ дважды дифференцируема в точке $M_0(x, y)$, то есть частные производные f'_x и f'_y дифференцируемы в указанной точке. Но при этом должны существовать все частные производные второго порядка.

В теореме 4.2 должны существовать только смешанные частные производные, но дополнительного требуется, чтобы они были непрерывны в точке $M_0(x, y)$.

Пример 4.3. Показать, что функция

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x = y = 0, \end{cases}$$

имеет в точке $O(0, 0)$ смешанные частные производные второго порядка, но они не равны в этой точке.

◀ Вначале найдём частные производные первого порядка функции f в точке $M(x, y)$, если $x^2 + y^2 \neq 0$:

$$f'_x(M) \frac{(3x^2y - y^3)(x^2 + y^2) - xy(x^2 - y^2)2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$f'_y(M) \frac{(x^3 - 3xy^2)(x^2 + y^2) - 2y(x^2 - y^2)xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Находим (по определению) частные производные первого порядка функции f в точке $O(0, 0)$:

$$f'_x(O) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta x \cdot o((\Delta x)^2 - 0^2)}{(\Delta x)^2 + 0^2} - 0}{\Delta x} = 0.$$

Аналогично $f'_y(O) = 0$.

Дальше находим (по определению) смешанные частные производные второго порядка функции f в точке $O(0, 0)$

$$f''_{xy}(O) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\frac{-(\Delta y)^5}{(\Delta y)^4}}{\Delta y} = -1; \quad f''_{yx}(O) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{(\Delta x)^5}{(\Delta x)^4}}{\Delta x} = 1.$$

$$-1 = f''_{xy}(O) \neq f''_{yx}(O) = 1.$$

Проверьте самостоятельно, какие условия теоремы 4.2 о равенстве смешанных производных нарушены. ►

4.3 Дифференциалы высших порядков функции многих переменных

Пусть дана функция $U = f(x)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D(f)$. Предположим, что функция f имеет в точке $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \in \text{Int}D(f)$ вторые непрерывные частные производные и просто частные производные второго порядка в некоторой окрестности этой точки. Тогда функция f будет два раза дифференцируемой в точке $x^{(0)}$. Дополнительно потребуем, чтобы $\Delta x_i = dx_i$, $i = \overline{1, n}$, были независимыми от аргументов x_i в совокупности.

Определение 4.5. Вторым дифференциалом функции $f(x)$ в точке $x^{(0)}$ называется выражение, определяемое равенством

$$d^2 f(x^{(0)}) = d(df(x^{(0)})). \quad (4.15)$$

Преобразуем правую часть равенства (4.15)

$$\begin{aligned} d(df(x^{(0)})) &= d\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} dx_i\right) \Big|_{x=x^{(0)}} = \sum_{i=1}^n d\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} dx_i\right) \Big|_{x=x^{(0)}} = \\ &= \sum_{i=1}^n \left(d \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right) dx_i \Big|_{x=x^{(0)}} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f(x^{(0)})}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Функция вида $(h_1, \dots, h_n) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m a_{ik} h_i h_k$, где $a_{ik} = \text{const} \in \mathbb{R}$, называется **квадратичной формой**. Если $a_{ik} = a_{ki}$ для любых $i, k = \overline{1, m}$, то квадратичная форма называется **симметричной**.

Замечание 4.3. Так как в нашем случае $\frac{\partial^2 f(x^{(0)})}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(x^{(0)})}{\partial x_j \partial x_i}$, то правая часть (4.16) есть квадратичная форма относительно независимых дифференциалов dx_1, \dots, dx_n , причём эта форма симметричная ввиду равенства смешанных производных.

При непрерывности частных производных запись (4.16) можно упростить. Например, для функции двух переменных:

$$d^2 f(x_0, y_0) = f''_{x^2}(x_0, y_0) dx^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0) dx dy + f''_{y^2}(x_0, y_0) dy^2. \quad (4.17)$$

Символически формулу (4.17) записывают в следующем виде

$$d^2 f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 f(x_0, y_0). \quad (4.18)$$

Замечание 4.4. По индукции при условии дифференцируемости функции $f(x)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, в точке $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \in \text{Int}D(f)$ m -раз ($m \in N$) и независимости аргументов x_i , $i = \overline{1, n}$, от dx_i в совокупности, по аналогии с $n = 2$, получим:

$$d^m f(x^{(0)}) = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_m=1}^n \frac{\partial^m f(x^{(0)})}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_m}} dx_{i_1} dx_{i_2} \dots dx_{i_m}. \quad (4.19)$$

В символическом (формальном) виде формула (4.19) примет вид

$$d^m f(x^{(0)}) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^m f(x^{(0)}). \quad (4.20)$$

Например, для функции двух переменных $z = f(x, y)$ формула (4.20) в точке $M_0(x_0, y_0) \in \text{Int}D(f)$ примет вид

$$d^m f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^m f(x_0, y_0) = \sum_{k=0}^m C_m^k \frac{\partial^m f(x_0, y_0)}{\partial x^k \partial y^{m-k}} dx^k dy^{m-k}.$$

Пример 4.4. Найти $d^3 f$, если $f = \sin(x^2 + y^2)$.

$$\begin{aligned} \blacktriangleleft d^3 f(x, y) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^3 \sin(x^2 + y^2) = \\ &= \sum_{k=0}^3 C_n^k \frac{\partial^3 \sin(x^2 + y^2)}{\partial x^k \partial y^{3-k}} dx^k dy^{3-k} = \left[\begin{array}{l} C_3^0 = \frac{3!}{0!(3-0)!} = 1, \quad C_3^2 = 3, \\ C_3^1 = 3, \quad C_3^3 = 1 \end{array} \right] = \\ &= \left[(\sin(x^2 + y^2))_{y^3}^{(3)} = (2y \cos(x^2 + y^2))_{y^2}^{(2)} = (2 \cos(x^2 + y^2) - 4y^2 \sin(x^2 + y^2))'_y = \right. \\ &\quad = -4y \sin(x^2 + y^2) - 8y \sin(x^2 + y^2) - 8y^3 \cos(x^2 + y^2) = \\ &\quad = -12y \sin(x^2 + y^2) - 8y^3 \cos(x^2 + y^2) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}; \\ (\sin(x^2 + y^2))_{x^3}^{(3)} &= -12x \sin(x^2 + y^2) - 8x^3 \cos(x^2 + y^2) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}; \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} &= -4x \sin(x^2 + y^2) - 8y^2 x \cos(x^2 + y^2); \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} &= -4y \sin(x^2 + y^2) - 8x^2 y \cos(x^2 + y^2) \Big] = \\ &= (-12y \sin(x^2 + y^2) - 8y^3 \cos(x^2 + y^2)) dy^3 + \\ &\quad + 3(-4x \sin(x^2 + y^2) - 8y^2 x \cos(x^2 + y^2)) dx dy^2 + \\ &\quad + 3(-4y \sin(x^2 + y^2) - 8x^2 y \cos(x^2 + y^2)) dx^2 dy + \\ &\quad + (-12x \sin(x^2 + y^2) - 8x^3 \cos(x^2 + y^2)) dx^3 = \\ &= -8 \cos(x^2 + y^2) (y^3 dy^3 + 3y^2 x dy^2 dx + 3yx^2 dy dx^2 + x^3 dx^3) - \\ &\quad - 12 \sin(x^2 + y^2) (y dy^3 + x dx dy^2 + y dx^2 dy + x dx^3) = \\ &= -8 \cos(x^2 + y^2) (y dy + x dx)^3 - 12 \sin(x^2 + y^2) (x dx + y dy) (dx^2 + dy^2). \blacksquare \end{aligned}$$

4.4 Формула Тейлора

Известно, что если функция одной переменной $y = f(x)$ ($n+1$) раз, $n \in N$, дифференцируема в некоторой окрестности $U(x_0, \delta)$ точки x_0 радиуса $\delta > 0$, то для любого $x \in U(x_0, \delta)$ будет справедлива формула Тейлора

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x), \quad (4.21)$$

где $R_n(x)$ – остаточный член в формуле Тейлора, который, например, в форме Лагранжа имеет вид

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} = \frac{f(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}. \quad (4.22)$$

Если учесть, что k -ый, $k \in N$, дифференциал функции f в точке x_0 определяется по формуле

$$d^k f(x_0) = f^{(k)}(x_0) dx^k, \quad (4.23)$$

а также ($x - x_0 = \Delta x = dx$), то формула (4.21) примет вид

$$\Delta f(x_0) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} d^k f(x_0) + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(x_0 + \theta \Delta x), \quad (4.24)$$

где $0 < \theta < 1$.

Остаточный член $R_n(x)$ в формуле Тейлора может быть записан в других формах, например, в интегральной форме (при условии что функция $f(x)$ имеет непрерывные производные до порядка $n+1$ включительно в некоторой окрестности $U(x_0, \delta)$):

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt, \quad (4.25)$$

где x – текущая точка из указанной выше окрестности.

Дальше рассмотрим формулу Тейлора для функции многих переменных. Справедлива следующая теорема.

Теорема 4.3. *Если функция $U = f(x)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D(f)$, определена и $(n+1)$ раз дифференцируема в некоторой сферической окрестности $U(x^{(0)}, \delta)$, $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$, то для любого $x \in U(x^{(0)}, \delta)$ справедлива формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:*

$$\Delta f(x_0) = df(x_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(x_0) + \dots + \frac{1}{n!} d^n f(x_0) + R_n(x), \quad (4.26)$$

где остаточный член $R_n(x)$ в форме Лагранжа имеет вид

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(x^*), \quad (4.27)$$

где x^* – некоторая точка из окрестности $U(x^{(0)}, \delta)$.

◀ Для упрощения рассуждений рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x, y)$, удовлетворяющую условиям теоремы.

Для функции одной переменной $F(t)$ ($F(t)$ удовлетворяет требуемым условиям в некоторой окрестности $U(t_0, \delta)$) запишем формулу Тейлора

$$\Delta F(t_0) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} d^k F(t_0) + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} F(t_0 + \theta(t-t_0)), \quad (4.28)$$

где $\theta \in (0, 1)$.

Дальше возьмём в окрестности $U(M_0, \delta)$ любую точку $M(x, y)$, где $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$.

Соединим точки M и M_0 прямой, которая представляется в параметрической форме системой уравнений

$$\begin{cases} x = x_0 + t\Delta x, \\ y = y_0 + t\Delta y, \end{cases} \quad (4.29)$$

где $t \in [0, 1]$.

Функция $f(x, y)$ на отрезке M_0M является сложной функцией $f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y) = F(t)$, $t \in [0, 1]$. Запишем для $F(t)$ формулу Тейлора при $t_0 = 0$ и при $F(1) - F(0) = f(M) - f(M_0)$.

Дифференциалы в формуле (4.28) являются дифференциалами сложной функции $f(x, y)$, где x и y – линейные функции (в этом случае сохраняется неизменной форма высших дифференциалов (покажите самостоятельно)).

А тогда

$$d^k F \Big|_{t_0=0} = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^k f(M_0) \quad (4.30)$$

и

$$d^{n+1} F \Big|_{t_0+\theta(t-t_0)} = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^{n+1} f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y). \quad (4.31)$$

В формулах (4.30) и (4.31) dx и dy находятся из формул системы (4.29) при $dt = \Delta t = 1 - 0$. Тогда в формулах (4.30) и (4.31)

$$dx = dt\Delta x = \Delta x, \quad dy = dt\Delta y = \Delta y. \quad (4.32)$$

Подставляя $d^k F \Big|_{t_0}$ и $d^{n+1} F \Big|_{t_0+\theta(t-t_0)}$ из формул (4.30) и (4.31) в формулу (4.27) и учитывая равенства (4.33), получим формулу Тейлора (4.26), где $x^{(0)} = (x_0, y_0)$, $x_1 = x$, $x_2 = y$. В частном случае теорема доказана. ►

Пример 4.5. Разложить по формуле Тейлора функцию

$$f(x, y) = x^3 - 2y^3 + 3xy$$

в окрестности точки $M_0(1, 2)$.

◀ Запишем формулу (4.26) для нашего случая:

$$f(x, y) = f(1, 2) + df(M_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(M_0) + \frac{1}{3!} d^3 f(M_0), \quad (4.33)$$

$$\Delta x = x - 1 = dx, \quad \Delta y = y - 2 = dy.$$

Так как частные производные выше третьего порядка равны нулю, то правая часть (4.33) будет содержать только 4 члена.

$$\begin{aligned}
 & \text{Найдем: } f(1; 2) = (x^3 - 2y^3 + 3xy) \Big|_{\substack{x=1 \\ y=2}} = -9; \\
 & df(1; 2) = f'_x(1; 2)(x - 1) + f'_y(1; 2)(y - 2) = \\
 & = (3x^2 + 3y) \Big|_{\substack{x=1 \\ y=2}} (x - 1) + (-6y^2 + 3x) \Big|_{\substack{x=1 \\ y=2}} (y - 2) = 9(x - 1) - 21(y - 2); \\
 & \frac{1}{2!} d^2 f(1; 2) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 f(1; 2) = \\
 & = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f(1, 2)}{\partial x^2} (x - 1)^2 + 2 \frac{\partial^2 f(1, 2)}{\partial x \partial y} (x - 1)(y - 2) + \frac{\partial^2 f(1, 2)}{\partial y^2} (y - 2)^2 \right) = \\
 & = \frac{1}{2} \left(6x \Big|_{x=1} (x - 1)^2 + 2 \cdot 3(x - 1)(y - 2) + (-12y) \Big|_{y=2} (y - 2)^2 \right) = \\
 & = 3(x - 1)^2 + 3(x - 1)(y - 2) - 12(y - 2)^2; \\
 & \frac{1}{3!} d^3 f(1; 2) = \frac{1}{6} \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^3 f(1; 2) = \\
 & = \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 f(1, 2)}{\partial x^3} (x - 1)^3 + 3 \frac{\partial^3 f(1, 2)}{\partial x^2 \partial y} \cdot (x - 1)^2 (y - 2) + 3 \frac{\partial^3 f(1, 2)}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 f(1, 2)}{\partial y^3} \right) = \\
 & = \frac{1}{6} (6(x - 1)^3 + 3 \cdot 0 \cdot (x - 1)^2 (y - 2) + 3 \cdot 0 \cdot (x - 1)(y - 2)^2 + (-12)(y - 2)^3) = \\
 & = (x - 1)^3 - 2(y - 2)^3.
 \end{aligned}$$

Подставляем найденные значения слагаемых в правую часть равенства (4.33) и получаем искомый ответ:

$$\begin{aligned}
 x^3 - 2y^3 + 3xy &= -9 + 9(x - 1) - 21(y - 2) + 3(x - 1)^2 + 3(x - 1)(y - 2) - \\
 &\quad - 12(y - 2)^2 + (x - 1)^3 - 2(y - 2)^3. \blacktriangleright
 \end{aligned}$$

Теорема 4.4 (формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано). Если функция $U = f(x)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D(f)$, $m - 1$ раз ($m \in N$) дифференцируема в некоторой окрестности $U(x^{(0)}, \delta) \subset D(f)$, $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$, а в самой точке $x^{(0)}$ функция f m раз дифференцируема, то для любого $x \in U(x^{(0)}, \delta)$ справедлива формула

$$f(x) = f(x^{(0)}) + df(x^{(0)}) + \frac{1}{2!} d^2 f(x^{(0)}) + \dots + \frac{1}{m!} d^m f(x^{(0)}) + o(\rho^m), \quad (4.34)$$

где $\rho = \rho(x^{(0)}, x) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x_i^{(0)})^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2}$, а символ $o(\rho^m)$ означает бесконечно малую при $\rho \rightarrow +0$ функцию более высокого порядка малости, чем ρ^m .

Пример 4.6. Разложить по формуле Тейлора-Маклорена до $o(\rho^m)$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, функцию $f(x, y) = \frac{1}{(1-x)(1-y)}$.

◀ Воспользуемся формулой суммы всех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии ($|x| < 1$, $|y| < 1$):

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sum_{i=0}^4 x^i \sum_{i=0}^4 y^i + o(\rho^4) = \\ &= (1 + x + x^2 + x^3 + x^4)(1 + y + y^2 + y^3 + y^4) + o(\rho^4) = \\ &= 1 + x + y + x^2 + xy + y^2 + x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 + x^4 + x^3y + x^2y^2 + \\ &\quad + xy^3 + y^4 + o(\rho^4), \quad \rho^4 = (x^2 + y^2)^2. \blacktriangleright \end{aligned}$$

ЛЕКЦИЯ 5

Экстремум функции многих переменных

5.1 Понятие экстремума функции многих переменных

Рассмотрим функцию $U = f(x)$, где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D(f)$, и точку $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \in \text{Int}D(f)$.

Определение 5.1. Точка $x^{(0)}$ называется **точкой локального максимума (локального минимума)** функции f , если существует окрестность $U(x^{(0)}, \delta) \subset D(f)$ такая, что для любых $x \in U(x^{(0)}, \delta)$ будет выполняться неравенство

$$f(x) \leqslant f(x^{(0)}) \quad (\geqslant). \quad (5.1)$$

Значение функции f в указанной точке $x^{(0)}$ называется **локальным максимумом (локальным минимумом)**. Если неравенство (5.1) строгое, то точка $x^{(0)}$ называется **точкой строгого локального максимума (точкой строгого локального минимума)**, а значение функции $f(x^{(0)})$ называется **строгим локальным максимумом (строгим локальным минимумом)**. Точки максимума и минимума называются **точками локального экстремума (точками строгого локального экстремума)**, а значения функции f в этих точках – **локальными экстремумами (строгими локальными экстремумами)**.

Пример 5.1. Очевидно (смотри рисунок 5.1), что функция

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 - x^2 - y^2, & \text{если } x^2 + y^2 \leqslant 1, \\ x^2 + y^2 - 1, & \text{если } x^2 + y^2 > 1, \end{cases}$$

имеет локальный строгий максимум в точке $(0, 0)$ и $f(0, 0) = 1$. В точках окружности $x^2 + y^2 = 1$ функция f принимает наименьшее значение $f(x, y) = 0$.

5.2 Необходимое условие локального экстремума

Теорема 5.1. Если функция $U = f(x)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D(f)$, имеет в точке $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \in \text{Int}D(f)$ локальный экстремум и в этой точке существуют по всем переменным x_i , $i = \overline{1, n}$, частные производные первого порядка функции f , то все эти частные производные равны нулю в точке $x^{(0)}$.

Рисунок 5.1

◀ Возьмём произвольную переменную x_i функции f , а все остальные переменные зафиксируем, положив их соответственно равными $x_1^{(0)}, \dots, x_{i-1}^{(0)}, x_{i+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$. В этом случае будем иметь функцию одной переменной x_i :

$$U = f\left(x_1^{(0)}, \dots, x_{i-1}^{(0)}, x_i, x_{i+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\right) = \mu(x_i).$$

Производная функции μ в точке $x_i = x_i^{(0)}$ совпадает с частной производной $f'_{x_i}(x^{(0)}) = 0$, с другой стороны, $\mu'(x_i^{(0)}) = 0$ (необходимое условие экстремума функции одной переменной), то есть $f'_{x_i}(x^{(0)}) = 0$. ►

Замечание 5.1. Необходимое условие локального экстремума функции в точке в общем случае не является достаточным. Это видно на примере функции $U = xy^2$. В точке $(0, 0)$ частные производные $U'_x = y^2$ и $U'_y = 2xy$ равны нулю, но в любой окрестности этой точки есть точки, в которых функция принимает положительные значения (точки первой и четвёртой координатной плоскости), а также точки, где функция f принимает отрицательные значения (точки второй и третьей четвертей координатной плоскости). Значений в точке $(0, 0)$ функция f локального экстремума не имеет.

Если же хотя бы одна из частных производных первого порядка в данной точке не равна нулю, то в этой точке локального экстремума функция не имеет (обоснуйте самостоятельно).

Пример 5.2. Доказать, что функция $U = xe^y$ не имеет локальных экстремумов в \mathbb{R}^2 (области определения функции).

◀ Находим частные производные функции: $z'_x = e^y$, $z'_y = xe^y$. Очевидно, что

$$z'_x = e^y \neq 0$$

для любых точек $M(x, y) \in \mathbb{R}^2$. То есть, наша функция в \mathbb{R}^2 локального экстремума не имеет. ►

Определение 5.2. Точки, в которых частные производные функции f равны или нулю, или бесконечности, или не существуют, называются **критическими точками** (точками возможного экстремума или «подозрительными» на экстремум точками). Причём, критические точки, в которых все частные производные функции равны нулю, называются **стационарными критическими точками**.

5.3 Достаточное условие локального экстремума

Определение 5.3. *Функция вида*

$$\Phi(h_1, \dots, h_m) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m a_{ik} h_i h_k, \quad (5.2)$$

где $a_{ik} = \text{const} \in \mathbb{R}$, называется **квадратичной формой**.

Если $a_{ik} = a_{ki}$ для любых $i, k = \overline{1, m}$, то квадратичная форма называется **симметричной**.

Определение 5.4. Квадратичная форма (5.2) называется **положительно определённой (отрицательно определённой)**, если для любых h_1, \dots, h_m , одновременно не равных нулю $\left(\sum_{i=1}^m h_i^2 \neq 0\right)$, эта форма принимает строгое положительные (строгое отрицательные) значения.

Определение 5.5. Квадратичная форма (5.2) называется **знакоопределенной**, если она является либо положительно определённой, либо отрицательно определённой.

Определение 5.6. Квадратичная форма (5.2) называется **знакопеременной**, если она принимает как строгое положительные, так и строгое отрицательные значения.

Определение 5.7. Квадратичная форма (5.2) называется **квазизнакоопределенной**, если она принимает либо только неотрицательные, либо только неположительные значения, но обращается в нуль квадратичная форма для некоторых значений (5.2) h_i и h_m , одновременно не равных нулю.

Определение 5.8. *Матрица квадратичной формы (5.2)*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

При условии $a_{ik} = a_{ki}$ для любых $i, k = \overline{1, m}$ называется **симметричной**.

Главными минорами симметричной матрицы называются следующие определители:

$$A_1 = a_{11}; A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; A_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \dots$$

$$A_m = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

Теорема 5.2 (критерий Сильвестра). Квадратичная форма (5.2) с симметричной матрицей (5.3) будет положительно определённой (отрицательно определённой) тогда и только тогда, когда её главные миноры принимают положительные значения (миноры A_i с нечётными индексами i принимают отрицательные значения, а с чётными – положительные).

Критерий Сильвестра примем без доказательства.

Теорема 5.3 (достаточное условие локального экстремума). *Если функция $U = f(x)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D(f)$, один раз дифференцируема в некоторой окрестности $U(x_0, \delta) \subset D(f)$ точки $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \in \text{Int}D(f)$ радиуса $\delta > 0$, а в самой точке $x^{(0)}$ два раза дифференцируемая, и точка $x^{(0)}$ является для функции f стационарной критической, то функция f имеет в точке $x^{(0)}$ локальный минимум при $d^2f(x^{(0)}) > 0$ и локальный максимум при $d^2f(x^{(0)}) < 0$.*

◀ Для функции f выполняются все условия теоремы 4.4 при $m = 2$. Тогда формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано примет вид

$$f(x) - f(x^{(0)}) = \frac{1}{2!} d^2f(x^{(0)}) + o(\rho^2). \quad (5.5)$$

По формуле (4.16)

$$d^2f(x^{(0)}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{d^2f(x^{(0)})}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j, \quad (5.6)$$

причём у нас $\frac{\partial^2 f(x^{(0)})}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(x^{(0)})}{\partial x_j \partial x_i}$, то есть квадратичная форма (5.6) относительно независимых дифференциалов dx_1, dx_2, \dots, dx_n будет симметричной.

Если доказать, что при достаточно малых

$$\rho = \sqrt{(dx_1)^2 + \dots + (dx_n)^2} = \sqrt{\left(x_1 - x_1^{(0)}\right)^2 + \dots + \left(x_n - x_n^{(0)}\right)^2} \quad (5.7)$$

правая часть положительна (отрицательна), то тогда и теорема будет доказана.

Введём обозначения: $h_i = \frac{x_i - x_i^{(0)}}{\rho}$, $i = \overline{1, n}$, $\frac{\partial^2 f(x^{(0)})}{\partial x_i \partial x_j} = a_{ij}$. Тогда из (5.7) следует, что

$$(|h_i| \leq 1), \quad \left(\sum_{i=1}^n h_i^2 = 1 \right). \quad (5.8)$$

Формула (5.5) примет вид

$$f(x) - f(x^{(0)}) = \frac{\rho^2}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} h_i h_j + o(\rho^2). \quad (5.9)$$

Отношение $\frac{o(\rho^2)}{\rho^2}$ есть бесконечно малая при $\rho \rightarrow +0$. Обозначим её через $\alpha(\rho)$ ($o(\rho^2) = \rho^2 \alpha(\rho)$). Перепишем в этом случае формулу (5.9)

$$f(x) - f(x^{(0)}) = \rho^2 \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} h_i h_j + \alpha(\rho) \right). \quad (5.10)$$

Функция $\Phi(h_1, \dots, h_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} h_i h_j$ определена и непрерывна на единичной сфе-

ре, то есть на компакте (ограниченном замкнутом множестве). По теореме Вейерштрасса функция Φ достигает на этой сфере своего наименьшего значения, которое будет положительным (из-за положительности $d^2f(x^{(0)})$, а значит, и положительности указанной

квадратичной формы). По этой причине вся правая часть равенства (5.10) при достаточно малых $\rho \rightarrow +0$ будет строго положительной. А это означает, что $x^{(0)}$ – точка локального минимума.

Аналогично доказывается, что при $d^2f(x^{(0)}) < 0$ точка $x^{(0)}$ будет точкой локального максимума. ►

Замечание 5.2. Если указанный выше второй дифференциал есть знакопеременная квадратичная форма, то функция f (можно доказать) не имеет в точке $x^{(0)}$ локального экстремума.

Далее отдельно рассмотрим случай функции двух переменных $U = f(x, y)$. Введём обозначения:

$$a_{11} = \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2}, \quad a_{12} = \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x \partial y}, \quad a_{22} = \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y^2}, \quad M_0(x_0, y_0).$$

Теорема 5.4. Пусть функция $f(x, y)$ в некоторой окрестности $U(M_0, \delta) \subset D(f)$ точки $M_0(x_0, y_0)$ имеет частные производные до второго порядка включительно, а в самой точке M_0 частные производные второго порядка непрерывны, а первого – равны нулю. Тогда:

- 1) если $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$, то функция f в точке M_0 имеет локальный экстремум, причём при $a_{11} > 0$ – минимум, а при $a_{11} < 0$ – максимум;
- 2) если $\Delta < 0$ – в точке M_0 функция f не имеет экстремума;
- 3) если $\Delta = 0$ – экстремум для функции f в точке M_0 может быть, а может и не быть, то есть имеем неопределённость.

◀ Для функции f выполняется условие теоремы 5.3. Тогда будет справедливо и заключение теоремы. Поясним это подробнее.

$$\begin{aligned} d^2f(M_0) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy \right)^2 f(M_0) = \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2} (dx)^2 + 2 \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x \partial y} dx dy + \\ &+ \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y^2} = a_{11}(dx)^2 + 2a_{12}dxdy + a_{22}(dy)^2 = \left[\begin{array}{l} a_{11} \neq 0 \\ a_{22} \neq 0 \end{array} \right] = \\ &= a_{11} \left(\left(dx + \frac{a_{12}}{a_{11}} dy \right)^2 + \frac{\Delta}{a_{11}^2} (dy)^2 \right). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Если $\Delta > 0$, квадратичная форма (дифференциал $d^2f(M_0)$) определённая (принимает значения одного лишь знака, причём такие, как и a_{11}). В этом случае дифференциал $d^2f(M_0)$ будет принимать положительные значения при $a_{11} > 0$ и отрицательные – при $a_{11} < 0$. Теорема доказана для $\Delta > 0$.

Справедливость заключения теоремы при $\Delta = 0$ следует из замечания 5.2.

Неопределённость в случае $\Delta = 0$ следует из приведённых ниже примеров. ►

Пример 5.3. Функция $U = x^4 + y^4$ имеет в точке $M_0(0, 0)$ минимум (локальный, совпадающий с наименьшим значением функции в \mathbb{R}^2). Но при этом $U'_x = 4x^3$, $U''_{x^2} = 12x^2 \Big|_{x=0} = 0 = a_{11}$, аналогично $a_{22} = a_{12} = 0$, то есть $\Delta = 0$.

Пример 5.4. Функция $U = x^3 + y^3$ в точке $M_0(0, 0)$ не имеет экстремума, так как в любой окрестности этой точки функция принимает как положительные значения, так и отрицательные. В то же время $\Delta = 0$ (покажите самостоятельно).

Пример 5.5. Исследовать на экстремум функцию

$$U = 2x^3 + xy^2 - 216x.$$

◀ Вначале найдём критические точки функции.

$$\begin{aligned} U'_x &= 6x^2 + y^2 - 216; \quad U'_y = 2xy; \quad \begin{cases} 2xy = 0, \\ 6x^2 + y^2 - 216 = 0; \end{cases} \\ &\left\{ \begin{array}{l} x = 0, \\ y = 0, \\ 6x^2 + y^2 - 216 = 0; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 0, \\ 6x^2 + y^2 - 216 = 0; \end{array} \right. \text{ или } \left\{ \begin{array}{l} y = 0, \\ 6x^2 + y^2 - 216 = 0. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Решая последние две системы, находим критические точки:

$$A_1(0, 6\sqrt{6}); \quad A_2(0, -6\sqrt{6}); \quad A_3(6, 0); \quad A_4(-6, 0).$$

Покажите самостоятельно, вычислив $a_{11} = U''_{x^2}$, $a_{12} = U''_{xy}$, $a_{22} = U''_{y^2}$ и $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ в указанных точках A_i , $i = \overline{1, 4}$, и учитывая заключение теоремы 5.4, что в точках A_1 и A_2 экстремума функция не имеет, в точке A_3 – минимум, $f(A_3) = -4 \cdot 6^3$, а в точке A_4 – максимум, $f(A_4) = 8 \cdot 6^3$. ►

5.4 Нахождение наибольших и наименьших значений функций многих переменных

Рассмотрим функцию $U = f(x)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D(f) = G$, где $D(f)$ – компакт (замкнутое ограниченное множество). Если функция f – непрерывна на G , то, по теореме Вейерштрасса, она достигает на этом компакте своего наибольшего и наименьшего значений. Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функций в этом случае состоит в следующем:

1. Находим критические точки функции, являющиеся внутренними точками компакта G .
2. Исследуем функцию на наименьшее (наибольшее) значение функции на границе компакта G .
3. Выбираем наименьшее (наибольшее) значение функции среди значений её в указанных выше критических точках и наибольших (наименьших) значениях функции на границе. Это и будет наименьшим (наибольшим) значением функции на компакте.

Рассмотрим конкретные примеры.

Пример 5.6. Найти наименьшее и наибольшее значение функции

$$f(x, y) = xy(5 - x + y),$$

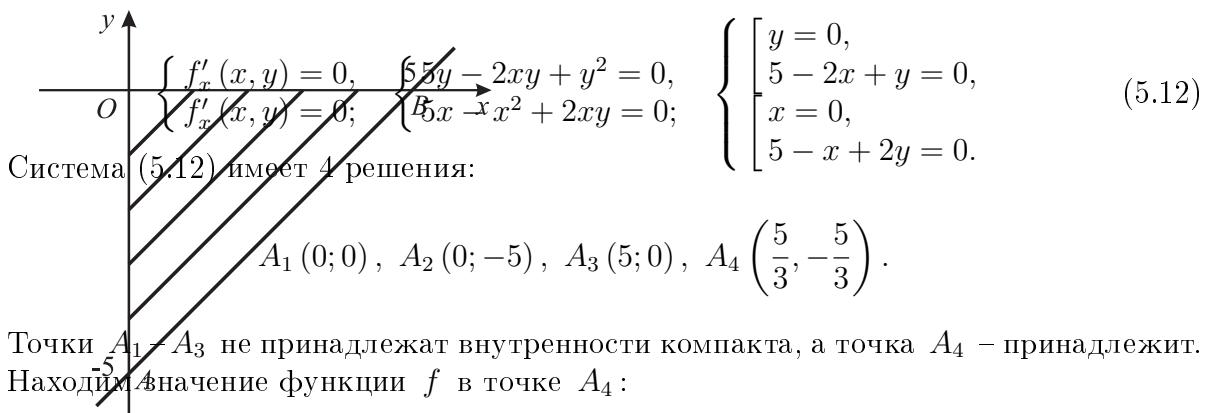
заданной на компакте, граница которого есть отрезки прямой $x - y = 5$ и осей координат.

◀ Изобразим на рисунке заданный в условии компакт (рисунок 5.2). Находим критические точки функции f , являющиеся внутренними точками компакта.

$$f'_x(x, y) = (5xy - x^2y + xy^2)'_x = 5y - 2xy + y^2;$$

$$f'_y(x, y) = 5x - x^2 + 2xy;$$

Рисунок 5.2



$$f\left(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right) = \frac{5}{3} \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) \left(5 - \frac{5}{3} - \frac{5}{3}\right) = \frac{5}{3} \left(-\frac{5}{3}\right) \frac{5}{3} = -\frac{125}{27}.$$

Дальше исследуем функцию f на наибольшее и наименьшее значения на границе.

$$OA: x = 0, f(0, y) = 0;$$

$$OB: y = 0, f(x, 0) = 0;$$

$$AB: x = 5 + y, f(5 + y, y) = (5 + y)y(5 - 5 - y + y) = 0.$$

Таким образом, в любых точках границы значение функции f равно нулю.

Ответ: функция f принимает наименьшее значение в точке $A_4\left(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right)$, причём $f(A_4) = -\frac{125}{27}$; наибольшее значение, равное нулю, функция принимает в точках границы компакта. ►

ЛЕКЦИЯ 6

Условный экстремум. Дифференцирование неявно заданных функций

6.1 Условный (относительный) экстремум. Сведение условного экстремума к безусловному

Ранее нами рассмотрены предложения, связанные с безусловным экстремумом. Вместе с тем, часто в математике и её приложениях приходится находить экстремумы функций, аргументы которой подчинены дополнительным условиям. Такие экстремумы называются **условными** или **относительными**. Например, пусть функции $z = f(x, y)$ и

$z = F(x, y)$ определены в области $G \in \mathbb{R}^2$. Обозначим через E множество точек области G , для которых $F(x, y) = 0$. Уравнение $F(x, y) = 0$ называется уравнением связи.

Определение 6.1. Точка $M_0(x_0, y_0) \in E$ называется *точкой условного экстремума (относительного экстремума)* функции $z = f(x, y)$ при выполнении уравнения связи $F(x, y) = 0$ (относительно указанного уравнения связи), если точка M_0 есть точка безусловного экстремума функции $f(x, y)$, рассматриваемой только на множестве E .

Пример 6.1. Найти условный экстремум функции $z = x^2 + y^2$ относительно уравнения связи $x + y - 1 = 0$.

◀ Из уравнения связи находим $y = 1 - x$ и подставляем в $z = x^2 + y^2$. Получаем $z = x^2 + (1 - x)^2$ или

$$z = 2x^2 + 2x + 1. \quad (6.1)$$

Рисунок 6.1

Очевидно, что можно взять $D(z) = [0, 1]$. Функцию (6.1) с областью определения $D(z) = [0, 1]$ исследуем на экстремум.

$$z' = 4x - 2, \quad z' = 0, \quad x = \frac{1}{2} \in (0, 1)$$

$x = \frac{1}{2}$ – точка минимума, $z_{\min}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$ (рисунок 9.4). ►

Далее рассмотрим сведение условного экстремума к безусловному в общем случае. Пусть для функции

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \quad (6.2)$$

требуется найти условный экстремум при наличии системы уравнений связи

$$F_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0, \quad (6.3)$$

где $i = \overline{1, m}$.

По определению известно, что функция (6.2) имеет условный максимум (минимум) в точке $M_0(x_0, y_0)$, $x_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$, $y_0 = (y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_m^{(0)})$ при наличии системы уравнений связи (6.3) (координаты точки M_0 удовлетворяют условиям связи

Рисунок 6.2

(6.3)), если существует окрестность $U(M_0, \delta)$ точки M_0 радиуса $\delta > 0$, для точек которой $f(M_0)$ будет наибольшим (наименьшим).

Пусть в указанной окрестности $U(M_0, \delta)$ функции F_i ($i = \overline{1, m}$) будут дифференцируемыми, а в самой точке $M_0(x_0, y_0)$ частные производные этих функций по y_k ($k = \overline{1, m}$) – непрерывны, и **якобиан (определитель Якоби)¹**.

$$\frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(y_1, \dots, y_m)} = \begin{vmatrix} (F_1)'_{y_1} & (F_1)'_{y_2} & \dots & (F_1)'_{y_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (F_m)'_{y_1} & (F_m)'_{y_2} & \dots & (F_m)'_{y_m} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (6.4)$$

Тогда для достаточно малых ε_k ($k = \overline{1, m}$) существует окрестность $U(M_0, \delta')$ точки $M'_0(x_0)$, $x_0 = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$, радиуса $\delta' > 0$, что для точек этой окрестности определены функции

$$y_k = \varphi_k(x), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \quad (k = \overline{1, m}), \quad (6.5)$$

– удовлетворяющие условиям $|y_k - y_k^{(0)}| < \varepsilon_k$ и являющиеся единственными и дифференцируемыми решениями системы уравнений (6.3). Подставляем функции (6.5) в (6.2) и своим нахождением указанного условного экстремума к нахождению безусловного экстремума в точке $M'_0(x_0)$ у сложной функции

$$u = f(x_1, \dots, x_n, \varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_n)) = \Phi(x_1, \dots, x_n). \quad (6.6)$$

6.2 Необходимые условия существования условного экстремума в точке

Пусть функция (6.2) дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$, $x_0 = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$, $y_0 = (y_1^{(0)}, \dots, y_m^{(0)})$, и имеет в точке $M'_0(x_0)$ безусловный экстремум. Функция (6.6) (функция (6.2) имеет в точке M_0 условный экстремум при наличии системы уравнений связи (6.3)). В этом случае (необходимое условие безусловного экстремума функции (6.6))

$$du = \frac{\partial \Phi(M'_0)}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial \Phi(M'_0)}{\partial x_n} dx_n = 0 \quad (6.7)$$

¹Якоби Карл Густав Якоб (1804–1851) – немецкий математик.

((6.7) – тождество относительно dx_i ($i = \overline{1, n}$).

Тождество (6.7) с учётом (6.6) и инвариантности формы первого дифференциала имеет также вид

$$du = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f(M_0)}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y_1} dy_1 + \dots + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y_m} dy_m = 0 \quad (6.8)$$

Заметим, что в равенстве (6.8) все dy_k ($k = \overline{1, m}$) есть дифференциалы функций $y_k = \varphi_k(x)$ из (6.5), поэтому (6.8) не есть тождество относительно dy_k ($k = \overline{1, m}$).

Пусть в уравнения системы (6.3) были подставлены функции (6.5) – решения системы (6.3). Тогда уравнения системы (6.3) будут тождествами. Дифференцируем эти тождества, получим:

$$\frac{\partial F_k}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial F_k}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial F_k}{\partial y_1} dy_1 + \dots + \frac{\partial F_k}{\partial y_m} dy_m = 0, \quad (6.9)$$

где $k = \overline{1, m}$.

В соответствии с (6.4), то есть якобиан отличен от нуля в точке $M_0(x_0, y_0)$. Тогда из линейной системы (6.9) находим dy_k ($k = \overline{1, m}$) как линейные функции dx_i ($i = \overline{1, n}$). Подставляем найденные выражения для dy_k в (6.8). Получим:

$$A_1 dx_1 + \dots + A_n dx_n = 0, \quad (6.10)$$

где A_i – рациональные функции частных производных (6.2) и (6.3) в точке M_0 .

Так как в равенстве (6.10) есть лишь дифференциалы независимых переменных, то из указанного равенства получим, что $A_i = 0$, $i = \overline{1, n}$. Далее «подключаем» к этим равенствам условия связи (6.3) и получаем необходимые условия наличия условного экстремума функции (6.2):

$$\begin{cases} A_1 = 0, \\ \dots, \\ A_n = 0, \\ F_1 = 0, \\ \dots, \\ F_m = 0. \end{cases} \quad (6.11)$$

6.3 Метод неопределённых множителей Лагранжа

При рассмотрении необходимого условия существования условного экстремума функции в точке переменные x_i ($i = \overline{1, n}$) были независимыми переменными, а переменные dy_k ($k = \overline{1, m}$) – зависимые переменные (функции переменных x_i). Часто это приводит к усложнённым выкладкам. Ж.Л. Лагранж предложил метод, при котором не нарушается форма второго дифференциала функции, если её аргументами будут как независимые переменные x_i так и зависимые y_k . Дадим формально (без обоснований) правило нахождения критических точек методом неопределённых множителей Лагранжа для функций трёх переменных. Рассмотрим функцию $u = f(x, y, z)$ при наличии системы уравнений связи

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0. \end{cases} \quad (6.12)$$

Считаем, что функция $f(x, y, z)$ дифференцируема в области $G \in \mathbb{R}^3$. Функции $F_1(x, y, z)$ и $F_2(x, y, z)$ также определены в области G , а на множестве $E \subset G$ выполняется система равенств (6.12). Кроме того, функции $F_1(x, y, z)$ и $F_2(x, y, z)$ должны

быть дифференцируемыми в некоторых окрестностях искомых критических точек вида $M_0(x_0, y_0, z_0) \in E$, а в самих точках M_0 частные производные функции $F_1(x, y, z)$ и $F_2(x, y, z)$ по y и z – непрерывны. Также якобиан $\frac{D(F_1, F_2)}{D(y, z)} \neq 0$ в M_0 .

Указанный алгоритм метода неопределённых множителей Лагранжа состоит в следующем:

1) Составляем так называемую функцию Лагранжа переменных x , y и z и постоянных параметров λ_1 и λ_2 (они пока ещё не определены):

$$\psi(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda_1 F_1(x, y, z) + \lambda_2 F_2(x, y, z). \quad (6.13)$$

2) Запишем систему уравнений

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad F_1 = 0, \quad F_2 = 0. \quad (6.14)$$

3) Из системы (6.14) исключаем λ_1 , λ_2 и находим критические точки.

Замечание 6.1. Обычно из геометрических или физических соображений устанавливают (если возможно), будет ли найденная критическая точка точкой экстремума и какого.

Пример 6.2. Найти кратчайшее расстояние от точки $A(1, 0)$ до эллипса

$$4x^2 + 9y^2 = 36.$$

◀ На рисунке 9.6 покажем эллипс $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Рисунок 6.3

Берём любую точку $B(x, y)$ на эллипсе, исключая точки D и K . Расстояние между точками A и B находится по формуле

$$d^2 = (x - 1)^2 + y^2 = f(x, y). \quad (6.15)$$

Составляем функцию Лагранжа и находим её частные производные по x и по y :

$$\begin{aligned} \psi &= (x - 1)^2 + y^2 + \lambda \left(\frac{4x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - 1 \right), \\ \psi'_x &= 2(x - 1) + 8x\lambda, \quad \psi'_y = 2y + 18y\lambda. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Составляем систему вида (6.14):

$$\begin{cases} x - 1 + 4x\lambda = 0, \\ y + 9y\lambda = 0, \\ 4x^2 + 9y^2 = 36. \end{cases} \quad (6.17)$$

Из системы (6.17) исключаем λ и находим

$$x = \frac{9}{5}, \quad y^2 = 4 \cdot \frac{16}{25}, \quad y_{1,2} = \pm \frac{8}{5}.$$

Критическими точками будут $B_1\left(\frac{9}{5}, \frac{8}{5}\right)$ и $B_2\left(\frac{9}{5}, -\frac{8}{5}\right)$. Эти точки симметричны относительно оси Oy . Эти точки будут точками минимума функции $f(x, y)$ (видно из геометрических соображений). А это означает, что AB_1 и AB_2 будут искомыми кратчайшими расстояниями, причём $AB_1 = AB_2$. Найдём это расстояние.

$$d^2 = \frac{16}{25} + \frac{64}{25} = \frac{80}{25}; \quad d = \frac{4\sqrt{5}}{5}. \blacktriangleright$$

6.4 Достаточный признак условного экстремума

Выше нами рассмотрены необходимые условия экстремума. Дополнительно потребуем двукратной дифференцируемости функций (6.2) и (6.3) в некоторой окрестности $U(M_0, \delta)$ точки $M_0(x_0, y_0)$, $x_0 = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$, $y_0 = (y_1^{(0)}, \dots, y_m^{(0)})$, а в самой точке M_0 непрерывности частных производных второго порядка указанных функций. В этом случае (при наличии (6.3)) экстремумы функций (6.2) и (6.13) (Лагранжа) совпадают, так как $f(M) - f(M_0) = \psi(M) - \psi(M_0)$. В этом случае можно воспользоваться теоремой 10.3 (достаточный признак локального экстремума). А тогда функция (6.2) будет в точке M_0 иметь условный минимум, если второй дифференциал $d^2\psi(M_0) > 0$, а также условный максимум, если $d^2\psi(M_0) < 0$.

Замечание 6.2. Указанный второй дифференциал $d^2\psi(M_0)$ в точке M_0 вычисляется также, если бы все переменные x_i ($i = \overline{1, n}$) и y_k ($k = \overline{1, m}$) были бы независимыми, хотя в общем случае таким свойством не обладает.

$$\begin{aligned} d^2\psi(M) = & \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial}{\partial y_1} dy_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial y_m} dy_m \right)^2 \psi(M) + \\ & + \frac{\partial \psi(M)}{\partial y_1} d^2 y_1 + \dots + \frac{\partial \psi(M)}{\partial y_m} d^2 y_m. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Но для точки M_0 будут $\frac{\partial \psi(M_0)}{\partial y_k} = 0$ ($k = \overline{1, m}$), то есть

$$d^2\psi(M_0) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial}{\partial y_1} dy_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial y_m} dy_m \right)^2 \psi(M_0). \quad (6.19)$$

При этом надо учесть, что в формулу (6.19) вместо dy_k ($k = \overline{1, m}$) подставляем их значения, определяемые из системы (6.9). После этого и устанавливаем знакоопределённость $d^2\psi(M_0)$.

Пример 6.3. Исследовать функцию

$$u = xyz \quad (6.20)$$

на условный экстремум методом неопределенных множителей Лагранжа при наличии следующей системы уравнений связи

$$\begin{cases} x + y - z = 3, \\ x - y - z = 8. \end{cases} \quad (6.21)$$

◀ Составляем функцию Лагранжа

$$\psi = xyz + \lambda_1(x + y - z - 3) + \lambda_2(x - y - z - 8) \quad (6.22)$$

(проверить самостоятельно выполнение для функций типа f, F_1, F_2 указанных выше условий).

Записываем в нашем случае систему вида (6.15)

$$\begin{cases} \psi'_x = 0, \\ \psi'_y = 0, \\ \psi'_z = 0, \\ F_1 = 0, \\ F_2 = 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} yz + \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ xz + \lambda_1 - \lambda_2 = 0, \\ xy - \lambda_1 - \lambda_2 = 0, \\ x + y - z - 3 = 0, \\ x - y - z - 8 = 0. \end{cases} \quad (6.23)$$

Из системы (6.23) исключаем λ_1 и λ_2 , а также находим $x_0 = \frac{11}{4}$, $y_0 = -\frac{5}{2}$, $z = -\frac{11}{4}$. Получим критическую точку $M_0\left(\frac{11}{4}, -\frac{5}{2}, -\frac{11}{4}\right)$. Также определяем, что в точке M_0

$$\psi''_{x^2} = \psi''_{y^2} = \psi''_{z^2} = 0; \quad \psi''_{xy} = -\frac{11}{4}; \quad \psi''_{xz} = -\frac{5}{2}; \quad \psi''_{yz} = \frac{1}{4}.$$

Тогда

$$d_2\psi(M_0) = -\frac{11}{4}dxdy - 5dxdz + \frac{11}{2}dydz. \quad (6.24)$$

Составим систему вида (6.9).

$$\begin{cases} dx + dy - dz = 0, \\ dx - dy - dz = 0. \end{cases} \quad (6.25)$$

Из системы (6.25) находим, что $dy = 0$, $dx = dz$.

Откуда следует, что $d_2\psi(M_0) = -5(dx)^2 < 0$.

Ответ: точка $M_0\left(\frac{11}{4}, -\frac{5}{2}, -\frac{11}{4}\right)$ – точка условного максимума, а сам условный максимум $U(M_0) = \frac{11}{4} \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) \cdot \left(-\frac{11}{4}\right) = \frac{605}{32}$. ►

6.5 Понятие неявной функции

При решении многих задач переменная U как функция аргументов $x_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$, задаётся посредством функционального уравнения

$$F(U, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0. \quad (6.26)$$

В этом случае говорят, что функция U задана неявно.

Пример 6.4. Функция $U = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, рассматриваемая в круге $x^2 + y^2 \leq 1$, может быть неявно задана посредством функционального уравнения

$$U^2 + x^2 + y^2 - 1 = 0. \quad (6.27)$$

При этом возникают следующие вопросы:

1. При каких условиях функциональное уравнение (6.26) однозначно разрешимо относительно переменной U , то есть однозначно определяет функцию

$$U = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)?$$

2. При каких условиях функция φ непрерывна, имеет частные производные и дифференцируема. Например, уравнение (6.27) определяет в единичном круге бесконечно много явных функций. Так, функции $U = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $U = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, а также любая функция, равная $U = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ для одних точек указанного круга и равная $U = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ для других точек этого круга будет функцией, заданной неявно с помощью уравнения (6.27)?

Рисунок 6.4

С геометрической точки зрения уравнение (6.27) определяет в \mathbb{R}^3 сферу радиуса $R = 1$ с центром в начале координат. Возьмём на этой сфере точку $M_0(U_0, x_0, y_0)$ при $U_0 > 0$ (не лежащую в плоскости $U = 0$). Часть поверхности сферы в окрестности $U(M_0, \delta)$ достаточно малого радиуса $\delta > 0$ однозначно проектируется на плоскость $U = 0$ (рисунок 6.4).

Аналитически это означает, что если рассматривать функцию $F(U, x, y) = U^2 + x^2 + y^2 - 1$ только в указанной окрестности $U(M_0, \delta)$, то уравнение (6.27) однозначно разрешимо относительно U . Тогда это уравнение определяет единственную явную функцию $U = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ ($U > 0$).

Если же взять точку $M_1(0, x_0, y_0)$, принадлежащую сфере, то для любой окрестности $U(M_1, \delta_1)$ часть указанной сферы неоднозначно проектируется на плоскость $U = 0$, то есть уравнение (6.27) не является однозначно разрешимым относительно U .

Заметим при этом, что $\frac{\partial F}{\partial U} = 2U$ и $\frac{\partial F(M_0)}{\partial U} \neq 0$, но $\frac{\partial F(M_1)}{\partial U} = 0$.

Справедлива следующая теорема (о существовании, непрерывности и существовании частных производных функций, заданных неявно).

Теорема 6.1. *Функция $F(U, x, y)$ – дифференцируема в некоторой окрестности $U(M_0, \delta)$ точки $M_0(U_0, x_0, y_0)$ радиуса $\delta > 0$. В самой точке M_0 функция F равна нулю ($F(M_0) = 0$), и её частная производная первого порядка по U не равна нулю ($F'_U(M_0) \neq 0$). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < \delta$) существует окрестность $U(M'_0, \delta_1)$ точки $M'_0(x_0, y_0)$ радиуса $\delta_1 > 0$, что:*

1) в окрестности $U(M'_0, \delta_1)$ определена единственная функция $U = \varphi(x, y)$, причём:

a) $|U - U_0| < \varepsilon$;

- б) функция φ есть решение уравнения $F(U, x, y) = 0$;
 2) функция φ непрерывна и дифференцируема в окрестности $U(M'_0, \delta_1)$, а её частные производные в точках этой окрестности будут вычисляться по формулам

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_U}; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_U}. \quad (6.28)$$

◀ Как сказано выше, геометрически однозначная разрешимость уравнения

$$F(U, x, y) = 0 \quad (6.29)$$

относительно U означает возможность однозначно спроектировать часть поверхности S , определяемой уравнением (6.29) и входящей в окрестность $U(M_0, \delta)$ на плоскость $U = 0$. Для определённости считаем, что $F'_U(M_0) > 0$. Из непрерывности F'_U в точке M_0 следует, что существует окрестность $U(M_0, \delta_2)$, где $F'_U > 0$, причём точки $M_1(U_0 - \varepsilon, x_0, y_0)$ и $M_2(U_0 + \varepsilon, x_0, y_0)$ также принадлежат этой окрестности $U(M_0, \delta_2)$. Функция $z = F(U, x_0, y_0)$ есть функция одной переменной U на отрезке $[U_0 - \varepsilon, U_0 + \varepsilon]$ или трёх переменных $F(U, x, y)$ на отрезке M_1M_2 . Так как $F'_U > 0$ в окрестности $U(M_0, \delta_2)$, то функция $z = F(U, x_0, y_0)$ возрастает на отрезке $[U_0 - \varepsilon, U_0 + \varepsilon]$ и $F(U_0, x_0, y_0) = 0$. Поэтому $F(M_1) < 0$ и $F(M_2) > 0$. Рассмотрим функцию $F(U, x, y)$ на плоскостях α и β , как функцию двух переменных x и y (смотри рисунок 6.5). Так как в окрестности $U(M_0, \delta_2)$ функция F непрерывна ($\delta_2 < \delta$), то существуют квадраты внутри шара $U(M_0, \delta_2)$: $\begin{cases} |x - x_0| < \delta_1, \\ |y - y_0| < \delta_1 \end{cases}$, где на α будет $F(U, x, y) < 0$, а на β — $F(U, x, y) > 0$.

Дальше строим параллелепипед $\bar{\Pi} \subset U(M_0, \delta_2)$ с указанными основаниями на плоскостях α и β ($F < 0$ на открытом нижнем основании параллелепипеда и $F > 0$ на открытом верхнем основании параллелепипеда).

Рисунок 6.5

Берём любую точку $M'(x, y)$ на открытом нижнем основании параллелепипеда. На вертикальном отрезке $M'_1M'_2$ (параллелен оси OU и M'_2 принадлежит верхнему открытым основанию параллелепипеда) функция $F(U, x, y)$ — возрастает ($F'_U > 0$) и $F(M'_1) < 0$, а $F(M'_2) > 0$. Тогда существует единственная точка $U \in (U_0 - \varepsilon, U_0 + \varepsilon)$,

что $F(U, x, y) = 0$, то есть $F(U, M') = 0$, где $M'(x, y)$. Получим закон, по которому любой точке $M'(x, y)$ открытого квадрата в $\begin{cases} |x - x_0| < \delta_1, \\ |y - y_0| < \delta_1 \end{cases}$ из плоскости $U = 0$ соответствует единственная точка $U \in (U_0 - \varepsilon, U_0 + \varepsilon)$ и такая, что $F(U, x, y) = 0$, то есть существует искомая функция $U = \varphi(x, y)$ – решение уравнения $F(U, x, y) = 0$ с условием $|U - U_0| < \varepsilon$.

Дальше докажем непрерывность функции $U = \varphi(x, y)$ в любой точке типа $M'(x, y)$. Условия для всех точек типа $M'(x, y)$ одинаковы. Тогда берём точку $M'(x_0, y_0)$, для которой $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 \forall (x, y)$, что $\begin{cases} |x - x_0| < \delta_1, \\ |y - y_0| < \delta_1 \end{cases}$ будет $|U - U_0| < \varepsilon$. Непрерывность доказана.

Покажем дифференцируемость функции $U = \varphi(x, y)$ в любой точке типа $M'(x, y)$. Так же как и непрерывность, достаточно доказать дифференцируемость в точке $M'(x_0, y_0)$ функции $U = \varphi(x, y)$.

Имеем: $F(U_0, x_0, y_0) = 0$ и $F(U_0 + \Delta U, x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = 0$. Тогда $\Delta F(M_0) = 0$ ($M_0(U_0, x_0, y_0)$). Но функция F в точке M_0 дифференцируема. Полное приращение $\Delta F(M_0)$ примет вид

$$0 = \Delta F(M_0) = \left(\frac{\partial F(M_0)}{\partial U} + \gamma_1(\Delta U, \Delta x, \Delta y) \right) \Delta U + \left(\frac{\partial F(M_0)}{\partial x} + \alpha_1(\Delta U, \Delta x, \Delta y) \right) \Delta x + \left(\frac{\partial F(M_0)}{\partial y} + \beta_1(\Delta U, \Delta x, \Delta y) \right) \Delta y, \quad (6.30)$$

где $\gamma_1, \alpha_1, \beta_1 \rightarrow 0$ при $\begin{cases} \Delta x \rightarrow 0, \\ \Delta U \rightarrow 0, \\ \Delta y \rightarrow 0. \end{cases}$

Так как функция $U = \varphi(x, y)$ непрерывна в точке $M'_0(x_0, y_0)$, то $\Delta U \rightarrow 0$ при $\begin{cases} \Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0 \end{cases}$. Тогда (при $\frac{\partial F(M_0)}{\partial U} \neq 0$) будет при достаточно малых Δx и Δy и $\left(\frac{\partial F(M_0)}{\partial U} + \gamma_1 \right) \neq 0$ ($\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta U \rightarrow 0 \Rightarrow \gamma_1 \rightarrow 0$).

Левую и правую части равенства (6.29) разделим на $\frac{\partial F(M_0)}{\partial U} + \gamma_1 \neq 0$, получим:

$$\Delta U = \left(-\frac{\frac{\partial F(M_0)}{\partial x} + \alpha_1}{\frac{\partial F(M_0)}{\partial U} + \gamma_1} \right) \Delta x + \left(-\frac{\frac{\partial F(M_0)}{\partial y} + \beta_1}{\frac{\partial F(M_0)}{\partial U} + \gamma_1} \right) \Delta y. \quad (6.31)$$

Так как при $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta U \rightarrow 0$, то

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta U \rightarrow 0}} \left(-\frac{\frac{\partial F(M_0)}{\partial x} + \alpha_1}{\frac{\partial F(M_0)}{\partial U} + \gamma_1} \right) = -\frac{\frac{\partial F(M_0)}{\partial x}}{\frac{\partial F(M_0)}{\partial U}};$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta U \rightarrow 0}} \left(-\frac{\frac{\partial F(M_0)}{\partial y} + \beta_1}{\frac{\partial F(M_0)}{\partial U} + \gamma_1} \right) = -\frac{\frac{\partial F(M_0)}{\partial y}}{\frac{\partial F(M_0)}{\partial U}}.$$

Тогда равенство (6.31) примет вид:

$$\Delta U = \left(-\frac{\frac{\partial F(M_0)}{\partial x}}{\frac{\partial F(M_0)}{\partial U}} + \mu \right) \Delta x + \left(-\frac{\frac{\partial F(M_0)}{\partial y}}{\frac{\partial F(M_0)}{\partial U}} + \theta \right) \Delta y, \quad (6.32)$$

где μ и $\theta \rightarrow 0$ при $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$.

Дифференцируемость функции $U = \varphi(x, y)$ в указанных выше точках доказана.

Из дифференцируемости функции $U = \varphi(x, y)$ следует существование её частных производных, формулы которых получаем из равенства (6.32):

$$\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F(x, y, U)}{\partial x}}{\frac{\partial F(x, y, U)}{\partial U}}, \quad (6.33)$$

$$\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F(x, y, U)}{\partial y}}{\frac{\partial F(x, y, U)}{\partial U}}. \quad (6.34)$$

Замечание 6.3. Аналогично доказательству теоремы 6.1 проводится доказательство теоремы на случай неявной функции, зависящей от любого конечного числа аргументов.

6.6 Частные производные высших порядков неявных функций

6.6.1 Полная частная производная

Пусть $U = F(z, x, y) = F(\varphi(x, y), x, y)$ – сложная функция двух переменных. Предположим, что функции $F(z, x, y)$ и $z = \varphi(x, y)$ – дифференцируемые функции. Частные производные указанной сложной функции называются полными частными производными функции $F(z, x, y)$ по переменным x и y . Обозначение полных частных производных: $\frac{dF}{dx}$ и $\frac{dF}{dy}$ – соответственно. Используя правило дифференцирования сложной функции, получим

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} = \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial x}, \quad (6.35)$$

$$\frac{dF}{dy} = \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y}. \quad (6.36)$$

Найдём формулы для частных производных второго порядка неявных функций. Вычислим, например, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$. Известно, что если неявная функция $z = \varphi(x, y)$ задаётся уравнением $F(z, x, y) = 0$ и выполняются все условия теоремы 6.1 ($U = z$), то $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}$.

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= \frac{D \left(-\frac{F'_x}{F'_z} \right)}{Dy} = \frac{-F'_z \frac{F'_x}{Dy} + F'_x \frac{F'_z}{Dy}}{(F'_z)^2} = \\ &= \frac{-F'_z \left(\frac{\partial F'_x}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial F'_x}{\partial y} \right) + F'_x \left(\frac{\partial F'_z}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial F'_z}{\partial y} \right)}{(F'_z)^2} = \\ &= \frac{-F'_z \left(\frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} + F'_x \left(\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} \right) \right)}{(F'_z)^2}. \end{aligned} \quad (6.37)$$

Аналогично можно получить формулы для $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

ЛЕКЦИЯ 7

Двойной интеграл. Суммы Дарбу

7.1 Двойной интеграл

7.1.1 Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла

Задача о массе материальной плоской неоднородной фигуры.

Пусть задана материальная плоская неоднородная фигура (пластинка), т.е. ограниченное квадрируемое множество $G \subset \mathbb{R}^2$ с плотностью $\rho(x, y)$ ($\rho : G \rightarrow R_+$). Требуется найти массу указанной пластинки.

◀ Берём любое разбиение τ_G пластинки G на n ($n \in \mathbb{N}$) частичных пластинок G_k ($k = \overline{1, n}$) без общих внутренних точек с помощью системы из m ($m \in \mathbb{N}$) спрямляемых кривых L_i ($i = \overline{1, m}$). Берём любую точку $M_k(x_k, y_k) \in \overline{G}_k$. Считаем, что для любой точки $M(x, y) \in \overline{G}_k$ $\rho(M) = \rho(M_k)$. Обозначим через $d_k = \sup_{M'_k, M''_k \in \overline{G}_k} \{d(M'_k, M''_k)\}$, где

$d(M'_k, M''_k)$ – расстояние между точками M'_k и M''_k , принадлежащими \overline{G}_k . d_k будем называть диаметром частичной пластинки G_k ($k = \overline{1, n}$). Пусть $\lambda_\tau = \max_{k=1,n} \{d_k\}$. Масса пластинки

$$m \approx \sigma_{\tau_G}(\rho, M_k) = \sum_{k=1}^n \rho(x_k, y_k) \Delta G_k,$$

где $\Delta G_k = S_{G_k}$ – площадь частичной пластинки G_k , $m_{G_k} = \rho(x_k, y_k) \Delta G_k$ – масса частичной однородной пластинки с постоянной плотностью $\rho(x_k, y_k)$.

Если существует конечный предел $m = \lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} \sigma_{\tau_G}(\rho, M_k)$ и этот предел не зависит от способа разбиения τ_G и выбора точек $M_k(x_k, y_k) \in \overline{G}_k$, то он называется **массой пластинки G** . ►

Задача об объёме криволинейного цилиндра.

Криволинейным цилиндром назовём множество $\Phi \subset \mathbb{R}^3$, которое ограничено основанием $G \subset \mathbb{R}^2$ (область с границей ∂G), цилиндрической поверхностью с направляющей ∂G (замкнутая спрямляемая кривая), образующими, параллельными оси Oz , а также графиком функции $z = f(x, y) \geq 0$, $(x, y) \in G$, непрерывной на $\overline{G} = G \cup \partial G$.

Дадим понятие объёма криволинейного цилиндра Φ и укажем метод нахождения объёма Φ .

◀ Берём любое разбиение τ_G области G на n ($n \in \mathbb{N}$) частичных областей G_k ($k = \overline{1, n}$) без общих внутренних точек с помощью системы из m ($m \in \mathbb{N}$) спрямляемых кривых L_i ($i = \overline{1, m}$). Аналогично, как и в предыдущей задаче, вводим понятие λ_τ , а также проводим выбор точек $M_k(x_k, y_k) \in \overline{G}_k$. Рассмотрим частичные прямые цилиндры с высотой $H_k(x_k, y_k) = f(x_k, y_k) = z_k$ и основаниями G_k (нижние основания), а также параллельным им нижним основанием G'_k (часть плоскости, проходящей через точку $M'_k(x_k, y_k, z_k)$, параллельной плоскости $z = z_k$ и вырезанной частичной цилиндрической поверхностью с направляющей ∂G_k , и образующими, параллельными оси Oz). Объём указанного частичного прямого цилиндра $V_k = H_k(x_k, y_k) \Delta G_k$, где ΔG_k – площадь частичной области G_k .

Объём криволинейного цилиндра

$$V \approx \sigma_{\tau_G}(H, M_k) = \sum_{k=1}^n H_k(x_k, y_k) \Delta G_k.$$

Если существует конечный предел $V = \lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} \sigma_{\tau_G}(H, M_k)$ и этот предел не зависит от способа разбиения τ_G и выбора точек $M_k(x_k, y_k) \in \overline{G}_k$, то он называется **объёмом криволинейного цилиндра** Φ . ►

7.1.2 Понятие двойного интеграла

Рассмотренные выше задачи из разных областей человеческих знаний, но методы их решения одинаковы. Отвлекаясь от конкретного содержания задач, но повторяя все рассуждения и выводы, приведённые в указанных задачах, мы приходим к понятию двойного интеграла.

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена на замыкании области G со спрямляемой границей. Берём любое разбиение τ_G области G на n ($n \in \mathbb{N}$) частичных областей G_k ($k = \overline{1, n}$) без общих внутренних точек с помощью системы из m ($m \in \mathbb{N}$) спрямляемых кривых L_i ($i = \overline{1, m}$). На замыкании каждой частичной области G_k выбираем любую точку $M_k(x_k, y_k) \in \overline{G}_k$. Обозначим через λ_τ максимальный из диаметров $d_k = \sup_{M'_k, M''_k \in \overline{G}_k} \{d(M'_k, M''_k)\}$, $M' = M'(x'_k, y'_k)$, $M'' = M''(x''_k, y''_k)$. Обозначим $\sigma_\tau = \sigma_\tau(f, M_k) = \sum_{k=1}^n f(M_k) \Delta G_k$, где ΔG_k – площадь G_k . Если существует конечный предел $\lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} \sigma_\tau = I \in \mathbb{R}$ и этот предел не зависит от способа разбиения τ_G и выбора точек $M_k(x_k, y_k) \in \overline{G}_k$, то он называется **двойным интегралом** функции $f(x, y)$ по области G и обозначается $I = \iint_G f(x, y) dx dy$. Сумма σ_τ называется **интегральной суммой** функции $z = f(x, y)$ по области G . Функция $f(x, y)$ называется **подынтегральной функцией**, выражение $f(x, y) dx dy$ – **подынтегральным выражением**.

По Коши указанный предел означает:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \tau_G \lambda_\tau < \delta \forall M_k \in \overline{G}_k |\sigma_\tau - I| < \varepsilon.$$

Замечание 7.1. Аналогично, как и для функции одной переменной, необходимым условием интегрируемости будет ограниченность этой функции на замыкании области G со спрямляемой границей. Доказательство указанного утверждения во многом аналогично одномерному случаю.

7.2 Суммы Дарбу. Условия существования двойного интеграла

Необходимым условием существования двойного интеграла, как сказано выше, является ограниченность в области интегрирования подынтегральной функции. В дальнейшем это всегда будем предполагать. Но легко показать на конкретном примере, что ограниченность функции на замыкании области G в общем случае не является достаточным условием её интегрируемости по этой области.

Пример 7.1. Показать, что функция

$$D(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ и } y \text{ рациональные числа} \\ 0, & \text{если } x \text{ и } y \text{ иррациональные числа} \end{cases}$$

не интегрируема по области

$$G = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{l} 0 < x < 1, \\ 0 < y < 1 \end{array} \right\}.$$

◀ Для интегральной суммы

$$\sigma_\tau = \sum_{k=1}^n D(x_k, y_k) \Delta G_k$$

рассмотрим два случая выбора точек $M_k(x_k, y_k)$.

а) Пусть $M_k \in \overline{G}$ такие, что $x_k \in \mathbb{Q}$ и $y_k \in \mathbb{Q}$. Тогда

$$\sigma_\tau = \sum_{k=1}^n 1 \cdot \Delta G_k = S_G \text{ и } \lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} \sigma_\tau = S_G,$$

где S_G – площадь области G .

б) Пусть хотя бы одна из координат x_k или y_k есть число иррациональное. Тогда

$$\sigma_\tau = \sum_{k=1}^n 0 \cdot \Delta G_k = 0.$$

Имеем $\lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} \sigma_\tau = S_G$.

Вывод: не существует $\iint_G D(x, y) dxdy$. ►

7.2.1 Суммы Дарбу, их свойства

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена и ограничена на замыкании области G со спрямляемой границей. Возьмём любое разбиение границы G на n ($n \in \mathbb{N}$) частичных областей G_k ($k = \overline{1, n}$) с помощью системы из m ($m \in \mathbb{N}$) спрямляемых кривых L_i ($i = \overline{1, m}$) без общих внутренних точек. Так как функция $f(x, y)$ ограничена на \overline{G} , то она ограничена и на замыкании любой частичной области G_k . Введём обозначения

$$M_k = \sup_{(x,y) \in \overline{G}_k} f(x, y), \quad m_k = \inf_{(x,y) \in \overline{G}_k} f(x, y).$$

Составим суммы

$$S_{\tau_G} = \sum_{k=1}^n M_k \Delta G_k, \tag{7.1}$$

$$s_{\tau_G} = \sum_{k=1}^n m_k \Delta G_k. \tag{7.2}$$

Сумма S_{τ_G} называется **верхней суммой Дарбу**, s_{τ_G} – **нижней суммой Дарбу**. Рассмотрим основные свойства верхней и нижней сумм Дарбу.

Теорема 7.1. Для любого разбиения τ_G области G на n ($n \in \mathbb{N}$) частичных областей G_k ($k = \overline{1, n}$) верхняя сумма Дарбу есть точная верхняя грань множества интегральных сумм для разбиения τ_G .

◀ Для разбиения τ_G и любого выбора точек $M_k(x_k, y_k) \in \overline{G}_k$ справедливо неравенство

$$m_k \leq f(x_k, y_k) \leq M_k. \tag{7.3}$$

Неравенство (7.3) умножаем на $\Delta G_k > 0$ и просуммируем полученные при этом неравенства по всем k ($k = \overline{1, n}$). Получим:

$$s_{\tau_G} \leq \sigma_{\tau_G} \leq S_{\tau_G}. \quad (7.4)$$

Доказано, что s_{τ_G} – нижняя граница, а S_{τ_G} – верхняя граница для интегральных сумм Римана (первое характеристическое свойство точных граней). Докажем, например, справедливость и второго характеристического свойства (для точной верхней грани). Так как

$$M_k = \sup_{(x,y) \in \bar{G}_k} f(x_k, y_k),$$

то (второе характеристическое свойство точной верхней грани) для любого $\varepsilon > 0$ существует $(x'_k, y'_k) \in \bar{G}_k$, что будет справедливо неравенство

$$0 \leq M_k - f(x'_k, y'_k) < \frac{\varepsilon}{S_G}, \quad (7.5)$$

где S_G – площадь области G .

Умножаем все части неравенства (7.5) на $\Delta G_k > 0$ (ΔG_k – площадь частичной области G_k) и просуммируем полученные при этом неравенства по всем k ($k = \overline{1, n}$). Получим двойное неравенство

$$0 \leq S_{\tau_G} - \sigma_{\tau_G} < \varepsilon. \quad (7.6)$$

Утверждение для точной верхней грани доказано. Аналогично доказывается утверждение и для точной нижней грани. ►

Введём понятие измельчения разбиения.

Определение 7.1. Разбиение τ'_G называется *измельчением разбиения* τ_G , если любая частичная область $G'_{k'}$ разбиения τ'_G есть подмножество некоторой частичной области G_k разбиения τ_G (обозначают $\tau_G \prec \tau'_G$).

Теорема 7.2. Если $\tau_G \prec \tau'_G$, то

$$s_{\tau_G} \leq s_{\tau'_G} \leq S_{\tau'_G} \leq S_{\tau_G}. \quad (7.7)$$

◀ Предположим, что разбиение τ'_G получено из разбиения τ_G путём добавления одной частичной области, то есть некоторая область $G_k = G'_k \cup G''_k$, где области G'_k и G''_k не имеют общих внутренних точек. Тогда получим, что для частичных областей G' , G'' и G_k будут справедливы неравенства $m'_k \geq m_k$, $M'_k \leq M_k$, $m''_k \geq m_k$, $M''_k \leq M_k$, где $m'_k = \inf_{(x,y) \in \bar{G}'_k} f(x, y)$, $M'_k = \sup_{(x,y) \in \bar{G}'_k} f(x, y)$, $m''_k = \inf_{(x,y) \in \bar{G}''_k} f(x, y)$, $M''_k = \sup_{(x,y) \in \bar{G}''_k} f(x, y)$, $m_k = \inf_{(x,y) \in \bar{G}_k} f(x, y)$, $M_k = \sup_{(x,y) \in \bar{G}_k} f(x, y)$.

Обозначим $\Delta G'_k = S_{G'_k}$ – площадь области G'_k , $\Delta G''_k = S_{G''_k}$ – площадь области G''_k , $\Delta G_k = S_{G_k}$ – площадь области G_k . Тогда

$$M_k \Delta G_k \geq M'_k \Delta G'_k + M''_k \Delta G''_k. \quad (7.8)$$

Суммируем неравенства (7.8) по всем k ($k = \overline{1, n}$), получим: $S_{\tau'_G} \leq S_{\tau_G}$. Аналогично доказывается и неравенство $s_{\tau_G} \leq s_{\tau'_G}$. ►

Методом математической индукции доказывается справедливость теоремы 7.2 в общем случае (при добавлении любого конечного числа новых частичных областей за счёт разбиения старых частичных областей G_k без общих внутренних точек).

Теорема 7.3. Для любых разбиений τ'_G и τ''_G справедливы неравенства $s_{\tau'_G} \leq S_{\tau''_G}$ и $s_{\tau''_G} \leq S_{\tau'_G}$.

◀ Для любых разбиений τ'_G и τ''_G найдётся такое разбиение τ_G , которое будет измельчением и τ'_G и τ''_G . Тогда $s_{\tau'_G} \leq s_{\tau_G} \leq S_{\tau_G} \leq S_{\tau''_G}$, $s_{\tau''_G} \leq s_{\tau_G} \leq S_{\tau_G} \leq S_{\tau'_G}$. ►

Следствие 7.1. Множество верхних сумм Дарбу по всем разбиениям τ_G ограничено снизу, а нижних – сверху.

◀ Пусть $A = \{S_{\tau_G}\}$ множество верхних сумм по всем разбиениям τ_G . В качестве нижней границы множества A можно взять любую нижнюю сумму s_{τ_G} (теорема 7.3). Аналогично доказывается ограниченность сверху множества $B = \{s_{\tau_G}\}$ нижних сумм Дарбу (в качестве верхней границы можно взять любую из верхних сумм Дарбу). По свойству непрерывности множества действительных чисел имеем: $\sup_{\tau_G} B = I_*$ – **нижний интеграл Дарбу** функции $f(x, y)$ по области G ; $\inf_{\tau_G} A = I^*$ – **верхний интеграл Дарбу** функции $f(x, y)$ по области G . Справедливо неравенство

$$s_{\tau_G} \leq I_* \leq I^* \leq S_{\tau_G}. \quad (7.9)$$

Докажем, например, что $I_* \leq s_{\tau_G}$. Допустим противное: $I^* < I_*$, но тогда (учесть

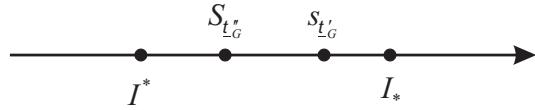


Рисунок 7.1

второе характеристическое свойство точных граней) существуют такие разбиения τ'_G и τ''_G , что $S_{\tau'_G} < s_{\tau'_G}$ (рисунок 7.1) получим противоречие (теорема 7.3). Другие связи с помощью неравенств между значениями величин очевидны. ►

7.2.2 Условия существования двойного интеграла

Теорема 7.4 (критерий интегрируемости). Для того, чтобы на замыкании области G со спрямляемой границей ∂G ограниченная функция $f(x, y)$ была интегрируемой, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} (S_{\tau_G} - s_{\tau_G}) = 0. \quad (7.10)$$

Замечание 7.2. Доказательство критерия во многом аналогично одномерному случаю (докажите самостоятельно).

Лемма 7.1 (лемма Дарбу). Ограниченная на замыкании области G со спрямляемой границей ∂G функция $f(x, y)$ имеет верхний и нижний интегралы I^* и I_* , которые являются соответственно пределами верхних и нижних интегральных сумм Дарбу при $\lambda_\tau \rightarrow 0$ (λ_τ определён выше).

Теорема 7.5 (критерий Дарбу интегрируемости функций). Ограниченная на замыкании области G со спрямляемой границей ∂G функция $f(x, y)$ будет интегрируемой по области G тогда и только тогда, когда верхний и нижний интегралы Дарбу равны между собой, то есть $I^* = I_* = I$.

Замечание 7.3. Из критерия Дарбу следует, что для ограниченной на замыкании области G со спрямляемой границей ∂G функции $f(x, y)$ можно ввести понятие интеграла Римана следующим образом. Составляем суммы Дарбу

$$s_{\tau_G} = \sum_{k=1}^n m_k \Delta G_k, \quad S_{\tau_G} = \sum_{k=1}^n M_k \Delta G_k.$$

Получим: $I_* = \sup_{\tau_G} \{s_{\tau_G}\}$ – **нижний интеграл Дарбу**; $I^* = \inf_{\tau_G} \{S_{\tau_G}\}$ – **верхний интеграл Дарбу**.

Определение 7.2. Если $I^* = I_* = I$, то функция $z = f(x, y)$ называется **интегрируемой по области G** со спрямляемой границей ∂G по Риману. Общее значение интегралов Дарбу называется **интегралом Римана** функции $f(x, y)$ по области G .

Теорема 7.6 (критерий Римана). Ограниченнная на замыкании области G со спрямляемой границей ∂G функция $f(x, y)$ интегрируема по Риману на указанной области тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует τ_G , что

$$S_{\tau_G} - s_{\tau_G} < \varepsilon. \quad (7.11)$$

◀ **Необходимость.** Если существует

$$\iint_G f(x, y) dx dy = I = I_* = I^*,$$

то $\lim_{\lambda_{\tau_G} \rightarrow 0} s_{\tau_G} = I_* = I^* = \lim_{\lambda_{\tau_G} \rightarrow 0} S_{\tau_G}$ (лемма Дарбу). Тогда $\lim_{\lambda_{\tau_G} \rightarrow 0} (S_{\tau_G} - s_{\tau_G}) = 0$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \tau_G \lambda_{\tau_G} < \delta \quad S_{\tau_G} - s_{\tau_G} < \varepsilon.$$

Достаточность. Если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое τ_G , что $S_{\tau_G} - s_{\tau_G} < \varepsilon$, то из неравенства (7.9) следует, что $0 \leq I_* \leq I^* \leq S_{\tau_G} - s_{\tau_G} < \varepsilon$.

Действительное неотрицательное число $I^* - I_* \geq 0$ меньше любого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$. Значит, $I^* - I_* = 0$, то есть

$$I^* = I_* = I = \iint_G f(x, y) dx dy. \blacktriangleright$$

7.3 Основные классы интегрируемых функций

Теорема 7.7 (об интегрируемости непрерывных функций). Если функция $z = f(x, y)$ определена и непрерывна на замыкании области G со спрямляемой границей ∂G , то она интегрируема на G .

◀ Так как функция $f(x, y)$ непрерывна на \bar{G} со спрямляемой границей ∂G , то \bar{G} – ограниченное замкнутое множество (компакт). По теореме Кантора непрерывная на \bar{G} функция $f(x, y)$ будет и равномерно непрерывной на \bar{G} функцией. А это означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \tau_G \lambda_{\tau} < \delta \quad M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{S_G}.$$

Тогда $S_{\tau_G} - s_{\tau_G} = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta G_k < \frac{\varepsilon}{S_G} \sum_{k=1}^n \Delta G_k = \frac{\varepsilon}{S_G} S_G = \varepsilon$, то есть

$$\lim_{\lambda_{\tau} \rightarrow 0} (S_{\tau_G} - s_{\tau_G}) = 0.$$

А это означает (критерий интегрируемости, теорема 7.4), что функция $f(x, y)$ интегрируема на G . ►

Теорема 7.8 (об интегрируемости разрывных функций). *Ограниченнная на замыкании области G со спрямляемой границей ∂G функция $f(x, y)$ будет интегрируемой на G , если она непрерывна на G за исключением множества точек области G площади нуль.*

Замечание 7.4. Площадь любой спрямляемой кривой из \mathbb{R}^2 равна нулю.

7.4 Основные свойства двойного интеграла

Замечание 7.5. Основные свойства двойного интеграла мы только перечислим, так как их доказательства во многом аналогичны доказательствам соответствующих свойств одномерного интеграла Римана.

Теорема 7.9 (свойство линейности). *Если функции $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ интегрируемы в области G и α_1, α_2 – любые действительные числа, то функция $f(x, y) = \alpha_1 f_1(x, y) + \alpha_2 f_2(x, y)$ интегрируема в области G и справедливо равенство*

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \alpha_1 \iint_G f_1(x, y) dx dy + \alpha_2 \iint_G f_2(x, y) dx dy. \quad (7.12)$$

Теорема 7.10 (свойство аддитивности интеграла). *Если область $G = \bigcup_{k=1}^n G_k$, где частичные области G_k не имеют общих внутренних точек, и функция $f(x, y)$ интегрируема в любой частичной области G_k , то в G функция также интегрируема и справедливо равенство*

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \sum_{k=1}^n \iint_{G_k} f(x, y) dx dy. \quad (7.13)$$

Теорема 7.11 (оценка интеграла по модулю). *Если функция $f(x, y)$ интегрируема в G , то и функция $|f(x, y)|$ интегрируема в G и справедливо неравенство*

$$\left| \iint_G f(x, y) dx dy \right| \leq \iint_G |f(x, y)| dx dy. \quad (7.14)$$

Теорема 7.12 (теорема о среднем). *Если функция $f(x, y)$ интегрируема в G и $m = \inf_{(x,y) \in \bar{G}} f(x, y)$, а $M = \sup_{(x,y) \in \bar{G}} f(x, y)$, то справедливо неравенство*

$$mS_G \leq \iint_G f(x, y) dx dy \leq MS_G, \quad (7.15)$$

где S_G – площадь области G .

Следствие 7.2. *Если в условии теоремы о среднем функция $f(x, y)$ непрерывна на замыкании области G со спрямляемой границей ∂G , то существует такая точка $M_0(x_0, y_0) \in \bar{G}$, что*

$$\iint_G f(x, y) dx dy = f(M_0) S_G. \quad (7.16)$$

ЛЕКЦИЯ 8

Вычисление двойного интеграла

8.1 Приведение двойного интеграла к повторному

Теорема 8.1 (случай прямоугольника). Если функция $z = f(x, y)$ определена и ограничена на прямоугольнике $\bar{\Pi} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{l} a \leq x \leq b, \\ c \leq y \leq d \end{array} \right\}$ и существует двойной интеграл $\iint_{\Pi} f(x, y) dx dy$, а также для любого $x \in [a, b]$ существует

$$I(x) = \int_c^d f(x, y) dy,$$

то существует

$$\int_a^b I(x) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \iint_{\Pi} f(x, y) dx dy;$$

если для любого $y \in [c, d]$ существует $J(y) = \int_a^b f(x, y) dx$, то существует

$$\int_c^d J(y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \iint_{\Pi} f(x, y) dx dy.$$

◀ Рассмотрим случай, когда для любого $x \in [a, b]$ существует $\int_c^d f(x, y) dy$. Так как существует $\iint_{\Pi} f(x, y) dx dy$, то его значение не зависит от разбиения прямоугольника Π на частичные области.

Рассмотрим разбиение прямоугольника Π с помощью семейства прямых (рисунок 8.1):

$$1. x = a + x_k (k = \overline{1, n}),$$

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < b = x_n;$$

$$2. y = c + y_i (i = \overline{1, m}),$$

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_{i-1} < y_i < \dots < d = y_m.$$

На рисунке выделен замкнутый прямоугольник

$$\bar{\Pi}_{ki} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{l} x_{k-1} \leq x \leq x_k, \\ y_{i-1} \leq y \leq y_i \end{array} \right\}.$$

Полученная сетка содержит $m \times n$ таких частичных прямоугольников. Положим: $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$; $\Delta S_{ki} = \Delta x_k \cdot \Delta y_i$ – площадь частичного прямоугольника $\bar{\Pi}_{ki}$;

$$m_{ki} = \inf_{(x,y) \in \bar{\Pi}_{ki}} f(x, y), \quad M_{ki} = \sup_{(x,y) \in \bar{\Pi}_{ki}} f(x, y).$$

Рисунок 8.1

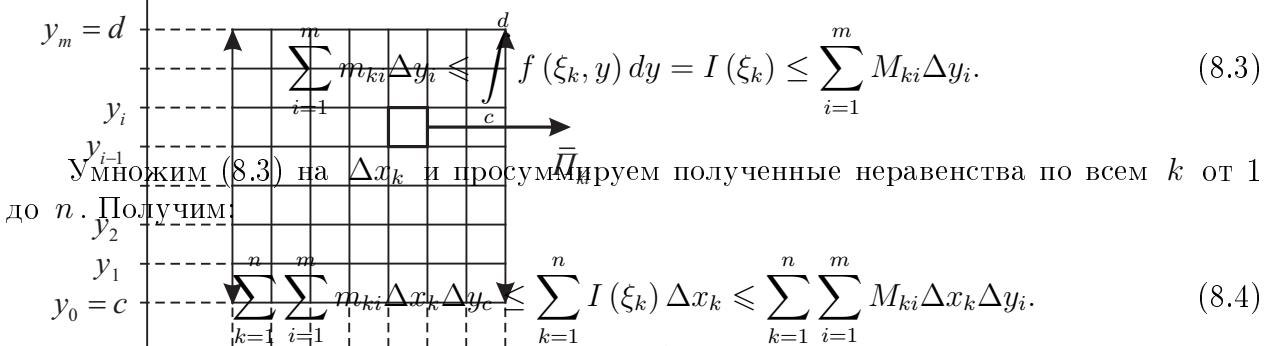
На частичном прямоугольнике $\bar{\Pi}_{ki}$ справедливо неравенство

$$m_{ki} \leq f(x, y) \leq M_{ki}. \quad (8.1)$$

Берем любую точку $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, фиксируем её. С учетом выбранной точки $x = \xi_k$ интегрируем (8.1) по отрезку $[y_{i-1}, y_i]$, получим:

$$m_{ki} \Delta y_i \leq \int_{y_{i-1}}^{y_i} f(\xi_k, y) dy \leq M_{ki} \Delta y_i. \quad (8.2)$$

Неравенство (8.2) суммируем по всем i от 1 до m . Получим:



В двойном неравенстве (8.4) слева имеем нижнюю сумму Дарбу ξ_τ , справа – верхнюю сумму Дарбу $S_{\tau\Pi}$, а посередине – интегральную сумму функции $I(x)$ по отрезку $[a, b]$.

Так как существует $\iint_{\Pi} f(x, y) dxdy = A$, то $\lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} s_{\tau\Pi} = \lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} S_{\tau\Pi} = A$ (λ_τ – максимальный из диаметров частичных прямоугольников $\bar{\Pi}_{ki}$).

Используя аналог теоремы о пределе промежуточной функции, получим, что существует

$$\lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n I(\xi_k) \Delta x_k = \int_a^b I(x) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \iint_{\Pi} f(x, y) dxdy.$$

Теорема доказана в случае, когда существует

$$\int_c^d f(x, y) dy = I(x).$$

Случай, когда существует $\int_a^b f(x, y) dx = J(y)$, доказывается аналогично. ►

Замечание 8.1. Если функция $f(x, y)$ непрерывна на $\bar{\Pi}$, то в теореме выполняются условия для обоих рассматриваемых случаев, поэтому каждый из повторных интегралов будет равен двойному интегралу, а, значит, повторные интегралы будут также равны между собой

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \iint_{\Pi} f(x, y) dxdy. \quad (8.5)$$

Переход при этом от одного повторного интеграла к другому называется **изменением порядка интегрирования**.

Дальше рассмотрим случай криволинейной области. Область G называется **простейшей областью первого типа**, если она ограничена непрерывными кривыми $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, и прямыми $x = a$, $x = b$ (рисунок 8.2). Отрезки прямых $x = a$ и $x = b$ (границы области G слева и справа соответственно) могут вырождаться в точки.

Рисунок 8.2

Область G называется **простейшей областью второго типа**, если она ограничена непрерывными кривыми $x = x_1(y)$, $x = x_2(y)$ и прямыми $y = c$ и $y = d$ (рисунок 8.3). Отрезки прямых $y = c$ и $y = d$ (границы области G снизу и сверху соответственно) могут вырождаться в точки.

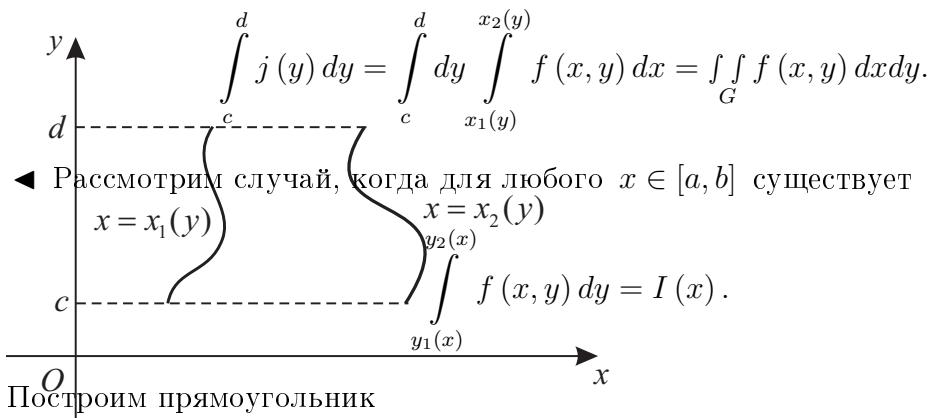
Теорема 8.2 (случай криволинейной области). *Если существует двойной интеграл $\iint_G f(x, y) dxdy$, где G – простейшая область первого типа, и для любого*

Рисунок 8.3

$x \in [a, b]$ существует $\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy = I(x)$, тогда существует

$$\int_a^b I(x) dx = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy = \iint_G f(x, y) dxdy;$$

если G – простейшая область второго типа и для любого $y \in [c, d]$ существует $\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx = J(y)$, тогда существует



$$\bar{\Pi} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{l} a \leq x \leq b, \\ c \leq y \leq d \end{array} \right\},$$

где c – минимум функции $y = y_1(x)$, а d – максимум функции $y = y_2(x)$ (рисунок 8.4). Имеем: $\bar{\Pi} = ABCD \supset \bar{G}$. Определим функцию

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{если } (x, y) \in \bar{G}, \\ 0, & \text{если } (x, y) \in \bar{\Pi} \setminus \bar{G}. \end{cases} \quad (8.6)$$

Для функции $F(x, y)$ выполняются все условия теоремы 8.1 (случай, когда для любого $x \in [a, b]$ существует $\int_c^d f(x, y) dy = I(x)$). Тогда справедливо и заключение теоремы.

Рисунок 8.4

Для нашего случая будем иметь:

$$\begin{aligned}
 \int_a^b dx \int_c^d F(x, y) dy &= \int_a^b dx \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} 0 \cdot dy + \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy + \int_{y_2(x)}^d 0 \cdot dy \right) = \\
 &= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy = \iint_{\Pi} F(x, y) dxdy = \\
 &= \iint_G f(x, y) dxdy + \iint_{\Pi \setminus G} 0 dxdy = \iint_G f(x, y) dxdy.
 \end{aligned}$$

y

Теорема доказана для простейшей криволинейной области первого типа. Аналогично доказывается теорема для простейшей криволинейной области второго типа. ►

Замечание 8.2. Если область G является простейшей как первого, так и второго типов, и функция $f(x, y)$ непрерывна на \bar{G} , то будут выполняться условия теоремы для обоих случаев.

Тогда оба повторных интеграла будут существовать, причем каждый из них будет равен существующему двойному интегралу, то есть повторные интегралы будут равны между собой.

$$\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx = \iint_G f(x, y) dxdy. \quad (8.7)$$

На практике (чаще всего) при проведении операции изменения порядка интегрирования простейшая область интегрирования одного типа есть объединение конечного числа частичных простейших областей второго типа. В этом случае проводим изменение порядка интегрирования для каждой из таких частичных областей. В дальнейшем (при решении задач) будем предполагать, что двойной интеграл для функции $f(x, y)$ по данной области существует.

Пример 8.1. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле

$$\int_0^2 dx \int_{\frac{1}{2}(x-2)}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy.$$

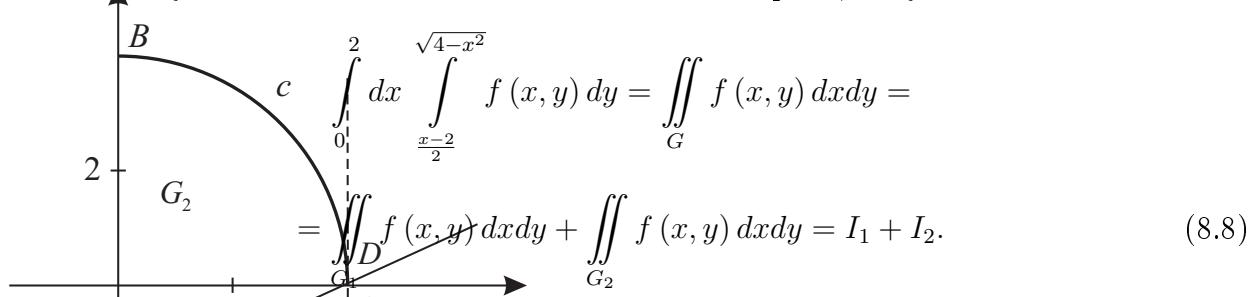
◀ Вначале изобразим на рисунке 8.5 область интегрирования для соответствующего двойного интеграла. Строим графики функции $x = 0$, $x = 2$, $y = \sqrt{4 - x^2}$, $y = \frac{x-2}{2}$. Область интегрирования G – это криволинейный треугольник $ABcD$ (без границы). Обозначим наш повторный интеграл через I .

Рисунок 8.5

При изменении порядка интегрирования можно применить следующий формальный способ. После изменения порядка интегрирования в повторном интеграле внешнее интегрирование должно проводиться по y (нижний предел интеграла – самая малая ордината точек границы области интегрирования, верхний предел – самая большая). Во внутреннем интеграле параллельные оси Ox должны входить в область интегрирования через одну кривую (одно аналитическое выражение кривой), а выходить – через другую (также одно аналитическое выражение этой кривой). В нашей задаче, если $y = -1$ – взять нижний пределом интегрирования, а $y = 2$ – верхним, то указанный выше выход уже будет проходить через две разные кривые (прямую и окружность).

По этой причине область интегрирования G представим в виде объединения $G = G_1 \cup G_2$ (рисунок 8.5).

Используя свойство аддитивности двойного интеграла, получим:



Каждому из полученных интегралов I_i ($i = 1, 2$) можно уже применить (для соответствующих повторных интегралов) указанный выше метод изменения порядка интегрирования.

Для границы области G_1 имеем: минимальная ордината точек границы $y = -1$ (нижний предел интегрирования), максимальная – $y = 0$ (верхний предел интегрирования). Также для G_2 – $y = 0$ (нижний предел интегрирования), $y = 2$ (верхний). В область G_1 указанные выше параллельные оси Ox прямые входят через прямую $x = 0$, а выходят через прямую $x = 2y + 2$. В области G_2 указанные прямые $y = \text{const}$ входят через прямую $x = 0$. Найдем выход этих прямых

$$y = \sqrt{4 - x^2} \geq 0, y^2 = 4 - x^2, x^2 = 4 - y^2, x \geq 0, x = \sqrt{4 - y^2}.$$

Прямые $y = \text{const}$ выходят из области G_2 через кривую $x = \sqrt{4 - y^2}$. Кривая входа – нижний предел интегрирования, кривая выхода – верхний. Окончательно получим искомый ответ

$$\int_0^2 dx \int_{\frac{x-2}{2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy = \int_0^0 dy \int_0^{2y+2} f(x, y) dx + \int_0^2 dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx. \blacktriangleright$$

Пример 8.2. Вычислить двойной интеграл $I = \iint_G x^2 dxdy$, если область G ограничена кривыми $y = x$, $y = \frac{1}{x}$, $x = 2$.

◀ Изображаем на рисунке 8.6 область интегрирования, построив графики указанных в задаче функций. Заменяем двойной интеграл (он существует, так как подынтегральная функция $f(x, y) = x^2$ непрерывна на замыкании области интегрирования) повторным. Внешнее интегрирование лучше взять по x , так как область интегрирования G – это простейшая область первого типа. Если же внешнее интегрирование взять по y , то область G надо разбить прямой $y = 1$ на две простейшие области второго типа.

Рисунок 8.6

$$\begin{aligned} \iint_G x^2 dxdy &= \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^x dy = \int_1^2 x^2 y \Big|_{\frac{1}{x}}^x dx = \int_1^2 x^2 \left(x - \frac{1}{x} \right) dx = \\ &= \int_1^2 (x^3 - x) dx = \frac{x^4}{4} \Big|_1^2 - \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 = \frac{1}{4} (2^4 - 1^4) - \frac{1}{2} (2^2 - 1^2) = \frac{15}{4} - \frac{6}{4} = \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

Ответ: $I = \frac{9}{4}$. □

8.2 Криволинейные координаты

Пусть в системе координат xOy дана область G с кусочно-гладкой границей ∂G , а в системе координат uOv дана область D также с кусочно-гладкой границей ∂D .



Прямые $u = u_0$, $v = v_0$ в плоскости uOv назовем **координатными линиями** (они параллельны соответственно координатным осям $0u$ и $0v$ и проходят через область D). Точка $M_0 = (u_0, v_0) \in D$ имеет в системе координат uOv декартовые координаты. Указанные координатные линии $u = u_0$, $v = v_0$ плоскости uOv функции $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ отображают в плоскости xOy в некоторые кривые (криволинейные координатные линии плоскости xOy). Точка пересечения этих кривых в плоскости xOy имеет, говорят, криволинейные координаты u_0 и v_0 области G . В плоскости xOy будем иметь криволинейную ортогональную систему координат.

Определение 8.1. *Функциональный определитель*

$$I = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{array} \right|$$

называется *определенителем Якоби*¹ или *якобианом*.

8.3 Площадь в криволинейных координатах

При замене переменных в двойном интеграле основная проблема состоит в том, чтобы выразить через криволинейные координаты площадь исходной квадрируемой области G .

Теорема 8.3. *Пусть функции $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ и существующие их частные производные первого порядка непрерывны на \overline{D} с кусочно-гладкой границей ∂D и*

¹ Якоби Карл Густав Якоб (1804–1851) – немецкий математик.

биективно отображают область D на область G , а границу ∂D на кусочно-гладкую границу ∂G , а якобиан $I = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \neq 0$. Тогда площадь области G будет находиться по формуле

$$S_G = \iint_G dxdy = \iint_D \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| dudv. \quad (8.9)$$

◀ Доказательство теоремы проведём на так называемом «физическом уровне строгости». Рассмотрим бесконечно малый криволинейный параллелограмм $A_0A_1A_3A_2$. Имеем: $A_0(u_0, v_0) = A_0(x_0, y_0)$, $A_1(u_0 + \Delta u, v_0) = A_1(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ (рисунок 8.8).

Рисунок 8.8

Найдем координаты вектора $\overrightarrow{A_0A_1}$: $\overrightarrow{A_0A_1} = (\Delta x, \Delta y)$, но

$$dx \approx \Delta x = \frac{\varphi(u_0 + \Delta u, v_0) - \varphi(u_0, v_0)}{\Delta u} \Delta u \approx \frac{\partial x}{\partial u} du;$$

аналогично

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u} du; \quad \overrightarrow{A_0A_1} = \left(\frac{\partial x}{\partial u} du, \frac{\partial y}{\partial u} du \right).$$

Также будем иметь: $\overrightarrow{A_0A_2} = \left(\frac{\partial x}{\partial v} dv, \frac{\partial y}{\partial v} dv \right)$. Площадь криволинейного параллелограмма $A_0A_1A_3A_2$ находим по формуле

$$dS_{A_0A_1A_3A_2} = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial u} du & \frac{\partial y}{\partial u} du \\ \frac{\partial x}{\partial v} dv & \frac{\partial y}{\partial v} dv \end{array} \right| = \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| dudv. \quad (8.10)$$

Формула (8.10) есть элемент величины площади области G в криволинейных координатах (u, v) . Тогда площадь области G будет вычисляться по формуле

$$S_G = \iint_D \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| dudv. \quad (8.11)$$

8.4 Замена переменных в двойном интеграле

Замена переменных в интегральном исчислении для функции одной переменной служит для упрощения подынтегральных функций. В теории двойных интегралов замена переменных позволяет, с одной стороны, также упрощать подынтегральную функцию, с другой же стороны, при замене переменных происходит упрощение области интегрирования.

Теорема 8.4. Пусть функции $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ и существующие их частные производные первого порядка непрерывны на замыкании области D с кусочно-гладкой границей ∂D и биективно отображают область D на область G , а границу ∂D на кусочно-гладкую границу ∂G . Якобиан $I = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \neq 0$. Если функция $f(x, y)$ непрерывна на \overline{G} или ограничена на \overline{G} и непрерывна на G , то

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \iint_D f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) |I| du dv. \quad (8.12)$$

◀ Берём любое разбиение τ_G области G на n ($n \in \mathbb{N}$), частичных областей G_k ($k = \overline{1, n}$) (без общих внутренних точек), с помощью системы из m ($m \in \mathbb{N}$) кусочно-гладких кривых L_i ($i = \overline{1, m}$).

В области G обозначим через ΔS_{G_k} элемент площади. Берём любую точку $M_k(x_k, y_k) \in \overline{G}_k$ и составляем интегральную сумму

$$\sigma_{\tau_G} = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta S_{G_k}. \quad (8.13)$$

По формуле (8.10) находим

$$\Delta S_{G_k} = \iint_{D_k} \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| du dv, \quad (8.14)$$

где D_k – образ G_k при отображении $u = \varphi^{-1}(x, y)$, $v = \psi^{-1}(x, y)$ (обратном для отображения $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$).

Якобиан $I(u, v) = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}$ есть функция, непрерывная на \overline{D} . По теореме о среднем (из (8.14)) получим:

$$\Delta S_{G_k} = |I(u_k, v_k)| \Delta S_{D_k}, \quad (8.15)$$

где ΔS_{G_k} – площадь частичной области D_k . В силу произвольного выбора точек $(x_k, y_k) \in G_k$ положение $x_k = \varphi(u_k, v_k)$, $y_k = \psi(u_k, v_k)$.

Получим интегральную сумму

$$\sigma_{\tau_D} = \sum_{k=1}^n f(\varphi(u_k, v_k), \psi(u_k, v_k)) |I(u_k, v_k)| \Delta S_{D_k}. \quad (8.16)$$

Это интегральная сумма для интеграла

$$\iint_D f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) |I(u, v)| du dv. \quad (8.17)$$

Интеграл (8.17) существует, так как подынтегральная функция или непрерывна на \overline{D} и множество точек разрыва на D имеет меру нуль (площадь этого множества равна нулю). С другой стороны, в силу непрерывности отображения будет при $\lambda_{\tau_{D_k}} \rightarrow 0$ и $\lambda_{\tau_{G_k}} \rightarrow 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda_{\tau_G} \rightarrow 0} \sigma_{\tau_G} &= \iint_G f(x, y) dx dy = \lim_{\lambda_{\tau_D} \rightarrow 0} \sigma_{\tau_D} = \\ &= \iint_D f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) |I(u, v)| du dv. \blacktriangleright \end{aligned}$$

8.5 Якобиан в полярных криволинейных координатах

Чаще всего на практике используют так называемые полярные координаты, которые связаны с декартовыми координатами с помощью следующей системы уравнений

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \end{cases} \quad (8.18)$$

где $r \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Координатными криволинейными ортогональными линиями на плоскости в этом случае будут концентрические окружности с центром в начале координат и радиусом $r = r_0 = \text{const}$ (при $r = 0$ окружности вырождаются в точку), а также лучи $\varphi = \varphi_0 = \text{const}$, выходящие из начала координат. Функции (8.18) отображают полуполосу $\begin{cases} r \geq 0, \\ 0 \leq \varphi < 2\pi \end{cases}$ декартовой плоскости $rO\varphi$ на всю плоскость xOy . При этом надо

учесть, что биективность отображения нарушается при $\begin{cases} r = 0, \\ 0 \leq \varphi < 2\pi \end{cases}$ (точки указанного полуинтервала отображаются в начало координат).

Исключим в плоскости xOy начало координат, получим обратные отображения проколотой плоскости xOy на полуполосу $\begin{cases} r > 0, \\ 0 \leq \varphi < 2\pi \end{cases}$. Обратное отображение будет непрерывно везде, кроме положительной полуоси Ox . Если $y \rightarrow -0$, $x > 0$, то $\varphi \rightarrow 2\pi$, при $y \rightarrow +0$, $x > 0$ будет $\varphi \rightarrow 0$, но для $y = 0$ и $x > 0$ будет $\varphi = 0$. Вывод: формулы $\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$, устанавливают биективное отображение полуполосы $\begin{cases} r > 0, \\ 0 \leq \varphi < 2\pi \end{cases}$ на проколотую в начале координатной плоскости xOy , причем это отображение непрерывно везде, кроме тех точек, в которых $r = 0$ или $\varphi = 0$.

Обратное отображение будет определяться формулами $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ и

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arcctg} \frac{x}{y}, & y > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}; \\ 0, & x > 0, \quad y = 0; \\ \pi, & x < 0, \quad y > 0; \\ \pi + \operatorname{arcctg} \frac{x}{y}, & y < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (8.19)$$

Найдем Якобиан указанного отображения (8.18)

$$\frac{D(x, y)}{D(r, \varphi)} = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{array} \right| = r,$$

причём $r \neq 0$ ($r > 0$) везде, кроме точки $x = y = 0$.

Пример 8.3. Вычислить двойной интеграл

$$I = \iint_G \sqrt{4 - x^2 - y^2} dx dy,$$

где G – внутренность кривой $x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1$.

◀ На рисунке 8.9 покажем область интегрирования.

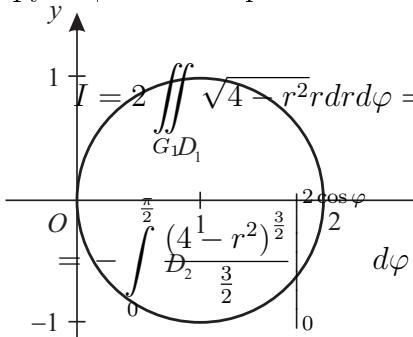
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1, \quad (x - 1)^2 + y^2 = 1.$$

Рисунок 8.9

Переходим к полярным координатам. Область интегрирования:

$$r^2 = 2r \cos \varphi, \quad r = 2 \cos \varphi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad I = \iint_G \sqrt{4 - r^2} r dr d\varphi.$$

Так как область интегрирования симметрична относительно оси Ox , а подынтегральная функция симметрична относительно обеих координатных осей, то



$$\begin{aligned} I &= 2 \iint_{G_1 D_1} \sqrt{4 - r^2} r dr d\varphi = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} (4 - r^2)^{\frac{1}{2}} d(4 - r^2) = \\ &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} (4 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_0^{2 \cos \varphi} d\varphi = - \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left((4 - 4 \cos^2 \varphi)^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}} \right) d\varphi = \\ &= - \frac{2}{3} \left(8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi d\varphi - 8 \cdot \frac{\pi}{2} \right) = - \frac{16}{3} \left(- \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 \varphi) d\cos \varphi - \frac{\pi}{2} \right) = \\ &= - \frac{16}{3} \left(- \cos \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\cos^3 \varphi}{3} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2} \right) = - \frac{16}{3} \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{8}{3}\pi - \frac{32}{9}. \end{aligned}$$

Ответ: $I = \frac{8}{3}\pi - \frac{32}{9}$. ►

ЛЕКЦИЯ 9

Геометрические и физические приложения двойного интеграла

9.1 Геометрические приложения двойного интеграла

Из задачи об объеме криволинейного цилиндра, приводящей к понятию двойного интеграла, следует геометрический смысл двойного интеграла. С геометрической точки зрения двойной интеграл

$$\iint_G f(x, y) dx dy \tag{9.1}$$

есть **объем криволинейного цилиндра**, у которого нижнее основание есть \bar{G} – замыкание области G с кусочно-гладкой границей ∂G . Сбоку указанное тело ограничено цилиндрической поверхностью с направляющей ∂G и образующими, параллельными оси Oz . Верхнее основание цилиндра есть график функции $f(x, y)$, определенный на \bar{G} , причем указанная поверхность (график $f(x, y)$) кусочно-гладкая.

Замечание 9.1. Если в формуле (9.1) $f(x, y) = 1$, то с геометрической точки зрения

$$S = \iint_G dx dy \quad (9.2)$$

есть **площадь области G** .

Пример 9.1. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x + 1 = z^2, \quad x - 1 = -z^2, \quad y = 0, \quad y = z^2 + x^2.$$

◀ Тело симметрично относительно оси Oy (оно расположено в первом, втором, пятом и шестом октантах). Находим объем тела и умножаем полученное число на 4, получим объем всего тела. AmB – кривая пересечения поверхностей $y = x^2 + z^2$ и $x - 1 = -z^2$; AnB – дуга окружности $\begin{cases} y = 1, \\ y = x^2 + z^2 \end{cases}$ в первом октанте (рисунок 9.1).

Рисунок 9.1

$$\begin{aligned} V &= 4 \iint_{G_1} (z^2 + x^2) dx dz = \left[\begin{array}{l} x - 1 = -z^2, \quad z^2 = 1 - x, \\ z = \sqrt{1-x}, \quad z \geq 0 \end{array} \right] = \\ &= 4 \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x}} (z^2 + x^2) dz = 4 \int_0^1 \left(\frac{z^3}{3} \Big|_0^{\sqrt{1-x}} + x^2 z \Big|_0^{\sqrt{1-x}} \right) dx = \\ &= 4 \int_0^1 \frac{1}{3} \sqrt{(1-x)^3} dx + 4 \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x} dx = \\ &= -\frac{4}{3} \cdot \frac{(1-x)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \Big|_0^1 + 4 \left[\begin{array}{l} \sqrt{1-x} = t, \\ t_{\text{H}} = 1, \\ t_{\text{B}} = 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} 1-x = t^2, \\ x = 1-t^2, \\ dx = -2tdt \end{array} \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{8}{15} + 4 \int_1^0 (1-t^2)^2 t (-2t) dt = \frac{8}{15} - 4 \int_0^1 (1-2t^2+t^4)(-2t^2) dt = \\
&= \frac{8}{15} + 8 \int_0^1 (t^2-2t^4+t^6) dt = \frac{8}{15} + 8 \left(\frac{t^3}{3} \Big|_0^1 - 2 \frac{t^5}{5} \Big|_0^1 + \frac{t^7}{7} \Big|_0^1 \right) = \\
&= \frac{8}{15} + \frac{8}{3} - \frac{16}{5} + \frac{8}{7} = \frac{8+40-48}{15} + \frac{8}{7} = \frac{8}{7} \text{ (куб. ед.)}.
\end{aligned}$$

Ответ: $V = \frac{8}{7}$ (куб. ед.). ►

Пример 9.2. С помощью двойного интеграла вычислить в полярных координатах площадь плоской фигуры, ограниченной кривой

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 (3x^2 + 2y^2), \quad a > 0.$$

◀ Преобразуем уравнение кривой, используя полярные координаты

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi. \end{cases}$$

Получим:

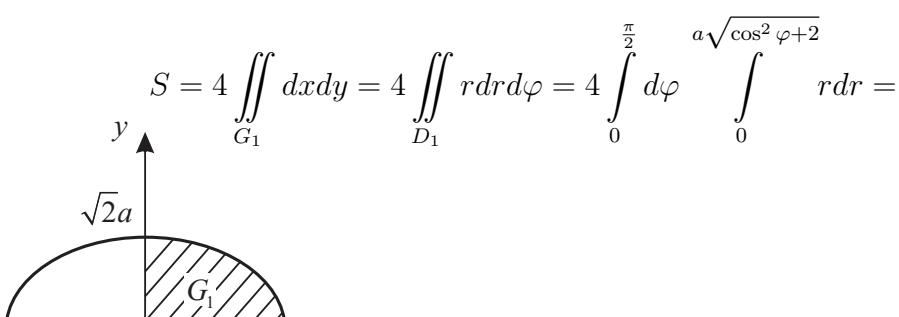
$$r^4 = a^2 r^2 (3 \cos^2 \varphi + 2 \sin^2 \varphi); \quad r^2 = a^2 (\cos^2 \varphi + 2); \quad r = a \sqrt{\cos^2 \varphi + 2}.$$

Построим эскиз кривой (рисунок 9.2).

Рисунок 9.2

φ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
r	$\sqrt{3}a$	$\sqrt{2}a$	$\sqrt{3}a$	$\sqrt{2}a$	$\sqrt{3}a$

Вычисляем искомую площадь плоской фигуры. В силу симметрии фигуры относительно начала координат, имеем:



$$\begin{aligned}
&= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2}{2} \left|_{0}^{a\sqrt{\cos^2 \varphi}} d\varphi = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 (\cos^2 \varphi + 2) d\varphi = \right. \\
&\left. = 2a^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \right) = 2a^2 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + 2 \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \frac{5\pi a^2}{2} \text{ (кв.ед.)} . \right.
\end{aligned}$$

Ответ: $S = \frac{5\pi a^2}{2}$ (кв.ед.). ►

9.2 Масса плоской неоднородной фигуры

Из задачи о массе материальной плоской неоднородной фигуры (пластиинки) G следует, что эта масса вычисляется по формуле

$$m_G = \iint_G \rho(x, y) dx dy, \quad (9.3)$$

где область G с кусочно-гладкой границей ∂G . Предположим, что функция $\rho(x, y)$ непрерывна на \overline{G} (физический смысл функции – это плотность, с которой масса распределена в G (в общем случае считаем, что $\rho(x, y) \neq \text{const}$)).

Пример 9.3. Плоское кольцо ограничено двумя концентрическими окружностями, радиусы которых соответственно равны 1 и 3. Зная, что плотность материала пропорциональна расстоянию от центра окружности, найти массу кольца, если плотности на окружности внутреннего круга равны единице.

◀ Введем декартовую систему координат с началом в центре кольца (рисунок 9.3).

Рисунок 9.3

Вычислим массу кольца по формуле

$$m = \iint_G \rho(x, y) dx dy.$$

В нашем случае плотность $\rho(x, y) = k\sqrt{x^2 + y^2}$. В силу симметрии кольца относительно начала системы координат, имеем:

$$\begin{aligned} m &= \iint_G k\sqrt{x^2 + y^2} dx dy = k \iint_D r^2 dr d\varphi = 4k \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_1^3 r^2 dr = \\ &= 4k \frac{\pi}{2} \cdot \frac{r^3}{3} \Big|_1^3 = k \frac{2}{3} \pi (3^3 - 1^3) = \frac{52}{3} \pi k \text{ (ед. массы).} \end{aligned}$$

Воспользуемся граничными условиями. Длина единичной окружности

$$C = 2\pi \cdot 1 = 2\pi.$$

Ее масса $m_c = 2\pi \cdot 1 = 2\pi$ – с одной стороны, а с другой стороны $m_c = 2\pi \cdot k \cdot 1 = 2\pi k$. Из равенства $2\pi k = 2\pi$ находим, что $k = 1$.

Ответ: $m = \frac{52}{3} \pi$ (ед. массы). ►

9.3 Статические моменты

Статическим моментом точки массы m относительно оси l называется произведение массы m на расстояние d точки до оси l .

$$M_l = md. \quad (9.4)$$

Найдем статические моменты материальной пластинки G (область G с кусочно-гладкой границей ∂G) относительно координатных осей. Элемент массы материальной пластинки G – это $dm = \rho(x, y)dx dy$. Применяя метод определенного интеграла, получим, что элементы статических моментов этой пластинки будут:

- а) $dM_{Ox} = y\rho(x, y)dx dy$ – элемент статического момента пластинки относительно оси Ox ;
- б) $dM_{Oy} = x\rho(x, y)dx dy$ – элемент статического момента пластинки относительно оси Oy .

Тогда указанные статические моменты будут вычисляться по формулам:

$$M_{Oy} = \iint_G x\rho(x, y)dx dy, \quad (9.5)$$

$$M_{Ox} = \iint_G y\rho(x, y)dx dy. \quad (9.6)$$

Пример 9.4. Найти статический момент круга радиуса R относительно его касательной ($\rho(x, y) = 1$).

◀ Поместим круг в координатную плоскость так, чтобы касательная совпадала с осью Ox , точка касания – начало координат (круг – в верхней полуплоскости, рисунок 9.4).

Уравнение окружности: $x^2 + (y - R)^2 = R^2$ или (в полярной системе координат).

$$x^2 + y^2 - 2yR + R^2 = R^2, \quad r^2 = 2rR \sin \varphi, \quad r = 2R \sin \varphi.$$

Рисунок 9.4

По формуле (9.6) находим статический момент, считая $\rho(x, y) = 1$.

$$\begin{aligned}
 M_{Ox} &= \iint_G y dxdy = \iint_D r \sin \varphi \cdot r dr d\varphi = \\
 &= \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^{2R \sin \varphi} r^2 dr = \int_0^{\pi} \sin \varphi \cdot \frac{r^3}{3} \Big|_0^{2R \sin \varphi} d\varphi = \\
 &= \frac{1}{3} R \int_0^{\pi} \sin \varphi \cdot 8R^3 \sin^3 \varphi d\varphi = \frac{8R^3}{3} \int_0^{\pi} (\sin^2 \varphi)^2 d\varphi = \\
 &= \frac{8R^3}{3} \int_0^{\pi} \left(\frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \right)^2 d\varphi = \frac{8R^3}{3} \cdot \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \left(1 - 2\cos 2\varphi + \frac{1 + \cos 4\varphi}{2} \right) d\varphi = \\
 &= \frac{2R^3}{3} \cdot \frac{3}{2}\pi = \pi R^3.
 \end{aligned}$$

Ответ: $M_{Ox} = \pi R^3$. ►

9.4 Координаты центра масс материальной пластинки

Определение 9.1. *Центром тяжести (центром масс) плоской квадрируемой материальной пластинки G называется такая точка $M_0(x_c, y_c) \in \mathbb{R}^2$, что если в этой точке сосредоточить всю массу пластинки G , то статические моменты этой точки относительно координатных осей будут соответственно равны статическим моментам пластинки G относительно координатных осей.*

Из определения 9.1 получаем формулы для вычисления координат (x_c, y_c) центра тяжести материальной пластинки G

$$m_G \cdot y_c = M_{0x} \quad \text{и} \quad m_G \cdot x_c = M_{0y},$$

$$x_c = \frac{M_{0y}}{m_G}, \quad y_c = \frac{M_{0x}}{m_G}, \tag{9.7}$$

где M_{Ox} , M_{Oy} – статические моменты материальной пластиинки относительно осей Ox и Oy , m_G – масса материальной пластиинки.

Пример 9.5. Найти координаты центра тяжести однородной пластиинки G ($\rho = 1$) с кусочно-гладкой границей ∂G , имеющей форму кругового сектора с центральным углом α и радиусом R .

◀ Воспользуемся формулами (9.7). Масса сектора при ($\rho = 1$) будет численно равна площади сектора. Тогда $m_G = \frac{\alpha}{2}R^2$.

Находим статические моменты по формулам (9.5) и (9.6).

$$\begin{aligned} M_{0x} &= \iint_G y dxdy = \iint_D r \sin \varphi \cdot r dr d\varphi = \int_0^\alpha \sin \varphi d\varphi \int_0^R r^2 dr = \\ &= -\cos \varphi \Big|_0^\alpha \cdot \frac{r^3}{3} \Big|_0^R = -(\cos \alpha - 1) \cdot \frac{R^3}{3} = \frac{1 - \cos \alpha}{3} R^3; \\ M_{0y} &= \iint_G x dxdy = \iint_D r \cos \varphi \cdot r dr d\varphi = \\ &= \int_0^\alpha \cos \varphi d\varphi \int_0^R r^2 dr = \sin \varphi \Big|_0^\alpha \cdot \frac{r^3}{3} \Big|_0^R = \frac{\sin \alpha}{3} R^3. \end{aligned}$$

Дальше находим координаты центра масс:

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{\frac{\sin \alpha}{3} R^3}{\frac{\alpha}{2} R^2} = \frac{2R \sin \alpha}{3\alpha}; \\ y_c &= \frac{\frac{1-\cos \alpha}{3} R^3}{\frac{\alpha}{2} R^2} = \frac{2R(1-\cos \alpha)}{3\alpha}. \end{aligned}$$

Получили центр тяжести указанного сектора:

$$M_0(x_c, y_c) = M_0\left(\frac{2R \sin \alpha}{3\alpha}, \frac{2R(1-\cos \alpha)}{3\alpha}\right).$$

Очевидно, что центр тяжести (точка M_0) лежит на биссектрисе угла α . Найдем расстояние от точки M_0 до вершины сектора (начала координат):

$$d(O, M_0) = \sqrt{\frac{4}{9\alpha^2} \left(2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}\right)^2 R^2 + \frac{16}{9\alpha^2} \sin^4 \frac{\alpha}{2} R^2} = \frac{4R}{3\alpha} \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Ответ: $M_0(x_c, y_c) = M_0\left(\frac{2R \sin \alpha}{3\alpha}, \frac{2R(1-\cos \alpha)}{3\alpha}\right)$. ►

9.5 Момент инерции материальной пластиинки

Моментом инерции материальной точки массы m относительно оси l называют произведение массы m на квадрат расстояния d до оси l .

Исходя из указанного определения и применяя метод определенного интеграла при решении задач, будем иметь:

а) $dI_{Ox} = y^2 \rho(x, y) dx dy$ – это элемент момента инерции материальной пластинки G относительно оси Ox ($\rho(x, y)$ – плотность материальной пластинки G);

б) $dI_{Oy} = x^2 \rho(x, y) dx dy$ – это элемент момента инерции пластинки G относительно оси Oy ;

в) $dI_{(0,0)} = (x^2 + y^2) \rho(x, y) dx dy$ – это элемент момента инерции пластинки G относительно начала координат.

Тогда из указанного выше получаем формулы для вычисления соответствующих моментов инерции

$$I_{Ox} = \iint_G y^2 \rho(x, y) dx dy, \quad (9.8)$$

$$I_{Oy} = \iint_G x^2 \rho(x, y) dx dy, \quad (9.9)$$

$$I_{(0,0)} = \iint_G (x^2 + y^2) \rho(x, y) dx dy. \quad (9.10)$$

Пример 9.6. Найти момент инерции относительно начала координат однородной пластинки плотности ρ_0 , ограниченную линиями

$$x^2 + y^2 = 9, \quad x + y = 0, \quad x - y = 0 \quad (x \geq 0).$$

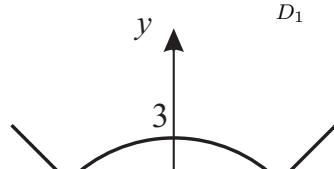
◀ Построим рисунок пластинки в системе координат xOy $G = G_1 \cup G_2$ (рисунок 9.5).

Рисунок 9.5

Для нахождения указанного момента инерции используем формулу (9.10)

$$I_O = \iint_G (x^2 + y^2) \rho_0 dx dy = 2 \iint_{G_1} (x^2 + y^2) \rho_0 dx dy =$$

$$= 2\rho_0 \iint_{D_1} r^2 \cdot r dr d\varphi = 2\rho_0 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^3 r^3 dr = 2\rho_0 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{r^4}{4} \Big|_0^3 = \frac{81\rho_0\pi}{8}.$$



При вычислении двойного интегрирования была учтена симметрия относительно оси Ox как области интегрирования, так и подынтегральной функции.

Ответ: $I_O = \frac{81\rho_0\pi}{8}$. ►

9.6 Площадь поверхности

9.6.1 Площадь гладкой поверхности

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена на замыкании \bar{G} области G с кусочно-гладкой границей ∂G . Сама функция $f(x, y)$ и существующие ее частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывные на \bar{G} . В этом случае поверхность S – график функции $f(x, y)$ будет гладкой. Геометрически это означает, что через любую точку поверхности S можно провести касательную плоскость, и при переходе от одной точки поверхности S к другой касательная плоскость меняется непрерывно.

Возьмём любое разбиение τ_G , на n ($n \in \mathbb{N}$) частичных областей G_k ($k = \overline{1, n}$) с помощью системы из m ($m \in \mathbb{N}$) кусочно-гладких кривых (области G_k не должны иметь общих внутренних точек). Произвольно выбираем точки $M_k(x, y) \in G_k$. Обозначим через $\lambda_\tau = \max \{d_k\}$, где $d_k = \sup_{M'_k M''_k \in G_k} \{d(M'_k, M''_k)\}$ – диаметр частичной области G_k .

Строим частичные цилиндрические поверхности с направляющими ∂G_k и образующими, параллельными оси Oz .

Точкам $M_k(x_k, y_k) \in \bar{G}_k$ соответствующей на поверхности S точки $\bar{M}_k(x_k, y_k, z_k)$, где $z_k = f(x_k, y_k) = f(M_k)$. Через точки \bar{M}_k проводим касательные плоскости к поверхности S . Указанные выше частичные цилиндрические поверхности вырезают соответственно в касательных плоскостях ограниченные частичные плоские фигуры D_k (квадрируемые). Составляем сумму

$$D_{\tau_G} = \sum_{k=1}^n S_{D_k}, \quad (9.11)$$

где S_{D_k} – площадь частичной плоской фигуры D_k .

Если существует предел

$$\lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} D_{\tau_G}, \quad (9.12)$$

не зависящий как от способа разбиения τ_G , так и от выбора точек $M_k(x_k, y_k) \in G_k$, то он называется площадью гладкой поверхности S .

Для каждой точки $\bar{M}_k(x_k, y_k, z_k)$ рассмотрим нормаль \vec{n}_k к поверхности S . С осью Oz эти частичные нормали будут иметь направляющие косинусы

$$\cos(\hat{\vec{n}}_k, Oz) = \frac{1}{\sqrt{1 + f'_{kx}^2(M_k) + f'_{ky}^2(M_k)}}.$$

А тогда

$$S_{D_k} = S_{G_k} : \frac{1}{\sqrt{1 + f'_{kx}^2(M_k) + f'_{ky}^2(M_k)}}. \quad (9.13)$$

Подставляем (9.13) в (9.11) и получим

$$D_{\tau_G} = \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + f'_{kx}^2(M_k) + f'_{ky}^2(M_k)} S_{G_k}, \quad (9.14)$$

где правая часть (9.14) есть интегральная сумма Римана для двойного интеграла

$$\iint_G \sqrt{1 + f_x'^2(x, y) + f_y'^2(x, y)} dx dy. \quad (9.15)$$

Двойной интеграл (9.15) существует, так как подынтегральная функция непрерывна на \overline{G} . Получим:

$$\lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} D_{\tau G} = \iint_G \sqrt{1 + f_x'^2(x, y) + f_y'^2(x, y)} dx dy. \quad (9.16)$$

Формула (9.15) служит для вычисления **площади гладкой поверхности** S – графика функции $z = f(x, y)$.

Замечание 9.2. Для случая, когда поверхности заданы функциями $x = F(y, z)$ или $y = \Phi(x, z)$ с выполнением условий, аналогичных указанным выше для функции $z = f(x, y)$, площади этих поверхностей вычисляются соответственно с помощью следующих двойных интегралов

$$\iint_{G_1} \sqrt{1 + F_y'^2(y, z) + F_z'^2(y, z)} dy dz \quad (9.17)$$

и

$$\iint_{G_2} \sqrt{1 + \Phi_x'^2(x, z) + \Phi_z'^2(x, z)} dx dz. \quad (9.18)$$

Пример 9.7. Найти площадь поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, если $x^2 + y^2 \leq 2ax$.

◀ Строим рисунок 9.6.

Рисунок 9.6

$$x^2 + y^2 - 2ax + a^2 = a^2, \quad (x - a)^2 + y^2 = a^2, \quad G = G_1 \cup G_2.$$

$$z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Введем обозначение: $S = S_1 \cup S_2$ – поверхность, $|S| = |S_1| + |S_2|$ – площадь поверхности



$$|S| = \iint_G \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} dx dy = \iint_G \sqrt{2} dx dy = \sqrt{2}\pi a^2 \text{ (кв. ед.)}.$$

Ответ: $S = \sqrt{2}\pi a^2$ (кв. ед.). ►

ЛЕКЦИЯ 10

Тройные интегралы

10.1 Задача о массе материального кубируемого тела

Пусть дано кубируемое материальное тело $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с квадрируемой поверхностью $\partial\Omega$, например, кусочно-гладкой. Плотность тела $u = \rho(x, y, z)$. Необходимо дать понятие массы указанного тела и указать метод ее вычисления.

◀ Если плотность $\rho(x, y, z) = \rho_0 = \text{const}$, то масса тела

$$m_\Omega = \rho_0 V_\Omega, \quad (10.1)$$

где V_Ω – объем тела.

В дальнейшем предположим, что тело неоднородное, то есть

$$\rho(x, y, z) \neq \text{const.}$$

Возьмём любое разбиение τ_Ω тела Ω на n ($n \in \mathbb{N}$) частичных тел Ω_k ($k = \overline{1, n}$) без общих внутренних точек с помощью системы из m ($m \in \mathbb{N}$) частичных квадрируемых поверхностей S_i ($i = \overline{1, m}$). Произвольно выбираем точки $M_k(x_k, y_k, z_k) \in \bar{\Omega}_k$. Считаем, что для любых точек $M(x, y, z) \in \bar{\Omega}_k$ плотность будет постоянной и равной $\rho_k = \rho(M_k)$.

Тогда частичная масса (при таком предположении) материального частичного тела $\bar{\Omega}_k$ будет

$$m_{\Omega_k} = \rho_k \cdot V_{\Omega_k}. \quad (10.2)$$

А масса всего тела $\bar{\Omega}$ будет

$$m_\Omega = \sigma_\tau(\rho, M_k) = \sum_{k=1}^n \rho_k V_{\Omega_k}. \quad (10.3)$$

Через λ_τ обозначим максимальный из диаметров d_k ($k = \overline{1, n}$) частичных тел $\bar{\Omega}_k$

$$d_k = \sup_{M'_k, M''_k \in \Omega_k} \{d(M'_k, M''_k)\}. \quad (10.4)$$

Если существует предел

$$\lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} \sigma_\tau(\rho, M_k) \quad (10.5)$$

и этот предел не зависит от разбиения τ_Ω и выбора точек $M_k \in \bar{\Omega}_k$, то он называется **массой материального тела** $\bar{\Omega}$. ►

Замечание 10.1. Можно привести и другие задачи, методы решения которых аналогичны методу решения предыдущей задачи, например, задача о моменте инерции материального тела, задача о притяжении материальной точки телом и другие задачи (методы решения некоторых из этих задач будут показаны ниже).

10.2 Понятие тройного интеграла

Отвлекаясь от конкретного содержания предыдущей задачи, но повторяя рассуждения аналогичные, что и в этой задаче, мы приходим к понятию тройного интеграла.

Пусть функция $u = f(x, y, z)$ определена на замыкании области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с квадрируемой границей $\partial\Omega$, например, кусочно-гладкой.

Возьмем любое разбиение τ_Ω области Ω на n ($n \in \mathbb{N}$) частей, без общих внутренних точек, с помощью системы из m ($m \in \mathbb{N}$) квадрируемых поверхностей S_i ($i = \overline{1, m}$). Произвольно выбираем точки $M_k(x_k, y_k, z_k)$ из $\bar{\Omega}_k$. Составляем интегральную сумму Римана

$$\sigma_\tau(f, M_k) = \sigma_\tau = \sum_{k=1}^n f(M_k) \Delta V_k, \quad (10.6)$$

где ΔV_k – объем частичной области Ω_k .

Обозначим через $\lambda_\tau = \max_k \{d_k\}$, где d_k – диаметр частичной области Ω_k .

Определение 10.1. Если существует конечный предел

$$\lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} \sigma_\tau, \quad (10.7)$$

и этот предел не зависит как от разбиения τ_Ω , так и от выбора точек $M_k \in \bar{\Omega}_k$ ($k = \overline{1, n}$), то он называется **тройным интегралом** функции $f(x, y, z)$ по области Ω .

Тройной интеграл обозначается

$$I = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz, \quad (10.8)$$

где $f(x, y, z)$ – **подынтегральная функция**, $f(x, y, z) dx dy dz$ – **подынтегральное выражение**, Ω – **область интегрирования**.

По Коши существование интеграла (10.8), то есть предела (10.7), определяется следующим образом:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall \tau_\Omega \ \forall \tau < \delta \ \forall M_k(x_k, y_k, z_k) \in \bar{\Omega}_k \quad |\sigma_\tau - I| < \varepsilon.$$

Замечание 10.2. Аналогично, как и для двойного интеграла, для тройного интеграла справедливо необходимое условие интегрируемости: если функция $f(x, y, z)$ интегрируема по области Ω , то она ограничена на замыкании этой области, то есть на $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$.

Дальше строим суммы Дарбу: $S_\tau = \sum_{k=1}^n M_k \Delta V_k$ – **верхняя сумма Дарбу**, где $M_k = \sup_{(x,y,z) \in \bar{\Omega}_k} f(x, y, z)$ и ΔV_k – объем области Ω_k ; $s_\tau = \sum_{k=1}^n m_k \Delta V_k$ – **нижняя сумма Дарбу**, где $m_k = \inf_{(x,y,z) \in \bar{\Omega}_k} f(x, y, z)$.

Свойства сумм Дарбу исследуются аналогично, как и для двойного интеграла. В частности, можно показать, что множество верхних сумм Дарбу ограничено снизу, а нижних – сверху по всем разбиением τ_Ω и выборе точек $M_k(x_k, y_k, z_k) \in \bar{\Omega}_k$. В этом случае $I^* = \inf_{\tau_\Omega, M_k \in \Omega_k} \{S_\tau\}$ называют **верхним интегралом Дарбу**, а $I_* = \inf_{\tau_\Omega, M_k \in \Omega_k} \{s_\tau\}$ – **нижним интегралом Дарбу**.

Справедливы следующие критерии интегрируемости функций.

Теорема 10.1. Интеграл $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ существует тогда и только тогда, когда

$$\lim_{\lambda_{\tau} \rightarrow 0} (S_{\tau} - s_{\tau}) = 0.$$

Теорема 10.2 (критерий Дарбу). Интеграл $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ существует тогда и только тогда, когда $I_* = I^* = I$.

Теорема 10.3 (критерии Римана). Интеграл $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ существует тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует τ_{Ω} , что $S_{\tau_{\Omega}} - s_{\tau_{\Omega}} < \varepsilon$.

Замечание 10.3. Используя выше сформулированные критерии, можно доказать следующую теорему.

Теорема 10.4. Если функция непрерывна на компакте, то она интегрируема на этом компакте.

10.3 Свойства тройных интегралов

Теорема 10.5 (свойство линейности). Пусть существуют интегралы

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz \text{ и } \iiint_{\Omega} g(x, y, z) dx dy dz,$$

где Ω – область из \mathbb{R}^3 с квадрируемой границей, и α, β – любые действительные числа, то существует интеграл функции

$$\varphi(x, y, z) = \alpha f(x, y, z) + \beta g(x, y, z)$$

по области Ω и справедлива формула

$$\iiint_{\Omega} \varphi(x, y, z) dx dy dz = \alpha \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz + \beta \iiint_{\Omega} g(x, y, z) dx dy dz. \quad (10.9)$$

Теорема 10.6 (свойство аддитивности). Пусть область $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, где области Ω_1 и Ω_2 не имеют общих внутренних точек, а границы областей кусочно-гладкие. Если существуют интегралы

$$\iiint_{\Omega_1} f(x, y, z) dx dy dz \text{ и } \iiint_{\Omega_2} f(x, y, z) dx dy dz,$$

то существует интеграл $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ и справедлива формула

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{G_1} f(x, y, z) dx dy dz + \iiint_{G_2} f(x, y, z) dx dy dz. \quad (10.10)$$

Теорема 10.7 (свойство монотонности). Если для любых точек области Ω с кусочно-гладкой границей справедливо неравенство

$$f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$$

и обе функции $f(x, y, z)$ и $g(x, y, z)$ интегрируемы по области Ω , то справедливо неравенство

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz \leq \iiint_{\Omega} g(x, y, z) dx dy dz. \quad (10.11)$$

Теорема 10.8 (оценка интеграла по модулю). Пусть функция $u = f(x, y, z)$ интегрируема по области Ω с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$. Тогда интегрируема по области G и функция $|f(x, y, z)|$ и справедлива оценка

$$\left| \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz \right| \leq \iiint_{\Omega} |f(x, y, z)| dx dy dz. \quad (10.12)$$

Теорема 10.9 (теорема о среднем). Пусть функция $f(x, y, z)$ интегрируема по области Ω с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$ и

$$m = \inf_{(x, y, z) \in \bar{\Omega}} f(x, y, z), \quad M = \sup_{(x, y, z) \in \bar{\Omega}} f(x, y, z).$$

Тогда

$$mV_{\Omega} \leq \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz \leq MV_{\Omega}$$

и справедлива формула

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \mu \cdot V_{\Omega}, \quad (10.13)$$

где μ – некоторая точка из отрезка $[m, M]$ и V_{Ω} – объем области Ω .

Следствие 10.1. Если дополнительно к условиям теоремы о среднем функция $f(x, y, z)$ непрерывна на компакте $\bar{\Omega}$, то существует точка

$$M_0(x_0, y_0, z_0) \in \bar{\Omega}, \text{ что } \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = f(M_0)V_{\Omega}. \quad (10.14)$$

ЛЕКЦИЯ 11

Вычисление тройных интегралов. Криволинейные координаты. Замена переменных в тройном интеграле

11.1 Способы вычисления тройных интегралов

Сначала рассмотрим случай, когда область интегрирования представляет собой параллелепипед.

Обозначим через

$$\bar{\Omega} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{array}{l} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \\ l \leq z \leq p \end{array} \right\},$$

где $a, b, c, d, l, p \in \mathbb{R}$; пусть

$$\bar{Z} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \begin{array}{l} a \leq x \leq b, \\ c \leq y \leq d \end{array} \right\}.$$

Теорема 11.1. Если существует тройной интеграл $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ для любых фиксированных точек $(x, y) \in \bar{Z}$ и существует $\int_l^p f(x, y, z) dz = I(x, y)$, то существует повторный интеграл

$$\iint_Z dx dy \int_l^p f(x, y, z) dz = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz. \quad (11.1)$$

Замечание 11.1. Двойной интеграл $\iint_Z I(x, y) dx dy$ вычисляется по правилам вычисления двойных интегралов (теорема 8.1).

Замечание 11.2. Для тройных интегралов будет также справедлива теорема, аналогичная теореме 11.1 (сформулируйте самостоятельно), для которой формулы заключений будут соответственно иметь вид:

$$\iint_Y dx dz \int_c^d f(x, y, z) dy = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz, \quad (11.2)$$

$$\iint_X dy dz \int_a^b f(x, y, z) dx = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz, \quad (11.3)$$

где $\bar{Y} = \left\{ (x, z) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{l} a \leq x \leq b, \\ l \leq z \leq p \end{array} \right\}$, $\bar{X} = \left\{ (y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{l} c \leq y \leq d, \\ l \leq z \leq p \end{array} \right\}$.

Замечание 11.3. Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна на $\bar{\Omega}$ (замыкании области Ω с кусочно-гладкой $\partial\Omega$), то для тройного интеграла будут справедливы заключения теоремы 11.1 и теорем из замечания 11.2. Также будет выполняться равенство тройному интегралу всех повторных интегралов из формул (11.1)–(11.3).

Теперь рассмотрим криволинейную область Ω_1 , которая снизу и сверху ограничена кусочно-гладкими поверхностями – графиками функций $z_1 = z_1(x, y)$ и $z_2 = z_2(x, y)$, определёнными на замыкании области G с кусочно-гладкой границей ∂G . Границей сбоку области Ω_1 является цилиндрическая поверхность, для которой направляющей будет ∂G , а образующие параллельную оси Oz . Такую область Ω_1 назовем **простейшим цилиндрическим телом первого типа** (рисунок 11.1).

Теорема 11.2. Пусть существует тройной интеграл $\iiint_{\Omega_1} f(x, y, z) dx dy dz$, где Ω_1 – простейшее цилиндрическое тело первого типа. Если для любой фиксированной точки $(x, y) \in \bar{Z}$ ($\bar{Z} = \text{Пр}_{xOy} \bar{\Omega}_1$ – проекция $\bar{\Omega}_1$ на плоскости xOy) существует интеграл $\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz = I(x, y)$, то существует повторный интеграл

$$\iint_Z I(x, y) dx dy = \iint_Z dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz = \iiint_{\Omega_1} f(x, y, z) dx dy dz. \quad (11.4)$$

Замечание 11.4. Двойной интеграл $\iint_Z I(x, y) dx dy$ вычисляется по правилам вычисления двойных интегралов для криволинейных областей (теорема 8.2).

Замечание 11.5. Для тройных интегралов будет также справедлива теорема, аналогичная теореме 11.2 (сформулируйте самостоятельно), для которой формулы заключений теоремы будут соответственно иметь вид:

$$\iint_Y K(x, z) dx dz = \iint_Y dx dz \int_{y_1(x, z)}^{y_2(x, z)} f(x, y, z) dy = \iiint_{\Omega_2} f(x, y, z) dx dy dz, \quad (11.5)$$

$$\iint_X L(y, z) dy dz = \iint_X dy dz \int_{x_1(y, z)}^{x_2(y, z)} f(x, y, z) dx = \iiint_{\Omega_2} f(x, y, z) dx dy dz. \quad (11.6)$$

Для формулы (11.5) Ω_2 – **простейшее цилиндрическое тело второго типа**, которое ограничено цилиндрической поверхностью, направляющей для нее служит граница проекции тела Ω_2 на плоскость xOz (∂Y). Кроме того, тело Ω ограничено поверхностями – графиками функций $y_1 = y_1(x, z)$ и $y_2 = y_2(x, z)$, определенными на замыкании области Y с кусочно-гладкой границей ∂Y , причем для любых точек $M(x, z) \in \bar{Y}$ будет $y_1(x, z) \leq y_2(x, z)$ (рисунок 11.1). Для формулы (11.6) Ω_3 – **простейшее цилиндрическое тело третьего типа** (определите самостоятельно).

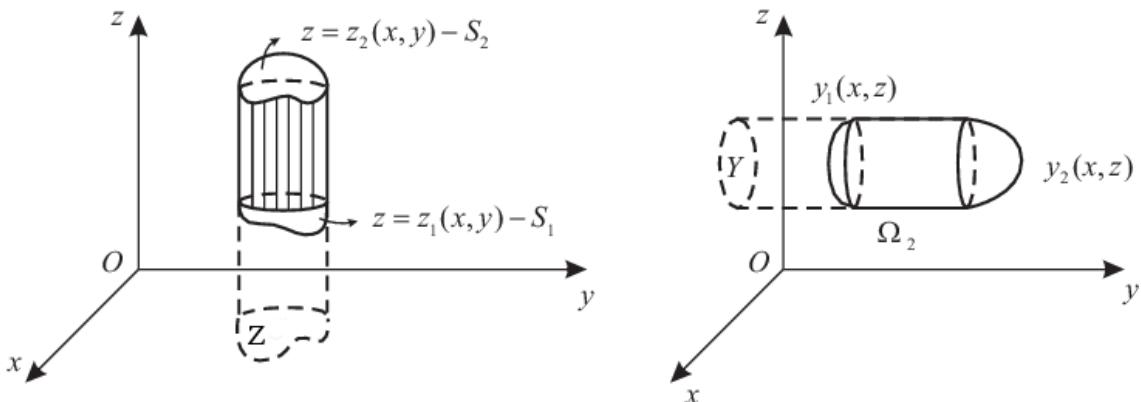


Рисунок 11.1

Замечание 11.6. Если функция $u = f(x, y, z)$ непрерывна на замыкании области Ω с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, то тройной интеграл $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ существует и будут справедливы формулы (11.4) – для простейшего цилиндрического тела первого типа; (11.5) – для простейшего цилиндрического тела второго типа; (11.6) – для простейшего цилиндрического тела третьего типа.

Пример 11.1. Вычислить тройной интеграл $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$, где Ω есть область, ограниченная поверхностями $x + y + z = 2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

◀ Изобразим область интегрирования (рисунок 11.2). Видно, что область интегрирования есть простейшее тело как первого, так и второго, так и третьего типов.

Рисунок 11.2

$$\begin{aligned}
 I &= \iiint_{\Omega} z dxdydz = \int_0^2 zdz \int_0^{2-z} dy \int_0^{2-y-z} dx = \\
 &= \int_0^2 zdz \int_0^{2-z} x|_0^{2-y-z} dy = \int_0^2 zdz \int_0^{2-z} (2-y-z) dy = \int_0^2 z \left(2y - \frac{y^2}{2} - zy \right)|_0^{2-z} dz = \\
 &= \int_0^2 \left(4z - 2z^2 - \frac{1}{2}z(4-4z+z^2) - 2z^2 + z^3 \right) dz = \\
 &= \int_0^2 \left(4z - 2z^2 - 2z + 2z^2 - \frac{1}{2}z^3 - 2z^2 + z^3 \right) dz = \\
 &= \int_0^2 \left(2z - 2z^2 + \frac{1}{2}z^3 \right) dz = z^2|_0^2 - \frac{2z^3}{3}|_0^2 + \frac{z^4}{8}|_0^2 = 4 - \frac{16}{3} + \frac{16}{8} = \frac{2}{3}.
 \end{aligned}$$

The figure shows a 3D Cartesian coordinate system with axes x, y, and z. A triangular region in the xy-plane is defined by the constraints x ≥ 0, y ≥ 0, and y ≤ 2 - x. This triangle is projected onto the xy-plane. The vertical surface z = 2 - y - x is shown above this triangle. The volume under this surface is shaded in light blue. The z-axis has tick marks at 0 and 2. The xy-plane has tick marks at 0 and 2 on both the x and y axes.

Ответ: $I = \frac{2}{3}$. ▶

11.2 Криволинейные координаты

11.2.1 Отображение пространственных областей

Пусть в системе координат $Oxyz$ задана область G с кусочно-гладкой границей ∂G , а в системе координат $Ouvt$ задана область D также с кусочно-гладкой границей ∂D .

Функции $x = x(u, v, t)$, $y = y(u, v, t)$ и $z = z(u, v, t)$ биективно отображают область D на область G и границу ∂D на границу ∂G . Тогда существуют обратные функции $u = x^{-1}(x, y, z)$, $v = y^{-1}(x, y, z)$, $t = z^{-1}(x, y, z)$. Функции $x = x(u, v, t)$, $y = y(u, v, t)$, $z = z(u, v, t)$ и обратные им функции (решение системы $\begin{cases} x = x(u, v, t), \\ y = y(u, v, t), \\ z = z(u, v, t), \end{cases}$ уравнений), а также существующие их частные производные первого порядка непрерывны соответственно на \overline{D} и \overline{G} .

Функциональный определить

$$I = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, t)} = \begin{vmatrix} x'_u, x'_v, x'_l \\ y'_u, y'_v, y'_l \\ z'_u, z'_v, z'_l \end{vmatrix} \neq 0 \text{ и } I \cdot J = 1,$$

где

$$J = \begin{vmatrix} u'_x, u'_y, u'_z \\ v'_x, v'_y, v'_z \\ t'_x, t'_y, t'_z \end{vmatrix}.$$

Пусть даны указанные выше две декартовые системы координат. Возьмем точку $M(u_0, v_0, t_0) \in D$. Плоскости $u = u_0$, $v = v_0$, $t = t_0$ в системе координат $Ouvt$ называются координатными плоскостями. Эти координатные плоскости функции $x(u, v, t)$, $y(u, v, t)$, $z(u, v, t)$ отображают в пространство $Oxyz$ соответственно в криволинейные поверхности, а точка $M_0(u_0, v_0, t_0)$ отображается в точку $M'_0(u_0, v_0, t_0) \in G$ (пересечение указанных криволинейных поверхностей). Координаты точки M'_0 называются **криволинейными координатами** в области G .

11.2.2 Цилиндрические координаты

Пусть роль функций $x(u, v, t)$, $y(u, v, t)$ и $z(u, v, t)$ играют соответственно функции

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z, \quad (11.7)$$

где r и φ – полярные координаты проекции точки $M'(r, \varphi, z)$ пространства xyz на плоскость $z = 0$ ($0 \leq r < +\infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$). Величины r, φ, z называются **цилиндрическими координатами** точки M' (рисунок 11.3).

Для цилиндрических координат имеем три семейства координатных поверхностей:

- 1) $r = \text{const}$ ($0 \leq r < +\infty$) – цилиндрические поверхности (при $r = 0$ – ось Oz);
- 2) $\varphi = \text{const}$ ($0 \leq \varphi < 2\pi$) – вертикальные полуплоскости;
- 3) $z = \text{const}$ ($-\infty < z < +\infty$) – горизонтальные плоскости.

Рисунок 11.3

Якобиан

$$I = \frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, z)} = \begin{vmatrix} (r \cos \varphi)'_r & (r \cos \varphi)'_\varphi & (r \cos \varphi)'_z \\ (r \sin \varphi)'_r & (r \sin \varphi)'_\varphi & (r \sin \varphi)'_z \\ z'_r & z'_\varphi & z'_z \end{vmatrix} =$$



$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 \cdot r & 1 \end{vmatrix} = r \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \\
&= r \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix} = r.
\end{aligned}$$

11.2.3 Сферические координаты

Рассматриваем также указанные выше отображения, где в качестве функций $x(u, v, t)$, $y(u, v, t)$, $z(u, v, t)$ выступают соответственно функции

$$x = \rho \cos \varphi \cdot \sin \theta, \quad y = \rho \sin \varphi \cdot \sin \theta, \quad z = \rho \cos \theta, \quad (11.8)$$

где $M'(\rho, \varphi, \theta)$ из пространства $Oxyz$. Причем ρ – расстояние точки M' от начала координат, φ – полярная координата, θ – угол между осью z и вектором OM' (рисунок 11.4).

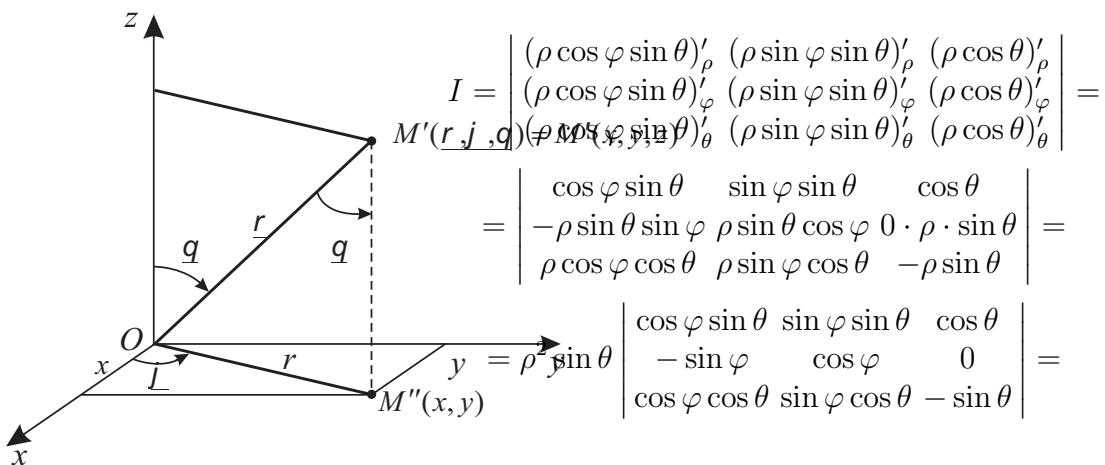
Рисунок 11.4

Координаты указанной точки $M'(\rho, \varphi, \theta)$ называются **сферическими координатами**, причем: $0 \leq \rho < +\infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$.

Этим координатам соответствуют следующие координатные поверхности:

- 1) $\rho = \text{const}$ – сферы, при $r = 0$ – вырожденные $0 \leq \rho < +\infty$;
- 2) $\theta = \text{const}$ – полуконусы ($0 \leq \theta \leq \pi$), при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ – вырожденные;
- 3) $\varphi = \text{const}$ – вертикальные полуплоскости $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Найдём якобиан указанного отображения.



$$\begin{aligned}
&= \rho^2 \sin \theta \left((-1)^{1+3} \cos \theta \begin{vmatrix} -\sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \varphi \cos \theta & \sin \varphi \cos \theta \end{vmatrix} + \right. \\
&\quad \left. + (-1)^{3+3} (-\sin \theta) \begin{vmatrix} \cos \varphi \sin \theta & \sin \varphi \sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix} \right) = \\
&= \rho^2 \sin \theta (-\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = -\rho^2 \sin \theta.
\end{aligned}$$

Замечание 11.7. Если рассматривать точки вида $M'(\rho, \theta, \varphi)$, то $I = \rho^2 \sin \theta$, но в обоих случаях $|I| = \rho^2 \sin \theta$.

11.2.4 Элемент объема в криволинейных координатах

Рассмотрим отображение замыкания области D в системе декартовых координат пространства uvt на замыкание области G пространства $Oxyz$, для которого координаты u, v, t будут криволинейными, с помощью функций $x = x(u, v, t)$, $y = y(u, v, t)$, $z = z(u, v, t)$, удовлетворяющих всем указанным в 1, пункта 5 свойствам. Прямоугольный параллелепипед из области D с гранями, параллельными соответствующим координатным плоскостям, и бесконечно малыми ребрами отображается с помощью указанных выше функций в криволинейный параллелепипед области G (рисунок 11.5).

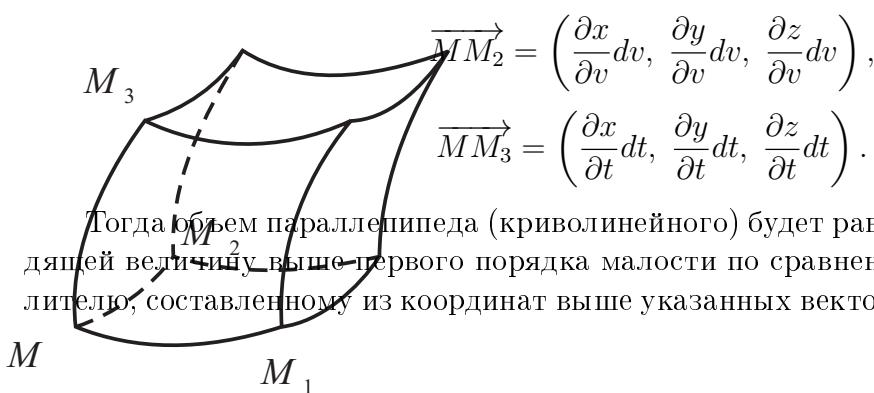
Рисунок 11.5

Пусть точка имеет декартовые координаты x, y, z , а криволинейные координаты u, v, t . Декартовые координаты точки M_1 пусть будут $x + dx, y + dy, z + dz$, а криволинейные $u + du, v, t$. Тогда, как и при доказательстве теоремы 8.3, получим векторы

$$\overrightarrow{MM_1} = \left(\frac{\partial x}{\partial u} du, \frac{\partial y}{\partial u} du, \frac{\partial z}{\partial u} du \right),$$

$$\overrightarrow{MM_2} = \left(\frac{\partial x}{\partial v} dv, \frac{\partial y}{\partial v} dv, \frac{\partial z}{\partial v} dv \right),$$

$$\overrightarrow{MM_3} = \left(\frac{\partial x}{\partial t} dt, \frac{\partial y}{\partial t} dt, \frac{\partial z}{\partial t} dt \right).$$



Тогда объем параллелепипеда (криволинейного) будет равен с точностью, не превосходящей величину выше первого порядка малости по сравнению с этим объемом, определителю, составленному из координат выше указанных векторов по абсолютной величине

$$dv = \pm \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} du & \frac{\partial y}{\partial u} du & \frac{\partial z}{\partial u} du \\ \frac{\partial x}{\partial v} dv & \frac{\partial y}{\partial v} dv & \frac{\partial z}{\partial v} dv \\ \frac{\partial x}{\partial t} dt & \frac{\partial y}{\partial t} dt & \frac{\partial z}{\partial t} dt \end{vmatrix} = \pm \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, t)} dudvdt = \pm I dudvdt. \quad (11.9)$$

11.3 Замена переменных в тройном интеграле

Замена переменных в тройном интеграле вводится во многом аналогично, как и замена переменных в двойном интеграле:

Теорема 11.3. Пусть функции $x = x(u, v, t)$, $y = y(u, v, t)$, $z = z(u, v, t)$ и существующие их частные производные первого порядка непрерывны на замыкании области D с кусочно-гладкой границей ∂D и биективно (указанные функции) отображают область D на область G , а границу ∂D на границу ∂G (кусочно-гладкую). Якобиан $I = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, t)} \neq 0$. Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна на G или ограничена на \overline{G} и непрерывна на G за исключением, может быть, множества точек меры нуль, то

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_D f(x(u, v, t), y(u, v, t), z(u, v, t)) |I| dudvdt. \quad (11.10)$$

Доказательство теоремы проведите самостоятельно (на уровне физической строгости).

Замечание 11.8. Формула (11.10) в случае перехода от прямоугольных декартовых координат к криволинейным цилиндрическим и сферическим координатам примет соответственно вид (11.11) и (11.12).

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r d\varphi dr dz, \quad (11.11)$$

$$\begin{aligned} \iiint_G f(x, y, z) dx dy dz &= \\ &= \iiint_D f(\rho \cos \varphi \sin \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \theta) \rho^2 \sin \theta d\varphi d\theta d\rho. \end{aligned} \quad (11.12)$$

Пример 11.2. Вычислить тройной интеграл $\iiint_G (x^2 + y^2) dx dy dz$, где область G ограничена поверхностями $2z = x^2 + y^2$ и $z = 2$.

◀ Строим рисунок области интегрирования (рисунок 11.6), показывая её только в первом октанте, так как она симметрична относительно координатных плоскостей $x = 0$ и $y = 0$. В тройном интеграле перейдем от декартовых координат к цилиндрическим. Поверхность $x^2 + y^2 = 2z$ в цилиндрических координатах имеет вид

$$\begin{aligned} I &= \iiint_G (x^2 + y^2) dx dy dz = \iiint_D r^2 r dr d\varphi dz = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^2 r^3 dr \int_{\frac{r^2}{2}}^2 dz = \\ &= 2\pi \int_0^2 r^3 z \Big|_{\frac{r^2}{2}}^2 dr = 2\pi \int_0^2 r^3 \left(2 - \frac{r^2}{2}\right) dr = 2\pi \left(2 \cdot \frac{r^4}{4} \Big|_0^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{r^6}{6} \Big|_0^2\right) = \frac{16}{3}\pi. \end{aligned}$$

Рисунок 11.6

Ответ: $I = \frac{16}{3}\pi$. ►

Пример 11.3. Вычислить тройной интеграл $\iiint z^2 dx dy dz$, где область G ограничена поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$, $R > 0$.

◀ Построим рисунок области G в первом октанте с учетом симметрии ее относительно координатных плоскостей $x = 0$ и $y = 0$, а также симметрии и подынтегральной функции $z^2 = z^2 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot y^2$ относительно этих плоскостей (рисунок 11.7). Вначале находим аппликату точек пересечения наших сфер, решая систему $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz. \end{cases}$

Получаем $R^2 = 2Rz$, $z = \frac{R}{2}$. Угол θ определяем из $\triangle O'OB$:

$$\cos \theta = \frac{R}{2R}, \quad \cos \theta = \frac{1}{2}, \quad \theta = \frac{\pi}{3}.$$

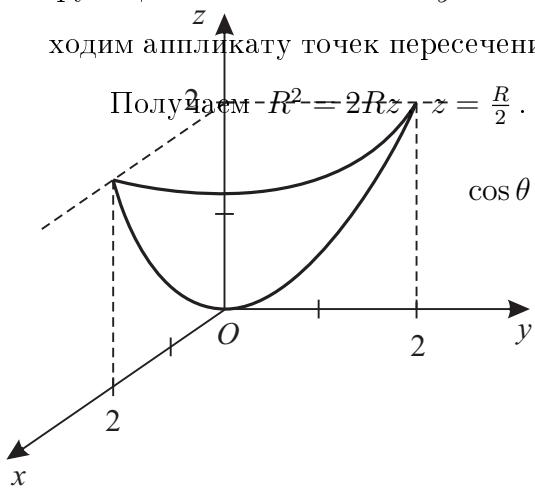
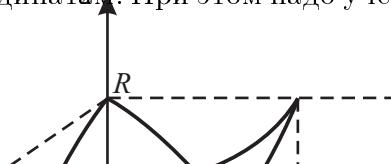


Рисунок 11.7

Для вычисления тройного интеграла применим замену переменных, перейдя к сферическим координатам. При этом надо учесть, что при $z \geq 0$ лучи, выходящие из начала



координат (точки O) при $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ пересекают границу области G , представленную уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

а при $\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ – уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$. По этой причине представляем область $G = G_1 \cup G_2$. G_1 – для $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$, G_2 – для $\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, где частичные области G_1 и G_2 не имеют общих точек. Дальше воспользуемся свойством аддитивности тройного интеграла

$$\begin{aligned} I &= \iiint_G z^2 dx dy dz = \iiint_{G_1} z^2 dx dy dz + \iiint_{G_2} z^2 dx dy dz = \\ &= \iiint_{D_1} \rho^4 \cos^2 \theta \cdot \sin \theta d\rho d\varphi d\theta + \iiint_{D_2} \rho^4 \cos^2 \theta \cdot \sin \theta d\rho d\varphi d\theta = \\ &= 4 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin \theta \cdot \cos^2 \theta d\theta \int_0^R \rho^4 d\rho + \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin \theta \cdot \cos^2 \theta d\theta \int_0^{2R \cos \theta} \rho^4 d\rho \right) = \\ &= 4 \cdot \frac{\pi}{2} \left(-\frac{\cos^3 \theta}{3} \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} \cdot \frac{\rho^5}{5} \Big|_0^R + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cdot \cos^2 \theta \cdot \frac{\rho^5}{5} \Big|_0^{2R \cos \theta} d\theta \right) = \\ &= 2\pi \left(\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{24} \right) \frac{R^5}{5} - \frac{32}{5} R^5 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^7 \theta d(\cos \theta) \right) = \\ &= 2\pi \left(\frac{7R^5}{120} - \frac{32R^5}{5} \cdot \frac{\cos^8 \theta}{8} \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \right) = 2\pi \left(\frac{7R^5}{120} + \frac{32R^5}{5} \cdot \frac{1}{8 \cdot 2^8} \right) = \\ &= 2\pi \left(\frac{7R^5}{120} + \frac{R^5}{5 \cdot 64} \right) = \pi R^5 \left(\frac{7}{60} + \frac{1}{160} \right) = \pi R^5 \cdot \frac{56+3}{480} = \frac{59\pi R^5}{480}. \end{aligned}$$

Ответ: $I = \frac{59\pi R^5}{480}$. ►

ЛЕКЦИЯ 12

Геометрические и физические приложения тройных интегралов

12.1 Вычисление массы тела

Из задачи о массе материального кубируемого тела и понятия тройного интеграла следует, что если указанное в задаче тело Ω имеет объемную плотность $\rho(x, y, z)$ (предположим, например, что функция $\rho(x, y, z)$ непрерывна на замыкании области Ω), то **масса тела** Ω вычисляется по формуле

$$m_\Omega = \iiint_\Omega \rho(x, y, z) dx dy dz. \quad (12.1)$$

Пример 12.1. Определить массу тела, ограниченного поверхностями $z = h$ ($h > 0$) и $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, если плотность в каждой точке тела пропорциональна аппликате этой точки, а в точке $M(0, 0, h)$ эта плотность равна h .

◀ Плотность тела равна $\rho = kz$. Найдем коэффициент пропорциональности из начальных данных $\rho(M) = h$, $h = kh$, $k = 1$. Искомую массу вычисляем по формуле (12.1), переходя к цилиндрическим координатам (рисунок 12.1), учитывая симметрию ρ и Ω относительно плоскостей $x = 0$ и $y = 0$.

Рисунок 12.1

$$m_{\Omega} = \iiint_{\Omega} z dx dy dz = \iiint_{\Omega} z r dr d\varphi dz = [x^2 + y^2 = z^2, r^2 = z^2, z = r] =$$



если плотность в каждой его точке обратно пропорциональна расстоянию точки от начала координат.

◀ Построим рисунок 12.2 (учитываем при этом, а также при вычислении интеграла симметрию тела и подынтегральной функции относительно всех координатных плоскостей). Вычисляем искомую массу по формуле (12.1), переходя к сферическим координатам, с учетом того, что плотность $\rho(x, y, z) = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, где k – коэффициент пропорциональности.

Рисунок 12.2

$$m_{\Omega} = \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega} \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dx dy dz = k \iiint_{\Omega} \frac{1}{r} r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta =$$

$$= k \iiint_{\Omega} r \sin \theta dr d\varphi d\theta = 8k \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \int_a^{2a} r dr =$$

$$= 8k \frac{\pi}{2} \left(-\cos \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) \frac{r^2}{2} \Big|_a^{2a} = 2k\pi (1 - 0) (4a^2 - a^2) = 6k\pi a^2 \text{ (ед. массы).}$$

Ответ: $m_{\Omega} = 6k\pi a^2$ (ед. массы). ►

12.2 Вычисление объемов тел

Если в формуле (12.1) $\rho(x, y, z) = 1$, то масса такого тела Ω будет численно равна объему этого тела. Получим формулу через тройной интеграл вычисления объема тела

$$V_{\Omega} = \iiint_{\Omega} dx dy dz. \quad (12.2)$$

Пример 12.3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \text{ и } 3z = x^2 + y^2.$$

◀ Построим изображение данного тела (рисунок 12.3).

Найдём проекцию линии пересечения сферы и параболоида на плоскость xOy . Для этого из системы уравнений $z^2 = 4 - (x^2 - y^2)$, $z^2 = \frac{(x^2 - y^2)}{9}$ достаточно исключить переменную z . В результате получим

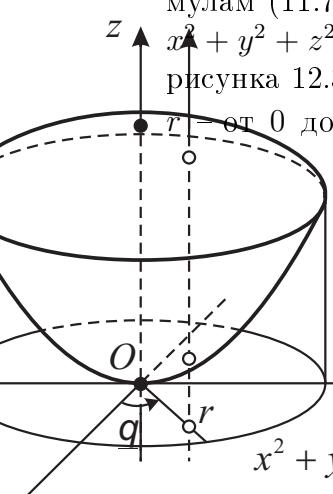
$$\frac{(x^2 - y^2)^2}{9} = 4 - (x^2 + y^2),$$

или

$$(x^2 + y^2)^2 + 9(x^2 + y^2) - 36 = 0,$$

Рисунок 12.3

откуда $x^2 + y^2 = -12$ и $x^2 + y^2 = 3$. Следовательно, уравнением проекции будет окружность $x^2 + y^2 = 3$. В силу симметрии достаточно вычислить объём тела (G) , находящегося в первом октанте, и результат умножить на 4. Тогда согласно формуле (12.2) для искомого объёма V получим $V = 4 \iiint_G dxdydz$. Так как проекция данного тела (G) на плоскость xOy есть круг $x^2 + y^2 \leq 3$, то для вычисления последнего интеграла целесообразно перейти к цилиндрическим координатам. После преобразования по формулам (11.7) уравнения окружности $x^2 + y^2 = 3$, параболоида $3z = x^2 + y^2$ и сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ соответственно принимают вид: $r = \sqrt{3}$, $z = \frac{1}{3}r^2$ и $z = \sqrt{4 - r^2}$. Из рисунка 12.3 видно, что в области интегрирования (D) угол φ изменяется от 0 до $\frac{\pi}{2}$, а z — от $z = \frac{1}{3}r^2$ до $z = \sqrt{4 - r^2}$. Поэтому



$$\begin{aligned}
 V_{\Omega} &= 4 \iiint_G dxdydz = 4 \iiint_D r dr d\varphi dz = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} rz \Big|_{\frac{r^2}{3}}^{\sqrt{4-r^2}} dz = \\
 &= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} r \left(\sqrt{4-r^2} - \frac{r^2}{3} \right) dr = 2\pi \left(\int_0^{\sqrt{3}} r \sqrt{4-r^2} dr - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{r^3}{3} dr \right) = \\
 &= 2\pi \left(-\frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4-r^2} d(4-r^2) - \frac{r^4}{12} \Big|_0^{\sqrt{3}} \right) = \\
 &= 2\pi \left(-\frac{1}{2} \frac{(4-r^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\sqrt{3}} - \frac{9}{12} \right) = \frac{19\pi}{6} \text{ (ед. объема).}
 \end{aligned}$$

Ответ: $V_{\Omega} = \frac{19}{6}\pi$ (ед. объема). ►

Пример 12.4. Вычислить с помощью тройного интеграла объём тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2$, $z = 2x^2 + 2y^2$, $y = x$, $y = x^2$.

◀ Объем тела находим по формуле (12.2). С помощью вспомогательных рисунков представим вид нашего тела. Рисунок 12.4 есть проекция нашего тела на плоскость xOy .

Рисунок 12.4

Цилиндрическая поверхность с направляющей (параболический сегмент – рисунок 12.4) и образующими, параллельными оси Oz , вырезает у поверхности $z = x^2 + y^2$ частичную поверхность (нижнее основание цилиндрического тела рисунок – 12.5) и у поверхности $z = 2x^2 + 2y^2$ частичную поверхность (верхнее основание цилиндрического тела – рисунок 12.6).

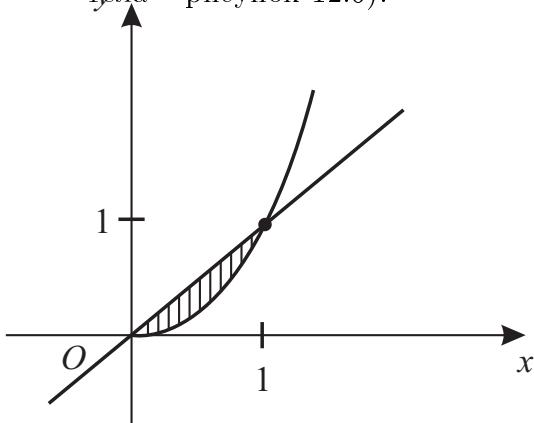


Рисунок 12.5

Проведем вычисление объема тела через тройной интеграл в декартовой системе координат (Почему труднее в цилиндрических координатах? Пояснить самостоятельно).

$$V_{\Omega} = \iiint_{\Omega} dx dy dz = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x dy \int_{x^2+y^2}^{2(x^2+y^2)} dz = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x (x^2 + y^2) dy =$$

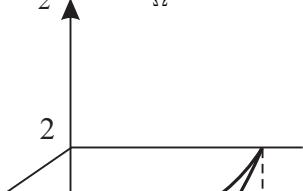


Рисунок 12.6

$$= \int_0^1 \left(x^2y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{x^2}^x dx = \int_0^1 \left(x^3 - x^4 + \frac{1}{3} (x^3 - x^6) \right) dx =$$

$$= 4 \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 - 5 \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^1 + \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 - \left[\frac{x^7}{7} \right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{12} - \frac{1}{21} = \frac{3}{35} \text{ (ед. объема)}.$$

Ответ: $V = \frac{3}{35}$ (ед. объема). ►

12.3 Статические моменты, момент инерции и центры тяжести материальных тел

Аналогично, как и при рассмотрении двойного интеграла, используя метод интеграла, получаем следующие формулы ($\rho(x, y, z)$ – объемная плотность тела Ω).

Статический момент материального тела Ω относительно плоскости xOz :

$$M_{xOz} = \iiint_{\Omega} y \rho(x, y, z) dx dy dz. \quad (12.3)$$

Статический момент материального тела Ω относительно плоскости yOz :

$$M_{yOz} = \iiint_{\Omega} x \rho(x, y, z) dx dy dz. \quad (12.4)$$

Статический момент материального тела Ω относительно плоскости xOy :

$$M_{xOy} = \iiint_{\Omega} z \rho(x, y, z) dx dy dz. \quad (12.5)$$

Момент инерции материального тела Ω относительно оси Oz :

$$I_{Oz} = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dx dy dz. \quad (12.6)$$

Момент инерции материального тела Ω относительно оси Ox :

$$I_{Ox} = \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz. \quad (12.7)$$

Момент инерции материального тела Ω относительно оси Oy :

$$I_{Oy} = \Omega \iiint_{\psi} (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz. \quad (12.8)$$

По аналогии с выводом формул для вычисления координат центра тяжести плоской материальной пластиинки получаем формулы для нахождения центра тяжести материального тела Ω .

Если точка $M_0(x_c, y_c, z_c)$ – центр тяжести материального тела Ω , то

$$x_c = \frac{M_{y0z}}{m_\Omega}, \quad y_c = \frac{M_{x0z}}{m_\Omega}, \quad z_c = \frac{M_{x0y}}{m_\Omega}, \quad (12.9)$$

где m_Ω – масса тела Ω .

Пример 12.5. Найти координаты центра масс однородного тела ($\rho = 1$), ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x^2 + y^2 = 2\sqrt{3}z$ ($x^2 + y^2 \leq 2\sqrt{3}z$).

◀ Изобразим рисунок 12.7 тела в первом октанте (тело симметрично как по объему, так и по массе относительно плоскостей xOz и yOz). Находим аппликату точек поверхностей тела (по окружности пересечения).

$$z^2 + 2\sqrt{3}z - 9 = 0, \quad \frac{D}{4} = (\sqrt{3})^2 + 9 = 12, \quad z = \sqrt{12} - \sqrt{3}.$$

Дальше определяем радиус окружности пересечения поверхностей

$$x^2 + y^2 + (\sqrt{12} - \sqrt{3})^2 = 9, \quad x^2 + y^2 = 6, \quad R = \sqrt{6}.$$

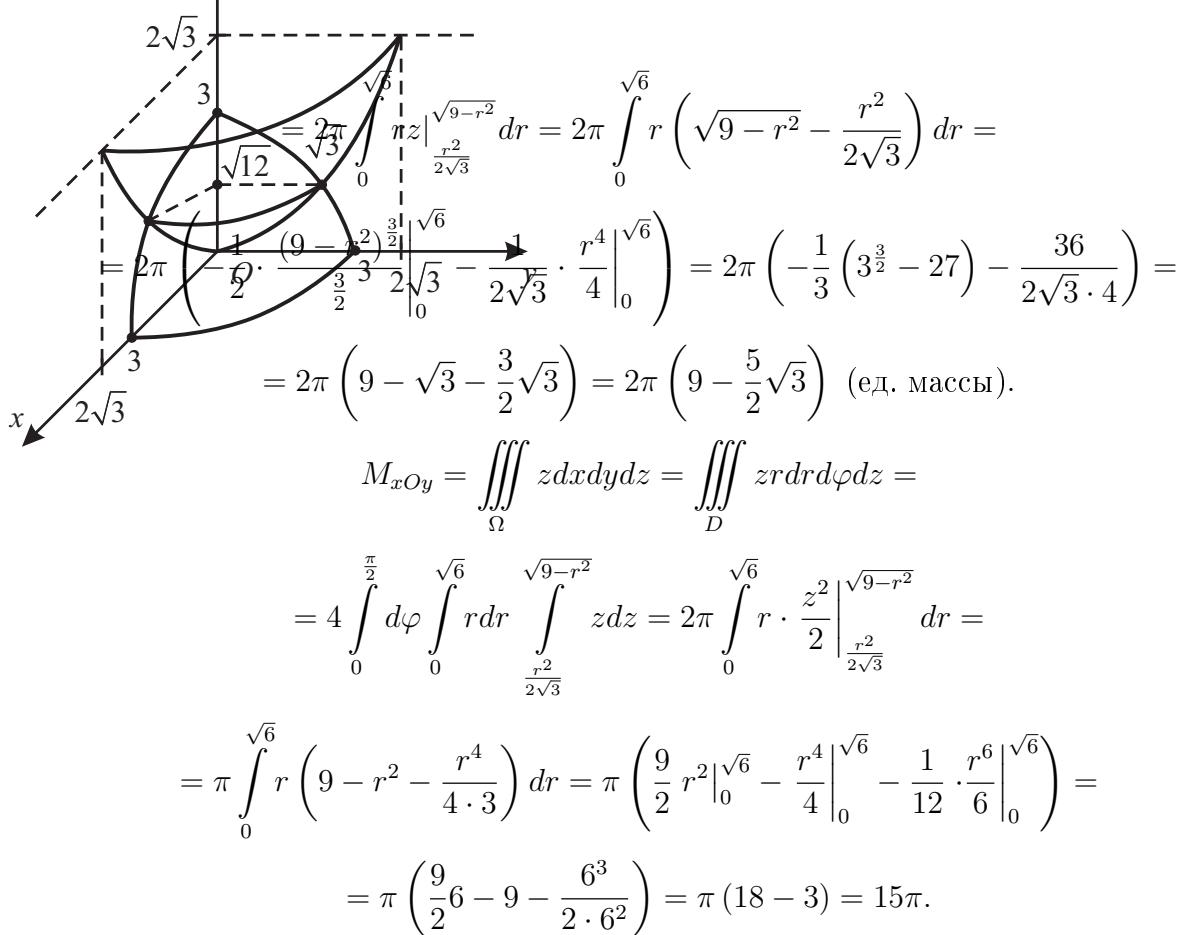
Из условий указанной выше симметрии первые две координаты центра тяжести тела равны нулю, то есть $x_c = y_c = 0$.

Координату z_c находим по третьей формуле (12.9). Учитываем также, что подынтегральные функции тройных интегралов в указанной формуле симметричны относительно плоскостей $x = 0$ и $y = 0$. При вычислении используем переход к цилиндрической системе координат.

$$\begin{aligned} m_\Omega &= \iiint_{\Omega} dx dy dz = \iiint_D r dr d\varphi dz = [x^2 + y^2 + z^2 = 9, \quad r^2 = 9 - z^2, \quad z = \sqrt{9 - r^2}, \\ &x^2 + y^2 = 2\sqrt{3}z, \quad r^2 = 2\sqrt{3}z, \quad z = \frac{r^2}{2\sqrt{3}}] = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sqrt{6}} r dr \int_{\frac{r^2}{2\sqrt{3}}}^{\sqrt{9-r^2}} dz = \end{aligned}$$

z

Рисунок 12.7



Тогда

$$z_c = \frac{15\pi}{\pi (18 - 5\sqrt{3})} = \frac{15 (18 + 5\sqrt{3})}{249} = \frac{5}{83} (18 + 5\sqrt{3}).$$

Ответ: $M_0 (0; 0; \frac{5}{83} (18 + 5\sqrt{3}))$. ▶

Пример 12.6. Найти координаты центра тяжести однородного тела, ограниченного сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ и параболоидом $3z = x^2 + y^2$.

◀ Объём V данного тела вычислен в задаче 12.3 (рисунок 12.3): $V = \frac{19}{6}\pi$. Так как данное тело симметрично относительно оси Oz и тело однородно, то центр тяжести его лежит на оси Oz , следовательно, $x_c = y_c = 0$. Остаётся найти аппликату центра тяжести тела, то есть $z_c = \frac{M_{x0y}}{m_\Omega}$. В нашем случае, для простоты, считаем тело однородным с плотностью равной единице, а тогда в этом случае $m_\Omega = V$. Переходя к цилиндрическим координатам, найдём статический момент M_{xOy} :

$$\begin{aligned} M_{xOy} &= \iiint_{\Omega} z dx dy dz = \iiint_D z r dr d\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} rdr \int_{\frac{1}{3}r^2}^{\sqrt{4-r^2}} zdz = \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} r \cdot \frac{z^2}{2} \Big|_{\frac{1}{3}r^2}^{\sqrt{4-r^2}} dr = \pi \int_0^{\sqrt{3}} r \left(4 - r^2 - \frac{1}{9}r^4 \right) dr = \\ &= \pi \left(2r^2 - \frac{1}{4}r^4 - \frac{1}{54}r^6 \right) \Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{13}{4}\pi. \end{aligned}$$

Следовательно, $z_c = \frac{M_{x0y}}{V} = \frac{13}{4}\pi : \frac{19}{6}\pi = \frac{39}{38}$. Таким образом, центр тяжести данного тела находится в точке $M_0(0, 0, \frac{39}{38})$.

Ответ: $M_0(0; 0; \frac{39}{38})$. ►

ЛЕКЦИЯ 13

Криволинейные интегралы первого рода

13.1 Задача о массе материальной дуги

Пусть дана плоская материальная спрямляемая кривая $L(B, C)$ (рисунок 13.1), линейная плотность которой $\rho(x, y)$ – непрерывная функция на кривой L . Необходимо дать понятие массы кривой L и указать способ ее вычисления.

Рисунок 13.1

◀ Берем любые разбиение τ_L кривой L на частичные спрямляемые дуги L_k ($k = \overline{1, n}$) с помощью точек M_k ($k = \overline{0, n}$). Пусть ΔL_k – длина частичной дуги L_k . Берем любую точку $\bar{M}_k(\bar{x}_k, \bar{y}_k) \in L_k$ и считаем, что в любой точке $M(x, y) \in L_k$ плотность

равна $\rho(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$. Тогда масса частичной дуги L_k будет $\Delta m_k \approx \rho(\bar{x}_k, \bar{y}_k) \Delta L_k$, а вся масса кривой L будет приближенно равна

$$\sigma_{\tau_L} \approx \sum_{k=1}^n \rho(\bar{x}_k, \bar{y}_k) \Delta L_k. \quad (13.1)$$

Обозначаем: $\lambda_\tau = \max_k \{\Delta L_k\}$. Если существует конечный предел

$$\lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} \sigma_{\tau_L} \quad (13.2)$$

и этот предел не зависит от способа разбиения τ_L материальной спрямляемой кривой L на частичные спрямляемые дуги L_k , а также от выбора точек $\bar{M}_k(\bar{x}_k, \bar{y}_k) \in L_k$, то он называется **массой материальной кривой L** . ►

13.2 Понятие криволинейного интеграла первого рода

Отвлекаемся от физического смысла функции $\rho(x, y)$, но повторяем все рассуждения, приведенные в предыдущей задаче, и приходим к понятию криволинейного интеграла первого рода для функции $f(x, y)$.

Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна на спрямляемой кривой L . Также вводим

$$\sigma_{\tau_L}(f(x, y), \bar{L}_k) = \sigma_{\tau_L} = \sum_{k=1}^n f(\bar{x}_k, \bar{y}_k) \Delta L_k. \quad (13.3)$$

Определение 13.1. Если существует конечный предел

$$\lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} \sigma_{\tau_L} \quad (13.4)$$

и он не зависит от способа разбиения τ_L спрямляемой кривой L на частичные спрямляемые дуги L_k , а также от выбора точек $\bar{M}_k(\bar{x}_k, \bar{y}_k) \in L_k$, то этот предел называется **криволинейным интегралом первого рода (по длине дуги)** функции $f(x, y)$ по кривой L . Указанный интеграл обозначается

$$\int_L f(x, y) dL. \quad (13.5)$$

13.3 Существование и вычисление криволинейного интеграла первого рода

Теорема 13.1. Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна на гладкой без особых точек кривой L , заданной параметрически

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta], \quad \alpha < \beta, \quad (13.6)$$

функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[\alpha, \beta]$ и

$$(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 > 0$$

для любых $t \in [\alpha, \beta]$.

Тогда криволинейный интеграл первого рода $\int_L f(x, y) dL$ существует и справедлива формула

$$\int_L f(x, y) dL = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt. \quad (13.7)$$

◀ Вначале на кривой L возьмем за параметр l – длину дуги, отсчитываемую от начальной точки B до текущей (рисунок 13.1). Через параметр l наша кривая записывается системой уравнений

$$\begin{cases} x = x(l), & 0 \leq l \leq |L|, \\ y = y(l), \end{cases} \quad (13.8)$$

$|L|$ – длина кривой L , а функция $f(x, y)$, определенная на кривой L , примет вид $f(x(l), y(l)) = \mu(l)$. Пусть точке $\bar{M}_k(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$ соответствует значение параметра \bar{l}_k . Тогда интегральная сумма (13.1) примет вид (считаем $\rho(x, y) = f(x, y)$, $\Delta L_k = \Delta l_k$).

$$\sigma_{\tau_L}(f(x, y), \bar{l}_k) = \sum_{k=1}^n f(x(\bar{l}_k), y(\bar{l}_k)) \Delta l_k. \quad (13.9)$$

Получили интегральную сумму (13.9) для определенного интеграла

$$\int_0^{|L|} f(x(l), y(l)) dl. \quad (13.10)$$

Интегральные суммы (13.3) и (13.9) равны между собой, поэтому

$$\int_L f(x, y) dL = \int_0^{|L|} f(x(l), y(l)) dl. \quad (13.11)$$

Формула (13.11), выражающая криволинейный интеграл первого рода через определенный интеграл, часто неудобна при вычислении криволинейных интегралов. По этой причине лучше ввести параметр по формуле (8.6) со всеми указанными там свойствами, причем возрастанию параметра t соответствует возрастание длины дуги l .

Тогда элемент длины дуги

$$dl = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt. \quad (13.12)$$

В правой части равенства (13.11) проведем замену переменной в определенном интеграле и получим формулу (13.7). ►

Замечание 13.1. При задании кривой L как графика функции $y = y(x)$ (при выполнении условий предыдущей теоремы) будем иметь формулу (13.7) в виде

$$\int_L f(x, y) dL = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx, \quad (13.13)$$

где функция $y(x)$ определена на отрезке $[a, b]$, $a < b$.

Если кривая L задана в полярной системе координат уравнением $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$, $\alpha < \beta$ (при выполнении условий теоремы 13.1), то

$$\int_L f(x, y) dL = \int_{\alpha}^{\beta} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \sqrt{r'^2(\varphi) + r^2(\varphi)} d\varphi. \quad (13.14)$$

Замечание 13.2. Из формулы (13.11) следует, что если функция $f(M)$ непрерывна на спрямляемой кривой L , то существует $\int_L f(M) dL$.

Пример 13.1. Вычислить криволинейный интеграл первого рода по плоской кривой L , где $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ и L – окружность $x^2 + y^2 = ax$, $a > 0$.

◀ Изобразим на рисунке кривую L (рисунок 13.2)

Рисунок 13.2

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - ax &= x^2 - 2x \frac{a}{2} + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} + y^2 = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{a^2}{4}; \\ \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Перейдем к полярной системе координат L :

$$r^2 = ar \cos \varphi, \quad r = a \cos \varphi, \quad f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} = r,$$

$$\sqrt{r'^2(\varphi) + r^2(\varphi)} = \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + a^2 \cos^2 \varphi} = a.$$

$$I = \int_L f(x, y) dL = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a \cos \varphi \cdot a d\varphi = a^2 \sin \varphi \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2a^2.$$

Ответ: $I = 2a^2$. ►

Замечание 13.3. Аналогично плоскому случаю вводится криволинейный интеграл первого рода в пространстве. Также справедлива теорема, аналогичная теореме 13.1.

Пусть в \mathbb{R}^3 гладкая кривая L без особых точек задана параметрически

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \quad t \in [\alpha, \beta], \quad \alpha < \beta, \\ z = \gamma(t), \end{cases} \quad (13.15)$$

Функция $u = f(x, y, z)$ определена и непрерывна на кривой L . Тогда

$$\int_L f(x, y, z) dL = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t), \gamma(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \gamma'^2(t)} dt. \quad (13.16)$$

Кривая L может быть в формуле (13.16) и кусочно-гладкой, а функция $f(x, y)$ – кусочно-непрерывной на этой кривой.

Пример 13.2. Найти массу материальной пространственной кривой

$$\vec{r} = \cos t \cdot \vec{i} + \sin t \cdot \vec{j} + t \cdot \vec{k},$$

линейная плотность которой

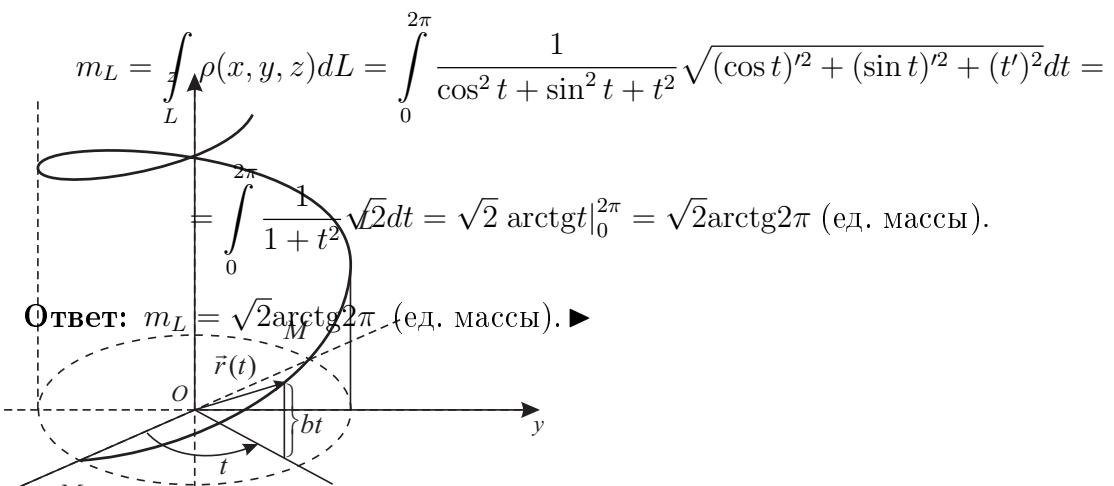
$$\rho(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1},$$

если $0 \leq t \leq 2\pi$.

◀ Наша кривая есть винтовая линия вида $\vec{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, которая представляет собой траекторию какой-либо точки M твердого тела, которая вращается вокруг неподвижной оси и скользит вдоль нее так, что перемещение пропорционально углу поворота (рисунок 13.3).

Рисунок 13.3

Воспользуемся аналогом задачи о массе плоской материальной дуги и понятием криволинейного интеграла первого рода. Тогда искомая масса



13.4 Свойства криволинейного интеграла первого рода

Свойства криволинейного интеграла первого рода во многом аналогичны свойствам определенного интеграла. Их обоснование следует из формулы (13.10). В связи с этим перечислим эти свойства.

Теорема 13.2 (свойство линейности). Пусть существуют криволинейные интегралы $\int_L f(M)dL$ и $\int_L g(M)dL$, где $M(x, y)$ – для плоскости и $M(x, y, z)$ – для пространства, а α и β – любые фиксированные действительные числа. Тогда существует криволинейный интеграл

$$\int_L (\alpha f(M) + \beta g(M))dL$$

и справедлива формула

$$\int_L (\alpha f(M) + \beta g(M))dL = \alpha \int_L f(M)dL + \beta \int_L g(M)dL. \quad (13.17)$$

Теорема 13.3 (свойство аддитивности). Пусть спрямляемая кривая L есть объединение двух спрямляемых кривых L_1 и L_2 без общих внутренних точек, а функция $f(M)$ ($M(x, y)$ или $M(x, y, z)$) определена на кривой L . Тогда

$$\int_L f(M)dL = \int_{L_1} f(M)dL + \int_{L_2} f(M)dL, \quad (13.18)$$

причем интеграл в (13.18) слева существует тогда и только тогда, когда существуют интегралы справа.

Теорема 13.4 (свойство монотонности). Если существует $\int_L f(M)dL$ и для любых точек спрямляемой кривой L $f(M) \geq 0$, то

$$\int_L f(M)dL \geq 0. \quad (13.19)$$

Следствие 13.1. Пусть существуют интегралы $\int_L f(M)dL$, $\int_L g(M)dL$ и на спрямляемой кривой L $f(M) \geq g(M)$. Тогда справедливо неравенство

$$\int_L f(M)dL \geq \int_L g(M)dL. \quad (13.20)$$

Теорема 13.5 (оценка по модулю). Если существует интеграл $\int_L f(M)dL$, то существует интеграл $\int_L |f(M)|dL$ и справедлива оценка

$$\left| \int_L f(M)dL \right| \leq \int_L |f(M)|dL. \quad (13.21)$$

Теорема 13.6 (теорема о среднем). Если функция $f(M)$ интегрируема по кривой L и $m = \inf_{M \in L} f(M)$, $M = \sup_{M \in L} f(M)$, то

$$m|L| \leq \int_L f(M)dL \leq M|L|,$$

где $|L|$ – длина кривой L , и существует $\mu \in [m, M]$, что

$$\int_L f(M)dL = \mu |L|. \quad (13.22)$$

Следствие 13.2. Если при выполнении условий теоремы 13.6 функция $f(M)$ непрерывна на кривой L , то существует точка $M_0 \in L$, что

$$\int_L f(M)dL = f(M_0) |L|. \quad (13.23)$$

Теорема 13.7 (независимость от направления движения по кривой интегрирования). Если существует $\int_L f(M)dL$, то существует и $\int_{L^-} f(M)dL$ и справедливо равенство

$$\int_L f(M)dL = \int_{L^-} f(M)dL, \quad (13.24)$$

где L и L^- одна и та же кривая, но движение по этой кривой противоположны.

13.5 Некоторые приложения криволинейных интегралов первого рода

13.5.1 Масса материальной кривой

Ранее нами было показано, что масса спрямляемой материальной кривой L определяется по формуле

$$m_L = \int_L \rho(M)dL, \quad (13.25)$$

где $\rho(M)$ – линейная плотность кривой.

Пример 13.3. Найти массу материальной кривой L , заданной соотношениями

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2ax, \quad a > 0, \quad x^2 + y^2 = z^2, \quad z \geq 0.$$

Плотность кривой $\rho = z$.

◀ Из системы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2ax \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases}$$

исключим z , получим $x^2 + y^2 = ax$. Значит, проекция кривой L на плоскость $z = 0$ будет окружность

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}. \quad (13.26)$$

Уравнение окружности (13.26) можно записать параметрически

$$\begin{cases} x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cos t, \\ y = \frac{a}{2} \sin t, \end{cases} \quad (13.27)$$

где $t \in [-\pi, \pi]$.

Из уравнения $x^2 + y^2 = z^2$ при $z \geq 0$ находим $(-\pi \leq t \leq \pi)$

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cos t\right)^2 + \left(\frac{a}{2} \sin t\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} (1 + 2 \cos t + 1)} = \\ &= \sqrt{\frac{a^2}{2} (1 + \cos t)} = \sqrt{\frac{a^2}{2} 2 \cos^2 \frac{t}{2}} = a \cos \frac{t}{2}. \end{aligned}$$

Тогда масса кривой L будет

$$\begin{aligned} m_L &= \int_L \rho dL = \int_L z dL = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} a \cos \frac{t}{2} \sqrt{\left(-\frac{a}{2} \sin t\right)^2 + \left(\frac{a}{2} \cos t\right)^2 + \left(-\frac{a}{2} \sin \frac{t}{2}\right)^2} dt = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} a \cos \frac{t}{2} \cdot \frac{a}{2} \sqrt{1 + \sin^2 \frac{t}{2}} dt = \left[d\left(\sin \frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2} \cos \frac{t}{2} dt \right] = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} a^2 \sqrt{1 + \sin^2 \frac{t}{2}} d\left(\sin \frac{t}{2}\right) = \left[u = \sin \frac{t}{2} \mid \begin{array}{l} u_{\text{H}} = -1 \\ u_{\text{B}} = 1 \end{array} \right] = \\ &= a^2 \int_{-1}^1 \sqrt{1 + u^2} du = 2a^2 \int_0^1 \sqrt{1 + u^2} du = 2a^2 \left[\begin{array}{l} y = \sqrt{1 + u^2}, \quad dy = \frac{udu}{\sqrt{1+u^2}} \\ dv = du, \quad v = u \end{array} \right]_0^1 = \\ &= 2a^2 \left(u \sqrt{1 + u^2} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{u^2 + 1 - 1}{\sqrt{1 + u^2}} du \right) = \\ &= 2a^2 \left(\sqrt{2} - \int_0^1 \sqrt{1 + u^2} du + \ln \left(u + \sqrt{1 + u^2} \right) \Big|_0^1 \right) = \\ &= -2a^2 \int_0^1 \sqrt{1 + u^2} du + 2a^2 \left(\sqrt{2} + \ln \left(1 + \sqrt{2} \right) \right) = a^2 \left(\sqrt{2} + \ln \left(1 + \sqrt{2} \right) \right) \text{ (ед. масс).} \end{aligned}$$

Ответ: $m_L = a^2 (\sqrt{2} + \ln (1 + \sqrt{2}))$ (ед.масс).

13.5.2 Статические моменты материальной кривой относительно координатных осей

Статическим моментом M_l материальной точки массы m относительно оси l называется произведение массы m на расстояние d указанной точки до оси l .

Для нахождения формул для статических моментов материальной спрямляемой кривой относительно координатных осей применим метод определенного интеграла. Знам, что элемент массы кривой L есть $\rho(x, y)dL$, где $\rho(x, y)$ – линейная плотность кривой L , а dL – элемент длины этой кривой. Тогда элементы искомых статистических моментов будут: $y\rho(x, y)dL$ – относительно оси Ox и $x\rho(x, y)dL$ – относительно оси Oy . А соответствующие моменты вычисляются по формулам:

$$M_{Ox} = \int_L y\rho(x, y)dL, \quad (13.28)$$

$$M_{Oy} = \int_L x\rho(x, y)dL. \quad (13.29)$$

Пример 13.4. Найти статистический момент однородной дуги эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ плотности ρ , расположенной в первом квадранте, относительно оси Ox ($a > b$).

◀ Воспользуемся формулой (13.28). Используем параметрическое задание эллипса

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases} t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

$$\begin{aligned} M_{Ox} &= b\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt = b\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 + (b^2 - a^2) \cos^2 t} d(\cos t) = \\ &= \begin{bmatrix} u = \cos t, \\ u_{\text{H}} = 1, \\ u_{\text{B}} = 0 \end{bmatrix} = b\rho \int_0^1 \sqrt{a^2 + (b^2 - a^2)u^2} du = b\rho \int_0^1 \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)u^2} du = \\ &= \begin{bmatrix} \int \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)u^2} dy = \begin{bmatrix} y = \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)u^2}, & dy = \frac{(a^2 - b^2)udu}{\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)u^2}}, \\ dv = du, & v = u \end{bmatrix} = \\ &= u\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)u^2} - \int \frac{-(a^2 - b^2)u^2 + a^2 - a^2}{\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)u^2}} du = \\ &= \frac{1}{2} \left(u\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)u^2} + \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2}u}{a} \right) = \\ &= \frac{b\rho}{2} \left(u\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)u^2} \Big|_0^1 + \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2}u}{a} \Big|_0^1 \right) = \\ &= \rho \left(\frac{b^2}{2} + \frac{a^2b}{2\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \right). \end{aligned}$$

Ответ: $M_{Ox} = \rho \left(\frac{b^2}{2} + \frac{a^2b}{2\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \right)$. ►

13.5.3 Центры тяжести материальных кривых

Центром тяжести (центром масс) материальной спрямляемой кривой L называют такую точку $M_0(x, y) \in \mathbb{R}^2$, что если в этой точке сосредоточить всю массу кривой L , то статистические моменты точки $M_0(x_c, y_c)$ относительно координатных осей будут равны соответственно статистическим моментам самой кривой L относительно этих осей

$$\begin{aligned} M_{Ox} &= m_L \cdot y_c, \\ M_{Oy} &= m_L \cdot x_c, \end{aligned} \quad (13.30)$$

то есть

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{M_{Oy}}{m_L}, \\ y_c &= \frac{M_{Ox}}{m_L}. \end{aligned} \quad (13.31)$$

Пример 13.5. Найти координаты центра масс, распределенных по плоской кривой $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $y \geq 0$ с линейной плоскостью $\rho = 1$.

◀ Наша кривая есть астроида в параметрическом виде $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ в верхней полуплоскости (рисунок 13.4)

Рисунок 13.4

В силу симметрии кривой относительно оси Oy $x_c = 0$. Ординату центра тяжести кривой L находим по формуле

$$y_c = \frac{\int y dL}{\int dL} \quad (13.32)$$

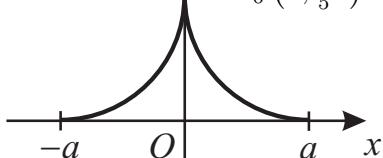
Находим

$$\begin{aligned} dL &= \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = \\ &= \sqrt{(3a \cos^2 t \cdot (-\sin t))^2 + (3a \sin^2 t \cdot \cos t)^2} = 3a \sin t \cdot |\cos t|. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} y_c &= \frac{\int_0^\pi a \sin^3 t \cdot 3a \sin t \cdot |\cos t| dt}{\int_0^\pi 3a \sin t \cdot |\cos t| dt} = \frac{a \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t d(\sin t) - \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin^4 t d(\sin t) \right)}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t d(\sin t) - \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin t d(\sin t)} = \\ &= \frac{a \left(\frac{\sin^5 t}{5} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\sin^5 t}{5} \Big|_{\frac{\pi}{2}}^\pi \right)}{\frac{\sin^2 t}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\sin^2 t}{2} \Big|_{\frac{\pi}{2}}^\pi} = \frac{2}{5} a. \end{aligned}$$

Ответ: $M_0(0, \frac{2}{5}a)$. ►



13.5.4 Момент инерции плоской материальной спрямляемой кривой относительно координатных осей

Моментом инерции I_l **материальной точки** массы m относительно оси l называют произведение массы m на квадрат расстояния d указанной точки до оси l .

Элемент момента инерции относительно оси Ox будет равен $dI_{Ox} = y^2\rho(x, y)dL$, а относительно оси Oy — $dI_{Oy} = x^2\rho(x, y)dL$. Сам момент инерции вычисляется по формулам (для кривой L)

$$I_{Ox} = \int_L y^2 \rho(x, y) dL \quad (13.33)$$

и

$$I_{Oy} = \int_L x^2 \rho(x, y) dL. \quad (13.34)$$

Пример 13.6. Найти момент инерции I_{Ox} одной арки циклоиды $x = a(t + \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $a > 0$, $|t| \leq \pi$, $\rho = 1$.

◀ Находим момент инерции по формуле

$$I_{Ox} = \int_L y^2 dL \quad (13.35)$$

$$\begin{aligned} dL &= \sqrt{(a(1 + \cos t))^2 + (a \sin t)^2} dt = a\sqrt{1 + 2 \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} dt = \\ &= a\sqrt{2(1 + \cos t)} dt = a\sqrt{2 \cdot 2 \cos^2 \frac{t}{2}} dt = 2a \cos \frac{t}{2} dt. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{Ox} &= 2a^3 \int_0^\pi (1 - \cos t)^2 \cos \frac{t}{2} dt = 2a^3 \int_0^\pi \left(1 - 2 \cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2}\right) \cos \frac{t}{2} dt = \\ &= 2a^3 \int_0^\pi \left(\frac{3}{2} \cos \frac{t}{2} - 2 \cos t \cdot \cos \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \cos 2t \cdot \cos \frac{t}{2}\right) dt = \\ &= 2a^3 \left(3 \sin \frac{t}{2} \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \left(\cos \frac{t}{2} + \cos \frac{3}{2}t\right) dt + \frac{1}{4} \int_0^\pi \left(\cos \frac{3}{2}t + \cos \frac{5}{2}t\right) dt\right) = \\ &= 2a^3 \left(3 - 2 \sin \frac{t}{2} \Big|_0^\pi - \frac{2}{3} \sin \frac{3}{2}t \Big|_0^\pi + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \sin \frac{3}{2}t \Big|_0^\pi + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} \sin \frac{5}{2}t \Big|_0^\pi\right) = \\ &= 2a^3 \left(3 - 2 + \frac{2}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{10}\right) = \frac{16}{5}a^3. \end{aligned}$$

Ответ: $I_{Ox} = \frac{16}{5}a^3$. ►

13.5.5 Площадь конечной части цилиндрической поверхности

Известно понятие площади криволинейной трапеции и вычисление этой площади с помощью определенного интеграла. В теории криволинейных интегралов первого рода является понятие площади конечной части цилиндрической поверхности и ее вычисление с помощью криволинейного интеграла.

Пусть в плоскости $z = 0$ дана спрямляемая кривая L в качестве направляющей. Функция $z = f(x, y)$ определена на кривой L , принимает неотрицательные значения, а ортогональная проекция ее графика совпадает с кривой L .

Цилиндрическая поверхность получена с помощью направляющей L и образующими перпендикулярными отрезками к плоскости $z = 0$, длина каждого из которых для любой точки $M(x, y) \in L$ равна $f(M)$ (рисунок 13.5).

Рисунок 13.5

Имеем формулу для вычисления площади указанной поверхности

$$S = \int_L f(M) dL. \quad (13.36)$$

Пример 13.7. Найти площадь цилиндрической поверхности $F(x, y) = R^2 - x^2 - y^2$, ограниченной снизу плоскостью $z = 0$ и сверху поверхностью $z = R + \frac{x^2}{R}$ ($R > 0$).

◀ Роль направляющей играет окружность $x^2 + y^2 = R^2$ в плоскости $z = 0$ (кривая L), а функция $f(M) = R + \frac{x^2}{R}$ (графиком ее является цилиндрическая поверхность параболического типа, поднятая над плоскостью $z = 0$ вверх на расстояние R с образующими, параллельными оси Oy).

Находим площадь, используя симметричность поверхности относительно оси Oz и параметрическое задание цилиндрической поверхности $x = R \cos t$, $y = R \sin t$.

$$\begin{aligned} \int_L f(M) dL &= \left[\begin{array}{l} f(M) = R + \frac{(R \cos t)^2}{R} = R(1 + \cos^2 t), \\ dL = \sqrt{(R(-\sin t))^2 + (R \cos t)^2} = R \end{array} \right] = \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} R(1 + \cos^2 t) R dt = 4R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{1 + \cos 2t}{2} \right) dt = \\ &= 4R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{2} dt = 3\pi R^2 \text{ (кв. ед.)}. \blacksquare \end{aligned}$$

13.5.6 Притяжение точечной массы материальной кривой

Пусть L – спрямляемая материальная кривая, линейная плотность которой $\rho(x, y)$. Материальная точка массы m находится на координатной плоскости в точке $M_o(x_0, y_0)$. Тогда материальная кривая L притягивает точку массы m с силой $\vec{F} = (F_{Ox}, F_{Oy})$, где проекции силы \vec{F} на координатные оси определяются по формулам

$$F_{Ox} = \gamma m \int_L \frac{\rho(x, y)(x - x_0)}{r^3} dL \quad (13.37)$$

и

$$F_{Oy} = \gamma m \int_L \frac{\rho(x, y)(y - y_0)}{r^3} dL, \quad (13.38)$$

где γ – постоянная тяготения и $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.

Замечание 13.4. Если рассматривать указанные физические явления в координатном пространстве, то к вектору силы \vec{F} добавляется третья координата, которая определяется по формуле

$$F_{oz} = \gamma m \int_L \frac{\rho(x, y, z)(z - z_0)}{r^3} dL. \quad (13.39)$$

Пример 13.8. Найти координаты силы притяжения однородной материальной полуокружности массы M и радиусом R массы m , помещенный в центре соответствующей полуокружности.

◀ Поместим полуокружность в верхнюю полуплоскость \mathbb{R}^2 . Ее уравнение тогда примет вид $\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2, \\ y \geq 0, \end{cases}$ (рисунок 13.6).

Рисунок 13.6

В силу симметрии относительно оси Oy и одинаковой удалённости точек полуокружности от начала координат проекция силы \vec{F} , указанной в задаче, на ось Ox будет равна нулю. Дальше находим по формуле (13.38)

$$\begin{aligned} F_{Oy} &= \frac{\gamma m}{R^3} \cdot \frac{M}{\pi R} \int_L y dL = \\ &= \left[\begin{array}{l} x = R \cos \varphi \\ y = R \sin \varphi \end{array} \middle| \begin{array}{l} dL = \sqrt{(-R \sin \varphi)^2 + (R \cos \varphi)^2} = R, \\ 0 \leq \varphi \leq \pi \end{array} \right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{\gamma m M}{\pi R^2} \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi = \frac{2\gamma m M}{\pi R^2}.$$

Ответ: $\vec{F} = (0, \frac{2\gamma m M}{\pi R^2})$. ►

ЛЕКЦИЯ 14

Криволинейные интегралы второго рода

14.1 Задача о работе плоского силового поля

Пусть в плоской области G декартовой плоскости задано силовое поле, то есть в каждой точке $M(x, y) \in G$ приложена сила $\vec{F}(P(x, y), Q(x, y))$, где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – проекции этой силы соответственно на оси Ox и Oy . Найти работу этой силы при перемещении материальной точки единичной массы по спрямляемой кривой $L \subset G$ из точки $A(x, y) \in L$ в точку $B(x, y) \in L$ (рисунок 14.1).

Рисунок 14.1

◀ Возьмем любое разбиение τ кривой L на n ($n \in \mathbb{N}$) частичных спрямляемых дуг L_k ($k = \overline{1, n}$) с помощью точек $M_k \in L$ ($k = \overline{0, n}$) $A = M_0$, $B = M_n$. На каждой частичной дуге произвольно выбираем точки $\overrightarrow{M}_k \in L_k$. Считаем, что указанная материальная точка движется по векторам $\overrightarrow{M}_{k-1}M_k$ – звеньям ломаной l_τ , вписанной в кривую L . Кроме того, предполагаем, что при движении точки по звену ломаной (вектору $\overrightarrow{M}_{k-1}M_k$) сила \vec{F} постоянная и равна силе в точке \overrightarrow{M}_k , то есть $\vec{F}(P(\bar{x}_k, \bar{y}_k), Q(\bar{x}_k, \bar{y}_k))$, где $\overrightarrow{M}_k(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$. Тогда работа силы \vec{F} по перемещению материальной точки по кривой L из точки M_{k-1} в точку M_k будет приближенно равна

$$A_k \approx (\vec{F}(\overrightarrow{M}_k), \overrightarrow{M}_{k-1}M_k) = P(\bar{x}_k, \bar{y}_k)\Delta x_k + Q(\bar{x}_k, \bar{y}_k)\Delta y_k, \quad (14.1)$$

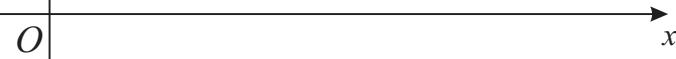
где Δx_k Δy_k – проекции векторов $\overrightarrow{M}_{k-1}M_k$ соответственно на оси Ox и Oy .

А вся искомая работа

$$\sum_{k=1}^n (\vec{F}(\overrightarrow{M}_k), \overrightarrow{M}_{k-1}M_k). \quad (14.2)$$

Точное значение указанной работы будет равно

$$A = \lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} \sigma_\tau(\vec{F}, \overrightarrow{M}_k), \quad (14.3)$$



если предел (14.3) существует и конечен, а также не зависит от разбиения τ_L и выбора точек \bar{M}_k , где λ_τ – максимальное значение длин частичных дуг L_k , то он называется **работой по перемещению материальной точки единичной массы**. ►

14.2 Понятие криволинейного интеграла второго рода

Отвлекаясь от конкретного содержания задачи и повторяя (с сохранением обозначений) приведенные в этой задаче рассуждения, мы приходим к понятию криволинейного интеграла второго рода.

Пусть вектор-функция $\vec{F}(P(x, y), Q(x, y))$ определена на спрямляемой кривой L .

Определение 14.1. Предел (14.3), если он существует и конечен, а также не зависит от разбиения τ_L и выбора точек \bar{M}_k , называется **криволинейным интегралом второго рода** от вектор-функции \vec{F} по кривой L и обозначается символом

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy. \quad (14.4)$$

Замечание 14.1. Криволинейный интеграл (14.4) называется **полным криволинейным интегралом**. Он представляет собой сумму двух неполных криволинейных интегралов, соответственно по векторам (P, O) и (O, Q) . Кривая L может быть замкнутой. В этом случае обход по кривой можно начинать с любой её точки. Этот обход называется положительным, если при движении вдоль замкнутой кривой часть плоскости, ограниченная ею, все время будет слева (обход осуществляется против часовой стрелки). В этом случае криволинейный интеграл (14.4) обозначается символом

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy. \quad (14.5)$$

Обход называется отрицательным, если при движении вдоль замкнутой кривой часть плоскости, ограниченная ею, все время будет справа (обход осуществляется по часовой стрелке). В этом случае криволинейный интеграл (14.4) обозначается символом

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy. \quad (14.6)$$

При изменении направления движения по кривой L (замкнутой или незамкнутой) меняется знак перед криволинейным интегралом.

14.3 Теорема о существовании и вычислении криволинейного интеграла второго рода

Теорема 14.1. Пусть гладкая кривая L без особых точек задана параметрически $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$ где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[\alpha, \beta]$; $(\alpha < \beta)$ и для любых $t \in [\alpha, \beta]$ $\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) > 0$. Функция $P(x, y)$ непрерывна на L ($P(x, y) \in C(L)$). Тогда существует неполный криволинейный интеграл

$$\int_L P(x, y)dx = \int_{\alpha}^{\beta} P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t)dt. \quad (14.7)$$

Аналогично при $Q(x, y) \in C(L)$, будет существовать

$$\int_L Q(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} Q(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t) dt. \quad (14.8)$$

◀ Берем любое разбиение $\tau_{[\alpha, \beta]}$ отрезка $[\alpha, \beta]$ на n ($n \in \mathbb{N}$) частичных отрезков $[t_{k-1}, t_k]$ ($k = \overline{1, n}$). Указанному разбиению соответствует разбиение кривой L на n частичных дуг L_k ($k = \overline{1, n}$) (используем обозначения из предыдущих пунктов). Получим интегральную сумму:

$$\sigma_{\tau} = \sigma_{\tau_{[\alpha, \beta]}}(P(x, y), \bar{M}_k) = \sum_{k=1}^n P(\bar{x}_k, \bar{y}_k) \Delta x_k, \quad (14.9)$$

где $P(\bar{x}_k, \bar{y}_k) = P(\varphi(\bar{t}_k), \psi(\bar{t}_k))$, $\bar{t}_k \in [t_{k-1}, t_k]$;

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi'(t) dt. \quad (14.10)$$

Так как $P(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) \in C[\alpha, \beta]$, то интеграл $I = \int_{\alpha}^{\beta} P(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) dt$ существует. А тогда

$$I = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} P(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) dt. \quad (14.11)$$

Оценим сверху $|\sigma_{\tau} - I|$.

$$\sigma_{\tau} - I = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} (P(\varphi(\bar{t}_k), \psi(\bar{t}_k)) - P(\varphi(t), \psi(t))) \varphi'(t) dt. \quad (14.12)$$

Пусть $\lambda_{\tau} = \max_k \{\Delta L_k\}$, где $\Delta L_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt$; $\min_{[\alpha, \beta]} \left\{ \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} \right\} = m > 0$. Так как $\Delta L_k \geq m \int_{t_{k-1}}^{t_k} dt = m \Delta t_k$, то $0 \leq \Delta t_k \leq \frac{\Delta L_k}{m} \rightarrow 0$, и при $\lambda_{\tau} \rightarrow 0$ будет и $\max_k \{\Delta t_k\} \rightarrow 0$. С учетом этого, и того, что $P(x, y) \in C(L)$, получим:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \tau_{[\alpha, \beta]} \quad \lambda_{\tau} < \delta \quad |P(\varphi(\bar{t}_k), \psi(\bar{t}_k)) - P(\varphi(t), \psi(t_k))| < \varepsilon.$$

Так как $\varphi'(t) \in C[\alpha, \beta]$, то $\varphi'(t)$ ограничена на отрезке $[\alpha, \beta]$, то есть существует $D > 0$, что для любого $t \in [\alpha, \beta]$ $|\varphi'(t)| \leq D$. Тогда

$$|\sigma_{\tau} - I| < \varepsilon \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\varphi'(t)| dt \leq D \varepsilon \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} dt = \varepsilon D (\beta - \alpha),$$

то есть существует

$$\lim_{\lambda_{\tau} \rightarrow 0} \sigma_{\tau} = \int_L P(x, y) dx = I. \blacktriangleright$$

Пример 14.1. Найти работу упругой силы, направленной к началу координат, величина которой пропорциональна удалению точки от начала координат, если точка приложения силы описывает против часовой стрелки четверть эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, лежащую в первом квадранте (рисунок 14.2).

$$\blacktriangleleft |\vec{F}| = kr, r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$A = \int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_L -kx dx - ky dy =$$

$$= -k \int_L x dx - k \int_L y dy = I_1 + I_2.$$

Рисунок 14.2

Для неполного криволинейного интеграла I_1 берем параметр $t = x$, для $I_2 - t = y$. Тогда

$$A = k \left(\int_a^0 -x dx + \int_0^b -y dy \right) = k \left(\frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2} \right) (\text{Дж.}).$$

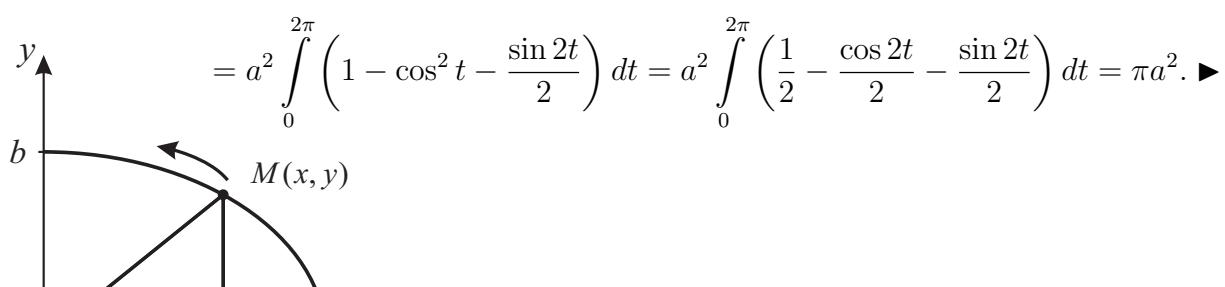
Ответ: $A = k \left(\frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2} \right)$ (Дж.). ►

Пример 14.2. Вычислить криволинейный интеграл:

$$I = \int_L (2a - y)dx + (y - a)dy, \quad (14.13)$$

где L – дуга циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) в направлении возрастания параметра t .

$$\blacktriangleleft I = \int_0^{2\pi} ((2a - a + a \cos t)a(1 - \cos t) + (a - \cos t - a)a \sin t) dt =$$



Замечание 14.2. Понятие криволинейного интеграла второго рода в трехмерном декартовом пространстве аналогично, что и в двумерном пространстве. Также в этом случае будет справедлива теорема, аналогичная теореме 14.1.

Пример 14.3. Вычислить криволинейный интеграл второго рода по пространственной кривой

$$I = \int_L xdx + ydy + (x + y - 1)dz, \quad (14.14)$$

где L – отрезок AB , проходящий от точки $A(1, 1, 1)$ к точке $B(2, 3, 4)$.

◀ Запишем уравнение отрезка в параметрическом виде. Направляющий вектор для прямой есть вектор $\vec{d}(1, 2, 3) = \vec{d}(m, n, l)$. Тогда параметрическое уравнение отрезка в координатной форме будет $(A(x_0, y_0, z_0))$ при $0 \leq t \leq 1$.

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + lt, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 1 + 2t, \\ z = 1 + 3t. \end{cases} \quad (14.15)$$

Тогда

$$I = \int_0^1 (1+t)dt + 2 \int_0^1 (1+2t)dt + 3 \int_0^1 (1+3t)dt = 13.$$

Ответ: $I = 13$. ►

14.4 Свойства криволинейного интеграла второго рода

Для краткости записей будем рассматривать здесь и дальше неполные криволинейные интегралы второго рода, что не теряет общности рассуждений.

Теорема 14.2 (свойство линейности). Если существуют криволинейные интегралы $\int_L P_1(x, y)dx$ и $\int_L P_2(x, y)dx$, а α и β – любые фиксированные действительные числа, то существует криволинейный интеграл $\int_L (\alpha P_1(x, y) + \beta P_2(x, y))dx$ и справедливо равенство

$$\int_L (\alpha P_1(x, y) + \beta P_2(x, y)) dx = \alpha \int_L P_1(x, y)dx + \beta \int_L P_2(x, y)dx. \quad (14.16)$$

◀ По условию теоремы существуют указанные криволинейные интегралы, то есть

$$\lim_{\lambda'_\tau} \sigma_{\tau'_L}(P_1, \overline{M}'_k) = \int_L P_1(x, y)dx \quad (14.17)$$

и

$$\lim_{\lambda''_\tau} \sigma_{\tau''_L}(P_2, \overline{M}''_k) = \int_L P_2(x, y)dx. \quad (14.18)$$

Пусть τ_L – объединение разбиений τ'_L и τ''_L , то есть их измельчение, а λ_τ – максимальная длина частичной дуги при разбиении τ_L . Дальше воспользуемся свойством линейности для пределов

$$\lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} (\alpha \sigma_\tau(P_1, M_k) + \beta \sigma_\tau(P_2, M_k)) = \alpha \lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} \sigma_{\tau'_L}(P_1, \overline{M}_k) + \beta \lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} \sigma_{\tau''_L}(P_2, \overline{M}_k) =$$

$$= \alpha \int_L P_1(x, y) dx + \beta \int_L P_2(x, y) dx. \blacktriangleright$$

Теорема 14.3 (свойство аддитивности). Пусть спрямляемая без точек разрыва кривая L есть объединение двух спрямляемых кривых L_1 и L_2 без общих внутренних точек. Если существуют криволинейные интегралы $\int_{L_1} P(x, y) dx$ и $\int_{L_2} P(x, y) dx$, то существует криволинейный интеграл $\int_L P(x, y) dx$ и справедливо равенство

$$\int_L P(x, y) dx = \int_{L_1} P(x, y) dx + \int_{L_2} P(x, y) dx. \quad (14.19)$$

◀ Точку «стыковки» кривых L_1 и L_2 берем одной из точек разбиения τ_L кривой на частичные дуги. Получим, что

$$\sigma_{\tau_L}(P, \overline{M}_k) = \sigma_{\tau_{L_1}}(P, \overline{M}_k^{L_1}) + \sigma_{\tau_{L_2}}(P, \overline{M}_k^{L_2}). \quad (14.20)$$

В равенстве (14.20) переходим к пределу при $\lambda_\tau \rightarrow 0$, λ_τ – максимальная длина частичной дуги при разбиении τ кривой L на частичные дуги. Получаем справедливость заключения теоремы. ►

Теорема 14.4 (свойство изменения направления обхода по кривой). Пусть точки A и B – концы спрямляемой кривой L и существует $\int_{L(A,B)} P(x, y) dx$. Тогда существует интеграл $\int_{L(B,A)} P(x, y) dx$ и справедливо равенство

$$\int_{L(A,B)} P(x, y) dx = - \int_{L(B,A)} P(x, y) dx. \quad (14.21)$$

◀ Если $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} > 0$ при обходе по кривой, например, от точки A до точки B , то при противоположном обходе (от B до A) по кривой $x_k = x_k - x_{k-1} = -\Delta x_k$. Тогда получим интегральные суммы, равные по модулю, но с противоположными знаками. Переходим к пределу в равенстве $\sigma_{\tau_L} = -\sigma_{\tau_{L^-}}$ и получим заключение теоремы. ►

Теорема 14.5 (оценка криволинейного интеграла). Пусть функция $P(x, y)$ задана на спрямляемой прямой L и ограничена, то есть существует $M \in R_+$, что для любых точек $K(x, y) \in L$ будет $|P(x, y)| \leq M$. Кривая L задана параметрически

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} t \in [\alpha, \beta], \quad \alpha < \beta. \quad (14.22)$$

Криволинейный интеграл $\int_L P(x, y) dx$ существует. Тогда справедлива оценка

$$\left| \int_L P(x, y) dx \right| \leq M V_{\alpha}^{\beta} \varphi(t), \quad (14.23)$$

где

$$V_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) = \sum_{k=1}^n |\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})|. \quad (14.24)$$

◀ При параметрическом задании кривой L $\Delta x_k = \varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})$. Тогда

$$\begin{aligned} |\sigma_{\tau_L}(P, \overline{M}_k)| &= \left| \sum_{k=1}^n P(\overline{x_k}, \overline{y_k})(\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})) \right| \leq \\ &\leq M \sum_{k=1}^n |\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})| \leq M \frac{\beta}{\alpha} V^\beta \varphi(t). \blacksquare \end{aligned} \quad (14.25)$$

Замечание 14.3. Если функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ – функции с ограниченным изменением (функции с полной вариацией), то есть, например (для функции $\varphi(t)$), для любого разбиения $\tau_{[\alpha, \beta]}$ множество сумм

$$\frac{\beta}{\alpha} V = \sum_{k=1}^n |\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})| \quad (14.26)$$

ограничено сверху. В этом случае точная верхняя грань сумм (14.26) обозначается $\frac{\beta}{\alpha} V^\beta(\varphi)$ и называется полным изменением (полной вариацией) функции $\varphi(t)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$.

Замечание 14.4. Если функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ – функции с ограниченным изменением, то кривая L спрямляема и справедлива оценка

$$\frac{\beta}{\alpha} V^\beta \varphi(t) \leq l, \quad (14.27)$$

где l – длина кривой. А тогда

$$\left| \int_L P(x, y) dx \right| \leq M \cdot l. \quad (14.28)$$

14.5 Криволинейный интеграл по замкнутому контуру

Рассмотрим простую замкнутую кривую L Жордана без точек самопересечения, а также без особых точек

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad (14.29)$$

где $t \in [\alpha, \beta]$, $\alpha < \beta$, $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$, $\psi(\alpha) = \psi(\beta)$.

Такая кривая называется простым замкнутым контуром (слово «простым» указывает, что существует параметрическое задание кривой L , которое на промежутке $[\alpha, \beta]$ является биекцией, то есть для любых $t_1, t_2 \in [\alpha, \beta]$, $t_1 \neq t_2$, хотя бы для одной из функций $\varphi(t)$ или $\psi(t)$ значения в точках t_1 и t_2 должны быть различны).

Дополнительно потребуем, чтобы кривая L была кусочно-гладкой.

Теорема 14.6. Пусть функция $P(x, y)$ непрерывна на простом кусочно-гладком замкнутом контуре L , определяемом системой (14.29). Значения криволинейных интегралов

$$\oint_L P(x, y) dx \text{ и } \oint_L P(x, y) dy$$

в заданном направлении по кривой L не зависят от начала обхода.

Рисунок 14.3

◀ Для определенности рассмотрим рисунок 14.3.

По свойству аддитивности

$$\oint_L P(x, y) dx = \int_{L(B,C)} P(x, y) dx + \int_{L(C,B)} P(x, y) dx, \quad (14.30)$$

$$\oint_L P(x, y) dx = \int_{L(C,B)} P(x, y) dx + \int_{L(B,C)} P(x, y) dx. \quad (14.31)$$

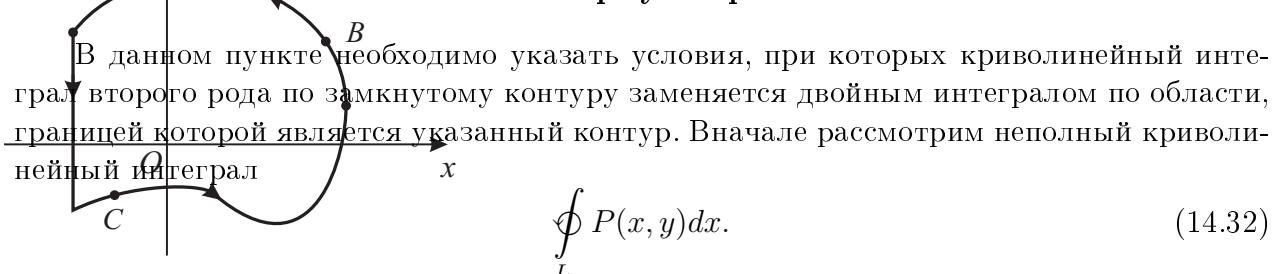
Левые части равенств (14.30) и (14.31) одинаковы, поэтому и правые части этих равенств будут равны между собой. ►

Замечание 14.5. Из задачи о работе плоского силового поля следует, что значение работы вдоль замкнутого контура разбивает силовые поля на два класса:

1-й класс – **потенциальные силовые** поля при условии, что работа по замкнутому контуру равна нулю;

2-й класс – **непотенциальные силовые** поля (указанная работа не равна нулю).

14.6 Формула Грина



Пусть кусочно-гладкий замкнутый контур L есть граница области первого типа G (рисунок 14.4).

Граница $\partial G = L$ состоит из отрезков AD и BC соответственно прямых $x = a$ и $x = b$ ($a < b$) и кусочно-гладких графиков функций $y = y_1(x)$ (кривая AB) и $y = y_2(x)$ (кривая DC).

Пусть функция $P(x, y)$ и существующая её частная производная $\frac{\partial P}{\partial y}$ определены и непрерывны на \bar{G} (на замыкании области).

Рисунок 14.4

Теорема 14.7. При указанных выше условиях справедлива **формула Грина**

$$\iint_G \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy = - \oint_L P(x, y) dx. \quad (14.33)$$

◀ При условиях теоремы как двойной, так и криволинейный интегралы в равенстве (14.33) существуют. Также двойной интеграл заменяется повторным.

$$\begin{aligned} \iint_G \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy &= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dy = \int_a^b P(x, y) \Big|_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} dx = \\ &= \int_a^b (P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))) dx = \int_{L(D,C)} P(x, y) dx - \int_{L(A,B)} P(x, y) dx = \\ &= - \int_{L(C,D)} P(x, y) dx - \int_{L(A,B)} P(x, y) dx. \end{aligned} \quad (14.34)$$

Дополнительно учтем, что если $x = a = \text{const}$, то $dx = 0$, также при $x = b = \text{const}$ будет $dx = 0$. Тогда

$$- \int_{L(D,A)} P(x, y) dx - \int_{L(B,C)} P(x, y) dx = 0. \quad (14.35)$$

С учетом равенств (14.34) и (14.35) получим справедливость заключения теоремы. ►

Замечание 14.6. Аналогично рассматривается простейшая область второго типа (рисунок 14.5).

Отрезки DC и AB лежат соответственно на прямых $y = d$ и $y = c$. Кривые AD и BC – соответственно кусочно-гладкие графики функций $x = x_1(y)$ и $x = x_2(y)$. Обозначим область (рисунок 14.5) через Ω , $\partial\Omega$ – ее кусочно-гладкая граница.

Теорема 14.8. Если функция $Q(x, y)$ и существующая ее частная производная $\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$ определены и непрерывны на $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, то справедлива **формула Грина**

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} dx dy = \oint_{\partial\Omega} Q(x, y) dy \quad (14.36)$$

Рисунок 14.5

Замечание 14.7. Доказательство теоремы 14.8 аналогично доказательству теоремы 14.7.

По свойству аддитивности для двойных и криволинейных интегралов, а также тому, что сумма криволинейных неполных интегралов от одной и той же функции по одной и той же кривой, но в противоположных направлениях равны нулю, получим справедливость формул (14.33) и (14.36), если область G допускает представление в виде конечного числа простейших областей как первого, так и второго типа (другие условия теорем 14.7 и 14.8 должны сохраниться). В этом случае будет справедлива и **полная формула Грина**

$$\oint_{L=\partial G} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_G \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dxdy. \quad (14.37)$$

Областями, допускающими выше указанное разбиение на простейшие области как первого, так и второго типов будут многоугольные области. Но любая область G с кусочно-гладкой границей ∂G допускает аппроксимацию многоугольными областями со сколь угодно малой ошибкой по величине площади (можно доказать). По этой причине будет справедлива формула Грина вида (14.37) для более общего случая.

Теорема 14.9. Если функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$ и существующие их частные производные $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$ определены и непрерывны на замыкании $\bar{G} = G \cup \partial G$ области G с кусочно-гладкой границей ∂G , то справедлива формула Грина (14.37), а также формулы (14.33) и (14.36).

14.7 Приложения формулы Грина к вычислению площадей плоских фигур

Пусть плоская фигура в \mathbb{R}^2 есть область G с кусочно-гладкой границей ∂G . Тогда по формуле (14.36) имеем:

$$\oint_{\partial G} x dy = \iint_G \frac{\partial}{\partial x} x dxdy = \iint_G dxdy = S_G \quad (14.38)$$

площади плоской фигуры G . Аналогично

$$S_G = - \oint_{\partial G} y dx. \quad (14.39)$$

Сложим (14.38) и (14.39), получим

$$S_G = \frac{1}{2} \oint_{\partial G} xdy - ydx. \quad (14.40)$$

Пример 14.4. Вычислить площадь эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

◀ Используем параметрическое задание эллипса

$$\begin{cases} x = a \cos t, & t \in [0, 2\pi]. \\ y = b \sin t, \end{cases}$$

Тогда по формуле (14.40)

$$\begin{aligned} S = \frac{1}{2} \oint_L xdy - ydx &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a \cos t \cdot b \cos t - b \sin t \cdot (-a \sin t)) dt = \\ &= 2ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \pi ab \text{ (кв. ед.)}. \end{aligned}$$

Ответ: $S = \pi ab$ (кв. ед.). ►

14.8 Четыре равносильных условия для криволинейного интеграла второго рода

Определение 14.2. Плоская область G называется *односвязной*, если для любого замкнутого контура $L \subset G$ ограниченная L (конечная) часть плоскости целиком принадлежит G .

Теорема 14.10. Пусть функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$ и существующие их частные производные $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y}$, $\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$ определены и непрерывны на замыкании \bar{G} односвязной области G с кусочно-гладкой границей ∂G . Тогда четыре следующих условия равносильны, а именно:

1. Для любого кусочно-гладкого замкнутого контура $L \subset G$

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0. \quad (14.41)$$

2. Для любых точек $B(x, y)$ и $C(x, y)$ из области G криволинейный интеграл

$$\int_B^C P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

не зависит от выбора пути (кусочно-гладкой кривой L) интегрирования от точки B до точки C .

3. Выражение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ есть полный дифференциал некоторой однозначной функции, определенной в области G .

4. Для любых точек из области G выполняется условие

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}. \quad (14.42)$$

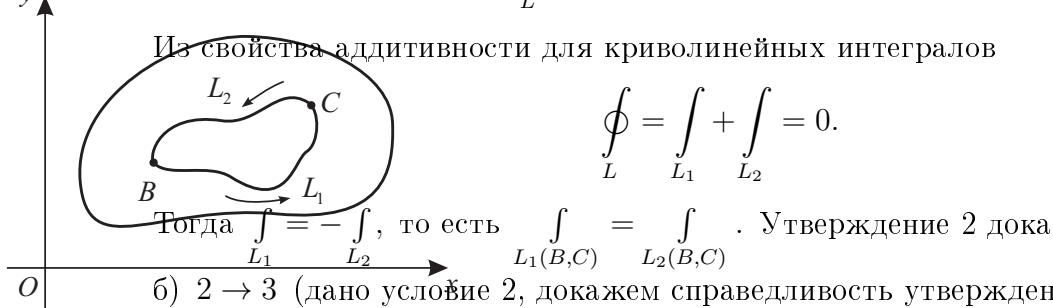
◀ Доказательство теоремы проведем по схеме $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$

a) $1 \rightarrow 2$ (дано условие 1, докажем справедливость заключения 2). Для наглядности рассмотрим рисунок 14.6.

Рисунок 14.6

Возьмем любые кусочно-гладкие кривые L_1 и L_2 из области G , концами которых будут точки B и C . Эти кривые образуют замкнутый кусочно-гладкий контур $L = L_1 \cup L_2$. Из условия 1 имеем:

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0. \quad (14.43)$$



Фиксируем точку B , а точка $C(x, y)$ пусть будет текущей в области G . Через L обозначим переменную кусочно-гладкую кривую, началом которой будет точка B и концом точка C .

Тогда для любой точки $C(x, y)$ криволинейный интеграл

$$\int_{L(B,C)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = u(x, y) \quad (14.44)$$

есть однозначная функция координат x и y точки C . Покажем, что функция $u(x, y)$ дифференцируема в области G и ее полный дифференциал

$$du(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy = u'_x(x, y)dx + u'_y(x, y)dy. \quad (14.45)$$

Для наглядности рассмотрим рисунок 14.7

Вначале докажем, что существует $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = P(x, y)$. Придаем абсциссе x точки C любое приращение $\Delta x \neq 0$, но такое, что точка $C_1(x + \Delta x, y) \in G$. Тогда частное приращение

$$\Delta_x u(x, y) = u(x + \Delta x, y) - u(x, y) = \int_C^{C_1} P(x, y)dx + Q(x, y)dy, \quad (14.46)$$

Рисунок 14.7

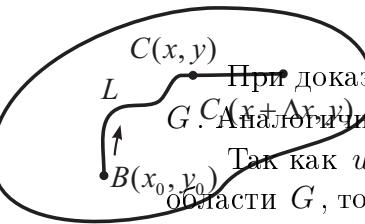
причем $dy = 0$ (криволинейный интеграл берем по отрезку, параллельному оси Ox , $y = \text{const}$).

Разделим левую и правую части (14.46) на Δx и, применив теорему о среднем, получим:

$$\frac{\Delta_x u(x, y)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \int_{(x, y)}^{(x + \Delta x, y)} P(x, y) dx = P(x + \theta \Delta x, y), \quad \theta \in (0, 1).$$

Тогда

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} P(x + \theta \Delta x, y) = P(x, y). \quad (14.47)$$


При доказательстве (14.47) учитываем, что функция $P(x, y)$ непрерывна в области G . Аналогично доказывается, что $\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = Q(x, y)$ в области G . Так как $u'_x(x, y)$ и $u'_y(x, y)$, равные соответственно $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны в области G , то функция $u(x, y)$ дифференцируема в этой области (достаточный признак дифференцируемости функции $u(x, y)$ в любой точке $(x, y) \in G$).

Тогда

$$du(x, y) = u'_x(x, y)dx + u'_y(x, y)dy = P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Утверждение 3 доказано.

в) $3 \rightarrow 4$ (дано условие 3, требуется доказать утверждение 4).

Воспользуемся теоремой Шварца о равенстве смешанных производных. У нас $\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = P(x, y)$ и $\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = Q(x, y)$.

Тогда $\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}$ и $\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$, но частные производные $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$ непрерывны в G , поэтому в G будут непрерывны и смешанные производные $\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y \partial x}$ и $\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y}$, а, значит, они будут равны, поэтому $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$. Утверждение 4 доказано.

г) $4 \rightarrow 1$ (дано условие 4, требуется доказать утверждение 1).

При условиях теоремы справедлива формула Грина по любому кусочно-гладкому замкнутому контуру из G

$$\oint_{L=\partial D} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_{D \subset G} \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dxdy. \quad (14.48)$$

Но из условия 4 имеем $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 0$. Тогда

$$\oint_{L=\partial D} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0. \blacktriangleright$$

14.9 Восстановление функции по ее полному дифференциальному криволинейному интегралу

Теорема 14.11. Пусть функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$ и существующие их частные производные $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ определены и непрерывны в односвязной области G , а также выполняется равенство

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}. \quad (14.49)$$

Тогда в G $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ есть полный дифференциал некоторой функции $u(x,y)$, которая находится с точностью до константы по формуле

$$u(x,y) = \int_{M_0(x_0,y_0)}^{M(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + C, \quad (14.50)$$

где $M_0(x_0,y_0)$ – любая фиксированная точка из области G , а $M(x,y)$ – текущая точка из этой области, причем указанные точки есть концы любой кусочно-гладкой кривой без особых точек, по которой проводится интегрирование.

◀ Выполняются условия теоремы 14.10, поэтому равенство (14.49) будет выполняться тогда и только тогда, когда

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

есть полный дифференциал некоторой функции $u(x,y)$ в области G . Также в теореме 14.10 было показано, что при выполнении равенства (14.49) условию

$$du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy \quad (14.51)$$

удовлетворяет функция

$$u(x,y) = \int_{M_0(x_0,y_0)}^{M(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy. \quad (14.52)$$

Далее учтем, что две функции, имеющие одинаковые полные дифференциалы, отличаются одна от другой только на постоянные слагаемые. Так как точки $M_0(x_0,y_0)$ и $M(x,y)$ могут быть концами любой кусочно-гладкой кривой без особых точек, то чаще всего в качестве такой кривой берут ломанную со звеньями, параллельными координатным осям. ►

Замечание 14.8. Доказанная теорема дает один из методов решения дифференциальных уравнений первого порядка в полных дифференциалах.

Пример 14.5. Решить дифференциальное уравнение

$$\left(12x^2y + \frac{1}{y^2}\right)dx + \left(4x^3 - \frac{2x}{y^3}\right)dy = 0. \quad (14.53)$$

◀ Уравнение имеет вид

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \quad (14.54)$$

где $P(x, y) = 12x^2y + \frac{1}{y^2}$, $Q(x, y) = 4x^3 - \frac{2x}{y^3}$.

Ось Ox разбивает координатную плоскость \mathbb{R}^2 на две односвязные области: G_1 ($y > 0$) и G_2 ($y < 0$).

Решение уравнения (14.53) будем проводить в области G_1 . Находим

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = 12x^2 - \frac{2}{y^3}$$

и

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = 12x^2 - \frac{2}{y^3}.$$

Видно, что у нас выполняются условия предыдущей теоремы, поэтому левая часть уравнения (14.53) есть полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$ в односвязной области G_1 . По формуле (14.50) находим функцию $u(x, y)$ с точностью до константы. В качестве кривой интегрирования берем ломаную $L = L_1 \cup L_2$ (рисунок 14.8).

Рисунок 14.8

$$\begin{aligned} \int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy &= \int_{L_1} + \int_{L_2} = \\ &= \left[\begin{array}{l|l} L_1 : y = 1, dy = 0, & L_2 : x = \text{const}, dx = 0, \\ x - \text{параметр}, & y - \text{параметр}, \\ 0 \leq x \leq x & 1 \leq y \leq y \end{array} \right] = \\ &= \int_0^x (12x^2 + 1)dx + \int_1^y \left(4x^3 - \frac{2x}{y^3}\right)dy = 4x^3y + \frac{x}{y^2} + C_1. \end{aligned}$$

Ответ: $u(x, y) = C$, где $u(x, y) = 4x^3y + \frac{x}{y^2}$ – решение уравнения (14.53). ►

ЛЕКЦИЯ 15

Поверхностные интегралы первого рода

Поверхностные интегралы играют важную роль при решении многих задач физики. Например, решение задачи о плотности распределения зарядов на поверхности проводника или о скорости жидкости, протекающей через некоторую поверхность, или об освещенности поверхности или о притяжении простого слоя и т.д.

Теория поверхностных интегралов во многом аналогична теории криволинейных интегралов. Рассматриваются, как и для криволинейных интегралов, поверхностные интегралы первого и второго рода.

15.1 Задача о притяжении поверхности, с распределённой массой по ней, материальной точки, находящейся вне поверхности

Пусть по поверхности S непрерывным образом распределены массы с заданной в каждой точке $M(x, y, z)$ поверхности плотностью $\rho(M) = \rho(x, y, z)$. Пусть далее, в точке $A(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ (вне поверхности) находится единица массы. Требуется определить, с какой по величине и направлению силой \vec{F} притягивается точка $A(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ поверхностью S , если в основу положен Ньютона закон притяжения.

◀ Если бы точка $A(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ притягивалась одной лишь материальной точкой $M(x, y, z)$ с сосредоточенной в ней массой m , то величина силы притяжения была бы равна

$$F = \gamma \frac{m}{R^2},$$

где γ – гравитационная постоянная, R – расстояние $|AM|$, то есть,

$$R = \sqrt{(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 + (z - \bar{z})^2}.$$

Так как эта сила направлена от точки A к точке M , то её направляющие косинусы будут

$$\frac{x - \bar{x}}{R}, \frac{y - \bar{y}}{R}, \frac{z - \bar{z}}{R}$$

и, следовательно, проекция силы притяжения \vec{F} на оси координат выразится так:

$$F_x = \gamma m \frac{x - \bar{x}}{R^3}, \quad F_y = \gamma m \frac{y - \bar{y}}{R^3}, \quad F_z = \gamma m \frac{z - \bar{z}}{R^3}.$$

Рассмотрим элемент dS поверхности с массой ρdS , как бы сосредоточенной в одной из его точек $M(x, y, z)$. Оказываемое им на точку $A(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ притяжение будет иметь проекции на оси:

$$dF_x = \gamma \rho \frac{x - \bar{x}}{R^2} dS, \quad dF_y = \gamma \rho \frac{y - \bar{y}}{R^2} dS, \quad dF_z = \gamma \rho \frac{z - \bar{z}}{R^2} dS.$$

Используя метод определенного интеграла, получим следующие формулы для проекции силы \vec{F} притяжения простого слоя на оси:

$$F_x = \gamma \iint_S \rho \frac{x - \bar{x}}{R^3} dS, \quad F_y = \gamma \iint_S \rho \frac{y - \bar{y}}{R^3} dS, \quad F_z = \gamma \iint_S \rho \frac{z - \bar{z}}{R^3} dS.$$

Этим сила \vec{F} определена полностью как по величине, так и по направлению. Такие интегралы называют **поверхностными интегралами первого рода**. ►

Замечание 15.1. Если бы притягиваемая точка $A(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ сама лежала на поверхности S , то проекции притяжения на оси по-прежнему выражались бы интегралами, но на этот раз интегралы эти были бы несобственными, поскольку вблизи точки $A(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ подынтегральные функции все перестают быть ограниченными.

15.2 Понятие поверхностного интеграла первого рода

Определение 15.1. Поверхность называется гладкой, если в каждой ее точке существует касательная плоскость и при переходе от точки к точке положение этой плоскости меняется непрерывно.

Например, если поверхность S есть график функции $z = f(x, y)$, определенный в области G с кусочно-гладкой границей ∂G , то поверхность S будет гладкой, если существуют и непрерывны на \bar{G} частные производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$.

Пусть S – конечная гладкая поверхность с кусочно-гладкой границей ∂S в координатном пространстве \mathbb{R}^3 , на которой определена и ограничена функция. Берём любое разбиение τ_s поверхности S набором из l ($l \in \mathbb{N}$) кусочно-гладких кривых на n ($n \in \mathbb{N}$) частичных гладких поверхностей S_k ($k = \overline{1, n}$) без общих внутренних точек. Обозначим через ΔS_k площадь частичной поверхности S_k . Диаметром поверхности S_k будет $d_k = \sup_{M_k, N_k \in S_k} \{\rho(M_k, N_k)\}$ для любых $M_k, N_k \in S_k$. Наибольший из диаметров d_k обозначен через λ_τ . Произвольно выбираем точки $M_k \in S_k$. Составляем интегральную сумму

$$\sigma_\tau(f(x, y), M_k) = \sum_{k=1}^n f(M_k) \Delta S_k. \quad (15.1)$$

Определение 15.2. Если существует конечный предел

$$\lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} \sigma(f(x, y), M_k), \quad (15.2)$$

который не зависит от разбиения τ_s и выбора точек M_k , то он называется **поверхностным интегралом первого рода** от функции $f(M)$ ($M(x, y, z) \in S$) по поверхности S и обозначается

$$\iint_S f(M) dS. \quad (15.3)$$

15.3 Теорема о существовании и вычислении поверхностного интеграла первого рода

Теорема 15.1. Пусть функция $u = f(x, y, z)$ определена и непрерывна на замыкании \bar{S} гладкой поверхности S с кусочно-гладкой границей ∂S – графика функции $z = z(x, y)$, определенной в ограниченной области G с кусочно-гладкой границей ∂G . Тогда существует поверхностный интеграл первого рода $\iint_S f(M) dS$ и он вычисляется по формуле

$$\iint_S f(M) dS = \iint_G f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z'_x^2 + z'_y^2} dx dy. \quad (15.4)$$

◀ Повторяя предыдущие рассуждения и выкладки, получим интегральную сумму

$$\sigma_\tau(f(x, y), M_k) = \sum_{k=1}^n f(M_k) \Delta S_k, \quad (15.5)$$

где $M_k = M_k(x_k, y_k, z_k) \in S_k$.

Разбиению τ_S соответствует разбиение G на n ($n \in \mathbb{N}$) частичных областей G_k ($k = 1, n$). Так как поверхность S – гладкая, то сама функция $z = z(x, y)$ и существующие ее частные производные $z'_x(x, y)$ и $z'_y(x, y)$ непрерывны на \overline{G} . Тогда площадь поверхности S будет равна

$$S = \iint_G \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} dx dy, \quad (15.6)$$

а

$$\Delta S_k = \iint_{G_k} \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} dx dy. \quad (15.7)$$

Для двойного интеграла правой части (15.7) воспользуемся теоремой о среднем $(\mu(x, y) = \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} \in C(\overline{G}_k))$. Тогда

$$\Delta S_k = \sqrt{1 + z'^2_x(\bar{x}_k, \bar{y}_k) + z'^2_y(\bar{x}_k, \bar{y}_k)} \Delta G_k, \quad (15.8)$$

где $\overline{M}_k(\bar{x}_k, \bar{y}_k) \in \overline{G}_k$, а

$$\sigma_\tau(f(x, y), M_k) = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z(x_k, y_k)) \sqrt{1 + z'^2_x(\bar{x}_k, \bar{y}_k) + z'^2_y(\bar{x}_k, \bar{y}_k)} \Delta G_k. \quad (15.9)$$

Функция $\varphi(x, y) = \sqrt{1 + z'^2_x(x, y) + z'^2_y(x, y)} \in C(\overline{G})$ непрерывна на компакте \overline{G} , поэтому она будет и равномерно непрерывной на \overline{G} (теорема Кантора).

Пусть d_τ – максимальный из диаметров частичных областей G_k . Имеем:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_1 > 0 \ \forall \tau_s \ d_\tau < \delta_1 \ |\varphi(x_k, y_k) - \varphi(\bar{x}_k, \bar{y}_k)| < \varepsilon.$$

Кроме того, из $f(x, y, z) \in C(\overline{S})$ следует (теорема Вейерштрасса), что функция $f(x, y, z)$ ограничена на \overline{S} , то есть существует $K > 0$ ($K = \text{const}$), что для любых $(x, y, z) \in \overline{S}$ будет $|f(x, y, z)| \leq K$.

Обозначим через $\overline{\sigma}_\tau(f(x, y, z), M_k)$ аналог (15.9) с заменой \bar{x}_k на x_k и \bar{y}_k на y_k . В этом случае $\overline{\sigma}_\tau(f(x, y, z), M_k)$ будет интегральной суммой для двойного интеграла правой части (15.4). Оценим сверху

$$|\sigma_\tau(f(x, y, z), M_k) - \overline{\sigma}_\tau(f(x, y, z), M_k)| =$$

$$= \left| \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z(x_k, y_k)) (\varphi(\bar{x}_k, \bar{y}_k) - \varphi(x_k, y_k)) \Delta G_k \right| \leq K \varepsilon |G|, \quad (15.10)$$

где $|G|$ – площадь G .

Двойной интеграл (обозначим его через I) правой части (15.4) существует, так как подынтегральная функция непрерывна на компакте \overline{G} , а тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_2 \ \forall \tau_G \ d_\tau < \delta_2 \ |I - \overline{\sigma}_\tau| < \varepsilon. \quad (15.11)$$

При $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$ будут справедливы оценки (15.10) и (15.11). Тогда

$$|I - \sigma_\tau| < \varepsilon(1 + K |\sigma|), \quad (15.12)$$

причем оценка (15.12) будет при $\lambda_\tau < \delta$. ►

Пример 15.1. Вычислить поверхностный интеграл первого рода

$$\iint_S \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dS, \quad (15.13)$$

где S – конечная часть поверхности $z = 1 - x^2 - y^2$, отсечённая плоскостью $z = 0$.

◀ Построим рисунок поверхности S (рисунок 15.1). Вычисление проводим по фор-

Рисунок 15.1

муле (15.4). У нас $z(x, y) = 1 - x^2 - y^2$.

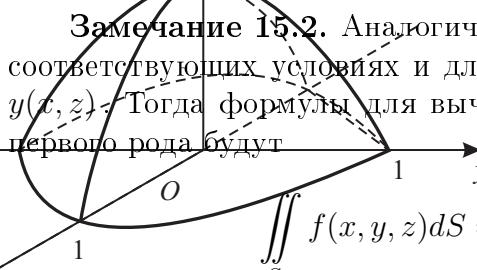
$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2x; \frac{\partial z}{\partial y} = -2y; \sqrt{1 + z'_x^2 + z'_y^2} = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2},$$

$$dS = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy.$$

$$\begin{aligned} I &= \iint_S \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} ds = \iint_G (1 + 4x^2 + 4y^2) dx dy = \\ &= \left[\begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{array} \middle| 0 \leq \varphi \leq 2\pi \mid 1 + 4x^2 + 4y^2 = 1 + 4r^2 \right] = \end{aligned}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1 + 4r^2) r dr = 2\pi \left(\frac{r^2}{2} + r^4 \right) \Big|_0^1 = 3\pi. \blacktriangleright$$

Замечание 15.2. Аналогичные утверждения теореме 15.1 будут справедливы при соответствующих условиях и для поверхностей, определяемых уравнениями $x(y, z)$ и $y(x, z)$. Тогда формулы для вычисления соответствующих поверхностных интегралов первого рода будут



$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_G f(x(y, z), y, z) \sqrt{1 + x_y'^2 + x_z'^2} dy dz \quad (15.14)$$

и

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_G f(x, y(x, z), z) \sqrt{1 + y_x'^2 + y_z'^2} dx dz. \quad (15.15)$$

Пример 15.2. Вычислить поверхностный интеграл первого рода

$$\iint_S (x + y + z) dS, \quad (15.16)$$

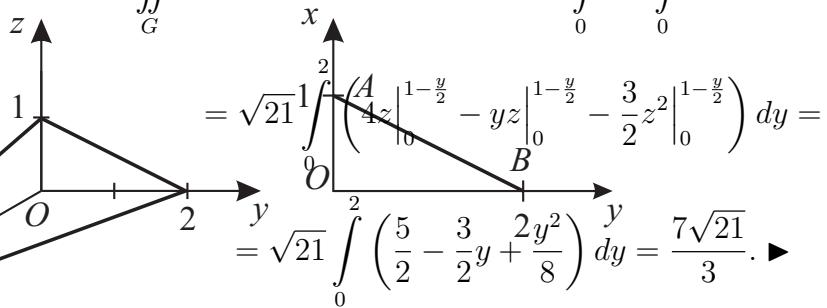
где поверхность S – часть плоскости $x + 2y + 4z = 4$, удовлетворяющая условиям $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

◀ Воспользуемся формулой (15.14). Выполним эскиз рисунка 15.2 нашей поверхности S и проекции поверхности S на плоскость xOy (область G). Это плоскость $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{1} = 1$.

Рисунок 15.2

$$I = \iint_S (x + y + z) dS = \iint_G (4 - 2y - 4z + y + z) \sqrt{21} dy dz =$$

$$= \iint_G (4 - y - 3z) \sqrt{21} dy dz = \sqrt{21} \int_0^2 dy \int_0^{1-\frac{y}{2}} (4 - y - 3z) dz =$$



Пример 15.3. Вычислить интеграл

$$\iint_S (xy + yz + zx) dS, \quad (15.17)$$

где

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 < 2ax, a > 0 \right\}.$$

◀ Поверхность S есть часть поверхности конуса $z^2 = x^2 + y^2$, лежащей выше плоскости $z = 0$ внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 2ax$. Изобразим эскиз рисунка поверхности и проекции поверхности S на плоскость xOy (рисунок 15.3):

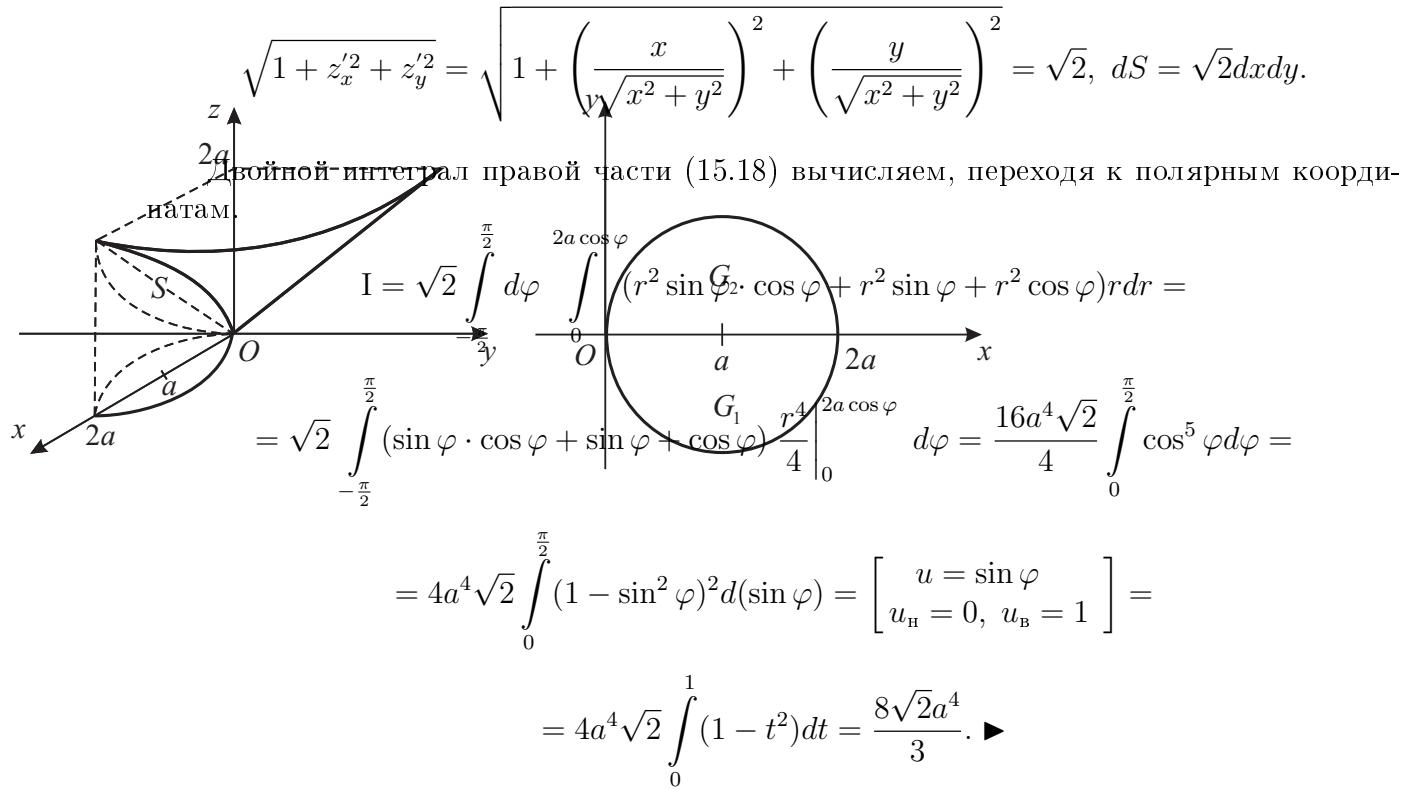
$$x^2 + y^2 - 2ax + a^2 = a^2, \quad (x - a)^2 + y^2 = a^2.$$

Рисунок 15.3

Находим поверхностный интеграл по формуле (15.4)

$$I = \iint_S (xy + yz + zx) dS = \sqrt{2} \iint_G \left(xy + y\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2}x \right) dx dy, \quad (15.18)$$

где



15.4 Вычисление поверхностного интеграла первого рода при параметрическом задании поверхности

Рассмотрим кусочно-гладкую поверхность S с кусочно-гладкой границей, заданной с помощью вектор-функции $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$. Возьмем кривую на поверхности S – границу $\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t))$. Введём координатные векторы

$$\vec{r}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \text{ и } \vec{r}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}. \quad (15.19)$$

Задание функций $u(t)$ и $v(t)$ на поверхности S порождает в каждой касательной плоскости к S невырожденный репер \vec{r}_u, \vec{r}_v (пару неколлинеарных векторов). Введем обозначения (через скалярное произведение).

$$g_{11} = (\vec{r}_u, \vec{r}_u); \quad g_{21} = (\vec{r}_u, \vec{r}_v); \quad g_{22} = (\vec{r}_v, \vec{r}_v). \quad (15.20)$$

Теорема 15.2. Пусть кусочно-гладкая поверхность S задана уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, на которой определена ограниченная функция $f(x, y, z)$. Так же существует двойной интеграл

$$\iint_G f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} dudv, \quad (15.21)$$

где G – ортогональная проекция поверхности S на плоскость в системе координат u, v . Тогда существует поверхностный интеграл

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_G f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} dudv. \quad (15.22)$$

Замечание 15.3. Если взять уравнение плоскости и задать его через декартовые координаты (параметры u и v), то в этом случае $\vec{r}_u = \vec{i}$, $\vec{r}_v = \vec{j}$. Тогда $g_{11} = (\vec{i}, \vec{i}) = 1$; $g_{12} = (\vec{i}, \vec{j}) = 0$; $g_{22} = (\vec{j}, \vec{j}) = 1$.

Пример 15.4. Вычислить поверхностный интеграл первого рода

$$\iint_S (xy + z) dS, \quad (15.23)$$

где $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = ax, y^2 + z^2 \leq x^2, z \geq 0\}$.

◀ Изобразим эскиз рисунка поверхности S и проекции поверхности S на плоскость xOy (рисунок 15.4).

Поверхность S находится внутри конуса. Используем параметрическое задание уравнения цилиндра Окружность $x^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$ задается параметрическими следующим образом $x = \frac{a}{2}(1 + \cos t)$, $y = \frac{a}{2}\sin t$:

$$x = \frac{a}{2}(1 + \cos t), \quad y = \frac{a}{2}\sin t, \quad z = h. \quad (15.24)$$

Для нахождения области значений точек $M(t, h)$ соответствующим соотношениям (15.24) воспользуемся неравенством $y^2 + z^2 \leq x^2$ и значениями x , y , z из (15.24)

$$\frac{a^2}{4}\sin^2 t + h^2 \leq \frac{a^2}{4}(1 + \cos t)^2; \quad h^2 \leq \frac{a^2}{4}(1 + 2\cos t + \cos^2 t) - (1 - \cos^2 t)\frac{2a^2}{4};$$

Рисунок 15.4

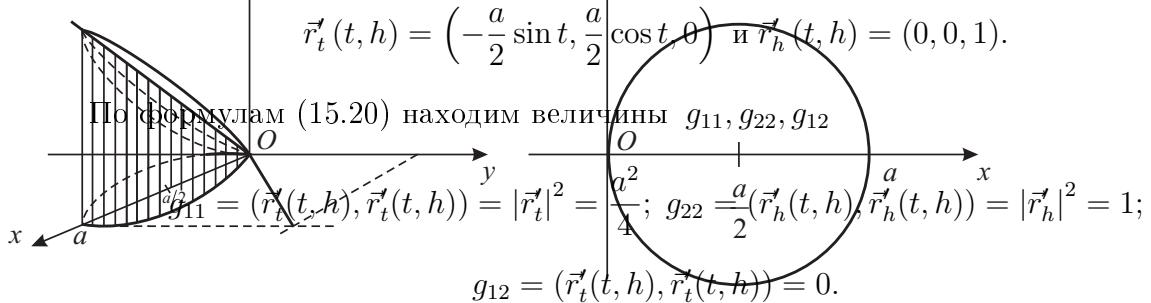
$$h^2 \leq \frac{a^2}{4}(2\cos t + 2\cos^2 t); h^2 \leq \frac{a^2}{4}2\cos t(1 + \cos t); h^2 \leq a^2 \cos t \cdot \cos^2 \frac{t}{2};$$

$$0 \leq h \leq a \cos \frac{t}{2} \sqrt{\cos t}.$$

Из последней оценки видно, что $\cos t \geq 0$, поэтому $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, что соответствует и рисунку 15.4. Поверхность задается параметрически с помощью вектор-функции

$$\vec{r}(t, h) = \left(\frac{a}{2}(1 + \cos t), \frac{a}{2} \sin t, h \right). \quad (15.25)$$

Найдем частные производные вектор-функции $\vec{r}(t, h)$.



Тогда

$$dS = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} dt dh = \frac{a}{2} dt dh. \quad (15.26)$$

Для вычисления поверхностного интеграла (15.23) воспользуемся формулой (15.22)

$$I = \iint_S (xy + z) dS = \iint_G \left(\frac{a}{2}(\cos t + 1) \frac{a}{2} \sin t + h \right) \frac{a}{2} dt dh =$$

$$= \frac{a}{2} \left(\iint_G \frac{a^2}{4} \sin t \cdot (\cos t + 1) dt dh + \iint_G h ddh \right) =$$

$$= \frac{a}{2} \left(\frac{a^2}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cdot (\cos t + 1) dt \int_0^{a \cos \frac{t}{2} \sqrt{\cos t}} dh + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt \int_0^{a \cos \frac{t}{2} \sqrt{\cos t}} h dh \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a}{2} \left(0 + \frac{1}{2} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \frac{t}{2} \cdot \cos t dt \right) = \frac{a^3}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t + \cos^2 t) dt = \\
&= \frac{a^3}{4} \left(\sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{a^3}{4} \left(1 + \frac{\pi}{4} \right). \blacksquare
\end{aligned}$$

15.5 Свойства поверхностного интеграла первого рода

Сформулируем некоторые свойства поверхностных интегралов первого рода (при их доказательстве используются определение поверхностного интеграла первого рода и теоремы 15.1 и 15.2 (докажите указанные свойства самостоятельно)).

Теорема 15.3 (достаточное условие интегрируемости). Непрерывная на кусочно-гладкой поверхности S функция $f(x, y, z)$ интегрируема на S .

Теорема 15.4 (свойство линейности). Если функции $f(x, y, z)$ и $g(x, y, z)$ интегрируемы на поверхности S и α, β – любые фиксированные действительные числа, то функция $\alpha f(x, y, z) + \beta g(x, y, z)$ интегрируема на поверхности S и справедлива формула

$$\iint_S (\alpha f(x, y, z) + \beta g(x, y, z)) dS = \alpha \iint_S f(x, y, z) dS + \beta \iint_S g(x, y, z) dS. \quad (15.27)$$

Определение 15.3. Поверхности S_1 и S_2 называются **непересекающимися**, если их общая часть состоит из не более чем конечного числа кусочно-гладких кривых.

Теорема 15.5 (свойство аддитивности). Если существуют интегралы $\iint_{S_1} f(x, y, z) dS$, $\iint_{S_2} f(x, y, z) dS$ и поверхности S_1 и S_2 не пересекаются, то существует интеграл функции $f(x, y, z)$ по их объединению $S = S_1 \cup S_2$ и справедлива формула

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{S_1} f(x, y, z) dS + \iint_{S_2} f(x, y, z) dS. \quad (15.28)$$

Теорема 15.6. Если $f(x, y, z) = 1$ на S – конечная кусочно-гладкая поверхность, то

$$\iint_S 1 dS = |S|, \quad (15.29)$$

где $|S|$ – площадь поверхности S .

Теорема 15.7 (об интегрируемости модуля). Если существует $\iint_S f(x, y, z) dS$, то существует интеграл функции $|f(x, y, z)|$ по S и справедлива оценка

$$\left| \iint_S f(x, y, z) dS \right| \leq \iint_S |f(x, y, z)| dS. \quad (15.30)$$

Теорема 15.8 (свойство монотонности). Если функции $f(x, y, z)$ и $g(x, y, z)$ интегрируемы по поверхности S и для любых точек $(x, y, z) \in S$ выполняется неравенство $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$, то справедливо неравенство

$$\iint_S f(x, y, z) dS \leq \iint_S g(x, y, z) dS. \quad (15.31)$$

Теорема 15.9 (теорема о среднем). Пусть функции $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$ интегрируемы по поверхности S и $g(x, y, z) \geq 0$ для любых точек $(x, y, z) \in S$, а $\inf_{M(x,y,z) \in S} f(x, y, z) = m$ и $\sup_{M(x,y,z) \in S} f(x, y, z) = M$. Тогда справедливо двойное неравенство

$$m \iint_S g(x, y, z) dS \leq \iint_S g(x, y, z) f(x, y, z) dS \leq M \iint_S g(x, y, z) dS, \quad (15.32)$$

в частности,

$$m |S| \leq \iint_S f(x, y, z) dS \leq M |S|. \quad (15.33)$$

Если, кроме того, функция $f(x, y, z)$ непрерывна на поверхности S , то существует точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, что справедливо равенство

$$\iint_S f(x, y, z) g(x, y, z) dS = f(M_0) \iint_S g(x, y, z) dS. \quad (15.34)$$

Замечание 15.4. Если функции $f(x, y, z)$ и $g(x, y, z)$ интегрируемы по поверхности S , то будет интегрируемой по поверхности S функция, равная произведению функций $f(x, y, z)$ и $g(x, y, z)$.

15.6 Некоторые приложения поверхностных интегралов первого рода

15.6.1 Масса материальной поверхности

Пусть поверхность S – конечная кусочно-гладкая материальная с поверхностью плотностью $\rho(x, y, z)$, где функция $\rho(x, y, z)$ непрерывна на \bar{S} (граница ∂S поверхности S также кусочно-гладкая).

Используя метод определенного интеграла, аналогичный, как и для одномерных и многомерных интегралов Римана, а также криволинейных интегралов первого рода, находим в нашем случае элемент массы

$$dm_s = \rho(x, y, z) dS. \quad (15.35)$$

Тогда масса нашей поверхности S вычисляется по формуле

$$m_s = \iint_S \rho(x, y, z) dS. \quad (15.36)$$

Пример 15.5. Найти массу части цилиндра $x^2 + z^2 = 2az$, лежащей внутри конуса $x^2 + y^2 = z^2$, если плотность $\rho(x, y, z) = |y|$.

◀ Изобразим эскиз рисунка нашей поверхности.

На рисунке 15.5 показана четверть указанной поверхности – это *AmOnK*. Массу поверхности S вычисляем по формуле

$$4 \iint_S y dS. \quad (15.37)$$

Рисунок 15.5

Цилиндрическую поверхность представим параметрически:

$$z = a(1 + \sin t), \quad x = a \cos t, \quad y = h, \quad \text{где } h \geq 0.$$

Верхнюю оценку для h находим из неравенства $y^2 \leq z^2 - x^2$, так наша цилиндрическая поверхность находится внутри конуса. Имеем:

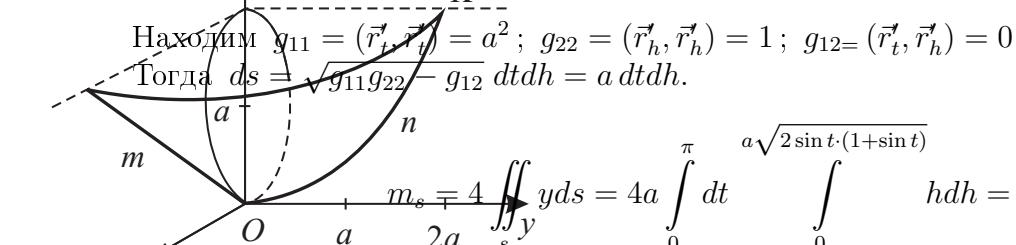
$$\begin{aligned} h^2 &\leq a^2(1 + \sin t)^2 - a^2 \cos^2 t = a^2(1 + 2 \sin t + \sin^2 t) - a^2 \cos^2 t = \\ &= 2a^2 \sin t \cdot (1 + \sin t), \quad h \leq a\sqrt{2 \sin t \cdot (1 + \sin t)}. \end{aligned}$$

Видно, что $\sin t \geq 0$, то есть $0 \leq t \leq \pi$, а $h \in [0, a\sqrt{2 \sin t \cdot (1 + \sin t)}]$.

Тогда вектор-функция, определяющая параметрическое задание поверхности S

$$\vec{r}(t, h) = (a \cos t, h, a(1 + \sin t)); \quad \vec{r}_t = (-a \sin t, 0, a \cos t); \quad \vec{r}_h = (0, 1, 0).$$

Найдем $g_{11} = (\vec{r}_t, \vec{r}_t) = a^2$; $g_{22} = (\vec{r}_h, \vec{r}_h) = 1$; $g_{12} = (\vec{r}_t, \vec{r}_h) = 0$.
Тогда $ds = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} dt dh = a dt dh$.



$$\begin{aligned} m_s &= 4 \iint_S y ds = 4a \int_0^\pi dt \int_0^{a\sqrt{2 \sin t \cdot (1 + \sin t)}} h dh = \\ &= 4a^3 \int_0^\pi \left(\sin t + \frac{1 - \cos 2t}{2} \right) dt = 4a^3 \left(-\cos t \Big|_0^\pi + \frac{\pi}{2} \right) = \\ &= 4a^3 \left(2 + \frac{\pi}{2} \right) = 2a^3(4 + \pi) \text{ (ед. массы).} \blacksquare \end{aligned}$$

15.6.2 Статические моменты конечной материальной кусочно-гладкой поверхности относительно координатных плоскостей

С помощью метода определенного интеграла можно получить формулы для нахождения статических моментов:

$$M_{xOy} = \iint_S z \rho(x, y, z) ds, \quad (15.38)$$

$$M_{yOz} = \iint_s x\rho(x, y, z) ds, \quad (15.39)$$

$$M_{xOz} = \iint_s y\rho(x, y, z) ds. \quad (15.40)$$

15.6.3 Центры масс материальной конечной кусочно-гладкой поверхности

Пусть точка $M(x_c, y_c, z_c) \in \mathbb{R}^3$ – центр тяжести материальной конечной кусочно-гладкой поверхности S с плотностью $\rho(x, y, z) \in C(S)$. Тогда

$$x_c = \frac{\iint_s x\rho(x, y, z) ds}{m_S}, \quad (15.41)$$

$$y_c = \frac{\iint_s y\rho(x, y, z) ds}{m_S}, \quad (15.42)$$

$$z_c = \frac{\iint_s z\rho(x, y, z) ds}{m_S}. \quad (15.43)$$

Пример 15.6. Найти координаты центра масс однородной сферы

$$(\rho = 1) \quad x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0.$$

◀ Изобразим эскиз поверхности (рисунок 15.6).

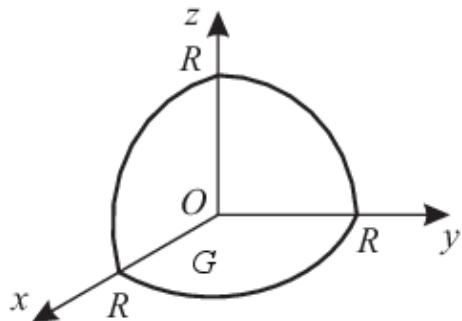


Рисунок 15.6

Из соображений симметрии и однородности поверхности S следует, что координаты искомого центра масс (точки $M(x_c, y_c, z_c)$) равны между собой, то есть $x_c = y_c = z_c$. Находим, например,

$$z_c = \frac{\iint_s z ds}{\iint_s ds}. \quad (15.44)$$

Видно, что масса поверхности S численно равна площади этой поверхности, то есть

$$m_s = \iint_s ds = \frac{\pi R^2}{2}. \quad (15.45)$$

Найдем поверхностный интеграл

$$\begin{aligned} \iint_s z ds &= \left[\begin{array}{l} z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \\ z'_x = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \\ z'_y = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \end{array} \right] \left| \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} \right. = \\ &= \left. \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2}} \right] = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} = \\ &= R \iint_G dx dy = R \frac{\pi R^2}{4} = \frac{\pi R^3}{4}. \end{aligned}$$

Тогда

$$z_c = \frac{\frac{\pi R^3}{4}}{\frac{\pi R^2}{2}} = \frac{R}{2}.$$

Ответ: $M\left(\frac{R}{2}, \frac{R}{2}, \frac{R}{2}\right)$. ►

15.6.4 Момент инерции конечной материальной кусочно-гладкой поверхности относительно координатных плоскостей и осей

Применяя метод определенного интеграла, получаем следующие искомые формулы для вычисления моментов инерции:

$$I_{yOz} = \iint_s x^2 \rho(x, y, z) ds, \quad (15.46)$$

$$I_{xOz} = \iint_s y^2 \rho(x, y, z) ds, \quad (15.47)$$

$$I_{xOy} = \iint_s z^2 \rho(x, y, z) ds, \quad (15.48)$$

$$I_{Ox} = \iint_s (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) ds, \quad (15.49)$$

$$I_{Oy} = \iint_s (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) ds, \quad (15.50)$$

$$I_{Oz} = \iint_s (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) ds. \quad (15.51)$$

Пример 15.7. Вычислить моменты инерции относительно координатных плоскостей однородной ($\rho = \text{const}$) поверхности $x+y+z=1$, расположенной в первом октанте.

Рисунок 15.7

◀ При условии однородности материальной поверхности и из соображений симметрии (рисунок 15.7) заключаем, что $I_{z=0} = I_{y=0} = I_{x=0}$.

$$\begin{aligned} I_{z=0} &= \iint_s z^2 ds = \left[\begin{array}{l} z = 1 - x - y, \\ z'_x = z'_y = -1 \end{array} \middle| \sqrt{z'^2_x + z'^2_y + 1} = \sqrt{3} \right] = \\ &= \iint_G (1 - x - y)^2 \sqrt{3} dx dy, \end{aligned}$$

где G – область-треугольник (рисунок 15.8).

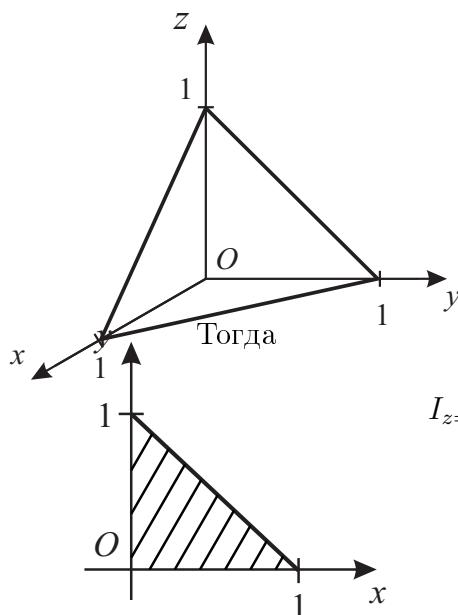


Рисунок 15.8

$$\begin{aligned} I_{z=0} &= -\sqrt{3} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1 - x - y)^2 d(1 - x - y) = \\ &= -\sqrt{3} \int_0^1 \frac{(1 - x - y)^3}{3} \Big|_0^{1-x} dx = \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{3} \int_0^1 (1 - x)^3 d(1 - x) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{(1 - x)^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{12}. \end{aligned}$$

Ответ: $I_{z=0} = I_{x=0} = I_{y=0} = \frac{\sqrt{3}}{12}$. ►

ЛЕКЦИЯ 16

Поверхностные интегралы второго рода

16.1 Двусторонние и односторонние поверхности в \mathbb{R}^3

Определение 16.1. Гладкая поверхность $S \subset \mathbb{R}^3$ называется **двусторонней**, если обход по любому замкнутому контуру $L \subset S$ (лежащему на поверхности S и не имеющему общих точек с ∂S – границей поверхности S) не меняет направление нормали к поверхности, в противном случае поверхность называется **односторонней**.

Примерами двусторонних поверхностей будут плоскость или любая ее часть, сфера, конус и многие другие поверхности. Односторонней поверхностью будет так называемый лист Мебиуса.

Если поверхность S двухсторонняя, то существуют две непрерывные вектор-функции $\vec{n}_1(M)$ и $\vec{n}_2(M)$ (и только), определенные на поверхности S и удовлетворяющие следующим условиям:

- 1) для любой точки $M(x, y, z) \in S$ $|\vec{n}_1(M)| = |\vec{n}_2(M)|$;
- 2) направления векторов $\vec{n}_1(M)$ и $\vec{n}_2(M)$ в любой точке $M \in S$ противоположны;
- 3) в любой точке $M \in S$ векторы $\vec{n}_1(M)$ и $\vec{n}_2(M)$ нормальны к поверхности S , то есть перпендикулярны к плоскости, касательной к поверхности в точке M .

Любая из вектор-функций $\vec{n}_1(M)$ и $\vec{n}_2(M)$ образует так называемое непрерывное поле нормалей на поверхности S . Выбор на поверхности S определенной из функций $\vec{n}_1(M)$ и $\vec{n}_2(M)$ (определенного непрерывного поля нормалей) называется **выбором стороны поверхности** S . Для односторонней поверхности нельзя построить непрерывное поле нормалей этой поверхности.

Пусть двусторонняя поверхность S есть график функции $z = f(x, y)$. В этом случае верхней стороной этой поверхности считаем ту ее сторону, что $\cos(\vec{n}, Oz) > 0$, а нижний – $\cos(\vec{n}, Oz) < 0$, где \vec{n} – единичный вектор нормали к поверхности S .

Пусть двусторонняя поверхность S – замкнутая (сфера, эллипсоид и т.д.). Если вектора непрерывного поля нормалей к поверхности S направлены внутрь объема, ограниченного этой поверхностью, то соответствующая сторона поверхности называется **внутренней**, в противном случае – **внешней** стороной поверхности.

Определение 16.2. Двусторонняя поверхность называется **ориентируемой**, а выбор определенной стороны поверхности – **ориентацией**. Односторонние поверхности называются **неориентируемыми**.

Далее рассмотрим такое понятие, как ориентация границы ∂S двусторонней поверхности S .

Пусть L – контур, входящий в состав ∂S – границы двусторонней поверхности S ; \vec{n} – единичный вектор нормали к поверхности S в точке $M \in L$; \vec{v} – вектор, нормальный к L и к \vec{n} , направим вектор \vec{v} в ту сторону, где расположена поверхность S . Положительное направление обхода контура L указывает вектор $[\vec{v}, \vec{n}]$ (векторное произведение вектора \vec{v} на вектор \vec{n}). Противоположное направление отрицательное (рисунок 16.1).

Если взята правая система координат и L – любой замкнутый контур (граница двусторонней поверхности S), то направление обхода контура L , согласованное с ориентацией поверхности S , считаем то, при котором поверхность S остается слева.

Рисунок 16.1

16.2 Задача о количестве жидкости, протекающей через замкнутую поверхность

Найдем количество жидкости Π , протекающей через некоторую ориентированную поверхность S (двустороннюю гладкую) за единицу времени. Плотность жидкости $\rho(x, y, z) = 1$ и скорость ее протекания есть вектор-функция $\vec{v}(P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ в точке $M(x, y, z) \in S$.

◀ Для наглядности рассмотрим рисунок 16.2.

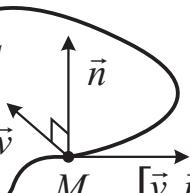


Рисунок 16.2

Обозначим через $\vec{n} = \cos(\vec{n}, O_x)\vec{i} + \cos(\vec{n}, O_y)\vec{j} + \cos(\vec{n}, O_z)\vec{k}$ – единичный вектор нормали к поверхности S в текущей точке $M \in S$. А через dS обозначим площадь бесконечно малого элемента поверхности S , содержащего точку $M(x, y, z)$. Найдем проекции скорости \vec{v} на направление вектора \vec{n} :

$$\begin{aligned} \text{Пр}_{\vec{n}}\vec{v} &= |\vec{v}| \cos(\vec{n}, \vec{v}) = (\vec{v}, \vec{n}) = |\vec{v}| \cdot |\vec{n}| \cos(\vec{n}, \vec{v}) = \\ &= P(x, y, z) \cos(\vec{n}, O_x) + Q(x, y, z) \cos(\vec{n}, O_y) + R(x, y, z) \cos(\vec{n}, O_z). \end{aligned} \quad (16.1)$$

Тогда количество жидкости, протекающей за единицу времени через элемент площади dS :

$$d\Pi = \text{Пр}_{\vec{n}}\vec{v} \cdot dS \cdot \rho = (\vec{v}, \vec{n}) \rho dS, \quad (16.2)$$

где $d\Pi$ – элемент потока для вектор-функции $\vec{v}(P, Q, R)$. Используя метод интеграла, получим формулу для вычисления всего потока:

$$\begin{aligned} &\text{для } dS \text{ для } \vec{v} \text{ для } \vec{n} \text{ для } \Pi = \iint_S (\vec{v}, \vec{n}) dS = \\ &= \iint_S (P(x, y, z) \cos(\vec{n}, O_x) + Q(x, y, z) \cos(\vec{n}, O_y) + R(x, y, z) \cos(\vec{n}, O_z)) dS = \end{aligned}$$

$$= \iint_S f(x, y, z) dS. \quad (16.3)$$

Интеграл (16.3) есть поверхностный интеграл первого рода с той особенностью, что подынтегральная функция

$$f(x, y, z) = P \cos(\vec{n}, Ox) + Q \cos(\vec{n}, Oy) + R \cos(\vec{n}, Oz) \quad (16.4)$$

зависит не только от вектора-функции $\vec{v}(P, Q, R)$, но и от направления нормали к поверхности S . Такие интегралы называют **поверхностными интегралами второго рода**. ►

16.3 Понятие поверхностного интеграла второго рода

Отвлечёмся от конкретного содержания предыдущей задачи. Пусть дана двусторонняя поверхность S . Выберем одну из ее сторон, то есть одну из двух непрерывных полей нормалей $\vec{n}(M)$, где M – текущая точка поверхности S . Пусть вектор-функция $\vec{F}(P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ определена на поверхности S (на выбранной стороне поверхности S). Обозначим через

$$\text{Пр}_{\vec{n}} \vec{F} = P \cos(\vec{n}, Ox) + Q \cos(\vec{n}, Oy) + R \cos(\vec{n}, Oz) \quad (16.5)$$

проекцию вектора \vec{F} на направление нормали $\vec{n}(M)$, где $\cos(\vec{n}, Ox)$, $\cos(\vec{n}, Oy)$, $\cos(\vec{n}, Oz)$ – направляющие косинусы (координаты единичного вектора нормали $\vec{n}(M)$ по соответствующим координатным осям). Кроме того, учтем, что $\cos(\vec{n}, Ox)ds$, $\cos(\vec{n}, Oy)ds$, $\cos(\vec{n}, Oz)ds$ – это проекции элемента площади dS поверхности S на соответствующие координатные плоскости, то есть это будет соответственно $dydz$, $dzdx$, $dxdy$. Тогда поверхностный интеграл (16.3) примет вид

$$\iint_S P dydz + Q dzdx + R dxdy \quad (16.6)$$

и будет называться **полным поверхностным интегралом второго рода** от вектор-функции $\vec{F}(P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ по выбранной стороне поверхности S . Если выбранную сторону поверхности S поменять, то знак значения интеграла (16.6) изменится на противоположный.

Замечание 16.1. Поверхностные интегралы второго рода можно определить и другим способом, а именно – через интегральные суммы. Не теряя общности, рассмотрим понятие неполного поверхностного интеграла, используя метод интегральных сумм.

Пусть функция $u = f(x, y, z)$ определена на гладкой двусторонней конечной поверхности S (на определенной ее стороне) с кусочно-гладкой границей ∂S . Пусть также проекцией (однозначной) на плоскость xOy поверхности S (в этом случае график некоторой функции $z = z(x, y)$) будет область G с кусочно-гладкой границей ∂G .

Возьмем любое разбиение τ_S поверхности S на n ($n \in \mathbb{N}$) частичных поверхностей S_k ($k = 1, n$) без общих внутренних точек системой из m ($m \in \mathbb{N}$) кусочно-гладких кривых L_i ($i = 1, m$). Этому разбиению соответствует разбиение области G на n частичных областей G_k ($k = \overline{1, n}$) без общих внутренних точек (G_k – ортогональные

проекции частичных поверхностей S_k на плоскость $z = 0$). Произвольно выбираем точки $M_k(x_k, y_k, z_k) \in \bar{S}_k$. Составляем интегральную сумму

$$\sigma_\tau(f(x, y, z), M_k) = \sum_{k=1}^n f(M_k) \Delta S_k, \quad (16.7)$$

где ΔS_k – площадь частичной поверхности S_k . Обозначим через λ_τ максимальный из диаметров d_k частичных поверхностей S_k $\left(d_k = \sup_{A_k, B_k \in S_k} \rho(A_k, B_k)\right)$.

Определение 16.3. Если существует конечный предел

$$\lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} \sigma_\tau(f(x, y, z), M_k) \quad (16.8)$$

и он не зависит от разбиения τ_S и выбора точек $M_k \in \bar{S}_k$, то его называют **неполным поверхностным интегралом** функции $f(x, y, z)$ по выбранной стороне поверхности S и обозначают

$$\iint_S f(x, y, z) dS. \quad (16.9)$$

16.4 Существование и вычисление поверхностного интеграла второго рода

Теорема 16.1. Пусть функция $u = f(x, y, z)$ определена и непрерывна на замыкании гладкой двусторонней поверхности S – графика функции $z = z(x, y)$, которая определена в области G с кусочно-гладкой границей ∂G . Тогда существует поверхностный интеграл второго рода, равный двойному, то есть

$$\iint_S f(x, y, z) dx dy = \iint_G f(x, y, z(x, y)) dx dy \quad (16.10)$$

по верхней стороне поверхности S и

$$\iint_S f(x, y, z) dx dy = - \iint_G f(x, y, z(x, y)) dx dy \quad (16.11)$$

по нижней стороне поверхности S .

◀ Поверхностный интеграл второго рода правой части (16.10) можно представить следующим образом

$$\iint_S f(x, y, z) dx dy = \iint_S f(x, y, z) \cos(\vec{n}, Oz) ds. \quad (16.12)$$

Правая часть (16.12) есть поверхностный интеграл первого рода. По теореме 15.1 (поверхностные интегралы первого рода)

$$\begin{aligned} \iint_S f(x, y, z) \cos(\vec{n}, Oz) ds &= \iint_G f(x, y, z(x, y)) \cos(\vec{n}, Oz) \frac{dx dy}{\cos(\vec{n}, Oz)} = \\ &= \iint_G f(x, y, z(x, y)) dx dy \end{aligned}$$

($dx dy$ есть проекция dS на плоскость $z = 0$, т.е. $dx dy = \cos(\vec{n}, Oz) ds$).

Аналогично будет справедлива и формула (16.11). ►

Замечание 16.2. При соответствующих условиях, аналогичных условиям теоремы 16.1, будут справедливы следующие формулы (для верхней стороны поверхности)

$$\iint_S f(x, y, z) dxdz = \iint_G (x, y(x, z), z) dxdz, \quad (16.13)$$

$$\iint_S f(x, y, z) dydz = \iint_G f(x(y, z), y, z) dydz \quad (16.14)$$

(в случае нижней стороны поверхности в правых частях (16.13) и (16.14) перед знаком интеграла будет знак «минус»).

Пример 16.1. Вычислить поверхностный интеграл второго рода

$$\iint_S (ax^2 + by^2 + bz^2) dydz, \quad (16.15)$$

где S – внутренняя сторона (нижняя) части полусферы

$$x = \sqrt{R^2 - y^2 - z^2},$$

вырезанной конусом

$$x = \sqrt{y^2 + z^2}.$$

◀ Изобразим эскиз поверхности (рисунок 16.3).

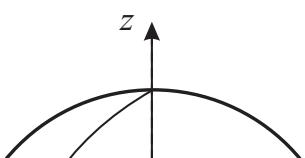
Рисунок 16.3

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} x = \sqrt{R^2 - y^2 - z^2}, \\ x = \sqrt{y^2 + z^2}, \end{cases}$$

находим границу поверхности S на плоскость $x = 0$. Это будет окружность

$$y^2 + z^2 = \left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^2.$$



Так как $\cos(\vec{n}, \hat{Ox}) < 0$ (угол между единичным вектором нормали \vec{n} и осью Ox – тупой), то

$$\iint_S (ax^2 + by^2 + bz^2) dy dz = - \iint_G (a(R^2 - y^2 - z^2) + by^2 + bz^2) dy dz = I.$$

В двойном интеграле I переходим к полярным координатам

$$I = - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R/\sqrt{2}} r(aR^2 + (b-a)r^2) dr = \frac{\pi R^4}{8}(3a+b). \blacktriangleright$$

Пример 16.2. Вычислить поток векторного поля

$$\vec{F} = (x - 2z)\vec{i} + (x + 3y + z)\vec{j} + (5x + y)\vec{k}$$

через сторону треугольника σ , вырезанного из плоскости (P) $x + y + z - 1 = 0$ координатными плоскостями, в том направлении нормали к плоскости, которая образует с осью Oz острый угол.

◀ Отвлекаясь от конкретного содержания задачи о вычислении потока жидкости через поверхность, но используя формулу (16.3), по которой этой поток вычисляется (заменяем в указанной формуле вектор-функцию \vec{v} на \vec{F}),

$$\Pi = \iint_S (\vec{F}, \vec{n}) dS,$$

мы приходим к абстрактному понятию потока для вектор-функции. По этой формуле мы и будем вычислять искомый поток.

1. Вычисление потока методом проектирования на одну из координатных плоскостей

Уравнение поверхности S – это $P(x, y, z) = 0$, конкретно:

$$x + y + z - 1 = 0.$$

Градиентом скалярного поля P будет вектор:

$$\overrightarrow{\text{grad}} P = (P'_x, P'_y, P'_z) = (1, 1, 1).$$

Градиент есть вектор, перпендикулярный поверхности $u = P(x, y, z)$. Зная это, найдем единичный вектор \vec{n} нормали к нашей поверхности, удовлетворяющий условию $\cos(\vec{n}, Oz) > 0$.

$$\vec{n} = \pm \frac{P'_x \vec{i} + P'_y \vec{j} + P'_z \vec{k}}{|\text{grad} P|} = \pm \frac{\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{3}}. \quad (16.16)$$

Из формулы (16.16) и условия $\cos(\vec{n}, Oz) > 0$ находим, что

$$\vec{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

Вектор-функция

$$\vec{F} = (x - 2z, x + 3y + z, 5x + y), \cos(\vec{n}, Oz) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Находим скалярное произведение (\vec{F}, \vec{n}) при условии, что поверхность $S = P$ проектируется на плоскость $z = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} (\vec{F}, \vec{n}) &= ((x - 2z) + (x + 3y + z) + (5x + y)) \frac{1}{\sqrt{3}} \Big|_{z=1-x-y} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} (7x + 4y - z) \Big|_{z=1-x-y} = \frac{1}{\sqrt{3}} (8x + 5y - 1). \end{aligned} \quad (16.17)$$

Кроме того, знаем, что $dS = \frac{dxdy}{\cos(\vec{n}, Oz)} = \sqrt{3}dxdy$. Тогда

$$\Pi = \iint_S (\vec{F}, \vec{n}) dS = \iint_G (8x + 5y - 1) dxdy. \quad (16.18)$$

Изобразим на рисунке область интегрирования G (рисунок 16.4) для двойного интеграла (правая часть (16.18)).

Рисунок 16.4

$$\Pi = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (8x + 5y - 1) dy = \frac{5}{3}. \blacktriangleright$$

2. Вычисление потока векторного поля методом проектирования на три координатные плоскости

Рассмотрим предыдущую задачу. Наша поверхность образует острые углы всеми координатными осями. Тогда (теорема 16.1)

$$\begin{aligned} \Pi &= \iint_{(S)} (\vec{F}, \vec{n}) dS = \iint_S P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dx dy = \\ &= \iint_{G_{yOz}} P(x(y, z), y, z) dy dz + \iint_{G_{xOz}} Q(x, y(x, z), z) dx dz + \end{aligned}$$

Рисунок 16.5

$$+ \iint_{G_{xOy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy = \begin{cases} x + y + z - 1 = 0, \\ x(y, z) = 1 - y - z, \\ z(x, y) = 1 - x - y \end{cases}$$

Изобразим эскизы рисунков областей интегрирования для двойных интегралов (рисунок 16.5).

$$\begin{aligned} \Pi &= \iint_{G_{yOz}} (1 - y - 3z) dy dz + \iint_{G_{xOz}} (3 - 2x - 2z) dx dz + \iint_{G_{xOy}} (5x + y) dx dy = \\ &= \int_0^1 dy \int_0^{1-y} (1 - y - 3z) dz + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (3 - 2x - 2z) dz + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (5x + y) dy = \frac{5}{3}. \blacksquare \end{aligned}$$

16.5 О существовании и вычислении поверхностного интеграла второго рода по поверхности, заданной параметрически

Теорема 16.2. Пусть гладкая двусторонняя поверхность S задана параметрическим уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$.

Вектор-функция $\vec{F} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ определена и непрерывна на \bar{S} . Пусть также G – область изменения параметров u и v (граница ∂G – кусочно-гладкая), а q_{11} , q_{22} и q_{12} – коэффициенты первой квадратичной формы поверхности, то есть $q_{11} = (\vec{r}'_u, \vec{r}'_u)$, $q_{22} = (\vec{r}'_v, \vec{r}'_v)$ и $q_{12} = (\vec{r}'_u, \vec{r}'_v)$.

Тогда поверхностный интеграл второго рода

$$I = \iint_S P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dx dy$$

$$= \iint_G (P \cos(\vec{n}, O_x) + Q \cos(\vec{n}, O_y) + R \cos(\vec{n}, O_z)) \sqrt{q_{11}q_{22} - q_{12}^2} du dv. \quad (16.19)$$

Замечание 16.3. Если ввести обозначение

$$A = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad (16.20)$$

то

$$\sqrt{q_{11}q_{22} - q_{12}^2} = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \quad (16.21)$$

и

$$\begin{aligned} \cos(\vec{n}, Ox) &= \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \quad \cos(\vec{n}, Oy) = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \\ \cos(\vec{n}, Oz) &= \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \end{aligned} \quad (16.22)$$

Тогда формула (16.19) примет вид

$$\begin{aligned} \iint_S P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dx dy &= \\ &= \iint_G (PA + QB + RC) dudv, \end{aligned} \quad (16.23)$$

где

$$P = P(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \quad (16.24)$$

и аналогично Q и R .

Пример 16.3. Вычислить интеграл

$$\iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy, \quad (16.25)$$

где S – нижняя сторона части конической поверхности $x^2 + y^2 = z^2$, $0 < z \leq H$.

◀ Изобразим эскиз рисунка поверхности S (четверть поверхности, рисунок 16.6).

Рисунок 16.6

Зададим поверхность параметрически:

$$\vec{r}(u, v) = (v \cos u, v \sin u, v),$$

где $0 \leq u \leq 2\pi$, $0 < v \leq H$. По формулам (16.20) находим

$$A = \begin{vmatrix} v \cos u & 0 \\ \sin u & 1 \end{vmatrix} = v \cos u; \quad B = \begin{vmatrix} 0 & -v \sin u \\ 1 & \cos u \end{vmatrix} = v \sin u;$$

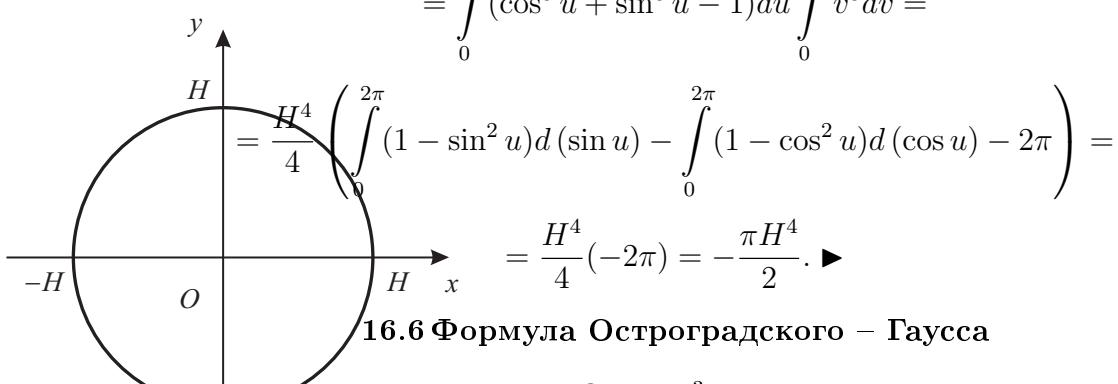


$$C = \begin{vmatrix} -v \sin u & v \cos u \\ \cos u & \sin u \end{vmatrix} = -v. \quad (16.26)$$

Изобразим эскиз (рисунок 16.7) области интегрирования G для двойного интеграла формулы (правой ее части) (16.23)

Рисунок 16.7

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy = \\
 &= \iint_G (v^2 \cos^2 u \cdot v \cos u + v^2 \sin^2 u \cdot v \sin u - v^3) dudv = \\
 &= \int_0^{2\pi} (\cos^3 u + \sin^3 u - 1) du \int_0^H v^3 dv = \\
 &= \frac{H^4}{4} \left(\int_0^{2\pi} (1 - \sin^2 u) d(\sin u) - \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2 u) d(\cos u) - 2\pi \right) = \\
 &= \frac{H^4}{4} (-2\pi) = -\frac{\pi H^4}{2}. \blacktriangleright
 \end{aligned}$$



16.6 Формула Остроградского – Гаусса

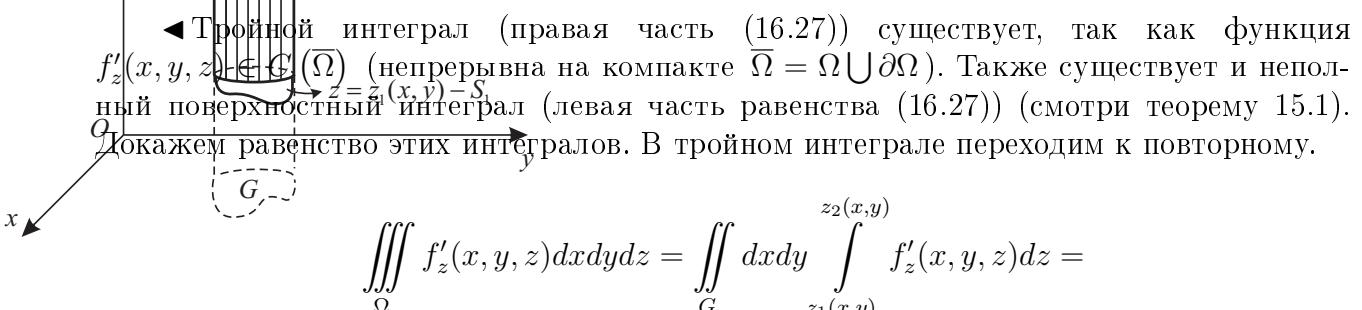
Определение 16.4. Область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ называем «*z-цилиндрической*», если она сверху и снизу ограничена кусочно-гладкими поверхностями S_2 (график функции $z = z_2(x, y)$) и S_1 (график функции $z = z_1(x, y)$) соответственно с кусочно-гладкими границами ∂S_2 и ∂S_1 , и боковой поверхности области Ω есть цилиндрическая поверхность с образующими, параллельными оси Oz . Проекция Ω на плоскость $z = 0$ есть плоская область G с кусочно-гладкой границей ∂G .

Изобразим эскиз рисунка области Ω (рисунок 16.8).

Рисунок 16.8

Теорема 16.3. Пусть функция $u = f(x, y, z)$ вместе со своей существующей частной производной $\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z}$ определена и непрерывна на $\bar{\Omega}$. Тогда справедливо равенство

$$\iint_{S=\partial\Omega} f(x, y, z) dxdy = \iiint_{\Omega} f'_z(x, y, z) dxdydz. \quad (16.27)$$



$$\begin{aligned}
 \iiint_{\Omega} f'_z(x, y, z) dxdydz &= \iint_G dxdy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f'_z(x, y, z) dz = \\
 &= \iint_G f(x, y, z)|_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} dxdy = \iint_G (f(x, y, z_2(x, y)) - f(x, y, z_1(x, y))) dxdy = \\
 &= \iint_{S_2} f(x, y, z) ds + \iint_{S_1} f(x, y, z) ds + \iint_{S_3} f(x, y, z) ds = \\
 &= \iint_{S=\partial\Omega} f(x, y, z) dS,
 \end{aligned} \quad (16.28)$$

где S_3 – цилиндрическая часть поверхности $S = \partial\Omega$ области Ω . Поверхностный интеграл функции $f(x, y, z)$ по S_3 равен нулю, так как площадь проекции S_3 ($\Pr_{z=0} S_3 = \partial G$) равна нулю. ►

Замечание 16.4. Аналогичные теоремы будут справедливы, если область Ω будет « x -цилиндрической» или « y -цилиндрической». Тогда соответствующие формулы типа (16.27) для этих областей соответственно будут

$$\iint_S f(x, y, z) dxdy = \iiint_{\Omega} f'_x(x, y, z) dxdydz \quad (16.29)$$

и

$$\iint_S f(x, y, z) dx dy = \iiint_{\Omega} f'_y(x, y, z) dx dy dz. \quad (16.30)$$

Определение 16.5. Область Ω с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$ называется **простейшей**, если она представляет собой объединение конечного числа частичных областей без общих внутренних точек с кусочно-гладкими границами как « z -областей», также « x -областей» и « y -областей». Простейшей областью будет любой многогранник (имеет конечное число граней – многоугольников).

Можно доказать, что любая область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$ аппроксимируется (приближается) многогранными областями со сколь угодно высокой точностью. Тогда будет справедлива следующая теорема.

Теорема 16.4. Пусть вектор-функция

$$\vec{F} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

и существующие частные производные $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$ и $\frac{\partial R}{\partial z}$ определены и непрерывны на замыкании области $\Omega = \mathbb{R}^3$ с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega = S$. Тогда справедлива полная формула Остроградского – Гаусса

$$\begin{aligned} & \iint_S P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy = \\ & = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz \end{aligned} \quad (16.31)$$

16.7 Формула Остроградского – Гаусса в векторной форме

Определение 16.6. Дивергенцией векторного поля

$$\vec{F} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)),$$

определенного на замыкание области $\Omega = \mathbb{R}^3$ с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega = S$, где функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ и существующие их частные производные непрерывны на $\bar{\Omega}$, называется скаляр, обозначаемый $\operatorname{div} \vec{F}$ и определяемый равенством

$$\operatorname{div} \vec{F} = \lim_{V_{\Omega} \rightarrow \infty} \frac{\iint_S (\vec{F}, \vec{n}) ds}{V_{\Omega}}, \quad (16.32)$$

где V_{Ω} – объем области Ω ; $\iint_S (\vec{F}, \vec{n}) ds$ – поток вектор-функции \vec{F} через кусочно-гладкую границу $\partial\Omega = S$; $\vec{n} = (\cos(\vec{n}, Ox), \cos(\vec{n}, Oy), \cos(\vec{n}, Oz))$ – единичный вектор нормали к внешней стороне поверхности S .

Замечание 16.5. При указанных выше условиях

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \quad (16.33)$$

Укажем физический смысл дивергенции для некоторых векторных полей.

1. Пусть \vec{F} – поле скоростей несжимаемой жидкости, протекающей в некоторой области из \mathbb{R}^3 . Тогда тройной интеграл $\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz$ есть суммарная мощность источников, которые расположены в области Ω , а $\operatorname{div} \vec{F}$ есть плотность источников (мощность на единицу объёма). Если в этом случае нет ни стоков, ни истоков, то $\operatorname{div} \vec{F} = 0$, а векторное поле называется соленоидальным (трубчатым).

2. Дивергенция гравитационного поля в области Ω распределённых масс равна объёмной плотности $\rho(x, y, z)$, умноженной на 4π , этого распределения.

3. Пусть в области Ω задано электростатическое поле $\vec{F} = (P, Q, R)$, тогда $\operatorname{div} \vec{F}$ есть плотность зарядов поля, умноженная на 4π (теорема Гаусса).

Запишем формулу Остроградского – Гаусса в векторной форме (условия теоремы 16.4 должны соблюдаться):

$$\iint_{S=\partial\Omega} (\vec{F}, \vec{n}) ds = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz. \quad (16.34)$$

Пример 16.4. С помощью формулы Остроградского – Гаусса вычислить поверхностный интеграл $I = \iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$, где S – внешняя сторона границы куба $\bar{\Omega} = [0, a] \times [0, a] \times [0, a]$, $a > 0$.

◀ Для вычисления поверхностного интеграла используем формулу (16.31). У нас $P(x, y, z) = x^2$; $Q(x, y, z) = y^2$; $R(x, y, z) = z^2$. Тогда $\frac{\partial P}{\partial x} = 2x$; $\frac{\partial Q}{\partial y} = 2y$; $\frac{\partial R}{\partial z} = 2z$.

$$I = \iiint_{\Omega} (2x + 2y + 2z) dx dy dz = \int_0^a dz \int_0^a dy \int_0^a (2x + 2y + 2z) dx = 3a^4.$$

Ответ: $I = 3a^4$. ►

Пример 16.5. Вычислить поток векторного поля $\vec{a} = x\vec{i} + 2y\vec{j} - z\vec{k}$ через замкнутую поверхность S : $\begin{cases} z^2 = x^2 + y^2 \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}$ непосредственно и по формуле Остроградского – Гаусса.

◀ Изображаем эскиз рисунка (четверть части) поверхности S в первом октанте и области интегрирования (рисунок 16.9).

Сначала найдем поток векторного поля непосредственным вычислением.

1. Поток через S_1 внутреннюю поверхность конуса $z^2 = x^2 + y^2$.

Поток будем вычислять методом проектирования на одну плоскость $z = 0$ (задача 16.2) $F(x, y, z) = 0$, где $F(x, y, z) = z^2 - x^2 - y^2$ – скалярное поле. Находим $\operatorname{grad} \vec{F} = (-2x, -2y + 2z)$. Очевидно, что единичный вектор \vec{n} нормали образует с осью Oz острый угол. Вектор \vec{n} определяем из равенства:

$$\vec{n} = \pm \frac{\operatorname{grad} \vec{F}}{|\operatorname{grad} \vec{F}|} = \pm \frac{-2x\vec{i} - 2y\vec{j} + 2z\vec{k}}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \pm \frac{-x\vec{i} - y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \quad (16.35)$$

Из (16.35) и $\cos(\vec{n}, Oz)$ получаем:

$$\vec{n} = \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right). \quad (16.36)$$

Рисунок 16.9

Тогда

$$(\vec{a}, \vec{n}) = \frac{-x^2 - 2y^2 - z^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \text{ и } dS = \frac{dxdy}{\cos(\vec{n}, Oz)} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{z} dxdy. \quad (16.37)$$

Вычислим искомую часть потока через поверхность S_1 ($\Pr_{z=0} S_1 = G$).

$$\Pi_1 = \iint_{S_1} (\vec{a}, \vec{n}) dS = \iint_G (-x^2 - 2y^2 - (x^2 + y^2)) \frac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2}} =$$

$$\iint_G \frac{-2x^2 - 3y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} dxdy. \quad (16.38)$$

Для вычисления интеграла (16.38) (правая часть) переходим к полярным координатам.

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= - \iint_D \frac{2r^2 \cos^2 \varphi + 3r^2 \sin^2 \varphi}{r} r dr d\varphi = - \iint_D \left(2 + \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \right) r^2 dr d\varphi = \\ &= - \int_0^{2\pi} \left(\frac{5}{2} - \frac{\cos 2\varphi}{2} \right) d\varphi \int_0^1 r^2 dr = - \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{2} \cdot 2\pi = - \frac{5}{3}\pi. \end{aligned}$$

2. Поток через S_2 – внешнюю поверхность параболы $z = x^2 + y^2$.

Аналогично предыдущему имеем:

$$F(x, y, z) = z - x^2 - y^2, F'_x(x, y, z) = -2x, F'_y(x, y, z) = -2y, F'_z(x, y, z) = 1,$$

$$\cos(\vec{n}, Oz) < 0, \vec{n} = \pm \frac{2x\vec{i} + 2y\vec{j} - 1 \cdot \vec{k}}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}; \vec{n} = \frac{(2x, 2y, -1)}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}};$$

$$dS = \frac{dxdy}{\cos(\vec{n}, Oz)} = -\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dxdy.$$

$$\begin{aligned}
\Pi_2 &= \iint_{S_2} (\vec{a}, \vec{n}) dS = - \iint_G -(2x^2 + 4y^2 + x^2 + y^2) dx dy = \iint_G (3x^2 + 5y^2) dx dy = \\
&= \iint_D (3r^2 \cos^2 \varphi + 5r^2 \sin^2 \varphi) r d\varphi dr = \\
&= \int_0^{2\pi} (4 - \cos 2\varphi) d\varphi \int_0^1 r^3 dr = 4 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{4} = 2\pi.
\end{aligned}$$

Тогда весь поток $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = -\frac{5}{3}\pi + 2\pi = \frac{\pi}{3}$.

Теперь вычислим поток с помощью формулы Остроградского – Гаусса.

Имеем векторное поле $\vec{a} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$, где $P = x$, $Q = 2y$, $R = -z$.

Тогда

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = 2, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = -1, \quad \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 2.$$

В силу симметрии тела относительно оси Oz ,

$$\begin{aligned}
\Pi &= \iiint_{\Omega} 2dxdydz = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \int_0^1 rdr \int_{r^2}^r dz = \\
&= 4\pi \int_0^1 (r^2 - r^3) dr = 4\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Ответ: $\Pi = \frac{\pi}{3}$. ▶

Пример 16.6. Вычислить поток векторного поля

$$\vec{a} = r\vec{e}_r - \cos \varphi \vec{e}_\varphi + z\vec{e}_z,$$

заданного в цилиндрических координатах, по замкнутой поверхности S , образованный цилиндром $r = 2$ и плоскостями $z = 2$ и $z = 0$.

◀ Вычисление потока проведем по формуле Остроградского – Гаусса.

$$\Pi = \iint_{S=\partial\Omega} (\vec{a}, \vec{n}) dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{a}(x, y, z) dx dy dz. \quad (16.39)$$

Выразим дивергенцию векторного поля \vec{a} в цилиндрических координатах. В криволинейных координатах u, v, t .

$$\operatorname{div} \vec{a}(u, v, t) = \frac{1}{L_u L_v L_t} \left(\frac{\partial}{\partial u} (PL_v L_t) + \frac{\partial}{\partial v} (QL_u L_t) + \frac{\partial}{\partial t} (RL_u L_v) \right);$$

$$L_u L_v L_t - \text{параметры (коэффициенты) Ламэ,} \quad (16.40)$$

причём

$$L_u = \sqrt{x'_u{}^2 + y'_u{}^2 + z'_u{}^2}, \quad L_v = \sqrt{x'_v{}^2 + y'_v{}^2 + z'_v{}^2}, \quad L_t = \sqrt{x'_t{}^2 + y'_t{}^2 + z'_t{}^2}, \quad (16.41)$$

где

$$\begin{aligned} x &= x(u, v, t) = x(r, \varphi, z) = r \cos \varphi; \quad y = y(u, v, t) = y(r, \varphi, z) = r \sin \varphi, \\ z &= z(u, v, t) = z(r, \varphi, z) = z. \end{aligned}$$

Тогда $L_u = L_r = 1$, $L_v = L_\varphi = r$, $L_t = L_z = 1$.

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{a}(r, \varphi, z) &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r \cdot r \cdot 1) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (-\cos \varphi \cdot 1 \cdot 1) + \frac{\partial}{\partial z} (z \cdot 1 \cdot r) \right) = \\ &= \frac{1}{r} (3r + \sin \varphi) = 3 + \frac{\sin \varphi}{r}. \\ \Pi &= \iiint_{\Omega} (3r + \sin \varphi) dr d\varphi dz = \int_0^2 dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (3r + \sin \varphi) dr = \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} r^2 + r \sin \varphi \right) \Big|_0^2 d\varphi = 2 \int_0^{2\pi} (6 + 2 \sin \varphi) d\varphi = 24\pi. \end{aligned}$$

Ответ: $\Pi = 24\pi$. ►

Пример 16.7. Найти поток векторного поля, заданного в сферических координатах,

$$\vec{a} = \rho^2 \vec{e}_\rho + R^2 \rho \sin \theta \cdot \cos \varphi \vec{e}_\varphi,$$

через замкнутую поверхность, ограниченную сферой $\rho = R$ и координатными плоскостями $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, используя формулу Остроградского – Гаусса.

$$\begin{aligned} \blacktriangleleft \quad \Pi &= \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{a}(x, y, z) dx dy dz = \iiint_G \rho^2 \sin \theta \operatorname{div} \vec{a}(\rho, \varphi, \theta) d\rho d\varphi d\theta = \\ &= \left[\operatorname{div} \vec{a}(\rho, \varphi, \theta) = \frac{1}{L_\rho L_\varphi L_\theta} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} (PL_\varphi L_\theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (QL_\rho L_\theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (RL_\rho L_\varphi) \right) = \right. \\ &= \frac{1}{1 \cdot \rho \sin \theta \cdot \rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 \cdot \rho \sin \theta \cdot \rho) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (R^2 \rho \sin \theta \cdot \cos \varphi \cdot \rho) \right) = \\ &= \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} (4\rho^3 \sin \theta + R^2 \rho^2 \sin \theta (-\sin \varphi)) = 4\rho - R^2 \sin \varphi \Big] = \\ &= \iiint_G \rho^2 \sin \theta (4\rho - R^2 \sin \varphi) d\rho d\varphi d\theta = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R (4\rho^3 - \rho^2 R^2 \sin \varphi) d\rho = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\rho^4 - R^2 \frac{\rho^3}{3} \sin \varphi \right) \Big|_0^R d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(R^4 - \frac{R^5}{3} \sin \varphi \right) d\varphi = \\ &= R^4 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{R^5}{3} \cos \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi R^4}{2} - \frac{R^5}{3}. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

16.8 Вычисление объемов тел с помощью поверхностных интегралов второго рода

Указанная проблема решается аналогично тому, как с помощью криволинейных интегралов проводилось вычисление площадей плоских фигур. Объем тела Ω с кусочно-гладкой границей вычисляется по формуле

$$V_{\Omega} = \iint_{\Omega} dxdydz. \quad (16.42)$$

В формуле Остроградского – Гаусса

$$\begin{aligned} \iint_{S=\partial\Omega} (\vec{F}, \vec{n}) ds &= \iint_{S=\partial\Omega} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dx dy = \\ &= \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz \end{aligned} \quad (16.43)$$

подберем функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ так, чтобы

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1. \quad (16.44)$$

Это, например, будет, если

$$P(x, y, z) = \frac{1}{3}x, \quad Q(x, y, z) = \frac{1}{3}y, \quad R(x, y, z) = \frac{1}{3}z.$$

Тогда объем тела Ω с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$ будет

$$V_{\Omega} = \frac{1}{3} \left| \iint_{S=\partial\Omega} xdydz + ydx dz + zdxdy \right| = \frac{1}{3} \left| \iint_S (\vec{F}, \vec{n}) ds \right|. \quad (16.45)$$

Пример 16.8. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = 0$ и $z = 1 - x^2 - y^2$.

◀ Покажем эскиз рисунка (рисунок 16.10) тела в первом октанте (четвертая часть тела, симметричного относительно плоскостей $x = 0$ и $y = 0$). Для вычисления объема тела Ω воспользуемся неполным поверхностным интегралом второго рода

$$V_{\Omega} = \iint_S zdxdy. \quad (16.46)$$

Очевидно, что поверхностный интеграл по $S_1 : \begin{cases} z = 0, \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$ равен нулю. Находим поверхностный интеграл (16.46) по поверхности параболоида

$$S_1 : \begin{cases} z \geq 0, \\ z = 1 - x^2 - y^2. \end{cases}$$

Рисунок 16.10

$$V_{\Omega} = \iint_{S_2} z dx dy = 4 \iint_G (1 - x^2 - y^2) dx dy, \quad (16.47)$$

где G – четверть круга $\begin{cases} z = 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 1 \end{cases}$ в первой четверти плоскости xOy .

При вычислении двойного интеграла (правая часть (16.47)) переходим к полярным координатам и учитываем симметричность тела относительно оси Oz .

$$V_{\Omega} = 4 \iint_D (1 - r^2) r dr d\varphi = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 (r - r^3) dr = \frac{\pi}{2} \text{ (куб. ед.)}.$$

Ответ: $V_{\Omega} = \frac{\pi}{2}$. ►

16.9 Формула Стокса. Потенциальное векторное поле

Пусть дано векторное поле $\vec{a} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ в односвязной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$ (область Ω называется **односвязной**, если для любой кусочно-гладкой замкнутой поверхности $S \subset \Omega$ внутренность этой поверхности есть подмножество Ω). Потребуем, чтобы функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ и существующие их частные производные были непрерывны на $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ (на замыкании Ω).

Пусть дана любая кусочно-гладкая замкнутая кривая $L \subset \Omega$, положительно ориентированная (при обходе кривой L против часовой стрелки).

Определение 16.7. Криволинейный интеграл второго рода

$$\oint_L P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz \quad (16.48)$$

называется **циркуляцией векторного поля**

$$\vec{a} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z) dz)$$

вдоль кривой L , то есть

$$I = \oint_L P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz \quad (16.49)$$

или в векторной форме

$$\Pi = \oint_L (\vec{a}, d\vec{r}), \quad (16.50)$$

где

$$d\vec{r} = (dx, dy, dz). \quad (16.51)$$

Пример 16.9. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j} + z\vec{k}$ по контуру

$$L : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ x^2 + y^2 = z^2, z \geq 0. \end{cases}$$

◀ Выполним эскиз рисунка к задаче в первом октанте (рисунок 16.11).

Рисунок 16.11

По формуле (16.49) находим искомую циркуляцию:

$$\Pi = \oint_L ydx - xdy + zdz = \left[\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos \varphi, & dx = -\sqrt{2} \sin \varphi d\varphi, \\ y = \sqrt{2} \sin \varphi, & dy = \sqrt{2} \cos \varphi d\varphi, \\ z = \sqrt{2} & dz = 0 \end{cases} \right] =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{2} \sin \varphi \cdot (-\sqrt{2}) \sin \varphi - \sqrt{2} \cos \varphi \cdot \sqrt{2} \cos \varphi \right) d\varphi = -4\pi.$$

Ответ: $\Pi = -4\pi.$ ►

Замечание 16.6. Если $\vec{a} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ – силовое векторное поле, то его циркуляция вдоль указанной кривой L есть работа вдоль кривой указанного силового поля. Кривая L в формуле (16.49) может быть и не замкнутой.

Дальше рассмотрим понятие уротора. Пусть дано векторное поле

$$\vec{a} = (P(x, yz), Q(x, yz), R(x, yz)). \quad (16.52)$$

Определение 16.8. Ротором векторного поля \vec{a} называется вектор, обозначенный через $\text{rot } \vec{a}$ и определяемый равенством

$$\text{rot } \vec{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} \quad (16.53)$$

или (в удобной для запоминания форме)

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \quad (16.54)$$

Замечание 16.7. Определитель (правая часть (16.54)) раскрывается по элементам первой строки, а умножение знака частной производной на соответствующую функцию означает взятие частной производной от этой функции, например: $\frac{\partial}{\partial x} \cdot Q = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Пример 16.10. Найти ротор вектора $\vec{a} = z^3 \vec{i} + y^3 \vec{j} + x^3 \vec{k}$.

◀ Для нахождения ротора вектора \vec{a} используем формулу (16.54)

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{a} = & \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^3 & y^3 & x^3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \vec{i} \left(\frac{\partial}{\partial y} x^3 - \frac{\partial}{\partial z} y^3 \right) + (-1)^{1+2} \vec{j} \left(\frac{\partial}{\partial x} x^3 - \frac{\partial}{\partial z} z^3 \right) + \\ & + (-1)^{1+3} \vec{k} \left(\frac{\partial}{\partial x} y^3 - \frac{\partial}{\partial y} z^3 \right) = 3(z^2 - x^2) \vec{j}. \end{aligned}$$

Ответ: $\operatorname{rot} \vec{a} = 3(z^2 - x^2) \vec{j}$. ►

Замечание 16.8. Пусть дано векторное поле скоростей движущейся жидкости $\vec{v}(P(x, yz), Q(x, yz), R(x, yz))$. В этом случае $\operatorname{rot} \vec{v}$ характеризует «вращательную компоненту» поля скоростей, он равен удвоенной угловой скорости вращения бесконечно малой частицы жидкости. В этом состоит **физический смысл ротора**.

Замечание 16.9. Пусть дано векторное поле $\vec{a}(u, v, t)$ с репером $(\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_t)$ или $\vec{a} = (P(u, v, t), Q(u, v, t), R(u, v, t))$. Тогда

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{e}_u & \vec{e}_v & \vec{e}_t \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial t} \\ PL_u & QL_v & RL_t \end{vmatrix}, \quad (16.55)$$

где L_u, L_v, L_t – параметры (коэффициенты) Ламэ в частности:

1. Для цилиндрической системы координат ρ, φ, z параметры Ламэ будут: $L_\rho = 1$, $L_\varphi = r$, $L_z = 1$;

2. Для сферической системы координат ρ, φ, θ параметры Ламэ будут: $L_\rho = 1$, $L_\varphi = \rho \sin \theta$, $L_\theta = \rho$.

Определение 16.9. Векторное поле

$$\vec{a} = (P(u, v, t), Q(u, v, t), R(u, v, t))$$

заданное на замыкании односвязной области Ω называется **потенциальным**, если его можно представить как градиент некоторого скалярного поля. В этом случае само скалярное поле называется **векторного поля**

$$\vec{a} = (P(u, v, t), Q(u, v, t), R(u, v, t)).$$

Указанное определение равносильно тому, что $\operatorname{rot} \vec{a} = 0$.

Пример 16.11. Показать, что векторное поле

$$\vec{a} = \frac{2 \cos \theta}{\rho^3} \vec{e}_\rho + \frac{\sin \theta}{\rho^3} \vec{e}_\theta$$

в сферических координатах является потенциальным.

◀ Для доказательства справедливости утверждения задачи покажем, что $\operatorname{rot} \vec{a} = 0$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{a} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \vec{e}_\theta & \vec{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{L_\theta L_\varphi} & \frac{\partial}{L_\rho L_\varphi} & \frac{\partial}{L_\rho L_\theta} \\ \frac{\partial \rho}{\partial \rho} & \frac{\partial \theta}{\partial \theta} & \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} \\ \frac{2 \cos \theta}{\rho^3} L_\rho & \frac{\sin \theta}{\rho^3} L_\theta & 0 \cdot L_\varphi \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \leq \rho \leq +\infty, \\ 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{bmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\vec{e}_\rho}{\rho^2 \sin \theta} & \frac{\vec{e}_\theta}{\rho \sin \theta} & \frac{\vec{e}_\varphi}{\rho} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{2 \cos \theta}{\rho^3} & \frac{\sin \theta}{\rho^3} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \cdot 0 \cdot \vec{e}_\rho - \frac{1}{\rho \sin \theta} \cdot 0 \cdot \vec{e}_\theta + \\ &\quad + \frac{1}{\rho} \left(-\frac{2 \sin \theta}{\rho^3} + \frac{2 \sin \theta}{\rho^3} \right) \vec{e}_\varphi = \vec{0}. \end{aligned}$$

Ответ: Векторное поле \vec{a} в $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus (0, 0, 0)$ является потенциальным. ►

Теорема 16.5. Пусть вектор-функция

$$\vec{a} = (P(u, v, t), Q(u, v, t), R(u, v, t))$$

определенна и непрерывна вместе с существующими частными производными функций $P(u, v, t)$, $Q(u, v, t)$ и $R(u, v, t)$ в односвязной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Поверхность S из Ω двусторонняя кусочно-гладкая ограниченная без особых точек с кусочно-гладкой границей ∂S , причем поверхность S такая, что однозначно ортогонально проектируется на любую из координатных плоскостей. Ориентация единичного вектора нормали \vec{n} к поверхности S согласована с ориентацией контура $L = \partial S$ так, чтобы из конца нормали \vec{n} обход контура в выбранном направлении был виден совершающимся против часовой стрелки. Тогда справедлива **формула Стокса**

$$\oint_{L=\partial S} (\vec{a}, d\vec{r}) = \iint_S (\operatorname{rot} \vec{a}, \vec{n}) dS. \quad (16.56)$$

Замечание 16.10. При указанных в теореме условиях ее заключение можно сформулировать следующим образом: циркуляция вектора \vec{a} по замкнутому контуру $L = \partial S$ равна потоку ротора этого вектора через любую кусочно-гладкую двустороннюю без особых точек поверхность $S \subset \Omega$, натянутую на контур $L = \partial S$.

◀ Вначале рассмотрим неполный криволинейный интеграл

$$I_1 = \oint_L \rho(x, y, z) dx, \quad (16.57)$$

где поверхность S есть график функции $z = z(x, y)$. Вначале интеграл I_1 заменим криволинейным интегралом по контуру ∂G , где ∂G – кусочно-гладкая граница односвязной области G – ортогональной проекции поверхности S на плоскость $z = 0$.

Затем полученный криволинейный интеграл по контуру ∂G заменяется двойным интегралом по области G , применяя формулу Грина. Далее двойной интеграл переводим в поверхностный по поверхности S . Покажем все указанные выше переходы аналитически.

$$I_1 = \oint_{L=\partial S} P(x, y, z) dx = \oint_{\partial G} P(x, y, z(x, y)) dx. \quad (16.58)$$

К интегралу (правой части равенства (16.58)) применим формулу Грина

$$\oint_{\partial G} P(x, y, z(x, y)) dx = - \iint_G \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial Z} + \frac{\partial z}{\partial y} \right) dx dy. \quad (16.59)$$

Если $F(x, y, z) = z - z(x, y) = 0$ – уравнение, задающее нашу поверхность, то направляющие косинусы единичного вектора \vec{n} нормали к поверхности $S : z = z(x, y)$ находятся по формуле

$$\vec{n} = \pm \frac{\overrightarrow{\text{grad } F}}{|\overrightarrow{\text{grad } F}|} = \pm \frac{F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}} = \pm \frac{-z'_x \vec{i} - z'_y \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{z'_x^2 + z'_y^2 + 1}}. \quad (16.60)$$

С учетом того, что угол между векторами \vec{n} и осью Oz острый, получим, что

$$\frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{\cos(\vec{n}, Oy)}{\cos(\vec{n}, Oz)}. \quad (16.61)$$

Подставляем (16.61) в (16.59):

$$I_1 = - \iint_G \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\cos(\vec{n}, Oy)}{\cos(\vec{n}, Oz)} \right) dx dy. \quad (16.62)$$

Интеграл (16.62) заменяется поверхностным, учитывая равенство

$$\begin{aligned} dxdy &= \cos(\vec{n}, Oz) dS : \\ I_1 &= - \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\cos(\vec{n}, Oy)}{\cos(\vec{n}, Oz)} \right) \cos(\vec{n}, Oz) dS = \\ &= \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial Z} \cos(\vec{n}, Oy) - \frac{\partial P}{\partial y} \cos(\vec{n}, Oz) \right) dS = \oint_{L=\partial S} P dx. \end{aligned} \quad (16.63)$$

Замечание 16.11. Аналогично доказывается, что

$$\oint_{L=\partial S} Q dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \cos(\vec{n}, Oz) - \frac{\partial Q}{\partial z} \cos(\vec{n}, Ox) \right) dS \quad (16.64)$$

и

$$\oint_{L=\partial S} R dz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} \cos(\vec{n}, Ox) - \frac{\partial R}{\partial x} \cos(\vec{n}, Oy) \right) dS. \quad (16.65)$$

Складываем равенства (16.63)–(16.65), получим:

$$\begin{aligned}
 \oint_{L=\partial S} Pdx + Qdy + Rdz &= \oint_{L=\partial S} (\vec{a}, d\vec{r}) = \iint_S \left(\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos(\vec{n}, Oz) + \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos(\vec{n}, Ox) + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos(\vec{n}, Oy) \right) dS = \\
 &= \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx = \\
 &= \iint_S \text{rot}(\vec{a}, \vec{n}) dS. \blacksquare
 \end{aligned} \tag{16.66}$$

Пример 16.12. Найти циркуляцию векторного поля в сферических координатах

$$\vec{a} = \rho \vec{e}_\rho + \rho(R + \rho) \sin^2 \theta \vec{e}_\varphi \tag{16.67}$$

по контуру L , представляющему собой окружность радиуса R в плоскости $z = 0$ с центром в начале координат.

◀ На контур L натянем полусферу при $z \geq 0$ радиуса R ($\rho = R$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \varphi < 2\pi$). В качестве единичного вектора нормали к сферической поверхности S возьмем $\vec{n} = \vec{e}_\rho$, где \vec{e}_ρ – орт в сферической системе координат.

Для нахождения указанной в задаче циркуляции воспользуемся формулой Стокса.

$$\Pi = \oint_L (\vec{a}, d\vec{r}) = \iint_S \text{rot}(\vec{a}, \vec{n}) dS, \tag{16.68}$$

где $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$.

Вначале найдём $\text{rot } \vec{a}$ в сферических координатах:

$$\text{rot } \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \vec{e}_\theta & \vec{e}_\varphi \\ \frac{\rho^2 \sin \theta}{\partial \rho} & \frac{\rho \sin \theta}{\partial \theta} & \frac{\rho}{\partial \varphi} \\ \rho & 0 & \rho(R + \rho) \sin^2 \theta \end{vmatrix} = \frac{2(R + \rho) \cos \theta}{\rho} \vec{e}_\rho - \frac{1}{\rho}(R + 2\rho) \sin \theta \vec{e}_\theta.$$

Далее находим $\text{rot}(\vec{a}, \vec{n}) = \text{rot}(\vec{a}, \vec{e}_\rho)$, где $\vec{e}_\rho = (1, 0, 0)$. Тогда

$$\text{rot}(\vec{a}, \vec{n}) = \frac{2(R + \rho)}{\rho} \cos \theta.$$

По формуле (16.68) находим

$$\begin{aligned}
 \Pi &= \iint_S \frac{2(R + \rho)}{\rho} \cos \theta ds = [\rho = R] = 4 \iint_S \cos \theta ds = \\
 &= [ds = L_\theta L_\varphi d\theta d\varphi = R^2 \sin \theta d\theta dy] \varphi = 4R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \cdot \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi R^2.
 \end{aligned}$$

Ответ: $\Pi = 4\pi R^2$. \blacksquare

Пример 16.13. Показать, что векторное поле

$$\vec{a} = (y+z)\vec{i} + (x+z)\vec{j} + (y+x)\vec{k} \quad (16.69)$$

является потенциальным. Найти его потенциал.

$$\blacktriangleleft \operatorname{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y+z & x+z & y+x \end{vmatrix} = \vec{i}(1-1) - \vec{j}(1-1) + \vec{k}(1-1) = \vec{0}.$$

Потенциальность поля доказана. Найдем потенциал поля с точностью до константы. Это будет такое скалярное поле $u = u(x, y, z)$, что $\overrightarrow{\operatorname{grad}} u = \vec{a}$. Потенциал $u = u(x, y, z)$ находим по формуле

$$u(x, y, z) = \int_L (y+x)dx + (x+z)dy + (y+x)dz. \quad (16.70)$$

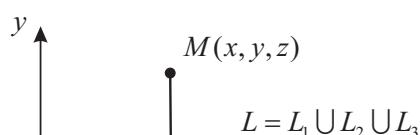
Функции $P(x, y, z) = (y+x)$, $Q(x, y, z) = (x+z)$, $R(x, y, z) = (y+x)$ определены и не непрерывны вместе со своими частными производными в односвязной области $G = \mathbb{R}^3$. Для криволинейных интегралов второго рода в пространстве так же, как и на плоскости, по любой кусочно-гладкой кривой L от фиксированной любой точки $M_0(x_0, y_0, z_0) \in G$ до текущей точки $M(x, y, z)$ значение криволинейного интеграла не будет зависеть от L . В нашем случае в качестве $M_0(x_0, y_0, z_0)$ берем начало координат, то есть $M_0(0, 0, 0)$. В качестве L берем ломаную $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до точки $M(x, y, z)$ с первым звеном на оси Ox (до точки x), вторым звеном, параллельным оси Oy (от точки $(x, 0, 0)$ до точки $(x, y, 0)$), и третьим звеном, параллельным оси Oz (от точки $(x, y, 0)$ до точки $M(x, y, z)$).

Рисунок 16.12

$$u(x, y, z) = \int_L (y+z)dx + (x+z)dy + (y+z)dz = \int_{L_1} + \int_{L_2} + \int_{L_3} =$$

$$= \int_0^x (0+0)dx + \int_0^y xdy + \int_0^z (y+x)dz = xy + (y+x)z + c - \text{искомый потенциал.}$$

Ответ: $u(x, y, z) = xy + (y+x)z + C$. ►



Литература

1. Фихтенгольц, Г.М. Основы математического анализа : в 2 т. / Г.М. Фихтенгольц. – СПб. : Лань, 2001. – Т. 2 : Основы математического анализа. – 463 с.
2. Кудрявцев, Л.Д. Курс математического анализа : в 2 т. / Л.Д. Кудрявцев. – М. : Высш. шк., 1988. – Т. 2 : Курс математического анализа. – 584 с.
3. Ильин, В.А. Основы математического анализа : в 2 т. / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – М. : Наука, 1982. – Т. 1. – 599 с.
4. Дадаян, А.А. Математический анализ / А.А. Дадаян. – Минск : Высш. шк., 1990. – 428 с.
5. Семенчук, Н.П. Математический анализ : учеб. пособие : в 4 ч. / Н.П. Семенчук [и др.] ; под общ. ред. Н.Н. Сендера ; Брест. гос. ун-т имени А.С. Пушкина. – Брест : БрГУ, 2012. – Ч. 1 : Введение в анализ. Дифференциальное исчисление. – 255 с.
6. Семенчук, Н.П. Математический анализ : учеб. пособие : в 4 ч. / Н.П. Семенчук [и др.] ; под общ. ред. Н.Н. Сендера ; Брест. гос. ун-т имени А.С. Пушкина. – Брест : БрГУ, 2012. – Ч. 2 : Интегральное исчисление функций одной переменной. – 264 с.
7. Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б.П. Демидович. – М. : Наука, 1977. – 528 с.
8. Виноградова, И.А. Задачи и упражнения по математическому анализу : в 2 кн. / И.А. Виноградова, С.Н. Олехник, В.А. Садовничий ; под ред. В.А. Садовничего. – 2-е изд., перераб. – М. : Высш. шк., 2002. – Кн. 2 : Ряды, несобственные интегралы, кратные и поверхностные интегралы. – 712 с.
9. Давыдов, Н.А. Сборник задач по математическому анализу : учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак-тов пед. ин-тов / Н.А. Давыдов, П.П. Коровкин, В.Н. Никольский ; под ред. Н.А. Давыдова. – М. : Просвещение, 1973. – 256 с.
10. Задачник по курсу математического анализа : учеб. пособие для студентов заоч. отд-ний физ.-мат. фак-тов пединститутов : в 2 т. / Н.Я. Виленкин [и др.] ; под общ. ред. Н.Я. Виленкина. – М. : Просвещение, 1971. – Т. 1. – 343 с.