

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ  
«Брестский государственный университет  
имени А.С. Пушкина»

# Кратные интегралы

*Электронный курс лекций*



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

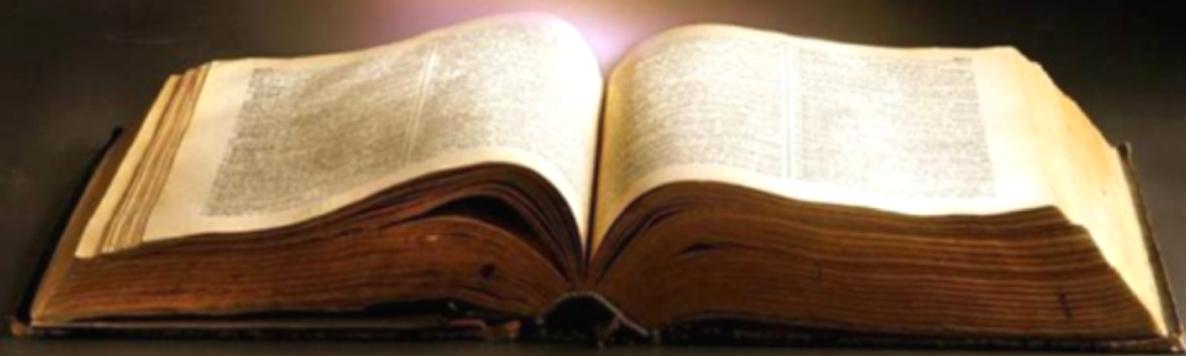
Приложение

Назад



1

Закрыть



## Авторы:

**Сендер Николай Никитич** — заведующий кафедрой математического анализа, дифференциальных уравнений и их приложений БрГУ имени А.С. Пушкина

**Марзан Сергей Андреевич** — доцент кафедры математического анализа, дифференциальных уравнений и их приложений БрГУ имени А.С. Пушкина

**Сендер Александр Николаевич** — заведующий кафедрой алгебры, геометрии и математического моделирования БрГУ имени А.С. Пушкина

## Редактор:

**Сендер Александр Николаевич** — заведующий кафедрой алгебры, геометрии и математического моделирования БрГУ имени А.С. Пушкина

## Рецензенты:

**Рубанов В.С.** — проректор по научной работе БрГТУ,

**Климашевская И.Н.** — доцент кафедры математического анализа, дифференциальных уравнений и их приложений БрГУ имени А.С. Пушкина



*Кафедра  
высшай  
матэматыкі*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



Закреть

# СОДЕРЖАНИЕ

<b>Лекция 1</b> Двойной интеграл. Суммы Дарбу . . . . .	10
1.1 Двойной интеграл . . . . .	10
1.1.1 Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла	10
1.1.2 Понятие двойного интеграла . . . . .	13
1.2 Суммы Дарбу. Условия существования двойного интеграла	14
1.2.1 Суммы Дарбу, их свойства . . . . .	16
1.2.2 Условия существования двойного интеграла . . . . .	21
1.3 Основные классы интегрируемых функций . . . . .	23
1.4 Основные свойства двойного интеграла . . . . .	24
<b>Лекция 2</b> Вычисление двойного интеграла. Криволинейные координаты . . . . .	27
2.1 Приведение двойного интеграла к повторному . . . . .	27
2.2 Криволинейные координаты . . . . .	43
2.3 Площадь в криволинейных координатах . . . . .	45
<b>Лекция 3</b> Замена переменных в двойном интеграле. Геометрические и физические приложения . . . . .	48
3.1 Замена переменных в двойном интеграле . . . . .	48
3.2 Якобиан в полярных криволинейных координатах . . . . .	52



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



3

Закреть

3.3 Геометрические и физические приложения двойного интеграла . . . . . 56

3.4 Статические моменты . . . . . 65

**Лекция 4** Геометрические и физические приложения двойного интеграла. Тройной интеграл . . . . . 68

4.1 Координаты центра масс материальной пластинки . . . . . 68

4.2 Момент инерции плоской материальной квадрируемой пластинки . . . . . 70

4.3 Площадь поверхности . . . . . 73

4.3.1 Площадь гладкой поверхности (графика функции  $z = f(x, y)$ ) . . . . . 73

4.3.2 Вывод формулы площади гладкой поверхности . . . . . 74

4.4 Тройной интеграл . . . . . 78

4.4.1 Задача, приводящая к понятию тройного интеграла . . . . . 78

4.4.2 Понятие тройного интеграла . . . . . 80

4.4.3 Свойства тройных интегралов . . . . . 83

**Лекция 5** Вычисление тройных интегралов. Криволинейные координаты. Замена переменных в тройном интеграле . . . . . 86

5.1 Способы вычисления тройных интегралов . . . . . 86

5.1.1 Область интегрирования параллелепипед . . . . . 86

5.1.2 Случай криволинейной области интегрирования . . . . . 88



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



4

Закреть

5.2	Криволинейные координаты . . . . .	94
5.2.1	Отображение пространственных областей . . . . .	94
5.2.2	Цилиндрические координаты . . . . .	95
5.2.3	Сферические координаты . . . . .	98
5.2.4	Элемент объема в криволинейных координатах . . . . .	100
5.3	Замена переменных в тройном интеграле . . . . .	102

**Лекция 6** Геометрические и физические приложения тройных интегралов . . . . . 109

6.1	Вычисление массы тела . . . . .	109
6.2	Вычисление объемов тел . . . . .	113
6.3	Статические моменты, момент инерции и центры тяжести материальных тел . . . . .	120

**Лекция 7** Многомерные интегралы. Несобственные кратные интегралы . . . . . 127

7.1	Многомерные интегралы ( $n$ -кратные, $n \in \mathbb{N}$ , $n > 3$ ) . . . . .	127
7.1.1	Кубируемость $n$ -мерных областей . . . . .	127
7.1.2	Понятие $n$ -мерного интеграла . . . . .	128
7.1.3	Вычисление $n$ -мерного интеграла . . . . .	131
7.1.4	Замена переменных в $n$ -интеграле . . . . .	133
7.2	Несобственные кратные интегралы . . . . .	136



*Кафедра  
высшай  
матэматыкі*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



Закреть

7.2.1	Многомерные несобственные интегралы с неограниченной областью интегрирования . . . . .	136
7.2.2	Несобственный интеграл от неотрицательных функций . . . . .	141
7.2.3	Сведение несобственного кратного интеграла к повторному . . . . .	145

**Лекция 8** Криволинейные интегралы первого рода . . . . . 150

8.1	Задача, приводящая к понятию криволинейного интеграла первого рода . . . . .	150
8.2	Понятие криволинейного интеграла первого рода . . . . .	152
8.3	Существование и вычисление криволинейного интеграла первого рода . . . . .	153
8.4	Свойства криволинейного интеграла первого рода . . . . .	160
8.5	Некоторые приложения криволинейных интегралов первого рода . . . . .	163

**Лекция 9** Криволинейные интегралы второго рода . . . . . 179

9.1	Задача, приводящая к понятию криволинейного интеграла второго рода . . . . .	179
9.2	Понятие криволинейного интеграла второго рода . . . . .	181
9.3	Теорема о существовании и вычислении криволинейного интеграла второго рода . . . . .	183



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



Закреть

9.4	Свойства криволинейного интеграла второго рода . . . . .	190
9.5	Криволинейный интеграл по замкнутому контуру . . . . .	196
9.6	Формула Грина . . . . .	199
9.7	Приложения формулы Грина к вычислению площадей плоских фигур . . . . .	204
9.8	Четыре равносильных условия для криволинейного интеграла второго рода . . . . .	205
9.9	Восстановление функции по ее полному дифференциалу с помощью криволинейного интеграла . . . . .	211
<b>Лекция 10</b>	<b>Поверхностные интегралы первого рода . . . . .</b>	<b>216</b>
10.1	Задача, приводящая к понятию поверхностного интеграла первого рода . . . . .	216
10.2	Понятие поверхностного интеграла первого рода . . . . .	218
10.3	Теорема о существовании и вычислении поверхностного интеграла первого рода . . . . .	220
10.4	Вычисление поверхностного интеграла первого рода при параметрическом задании поверхности . . . . .	229
10.5	Свойства поверхностного интеграла первого рода . . . . .	234
10.6	Некоторые приложения поверхностных интегралов первого рода . . . . .	237
<b>Лекция 11</b>	<b>Поверхностные интегралы второго рода . . . . .</b>	<b>247</b>



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



Закреть

11.1	Двусторонние и односторонние поверхности в $\mathbb{R}^3$ . . . . .	247
11.2	Задача, приводящая к понятию поверхностного интеграла второго рода . . . . .	249
11.3	Понятие поверхностного интеграла второго рода . . . . .	252
11.4	Существование и вычисление поверхностного интеграла вто- рого рода . . . . .	255
11.5	Два способа вычисления потока . . . . .	259
11.6	О существовании и вычислении поверхностного интеграла второго рода по поверхности, заданной параметрически . . . . .	263
11.7	Формула Остроградского – Гаусса . . . . .	268
11.8	Формула Остроградского – Гаусса в векторной форме . . . . .	272
11.9	Вычисление объемов тел с помощью поверхностных инте- гралов второго рода . . . . .	283
11.10	Формула Стокса . . . . .	285

Литература . . . . . 300

Приложение . . . . . 303



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



8

Закреть

# ЛЕКЦИЯ 1

## Двойной интеграл. Суммы Дарбу

### 1.1 Двойной интеграл

#### 1.1.1 Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла

**Задача 1.1.** О массе материальной плоской неоднородной фигуры.

◀ Пусть дана материальная плоская неоднородная фигура (пластинка)  $G$  (квадрируемая) с плотностью  $\rho(x, y)$ . Берём любое разбиение  $\tau_G$  пластинки  $G$  на  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , частичных пластинок  $G_k$   $k = \overline{1, n}$ , с помощью системы из  $m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , спрямляемых кривых  $L_i$   $i = \overline{1, m}$ , без общих внутренних точек. Берём любую точку  $M_k(x_k, y_k) \in \overline{G_k}$  ( $\overline{G_k} = G_k \cup \partial G$ ) ( $\partial G$  – граница частичной пластинки  $G_k$ ). Считаем, что для любой точки  $M(x, y) \in \overline{G_k}$  будет  $\rho(M) = \rho(M_k)$ . Обозначим через

$$d_k = \sup_{M'_i, M''_i \in \overline{G_k}} \{d(M'_k, M''_k)\}$$

( $d_k$  – диаметр частичной пластинки  $G_k$   $k = \overline{1, n}$ ), где  $d(M'_k, M''_k)$  – расстояние между точками  $M'_k$  и  $M''_k$ , принадлежащими  $\overline{G_k}$ . Считаем, что



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



9

Закреть

$\lambda_\tau = \max_{k=1, n} \{d_k\}$ . Составим сумму

$$m_{\tau_G} \approx \sigma_{\tau_G}(\rho, M_k) = \sum_{k=1}^n \rho(x_k, y_k) \Delta G_k, \quad (1.1)$$

где  $\Delta G_k = S_{G_k}$  – площадь частичной пластинки  $G_k$ ,

$$m_{G_k} = \rho(x_k, y_k) \Delta G_k$$

– масса частичной однородной пластинки с постоянной плотностью  $\rho(x, y) = \rho(x_k, y_k)$ ,  $\sigma_{\tau_G}(\rho, M_k) = \sum_{k=1}^n \rho(x_k, y_k) \Delta G_k$  – интегральная сумма.

Если существует конечный предел  $m = \lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} m_{\tau_G}$  и этот предел не зависит от способа разбиения  $\tau_G$  и выбора точек  $M_k(x_k, y_k) \in \overline{G_k}$ , то он называется **массой пластинки  $G$** . ►

**Задача 1.2.** Об объёме криволинейного цилиндра.

◀ Криволинейным цилиндром назовём тело  $\Phi$ , которое в  $\mathbb{R}^3$  ограничено цилиндрической поверхностью с направляющей  $\partial G$  (замкнутая спрямляемая кривая) и образующими, параллельными оси  $Oz$ , а также нижним основанием  $G$  (область с границей  $\partial G$ ) и верхним основанием – графиком функции  $z = f(x, y)$ , непрерывной на  $\overline{G} = G \cup \partial G$ .



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



10

Закреть

Дадим понятие объёма криволинейного цилиндра  $\Phi$  и укажем метод нахождения объёма  $\Phi$ .

Берём любое разбиение  $\tau_G$  области  $G$  на  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , частичных областей  $G_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ , с помощью системы из  $m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , спрямляемых кривых  $L_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ , без общих внутренних точек. Аналогично, как и в предыдущей задаче, вводим понятие  $\lambda_\tau$ , а также проводим выбор точек  $M_k(x_k, y_k) \in \overline{G_k}$ . Рассмотрим частичные прямые цилиндры с высотой  $H_k(x_k, y_k) = f(x_k, y_k) = z_k$  и основаниями  $G_k$  (нижние основания), а также параллельным им нижним основанием  $G'_k$  (часть плоскости, проходящей через точку  $M'_k(x_k, y_k, z_k)$ , параллельной плоскости  $z = z_k$  и вырезанной частичной цилиндрической поверхностью с направляющей  $\partial G_k$ , и образующими, параллельными оси  $Oz$ ). Объём указанного частичного прямого цилиндра будет

$$V_k = H_k(x_k, y_k) \Delta G_k, \quad (1.2)$$

где  $\Delta G_k$  – площадь частичной области  $G_k$ .

Составим интегральную сумму

$$V_{\tau_G} \approx \sigma_{\tau_G}(H, M_k) = \sum_{k=1}^n H_k(x_k, y_k) \Delta G_k. \quad (1.3)$$

Если существует конечный предел  $V = \lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} \sigma_{\tau_G}$  и этот предел не



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



11

Закрыть

зависит от способа разбиения  $\tau_G$  и выбора точек  $M_k(x_k, y_k) \in \overline{G}_k$ , то он называется **объёмом криволинейного цилиндра**  $\Phi$ . ►

### 1.1.2 Понятие двойного интеграла

Рассмотренные выше задачи из разных областей человеческих знаний, но методы их решения одинаковы. Отвлекаясь от конкретного содержания задач, но повторяя все рассуждения и выводы, приведённые в указанных задачах, мы приходим к понятию двойного интеграла.

Пусть функция  $z = f(x, y)$  определена на замыкании области  $G$  со спрямляемой границей. Берём любое разбиение  $\tau_G$  области  $G$  на  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , частичных областей  $G_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ , с помощью системы из  $m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , спрямляемых кривых  $L_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ , без общих внутренних точек. На замыкании каждой частичной области  $G_k$  выбираем любую точку  $M_k(x_k, y_k) \in \overline{G}_k$ . Обозначим через  $\lambda_\tau$  максимальный из диаметров  $d_k = \sup_{M'_k, M''_k \in \overline{G}_k} \{d(M'_k, M''_k)\}$ ,  $M' = M'(x'_k, y'_k)$ ,  $M'' = M''(x''_k, y''_k)$ . Обо-

значим:  $\sigma_\tau = \sigma_\tau(f, M_k) = \sum_{k=1}^n f(M_k) \Delta G_k$ , где  $\Delta G_k$  – площадь  $G_k$ . Если существует конечный предел  $\lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} \sigma_\tau = I \in \mathbb{R}$  и этот предел не зави-

сит от способа разбиения  $\tau_G$  и выбора точек  $M_k(x_k, y_k) \in \overline{G}_k$ , то он называется двойным интегралом функции  $f(x, y)$  по области  $G$ . Обо-



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



12

Закреть

значается:  $I = \iint_G f(x, y) dx dy$ . Сумма  $\sigma_\tau$  называется **интегральной суммой** функции  $z = f(x, y)$  по области  $G$ . Функция  $f(x, y)$  называется **подынтегральной функцией**, выражение  $f(x, y) dx dy$  – **подынтегральным выражением**.

По Коши указанный предел означает:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \tau_G \lambda_\tau < \delta \forall M_k \in \overline{G}_k \quad |\sigma_\tau - I| < \varepsilon.$$

**Замечание 1.1.** Аналогично, как и для функции одной переменной, необходимым условием интегрируемости будет ограниченность этой функции на замыкании области  $G$  со спрямлённой границей. Доказательство указанной теоремы во многом аналогично одномерному случаю. Только при этом надо учесть, что разбиение  $\tau_G$  проводится на частичные области  $G_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ , а площадь любой области число положительное.

## 1.2 Суммы Дарбу. Условия существования двойного интеграла

Необходимым условием существования двойного интеграла, как сказано выше, является ограниченность в области интегрирования подынтегральной функции. В дальнейшем это всегда будем предполагать. Но легко показать на конкретном примере, что ограниченность функции на замыкании области  $G$  в общем случае не является достаточным услови-



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



13

Закреть

ем её интегрируемости по этой области.

**Пример 1.1.** Показать, что функция

$$D(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ и } y \text{ рациональные числа} \\ 0, & \text{если } x \text{ и } y \text{ иррациональные числа} \end{cases}$$

не интегрируема по области

$$G = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{l} 0 < x < 1, \\ 0 < y < 1 \end{array} \right\}.$$

◀ Для интегральной суммы

$$\sigma_\tau = \sum_{k=1}^n D(x_k, y_k) \Delta G_k$$

рассмотрим два случая выбора точек  $M_k(x_k, y_k)$ .

а) Пусть  $M_k \in \bar{G}$  такие, что  $x_k \in \mathbb{Q}$  и  $y_k \in \mathbb{Q}$ . Тогда

$$\sigma_\tau = \sum_{k=1}^n 0 \cdot \Delta G_k = 0 \text{ и } \lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} \sigma_\tau = 0.$$

б) Пусть хотя бы одна из координат  $x_k$  или  $y_k$  есть число иррациональное. Тогда

$$\sigma_\tau = \sum_{k=1}^n 1 \cdot \Delta G_k = S_G,$$



*Кафедра  
высшай  
матэматыкі*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



14

Закреть

где  $S_G$  – площадь области  $G$ . Имеем  $\lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} \sigma_\tau = S_G$ .

**Вывод:** не существует  $\iint_G D(x, y) dx dy$ . ►

### 1.2.1 Суммы Дарбу, их свойства

Пусть функция  $z = f(x, y)$  определена и ограничена на замыкании области  $G$  со спрямляемой границей. Возьмём любое разбиение границы  $G$  на  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , частичных областей  $G_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ , с помощью системы из  $m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , спрямляемых кривых  $L_i$ ,  $i = \overline{1, m}$  без общих внутренних точек. Так как функция  $f(x, y)$  ограничена на  $\overline{G}$ , то она ограничена и на замыкании любой частичной области  $G_k$ . Введём обозначения

$$M_k = \sup_{(x,y) \in \overline{G}_k} f(x, y), \quad m_k = \inf_{(x,y) \in \overline{G}_k} f(x, y).$$

Составим суммы

$$S_{\tau_G} = \sum_{k=1}^n M_k \Delta G_k \quad (1.4)$$

и

$$s_{\tau_G} = \sum_{k=1}^n m_k \Delta G_k. \quad (1.5)$$

Сумма  $S_{\tau_G}$  называется **верхней суммой Дарбу**,  $s_{\tau_G}$  – **нижней суммой Дарбу**.



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



15

Закреть

Рассмотрим основные свойства верхней и нижней сумм Дарбу.

**Свойство 1.1.** Для любого разбиения  $\tau_G$  области  $G$  на  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , частичных областей  $G_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ , верхняя сумма Дарбу есть точная верхняя грань множества интегральных сумм для разбиения  $\tau_G$ .

◀ Для разбиения  $\tau_G$  и любого выбора точек  $M_k(x_k, y_k) \in \overline{G}_k$  справедливо неравенство

$$m_k \leq f(x_k, y_k) \leq M_k. \quad (1.6)$$

Неравенство (1.6) умножаем на  $\Delta G_k > 0$  и просуммируем полученные при этом неравенства по всем  $k$ ,  $k = \overline{1, n}$ . Получим:

$$s_{\tau_G} \leq \sigma_{\tau_G} \leq S_{\tau_G}. \quad (1.7)$$

Доказано, что  $s_{\tau_G}$  – нижняя граница, а  $S_{\tau_G}$  – верхняя граница для интегральных сумм Римана (первое характеристическое свойство точных граней). Докажем, например, справедливость и второго характеристического свойства (для точной верхней грани). Так как

$$M_k = \sup_{(x,y) \in \overline{G}_k} f(x_k, y_k),$$

то (второе характеристическое свойство точной верхней грани) для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $(x'_k, y'_k) \in \overline{G}_k$ , что будет справедливо неравенство

$$0 \leq M_k - f(x'_k, y'_k) < \frac{\varepsilon}{S_G}, \quad (1.8)$$



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



16

Закреть

где  $S_G$  – площадь области  $G$ .

Умножаем все части неравенства (1.8) на  $\Delta G_k > 0$  ( $\Delta G_k$  – площадь частичной области  $G_k$ ) и просуммируем полученные при этом неравенства по всем  $k$ ,  $k = \overline{1, n}$ . Получим двойное неравенство

$$0 \leq S_{\tau_G} - \sigma_{\tau_G} < \varepsilon. \quad (1.9)$$

Утверждение для точной верхней грани доказано. Аналогично доказывается утверждение и для точной нижней грани. ►

Введём понятие измельчения разбиения.

**Определение 1.1.** Разбиение  $\tau'_G$  называется **измельчением разбиения**  $\tau_G$ , если любая частичная область  $G'_k$  разбиения  $\tau'_G$  есть подмножество некоторой частичной области  $G_k$  разбиения  $\tau_G$ . Обозначим  $\tau_G < \tau'_G$ .

**Свойство 1.2.** Если  $\tau_G < \tau'_G$ , то

$$s_{\tau_G} \leq s_{\tau'_G} \leq S_{\tau'_G} \leq S_{\tau_G}. \quad (1.10)$$

◀ Предположим, что разбиение  $\tau'_G$  получено из разбиения  $\tau_G$  путём добавления одной частичной области, то есть некоторая область  $G_k = G'_k \cup G''_k$ , где области  $G'_k$  и  $G''_k$  не имеют общих внутренних точек. Тогда получим, что для частичных областей  $G'$ ,  $G''_k$  и  $G_k$  будут справедливы неравенства  $m'_k \geq m_k$ ,  $M'_k \leq M_k$ ,  $m''_k \geq m_k$ ,  $M''_k \leq M_k$ ,



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



17

Закреть

где  $m'_k = \inf_{(x,y) \in \overline{G}'_k} f(x,y)$ ,  $M'_k = \sup_{(x,y) \in \overline{G}'_k} f(x,y)$ ,  $m''_k = \inf_{(x,y) \in \overline{G}''_k} f(x,y)$ ,  
 $M''_k = \sup_{(x,y) \in \overline{G}''_k} f(x,y)$ ,  $m_k = \inf_{(x,y) \in \overline{G}_k} f(x,y)$ ,  $M_k = \sup_{(x,y) \in \overline{G}_k} f(x,y)$ .

Обозначим  $\Delta G'_k = S_{G'_k}$  – площадь области  $G'_k$ ,  $\Delta G''_k = S_{G''_k}$  – площадь области  $G''_k$ ,  $\Delta G_k = S_{G_k}$  – площадь области  $G_k$ . Тогда

$$M_k \Delta G_k \geq M'_k \Delta G'_k + M''_k \Delta G''_k. \quad (1.11)$$

Суммируем неравенства (1.11) по всем  $k$ ,  $k = \overline{1, n}$ , получим:  
 $S_{\tau'_G} \leq S_{\tau_G}$ . Аналогично доказывается и неравенство  $s_{\tau_G} \leq s_{\tau'_G}$ . ►

Методом математической индукции доказывается справедливость свойства 1.2 в общем случае (при добавлении любого конечного числа новых частичных областей за счёт разбиения старых частичных областей  $G_k$  без общих внутренних точек).

**Свойство 1.3.** Для любых разбиений  $\tau'_G$  и  $\tau''_G$  справедливы неравенства  $s_{\tau'_G} \leq S_{\tau''_G}$  и  $s_{\tau''_G} \leq S_{\tau'_G}$ .

◀ Для любых разбиений  $\tau'_G$  и  $\tau''_G$  найдётся такое разбиение  $\tau_G$ , которое будет измельчением и  $\tau'_G$  и  $\tau''_G$ . Тогда  $s_{\tau'_G} \leq s_{\tau_G} \leq S_{\tau_G} \leq S_{\tau''_G}$ ,  $s_{\tau''_G} \leq s_{\tau_G} \leq S_{\tau_G} \leq S_{\tau'_G}$ . ►

**Следствие 1.1.** Множество верхних сумм Дарбу по всем разбиениям  $\tau_G$  ограничено снизу, а нижних – сверху.



**Кафедра**  
 высшей  
 математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



18

Закреть

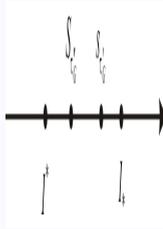


Рисунок 1.1

◀ Пусть  $A = \{S_{\tau_G}\}$  множество верхних сумм по всем разбиениям  $\tau_G$ . В качестве нижней границы множества  $A$  можно взять любую нижнюю сумму  $s_{\tau_G}$  (свойство 1.3). Аналогично доказывается ограниченность сверху множества  $B = \{s_{\tau_G}\}$  нижних сумм Дарбу (в качестве верхней границы можно взять любую из верхних сумм Дарбу). По свойству непрерывности множества действительных чисел имеем:  $\sup B = I_* -$  **нижний интеграл Дарбу** функции  $f(x, y)$  по области  $G$ ;  $\inf A = I^* -$  **верхний интеграл Дарбу** функции  $f(x, y)$  по области  $G$ . Справедливо неравенство

$$s_{\tau_G} \leq I_* \leq I^* \leq S_{\tau_G}. \quad (1.12)$$

Докажем, например, что  $I_* \leq \sigma_{\tau_G}$ . Допустим противное:  $I^* < I_*$ , но тогда (учесть второе характеристическое свойство точных граней) существуют такие разбиения  $\tau'_G$  и  $\tau''_G$ , что  $S_{\tau'_G} < s_{\tau'_G}$  получим противоречие



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



19

Закреть

(свойство 1.3). Другие связи с помощью неравенств между значениями величин очевидны. ►

## 1.2.2 Условия существования двойного интеграла

**Теорема 1.1 (критерий интегрируемости).** Для того, чтобы на замыкании области  $G$  со спрямляемой границей  $\partial G$  ограниченная функция  $f(x, y)$  была интегрируемой, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} (S_{\tau_G} - s_{\tau_G}) = 0. \quad (1.13)$$

**Замечание 1.2.** Доказательство критерия во многом аналогично одномерному случаю (доказать самостоятельно).

**Лемма 1.1 (лемма Дарбу).** Ограниченная на замыкании области  $G$  со спрямляемой границей  $\partial G$  функция  $f(x, y)$  имеет верхний и нижний интегралы  $I^*$  и  $I_*$ , которые являются соответственно пределами верхних и нижних интегральных сумм Дарбу при  $\lambda_\tau \rightarrow 0$  ( $\lambda_\tau$  – определён выше).

**Теорема 1.2 (критерий Дарбу интегрируемости функций).** Ограниченная на замыкании области  $G$  со спрямляемой границей  $\partial G$  функция  $f(x, y)$  будет интегрируемой по области  $G$  тогда и только тогда, когда верхний и нижний интегралы Дарбу равны между собой, то есть  $I^* = I_* = I$ .



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



20

Закреть

**Замечание 1.3.** Из критерия Дарбу следует, что для ограниченной на замыкании области  $G$  со спрямляемой границей  $\partial G$  функции  $f(x, y)$  можно ввести понятие интеграла Римана следующим образом. Составляем суммы Дарбу  $s_{\tau_G} = \sum_{k=1}^n m_k \Delta G_k$ ,  $S_{\tau_G} = \sum_{k=1}^n M_k \Delta G_k$ . Получим:  $I_* = \sup_{\tau_G} \{s_{\tau_G}\}$  – **нижний интеграл Дарбу**;  $I^* = \inf_{\tau_G} \{S_{\tau_G}\}$  – **верхний интеграл Дарбу**.

**Определение 1.2.** Если  $I^* = I_* = I$ , то функция  $z = f(x, y)$  называется **интегрируемой по области  $G$**  со спрямляемой границей  $\partial G$  по Риману. Общее значение интегралов Дарбу называется **интегралом Римана функции  $f(x, y)$  по области  $G$** . Обозначение:

$$I = \iint_G f(x, y) dx dy. \quad (1.14)$$

**Теорема 1.3 (критерий Римана).** Ограниченная на замыкании области  $G$  со спрямляемой границей  $\partial G$  функция  $f(x, y)$  интегрируема по Риману на указанной области тогда и только тогда, когда для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\tau_G$ , что

$$S_{\tau_G} - s_{\tau_G} < \varepsilon. \quad (1.15)$$



**Кафедра**  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



21

Закреть

◀ **Необходимость.** Если существует

$$\iint_G f(x, y) dx dy = I = I_* = I^*,$$

то  $\lim_{\lambda_{\tau_G} \rightarrow 0} s_{\tau_G} = I_* = I^* = \lim_{\lambda_{\tau_G} \rightarrow 0} S_{\tau_G}$  (лемма Дарбу). Тогда

$$\lim_{\lambda_{\tau_G} \rightarrow 0} (S_{\tau_G} - s_{\tau_G}) = 0 : \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \tau_G \lambda_{\tau_G} < \delta S_{\tau_G} - s_{\tau_G} < \varepsilon.$$

**Достаточность.** Обратно, если для любого  $\varepsilon > 0$  найдётся такое  $\tau_G$ , что  $S_{\tau_G} - s_{\tau_G} < \varepsilon$ , то из неравенства (1.12)  $s_{\tau_G} \leq I_* \leq I^* \leq S_{\tau_G}$ , следует, что  $0 \leq I_* \leq I^* \leq S_{\tau_G} - s_{\tau_G} < \varepsilon$ .

Действительное неотрицательное число  $I^* - I_* \geq 0$  меньше любого сколь угодно малого положительного числа  $\varepsilon > 0$ . Значит,  $I^* - I_* = 0$ , то есть  $I^* = I_* = I = \iint_G f(x, y) dx dy$ . ▶

### 1.3 Основные классы интегрируемых функций

**Теорема 1.4 (об интегрируемости непрерывных функций).**  
*Если функция  $z = f(x, y)$  определена и непрерывна на замыкании области  $G$  со спрямляемой границей  $\partial G$ , то она интегрируема на  $G$ .*

◀ Так как функция  $f(x, y)$  непрерывна на  $\overline{G}$  со спрямляемой границей  $\partial G$ , то  $\overline{G}$  – ограниченное замкнутое множество (компакт). По теоре-



**Кафедра**  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



22

Закреть

ме Кантора наша непрерывная на  $\overline{G}$  функция  $f(x, y)$  будет и равномерно непрерывной на  $\overline{G}$  функцией. А это означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \tau_G \lambda_\tau < \delta M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{S_G}.$$

Тогда  $S_{\tau_G} - s_{\tau_G} = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta G_k < \frac{\varepsilon}{S_G} \sum_{k=1}^n \Delta G_k = \frac{\varepsilon}{S_G} S_G = \varepsilon$ , то есть

$$\lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} (S_{\tau_G} - s_{\tau_G}) = 0.$$

А это означает (критерий интегрируемости, теорема 1.1), что функция  $f(x, y)$  интегрируема на  $G$ . ►

**Теорема 1.5 (об интегрируемости разрывных функций).** *Ограниченная на замыкании области  $G$  со спрямляемой границей  $\partial G$  функция  $f(x, y)$  будет интегрируемой на  $G$ , если она непрерывна на  $G$  за исключением множества точек области  $G$  меры нуль (площади нуль).*

**Замечание 1.4.** Мера (площадь) любой спрямляемой кривой из  $\mathbb{R}^2$  равна нулю.

## 1.4 Основные свойства двойного интеграла

**Замечание 1.5.** Основные свойства двойного интеграла мы только перечислим, так как они во многом аналогичны соответствующим свойствам одномерного интеграла Римана.



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



23

Закреть



Кафедра  
высшай  
матэматыкі

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



24

Закреть

**Свойство 1.4 (свойство линейности).** Если функции  $f_1(x, y)$ ,  $f_2(x, y)$  интегрируемы в области  $G$  и  $\alpha_1, \alpha_2$  – любые действительные числа, то функция  $f(x, y) = \alpha_1 f_1(x, y) + \alpha_2 f_2(x, y)$  интегрируема в области  $G$  и справедливо равенство

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \alpha_1 \iint_G f_1(x, y) dx dy + \alpha_2 \iint_G f_2(x, y) dx dy. \quad (1.16)$$

**Свойство 1.5 (свойство аддитивности интеграла).** Если область  $G = \bigcup_{k=1}^n G_k$ , где частичные области  $G_k$  не имеют общих внутренних точек, и функция  $f(x, y)$  интегрируема в любой частичной области  $G_k$ , то в  $G$  функция также интегрируема и справедливо равенство

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \sum_{k=1}^n \iint_{G_k} f(x, y) dx dy. \quad (1.17)$$

**Свойство 1.6 (оценка интеграла по модулю).** Если функция  $f(x, y)$  интегрируема в  $G$ , то и функция  $|f(x, y)|$  интегрируема в  $G$  и справедливо неравенство

$$\left| \iint_G f(x, y) dx dy \right| \leq \iint_G |f(x, y)| dx dy. \quad (1.18)$$

**Свойство 1.7 (теорема о среднем).** Если функция  $f(x, y)$  интегрируема в  $G$  и  $m = \inf_{(x,y) \in \bar{G}} f(x, y)$ , а  $M = \sup_{(x,y) \in \bar{G}} f(x, y)$ , то справедливо неравенство

$$mS_G \leq \iint_G f(x, y) dx dy \leq MS_G, \quad (1.19)$$

где  $S_G$  – площадь области  $G$ .

**Следствие 1.2.** Если в условии теоремы о среднем функция  $f(x, y)$  непрерывна на замыкании области  $G$  со спрямляемой границей  $\partial G$ , то существует такая точка  $M_0(x_0, y_0) \in \bar{G}$ , что

$$\iint_G f(x, y) dx dy = f(M_0) S_G. \quad (1.20)$$



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



25

Закреть

## ЛЕКЦИЯ 2

### Вычисление двойного интеграла. Криволинейные координаты

#### 2.1 Приведение двойного интеграла к повторному

**Теорема 2.1 (случай прямоугольника).** Если функция  $z = f(x, y)$  определена и ограничена на прямоугольнике

$$\bar{\Pi} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{l} a \leq x \leq b, \\ c \leq y \leq d \end{array} \right\}$$

и существует двойной интеграл  $\iint_{\Pi} f(x, y) dx dy$ , а также для любого  $x \in [a, b]$  существует

$$I(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



26

Закреть

(для любого  $y \in [c, d]$  существует  $J(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ ), то существует

$$\int_a^b I(x) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \iint_{\Pi} f(x, y) dx dy$$

$$\left( \text{существует} \int_c^d j(y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \iint_{\Pi} f(x, y) dx dy \right).$$

◀ Рассмотрим случай, когда существует  $\int_c^d f(x, y) dy$ . Так как существует  $\iint_{\Pi} f(x, y) dx dy$ , то можно взять любое разбиение прямоугольника  $\Pi$  на частичные области, т.е. определенное. Покажем это на рисунке 2.1.

Рассмотрим разбиение прямоугольника  $\Pi$  с помощью семейства прямых:

$$1. x = a + x_k \quad (k = \overline{1, n}),$$

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < b = x_n;$$

$$2. y = c + y_i \quad (i = \overline{1, m}),$$

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_{i-1} < y_i < \dots < d = y_m.$$



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



27

Закреть

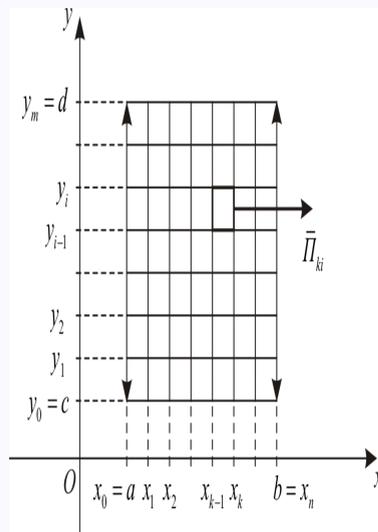


Рисунок 2.1



Кафедра  
высшай  
матэматыкі

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



28

Закреть

На рисунке выделен замкнутый прямоугольник

$$\bar{\Pi}_{ki} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{l} x_{k-1} \leq x \leq x_k, \\ y_{i-1} \leq y \leq y_i \end{array} \right\}.$$

Полученная сетка содержит  $m \times n$  таких частичных прямоугольников. Положим:  $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ ,  $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ ;  $\Delta S_{ki} = \Delta x_k \cdot \Delta y_i$  – площадь частичного прямоугольника  $\Pi_{ki}$ ;

$$m_{ki} = \inf_{(x,y) \in \bar{\Pi}_{ki}} f(x, y), \quad M_{ki} = \sup_{(x,y) \in \bar{\Pi}_{ki}} f(x, y).$$

На частичном прямоугольнике  $\bar{\Pi}_{ki}$  справедливо неравенство

$$m_{ki} \leq f(x, y) \leq M_{ki}. \quad (2.1)$$

Берем любую точку  $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ , фиксируем её. С учетом выбранной точки  $x = \xi_k$  интегрируем (2.1) по отрезку  $[y_{i-1}, y_i]$ , получим:

$$m_{ki} \Delta y_i \leq \int_{y_{i-1}}^{y_i} f(\xi_k, y) dy \leq M_{ki} \Delta y_i. \quad (2.2)$$

Неравенство (2.2) суммируем по всем  $i$  от 1 до  $m$ . Получим:

$$\sum_{i=1}^m m_{ki} \Delta y_i \leq \int_c^d f(\xi_k, y) dy = I(\xi_k) \leq \sum_{i=1}^m M_{ki} \Delta y_i. \quad (2.3)$$



На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



Умножим (2.3) на  $\Delta x_k$  и просуммируем полученные неравенства по всем  $k$  от 1 до  $n$ . Получим:

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m m_{ki} \Delta x_k \Delta y_i \leq \sum_{k=1}^n I(\xi_k) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m M_{ki} \Delta x_k \Delta y_i. \quad (2.4)$$

В двойном неравенстве (2.4) слева имеем нижнюю сумму Дарбу  $\xi_\tau$ , справа – верхнюю сумму Дарбу  $S_{\tau\Pi}$ , а посередине – интегральную сумму функции  $I(x)$  по отрезку  $[a, b]$ .

Так как существует  $\iint_{\Pi} f(x, y) dx dy = A$ , то  $\lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} s_{\tau\Pi} = \lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} S_{\tau\Pi} = A$  ( $\lambda_\tau$  – максимальный из диаметров частичных прямоугольников  $\bar{\Pi}_{ki}$ ).

Используя аналог теоремы о пределе промежуточной функции, получим, что существует

$$\lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n I(\xi_k) \Delta x_k = \int_a^b I(x) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \iint_{\Pi} f(x, y) dx dy.$$

Теорема доказана в случае, когда существует

$$\int_c^d f(x, y) dy = I(x).$$



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



30

Закреть

Случай, когда существует  $\int_a^b f(x, y) dx = J(y)$ , доказывается аналогично. ►

**Замечание 2.1.** Если функция  $f(x, y)$  непрерывна на  $\bar{D}$ , то в теореме выполняются условия для обоих рассматриваемых случаев, поэтому каждый из повторных интегралов будет равен двойному интегралу, а значит, повторные интегралы будут также равны между собой

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \iint_D f(x, y) dx dy. \quad (2.5)$$

Переход при этом от одного повторного интеграла к другому называется изменением порядка интегрирования.

Дальше рассмотрим случаи криволинейной области. Область  $G$  называется простейшей областью первого типа, если она сверху и снизу соответственно ограничена непрерывными кривыми  $y = y_2(x)$  и  $y = y_1(x)$ , а слева и справа – прямыми  $x = a$  и  $x = b$  (рисунок 2.2). Отрезки прямых  $x = a$  и  $x = b$  (граница области  $G$  слева и справа соответственно) могут вырождаться в точки.

Область  $G$  называется простейшей областью второго типа, если она слева и справа соответственно ограничена непрерывными кривыми



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



31

Закреть

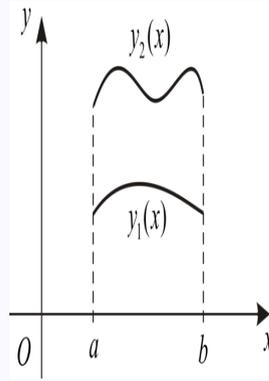


Рисунок 2.2

$x = x_1(y)$  и  $x = x_2(y)$ , а снизу и сверху соответственно прямыми  $y = c$  и  $y = d$  (рисунок 2.3). Отрезки прямых  $y = c$  и  $y = d$  (границы области  $G$  снизу и сверху соответственно) могут вырождаться в точки.

**Теорема 2.2 (случай криволинейной области).** Если существует двойной интеграл  $\iint_G f(x, y) dx dy$ , где  $G$  – простейшая область первого типа (простейшая область второго типа), и для любого  $x \in [a, b]$  существует  $\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy = I(x)$  (для любого  $y \in [c, d]$  существует



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



32

Закреть

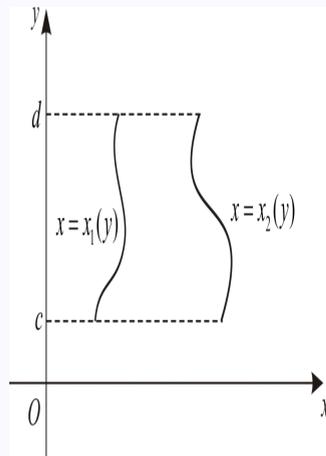


Рисунок 2.3



*Кафедра  
высшай  
матэматыкі*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



33

Закреть

$$\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx = J(y), \text{ тогда}$$

$$\exists \int_a^b I(x) dx = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy = \int_G f(x, y) dx dy$$

$$\left( \exists \int_c^d j(y) dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx = \int_G f(x, y) dx dy \right).$$

◀ Рассмотрим случай, когда для любого  $x \in [a, b]$  существует

$$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy = I(x).$$

Построим прямоугольник

$$\bar{\Pi} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{l} a \leq x \leq b, \\ c \leq y \leq d \end{array} \right\},$$

где  $c$  – минимум функции  $y = y_1(x)$ , а  $d$  – максимум функции  $y = y_2(x)$  (рисунок 2.4). Имеем:  $\bar{\Pi} = ABCD \supset \bar{G}$ . Определим функцию

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{если } (x, y) \in \bar{G}, \\ 0, & \text{если } (x, y) \in \bar{\Pi} \setminus \bar{G}. \end{cases} \quad (2.6)$$



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



34

Закреть

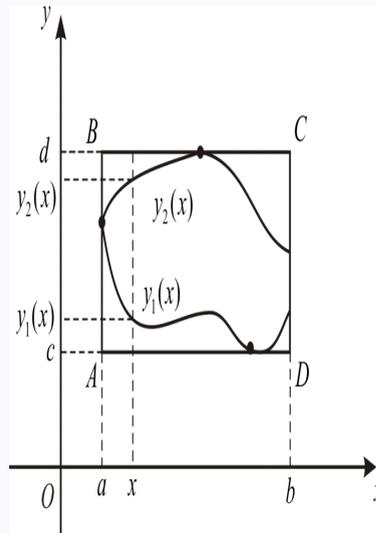


Рисунок 2.4

Для функции  $F(x, y)$  выполняются все условия теоремы 2.1 (случай, когда для любого  $x \in [a, b]$  существует  $\int_c^d f(x, y) dy = I(x)$ ). Тогда справедливо и заключение теоремы.

Для нашего случая будем иметь:

$$\int_a^b dx \int_c^d F(x, y) dy = \int_a^b dx \left( \int_c^{y_1(x)} 0 \cdot dy + \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy + \int_{y_2(x)}^d 0 \cdot dy \right) =$$



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



35

Закреть

$$\begin{aligned}
 &= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy = \iint_{\Pi} F(x, y) dx dy = \\
 &= \iint_G f(x, y) dx dy + \iint_{\Pi \setminus G} 0 dx dy = \iint_G f(x, y) dx dy.
 \end{aligned}$$

Теорема доказана для простейшей криволинейной области первого типа. Аналогично доказывается теорема для простейшей криволинейной области второго типа. ►

**Замечание 2.2.** Если область  $G$  является простейшей как первого, так и второго типов, и функция  $f(x, y)$  непрерывна на  $\overline{G}$ , то будут выполняться условия теоремы для обоих случаев.

Тогда оба повторных интеграла будут существовать, причем каждый из них будет равен существующему двойному интегралу, то есть повторные интегралы будут равны между собой.

$$\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx = \iint_G f(x, y) dx dy. \quad (2.7)$$

Переход от одного повторного интеграла ко второму называется **изменением порядка интегрирования**. На практике (чаще всего) при



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



«»

»»

36

Закреть

проведении операции изменения порядка интегрирования простейшая область интегрирования одного типа есть объединение конечного числа частичных простейших областей второго типа. В этом случае проводим изменение порядка интегрирования для каждой из таких частичных областей. В дальнейшем (при решении задач) будем предполагать, что двойной интеграл для функции  $f(x, y)$  по данной области существует.

**Пример 2.1.** Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле

$$\int_0^2 dx \int_{\frac{1}{2}(x-2)}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy.$$

◀ Вначале изобразим на рисунке 2.5 область интегрирования для соответствующего двойного интеграла. Строим графики функции  $x = 0$ ,  $x = 2$ ,  $y = \sqrt{4 - x^2}$ ,  $y = \frac{x-2}{2}$ . Область интегрирования  $G$  – это криволинейный треугольник  $ABcD$  (без границы). Обозначим наш повторный интеграл через  $I$ .

При изменении порядка интегрирования можно применить следующий формальный способ. После изменения порядка интегрирования в повторном интеграле внешнее интегрирование должно проводиться по  $y$  (нижний предел интеграла – самая малая ордината точек границы области интегрирования, верхний предел – самая большая). Во внутреннем



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



37

Закреть

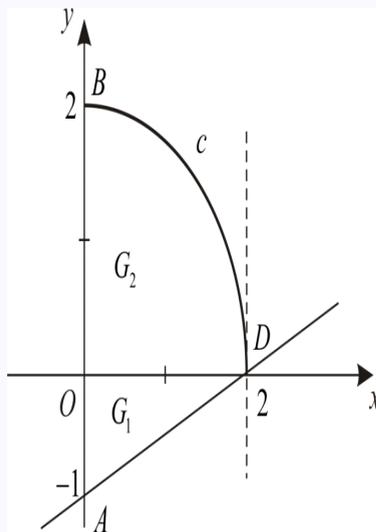


Рисунок 2.5



Брэсцкі  
Дзяржаўны ўніверсітэт  
імя А.С. Пушкіна

*Кафедра  
высшай  
матэматыкі*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



38

Закреть

интеграле параллельные прямые оси  $Ox$  должны входить в область интегрирования через одну кривую (одно аналитическое выражение кривой), а выходить – через другую (также одно аналитическое выражение этой кривой). В нашей задаче, если  $y = -1$  – взять нижний пределом интегрирования, а  $y = 2$  – верхним, то указанный выше выход уже будет проходить через две разные кривые (прямую и окружность).

По этой причине область интегрирования  $G$  представим в виде объединения  $G = G_1 \cup G_2$  (рисунок 2.5).

Используя свойство аддитивности двойного интеграла, получим:

$$\int_0^2 dx \int_{\frac{x-2}{2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy = \iint_G f(x, y) dx dy =$$

$$= \iint_{G_1} f(x, y) dx dy + \iint_{G_2} f(x, y) dx dy = I_1 + I_2. \quad (2.8)$$

К каждому из полученных интегралов  $I_i$ ,  $i = 1, 2$ , можно уже применить (для соответствующих повторных интегралов) указанный выше метод изменения порядка интегрирования.

Для границы области  $G_1$  имеем: минимальная ордината точек границы  $y = -1$  (нижний предел интегрирования), максимальная –  $y = 0$



На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



(верхний предел интегрирования). Также для  $G_2 - y = 0$  (нижний предел интегрирования),  $y = 2$  (верхний). В область  $G_1$  указанные выше параллельные оси  $Ox$  прямые входят через прямую  $x = 0$ , а выходят через прямую  $x = 2y + 2$ . В области  $G_2$  указанные прямые  $y = \text{const}$  входят через прямую  $x = 0$ . Найдем выход этих прямых

$$y = \sqrt{4 - x^2} \geq 0, y^2 = 4 - x^2, x^2 = 4 - y^2, x \geq 0, x = \sqrt{4 - y^2}.$$

Прямые  $y = \text{const}$  выходят из области  $G_2$  через кривую  $x = \sqrt{4 - y^2}$ . Кривая входа – нижний предел интегрирования, кривая выхода – верхний. Окончательно получим искомый ответ

$$\int_0^2 dx \int_{\frac{x-2}{2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy = \int_{-1}^0 dy \int_0^{2y+2} f(x, y) dx + \int_0^2 dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx. \blacktriangleright$$

**Пример 2.2.** Вычислить двойной интеграл  $I = \iint_G x^2 dx dy$ , если область  $G$  ограничена кривыми  $y = x$ ,  $y = \frac{1}{x}$ ,  $x = 2$ .

◀ Изображаем на рисунке 2.6 область интегрирования, построив графики указанных в задаче функций. Заменяем двойной интеграл (он существует, так как подынтегральная функция  $f(x, y) = x^2$  непрерывна



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



40

Закреть

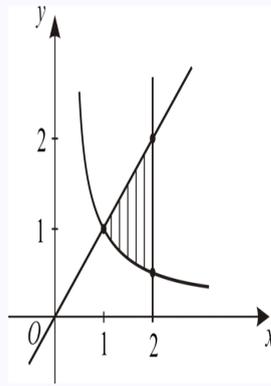


Рисунок 2.6

на замыкании области интегрирования) повторным. Внешнее интегрирование лучше взять по  $x$ , так как область интегрирования  $G$  – это простейшая область первого типа. Если же внешнее интегрирование взять по  $y$ , то область  $G$  надо разбить прямой  $y = 1$  на две простейшие области второго типа.

$$\iint_G x^2 dx dy = \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^x dy = \int_1^2 x^2 y \Big|_{\frac{1}{x}}^x dx = \int_1^2 x^2 \left( x - \frac{1}{x} \right) dx =$$

$$= \int_1^2 (x^3 - x) dx = \frac{x^4}{4} \Big|_1^2 - \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 = \frac{1}{4} (2^4 - 1^4) - \frac{1}{2} (2^2 - 1^2) = \frac{15}{4} - \frac{6}{4} = \frac{9}{4}.$$



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



41

Закрыть

Ответ:  $I = \frac{9}{4}$ . ►

## 2.2 Криволинейные координаты

Пусть даны указанные в пункте 1 две декартовы системы координат (рисунок 2.7 – система координат  $xOy$  и рисунок 2.7 – система координат  $uOv$ ) и соответственно в указанных координатных плоскостях области  $G$  и  $D$  с кусочно-гладкими границами  $\partial G$  и  $\partial D$ . Также даны указанные в пункте 1 функции  $x = \varphi(u, v)$ ,  $y = \psi(u, v)$ .

Прямые  $u = u_0$ ,  $v = v_0$  в плоскости  $uOv$  назовем **координатными линиями** (они параллельны соответственно координатным осям  $Ou$  и  $Ov$  и проходят через область  $D$ ). Точка  $M_0 = (u_0, v_0) \in D$  имеет в системе координат  $uOv$  декартовы координаты. Указанные координатные линии  $u = u_0$ ,  $v = v_0$  плоскости  $uOv$  функции  $x = \varphi(u, v)$ ,  $y = \psi(u, v)$  отображают в плоскости  $xOy$  в некоторые кривые (криволинейные координатные линии плоскости  $xOy$ ). Точка пересечения этих кривых в плоскости  $xOy$  имеет, говорят, криволинейные координаты  $u_0$  и  $v_0$  области  $G$ . В плоскости  $xOy$  будем иметь криволинейную ортогональную систему координат.



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



42

Закреть

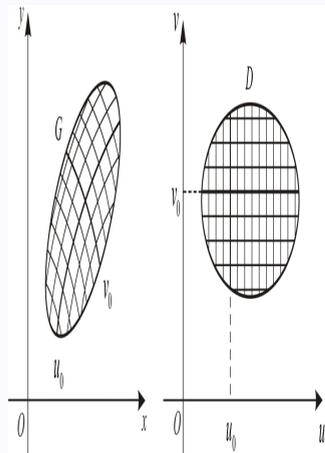


Рисунок 2.7



Кафедра  
высшай  
матэматыкі

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



43

Закреть

## 2.3 Площадь в криволинейных координатах

**Замечание 2.3.** При замене переменных в двойном интеграле основная проблема состоит в том, чтобы выразить через криволинейные координаты площадь исходной квадратируемой области  $G$ .

**Теорема 2.3.** Если отображение области  $D$  на область  $G$  удовлетворяет всем условиям отображения областей, указанным в пункте 1, то площадь области  $G$  будет находиться по формуле

$$S_G = \iint_G dx dy = \iint_D \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| dudv. \quad (2.9)$$

◀ Доказательство теоремы проведём на так называемом «физическом уровне строгости». Рассмотрим бесконечно малый криволинейный параллелограмм  $A_0A_1A_3A_2$ . Имеем:  $A_0(u_0, v_0) = A_0(x_0, y_0)$ ,  $A_1(u_0 + \Delta u, v_0) = A_1(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$  (рисунок 2.8).

Найдем координаты вектора  $\overrightarrow{A_0A_1}$ :  $\overrightarrow{A_0A_1} = (\Delta x, \Delta y)$ , но

$$dx \approx \Delta x = \frac{\varphi(u_0 + \Delta u, v_0) - \varphi(u_0, v_0)}{\Delta u} \Delta u \approx \frac{\partial x}{\partial u} du$$

аналогично

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u} du; \quad \overrightarrow{A_0A_1} = \left( \frac{\partial x}{\partial u} du, \frac{\partial y}{\partial u} du \right).$$



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



44

Закреть

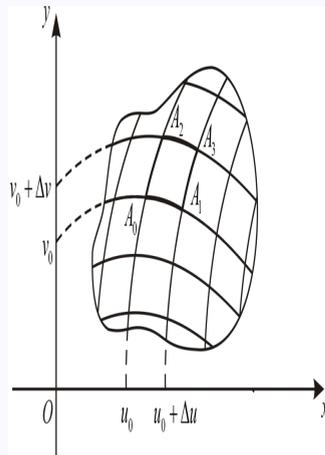


Рисунок 2.8



На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



Закреть

Также будем иметь:  $\overrightarrow{A_0A_2} = \left( \frac{\partial x}{\partial v} dv, \frac{\partial y}{\partial v} dv \right)$ . Площадь криволинейного параллелограмма  $A_0A_1A_3A_2$  находим по формуле

$$dS_{A_0A_1A_3A_2} = \left\| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial u} du & \frac{\partial y}{\partial u} du \\ \frac{\partial x}{\partial v} dv & \frac{\partial y}{\partial v} dv \end{array} \right\| = \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| dudv. \quad (2.10)$$

Формула (2.10) есть элемент величины площади области  $G$  в криволинейных координатах. Тогда площадь области  $G$  будет вычисляться по формуле

$$S_G = \iint_G \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| dudv. \blacktriangleright \quad (2.11)$$



*Кафедра  
высшай  
матэматыкі*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



46

Закреть

## ЛЕКЦИЯ 3

# Замена переменных в двойном интеграле. Геометрические и физические приложения

### 3.1 Замена переменных в двойном интеграле

Замена переменных в интегральном исчислении для функции одной переменной служит для упрощения подынтегральных функций. В теории двойных интегралов замена переменных позволяет, с одной стороны, также упрощать подынтегральную функцию, с другой же стороны, при замене переменных происходит упрощение области интегрирования.

#### Отображение плоских областей

Пусть в системе координат  $xOy$  дана область  $G$  с кусочно-гладкой границей  $\partial G$ , а в системе координат  $uOv$  дана область  $D$  также с кусочно-гладкой границей  $\partial D$  (кривая, заданная параметрической системой уравнений  $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} t \in [\alpha, \beta]$ , называется гладкой, если функции  $\varphi$  и  $\psi$  непрерывно дифференцируемы на отрезке  $[\alpha, \beta]$   $(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 > 0$ . Если же отрезок  $[\alpha, \beta] = \bigcup_{k=1}^n [\alpha_k, \beta_k]$ , где частичные отрезки  $[\alpha_k, \beta_k]$  не имеют общих внутренних точек и кривая является гладкой на каждом частичном интервале, а в конечных точках этих интегралов существуют односторонние производные).



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



47

Закреть

1. Функции  $x = \varphi(u, v)$  и  $y = \psi(u, v)$  отображают область  $D$  на область  $G$  и  $\partial D$  на  $\partial G$ . Существуют однозначные решения  $u = \varphi^{-1}(x, y)$ ,  $v = \psi^{-1}(x, y)$  системы уравнений  $\begin{cases} x = \varphi(u, v), \\ y = \psi(u, v). \end{cases}$

2. Функции  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\varphi^{-1}$ ,  $\psi^{-1}$  и существующие их частные производные первого порядка непрерывны соответственно на  $\bar{D} = D \cup \partial D$  и на  $\bar{G} = G \cup \partial G$ .

3. Функциональный определитель в  $D$

$$I = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

называется определителем Якоби<sup>1</sup> или якобианом.

**Замечание 3.1.** Справедливо равенство

$$I \cdot J = 1, \text{ где } J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial x} & \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi^{-1}}{\partial x} & \frac{\partial \psi^{-1}}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

◀ Воспользуемся правилом умножения определителей.

$$I \cdot J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}. \quad (3.1)$$

<sup>1</sup> Якоби Карл Густав Якоб (1804–1851) – немецкий математик.



На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



Закреть

Для упрощения (3.1) воспользуемся правилом дифференцирования сложной функции

$$x = \varphi(\varphi^{-1}(x, y), \psi^{-1}(x, y)), \quad y = \psi(\varphi^{-1}(x, y), \psi^{-1}(x, y)),$$

$$1 = \frac{dx}{dx} = \frac{\partial x}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$1 = \frac{dy}{dy} = \frac{\partial y}{\partial y} = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$0 = \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}, \quad 0 = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Из последних выкладок и равенства (3.1) следует справедливость доказываемого утверждения. ►

**Теорема 3.1.** Пусть функции  $x = \varphi(u, v)$ ,  $y = \psi(u, v)$  и существующие их частные производные первого порядка непрерывны на замыкании области  $D$  с кусочно-гладкой границей  $\partial D$  и биективно ( $\varphi$  и  $\psi$ ) отображают область  $D$  на область  $G$ , а границу  $\partial D$  на кусочно-гладкую границу  $\partial G$ . Якобиан  $I = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \neq 0$ . Если функция  $f(x, y)$  непрерывна на  $\overline{G}$  или ограничена на  $\overline{G}$  и непрерывна на  $G$  за исключением, может быть, множества точек меры нуль (площади нуль), то

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \iint_D f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) |I| du dv. \quad (3.2)$$



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



49

Закреть

◀ Берём любое разбиение  $\tau_G$  области  $G$  на  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , частичных областей  $G_k$ ,  $k = \overline{1, n}$  (без общих внутренних точек), с помощью системы из  $m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , кусочно-гладких кривых  $L_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ .

В области  $G$  обозначим через  $\Delta S_{G_k}$  элемент площади. Берём любую точку  $M_k(x_k, y_k) \in \overline{G_k}$  и составляем интегральную сумму

$$\sigma_{\tau_G} = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta S_{G_k}. \quad (3.3)$$

По формуле (2.10) находим

$$\Delta S_{G_k} = \iint_{D_k} \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| dudv, \quad (3.4)$$

где  $D_k$  – образ  $G_k$  при отображении  $u = \varphi^{-1}(x, y)$ ,  $v = \psi^{-1}(x, y)$  (обратном для отображения  $x = \varphi(u, v)$ ,  $y = \psi(u, v)$ ).

Якобиан  $I(u, v) = \frac{D(x, y)}{D(u, v)}$  есть функция, непрерывная на  $\overline{D}$ . По теореме о среднем (из (3.4)) получим:

$$\Delta S_{G_k} = |I(u_k, v_k)| \Delta S_{D_k}, \quad (3.5)$$

где  $\Delta S_{G_k}$  – площадь частичной области  $D_k$ . В силу произвола выбора точек  $(x_k, y_k) \in G_k$  положение  $x_k = \varphi(u_k, v_k)$ ,  $y_k = \psi(u_k, v_k)$ .



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



50

Закреть

Получим интегральную сумму

$$\sigma_{\tau_D} = \sum_{k=1}^n f(\varphi(u_k, v_k), \psi(u_k, v_k)) |I(u_k, v_k)| \Delta S_{D_k}. \quad (3.6)$$

Это интегральная сумма для интеграла

$$\iint_D f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) |I(u, v)| dudv. \quad (3.7)$$

Интеграл (3.7) существует, так как подынтегральная функция или непрерывна на  $\bar{D}$  и множество точек разрыва на  $D$  имеет меру нуль (площадь этого множества равна нулю). С другой стороны, в силу непрерывности отображения будет при  $\lambda_{\tau_{D_k}} \rightarrow 0$  и  $\lambda_{\tau_{G_k}} \rightarrow 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda_{\tau_G} \rightarrow 0} \sigma_{\tau_G} &= \iint_G f(x, y) dx dy = \lim_{\lambda_{\tau_D} \rightarrow 0} \sigma_{\tau_D} = \\ &= \iint_D f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) |I(u, v)| dudv. \blacktriangleright \end{aligned}$$

### 3.2 Якобиан в полярных криволинейных координатах

Чаще всего на практике используют так называемые полярные координаты, которые связаны с декартовыми координатами с помощью



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



51

Закреть

следующей системы уравнений

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \end{cases} \quad (3.8)$$

где  $r \geq 0$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ .

Координатными криволинейными ортогональными линиями на плоскости в этом случае будут концентрические окружности с центром в начале координат и радиусом  $r = r_0 = \text{const}$  (при  $r = 0$  окружности вырождаются в точку), а также лучи  $\varphi = \varphi_0 = \text{const}$ , выходящие из начала координат. Функции (3.8) отображают полуполосу  $r \geq 0$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$  декартовой плоскости  $rO\varphi$  на всю плоскость  $xOy$ . При этом надо учесть, что биективность отображения нарушается при  $\begin{cases} r = 0, \\ 0 \leq \varphi < 2\pi \end{cases}$  (точки указанного полуинтервала отображаются в начало координат).

Исключим в плоскости  $xOy$  начало координат, получим обратные отображения проколотой плоскости  $xOy$  на полуполосу  $\begin{cases} r > 0, \\ 0 \leq \varphi < 2\pi \end{cases}$ .

Обратное отображение будет непрерывно везде, кроме положительной полуоси  $Ox$ . Если  $y \rightarrow -0$ ,  $x > 0$ , то  $\varphi \rightarrow 2\pi$ , при  $y \rightarrow +0$ ,  $x > 0$  будет  $\varphi \rightarrow 0$ , но для  $y = 0$  и  $x > 0$  будет  $\varphi = 0$ . Вывод: формулы

лы  $\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$ , устанавливают биективное отображение полуполосы



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



52

Закреть

$\begin{cases} r > 0, \\ 0 \leq \varphi < 2\pi \end{cases}$  на проколотую в начале координатной плоскости  $xOy$ ,  
 причем это отображение непрерывно везде, кроме тех точек, в которых  
 $r = 0$  или  $\varphi = 0$ .

Обратное отображение будет определяться формулами  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$   
 и

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, & y > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}; \\ 0, & x > 0, \quad y = 0; \\ \pi, & x < 0, \quad y > 0; \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, & y < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3.9)$$

Найдем Якобиан указанного отображения (3.8)

$$\frac{D(x, y)}{D(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r,$$

причём  $r \neq 0$  ( $r > 0$ ) везде, кроме точки  $x = y = 0$ .

**Пример 3.1.** Вычислить двойной интеграл

$$I = \iint_G \sqrt{4 - x^2 - y^2} dx dy,$$

где  $G$  – внутренность кривой  $x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1$ .



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



53

Закреть

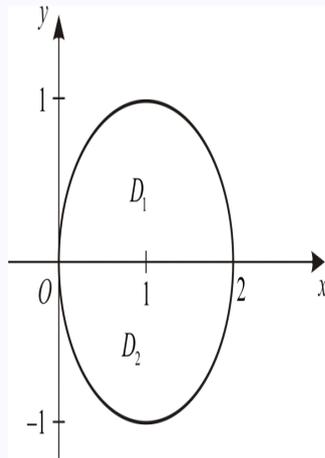


Рисунок 3.1

► На рисунке 3.1 покажем область интегрирования.

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1, \quad (x - 1)^2 + y^2 = 1.$$

Переходим к полярным координатам. Область интегрирования:

$$r^2 = 2r \cos \varphi, \quad r = 2 \cos \varphi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad I = \iint_G \sqrt{4 - r^2} r dr d\varphi.$$

Так как область интегрирования симметрична относительно оси  $Ox$ ,



*Кафедра  
высшай  
матэматыкі*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



54

Закреть

а подынтегральная функция симметрична относительно обеих координатных осей, то

$$\begin{aligned}
 I &= 2 \iint_{G_1} \sqrt{4-r^2} r dr d\varphi = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} (u-r^2)^{\frac{1}{2}} d(u-r^2) = \\
 &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(4-r^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^{2 \cos \varphi} d\varphi = - \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( (4-4 \cos^2 \varphi)^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}} \right) d\varphi = \\
 &= - \frac{2}{3} \left( 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi d\varphi - 8 \cdot \frac{\pi}{2} \right) = - \frac{16}{3} \left( - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 \varphi) d \cos \varphi - \frac{\pi}{2} \right) = \\
 &= - \frac{16}{3} \left( - \cos \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \cos^3 \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2} \right) = - \frac{16}{3} \left( 1 - \frac{1}{3} - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{8}{3} \pi - \frac{32}{9}.
 \end{aligned}$$

**Ответ:**  $I = \frac{8}{3} \pi - \frac{32}{9}$ . ►

### 3.3 Геометрические и физические приложения двойного интеграла

Из задачи об объеме криволинейного цилиндра, приводящей к понятию двойного интеграла, следует геометрический смысл двойного инте-



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



55

Закреть

грала. С геометрической точки зрения двойной интеграл

$$\iint_G f(x, y) dx dy \quad (3.10)$$

есть объем криволинейного цилиндра, у которого нижнее основание есть  $\overline{G}$  – замыкание области  $G$  с кусочно-гладкой границей  $\partial G$ . Сбоку указанное тело ограничено цилиндрической поверхностью с направляющей  $\partial G$  и образующими, параллельными оси  $Oz$ . Верхнее основание цилиндра есть график функции  $f(x, y)$ , определенный на  $\overline{G}$ , причем указанная поверхность (график  $f(x, y)$ ) кусочно-гладкая.

**Замечание 3.2.** Если в формуле (3.10)  $f(x, y) = 1$ , то с геометрической точки зрения

$$\iint_G dx dy \quad (3.11)$$

есть площадь указанной области  $G$ .

**Пример 3.2.** Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x + 1 = z^2, \quad x - 1 = -z^2, \quad y = 0, \quad y = z^2 + x^2.$$

◀ Наше тело симметрично относительно оси  $Oy$  (оно расположено в первом, втором, пятом и шестом октантах). Находим объем тела и



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



56

Закреть

умножаем полученное число на 4, получим объем всего тела.  $AmB$  – кривая пересечения поверхностей  $y = x^2 + z^2$  и  $x - 1 = -z^2$ ;  $AnB$  – дуга окружности  $\begin{cases} y = 1, \\ y = x^2 + z^2 \end{cases}$  в первом октанте (рисунок 3.2).

$$\begin{aligned}
 V &= 4 \iint_{G_1} (z^2 + x^2) dx dz = \left[ \begin{array}{l} x - 1 = -z^2, \quad z^2 = 1 - x, \\ z = \sqrt{1 - x}, \quad z \geq 0 \end{array} \right] = \\
 &= 4 \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x}} (z^2 + x^2) dz = 4 \int_0^1 \left( \frac{z^3}{3} \Big|_0^{\sqrt{1-x}} + x^2 z \Big|_0^{\sqrt{1-x}} \right) dx = \\
 &= 4 \int_0^1 \frac{1}{3} \sqrt{(1-x)^3} dx + 4 \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x} dx = \\
 &= -\frac{4}{3} \cdot \frac{(1-x)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \Big|_0^1 + 4 \left[ \begin{array}{l} \sqrt{1-x} = t, \\ t_H = 1, \\ t_B = 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} 1-x = t^2, \\ x = 1-t^2, \\ dx = -2t dt \end{array} \right. \right] = \\
 &= \frac{8}{15} + 4 \int_1^0 (1-t^2)^2 t (-2t) dt = \frac{8}{15} - 4 \int_0^1 (1-2t^2+t^4) (-2t^2) dt =
 \end{aligned}$$



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

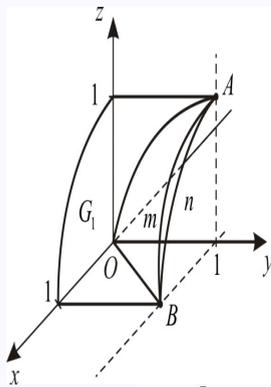
Приложение

Назад

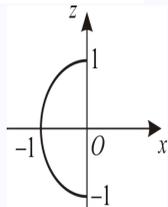


57

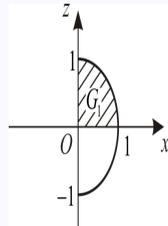
Закреть



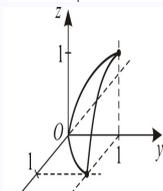
$$x + 1 = z^2$$



$$x - 1 = -z^2$$



$$y = x^2 + z^2$$



На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



$$= \frac{8}{15} + 8 \int_0^1 (t^2 - 2t^4 + t^6) dt = \frac{8}{15} + 8 \left( \frac{t^3}{3} \Big|_0^1 - 2 \frac{t^5}{5} \Big|_0^1 + \frac{t^7}{7} \Big|_0^1 \right) =$$

$$= \frac{8}{15} + \frac{8}{3} - \frac{16}{5} + \frac{8}{7} = \frac{8 + 40 - 48}{15} + \frac{8}{7} = \frac{8}{7} \text{ (куб. ед.)}.$$

**Ответ:**  $V = \frac{8}{7}$  (куб. ед.).▶

**Пример 3.3.** С помощью двойного интеграла вычислить в полярных координатах площадь плоской фигуры, ограниченной кривой

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 (3x^2 + 2y^2), \quad a > 0.$$

◀ Преобразуем уравнение кривой, используя полярные координаты

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi. \end{cases}$$

Получим:

$$r^4 = a^2 r^2 (3 \cos^2 \varphi + 2 \sin^2 \varphi); \quad r^2 = a^2 (\cos^2 \varphi + 2); \quad r = a \sqrt{\cos^2 \varphi + 2}.$$

Построим эскиз нашей кривой (рисунок 3.3).

$\varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$2\pi$
$r$	$\sqrt{3}a$	$\sqrt{2}a$	$\sqrt{3}a$	$\sqrt{2}a$	$\sqrt{3}a$



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



59

Закреть

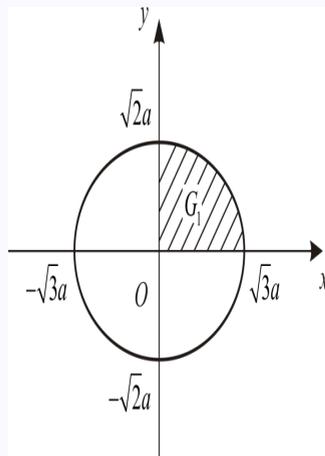


Рисунок 3.3



*Кафедра  
высшай  
матэматыкі*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



60

Закреть

Вычисляем площадь нашей плоской фигуры.

$$\begin{aligned} S &= 4 \iint_{G_1} dx dy = 4 \iint_{D_1} r dr d\varphi = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos^2 \varphi + 2}} r dr = \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2}{2} \Big|_0^{a\sqrt{\cos^2 \varphi}} d\varphi = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 (\cos^2 \varphi + 2) d\varphi = \\ &= 2a^2 \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \right) = \\ &= 2a^2 \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + 2 \cdot \frac{\pi}{2} \right) = a^2 \pi \frac{5}{2} = \frac{5a^2 \pi}{2} \text{ (кв.ед.)}. \end{aligned}$$

**Ответ:**  $S = \frac{5a^2 \pi}{2}$  (кв.ед.). ►

Далее рассмотрим некоторые физические приложения двойного интеграла.

Из задачи о массе материальной плоской неоднородной фигуры (пластинки)  $G$  следует, что эта масса вычисляется по формуле

$$m_G = \iint_G \rho(x, y) dx dy, \quad (3.12)$$



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



61

Закреть

где область  $G$  с кусочно-гладкой границей  $\partial G$ . Функция  $\rho(x, y)$  (предположим) непрерывна на  $\bar{G} = G \cup \partial G$  (в этом случае интеграл (3.12) будет существовать. Физический смысл функции – это плотность, с которой распределена в  $G$  масса (в общем случае считаем, что  $\rho(x, y) \neq \text{const}$ ).

**Пример 3.4.** Плоское кольцо ограничено двумя концентрическими окружностями, радиусы которых соответственно равны 1 и 3. Зная, что плотность материала пропорциональна расстоянию от центра окружности, найти массу кольца, если плотности на окружности внутреннего круга равна единице.

◀ Введем декартовую систему координат с началом в центре кольца (рисунок 3.4).

Вычислим массу кольца по формуле

$$m = \iint_G \rho(x, y) dx dy.$$

У нас плотность  $\rho(x, y) = k\sqrt{x^2 + y^2}$ .

$$m = \iint_G k\sqrt{x^2 + y^2} dx dy = k \iint_D r^2 dr d\varphi = 4k \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_1^3 r^2 dr =$$



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



62

Закреть

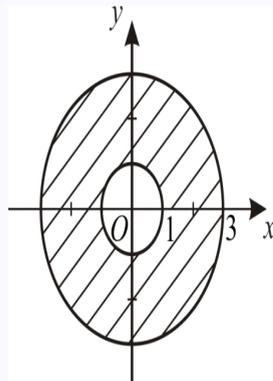


Рисунок 3.4

$$= 4k \frac{\pi}{2} \cdot \frac{r^3}{3} \Big|_1^3 = k \frac{2}{3} \pi (3^3 - 1^3) = \frac{52}{3} \pi k \text{ (ед. массы).}$$

Вспользуемся граничными условиями. Длина единичной окружности  $C = 2\pi \cdot 1 = 2\pi$ . Масса ее  $m_c = 2\pi \cdot 1 = 2\pi$  – с одной стороны, а с другой стороны  $m_c = 2\pi \cdot k \cdot 1 = 2\pi k$ . Из равенства  $2\pi k = 2\pi$  находим, что  $k = 1$ .

**Ответ:**  $m = \frac{52}{3} \pi$  (ед. массы). ►



*Кафедра  
высшай  
матэматыкі*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



63

Закреть

### 3.4 Статические моменты

Знаем, что статическим моментом точки массы  $m$  относительно оси  $l$  называется произведение массы  $m$  на расстояние  $d$  точки до оси  $l$ .

$$M_l = md. \quad (3.13)$$

Найдем статические моменты материальной пластинки  $G$  (область  $G$  с кусочно-гладкой границей  $\partial G$ ) относительно координатных осей. Элемент массы материальной пластинки  $G$  – это  $dm = \rho(x, y)dxdy$ . Тогда элементы статических моментов этой пластинки будут:

а)  $dM_{Ox} = y\rho(x, y)dxdy$  – элемент статического момента пластинки относительно оси  $Ox$ ;

б)  $dM_{Oy} = x\rho(x, y)dxdy$  – элемент статического момента пластинки относительно оси  $Oy$ .

Тогда указанные статические моменты будут вычисляться по формулам:

$$M_{Oy} = \iint_G x\rho(x, y)dxdy \quad (3.14)$$

и

$$M_{Ox} = \iint_G y\rho(x, y)dxdy. \quad (3.15)$$



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



64

Закреть

**Пример 3.5.** Найти статический момент круга радиуса  $R$  относительно его касательной ( $\rho(x, y) = 1$ ).

◀ Поместим круг в координатную плоскость так, чтобы касательная совпала с осью  $Ox$ , точка касания – начало координат (круг – в верхней полуплоскости, рисунок 3.5).

Уравнение окружности:  $x^2 + (y - R)^2 = R^2$  или (в полярной системе координат).

$$x^2 + y^2 - 2yR + R^2 = R^2, \quad r^2 = 2rR \sin \varphi, \quad r = 2R \sin \varphi.$$

По формуле (3.15) находим статический момент, считая  $\rho(x, y) = 1$ .

$$\begin{aligned} M_{Ox} &= \iint_G y dx dy = \iint_D r \sin \varphi \cdot r dr d\varphi = \\ &= \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \int_0^{2R \sin \varphi} r^2 dr = \int_0^\pi \sin \varphi \cdot \frac{r^3}{3} \Big|_0^{2R \sin \varphi} d\varphi = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^\pi \sin \varphi \cdot 8R^3 \sin^3 \varphi d\varphi = \frac{8R^3}{3} \int_0^\pi (\sin^2 \varphi)^2 d\varphi = \end{aligned}$$



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



65

Закреть

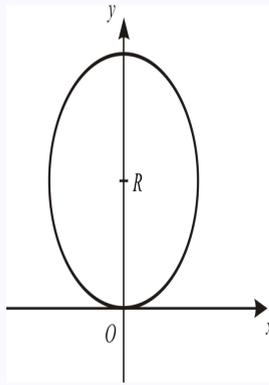


Рисунок 3.5

$$\begin{aligned}
 &= \frac{8R^3}{3} \int_0^{\pi} \left( \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \right)^2 d\varphi = \frac{8R^3}{3} \cdot \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \left( 1 - 2 \cos 2\varphi + \frac{1 + \cos 4\varphi}{2} \right) d\varphi = \\
 &= \frac{2R^3}{2} \cdot \frac{3}{2} \pi = \pi R^3.
 \end{aligned}$$

Ответ:  $M_{Ox} = \pi R^3$ . ►



Кафедра  
высшай  
матэматыкі

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



66

Закреть

## ЛЕКЦИЯ 4

### Геометрические и физические приложения двойного интеграла. Тройной интеграл

#### 4.1 Координаты центра масс материальной пластинки

**Определение 4.1.** *Центром тяжести плоской квадратуемой материальной пластинки  $G$  ( $G$  – квадратуема, если, например,  $\partial G$  – кусочно-гладкая) называется такая точка  $M_0(x_c, y_c) \in \mathbb{R}^2$ , что если в этой точке сосредоточить всю массу пластинки  $G$ , то статические моменты этой точки относительно координатных осей будут соответственно равны статическим моментам пластинки  $G$  относительно координатных осей.*

Из определения 4.1 получаем формулы для вычисления координат центра тяжести материальной пластинки  $G$

$$m_G \cdot y_c = M_{0x} \quad \text{и} \quad m_G \cdot x_c = M_{0y},$$
$$x_c = \frac{M_{0y}}{m_G}, \quad y_c = \frac{M_{0x}}{m_G}. \quad (4.1)$$

**Пример 4.1.** Найти координаты центра тяжести однородной пластинки  $G$  ( $\rho = 1$ ) с кусочно-гладкой границей  $\partial G$ , имеющей форму кругового сектора с центральным углом  $\alpha$  и радиусом  $R$ .



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



67

Закреть

◀ Воспользуемся формулами (4.1). Масса сектора при  $(\rho = 1)$  будет численно равна площади сектора. Тогда  $m_G = \frac{\alpha}{2}R^2$ .

Находим статические моменты по формулам (3.14) и (3.15).

$$\begin{aligned} M_{0x} &= \iint_G y dx dy = \iint_D r \sin \varphi \cdot r dr d\varphi = \int_0^\alpha \sin \varphi d\varphi \int_0^R r^2 dr = \\ &= -\cos \varphi \Big|_0^\alpha \cdot \frac{r^3}{3} \Big|_0^R = -(\cos \alpha - 1) \cdot \frac{R^3}{3} = \frac{1 - \cos \alpha}{3} R^3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{0y} &= \iint_G x dx dy = \iint_D r \cos \varphi \cdot r dr d\varphi = \\ &= \int_0^\alpha \cos \varphi d\varphi \int_0^R r^2 dr = \sin \varphi \Big|_0^\alpha \cdot \frac{r^3}{3} \Big|_0^R = \frac{\sin \alpha}{3} R^3. \end{aligned}$$

Дальше находим координаты центра масс:

$$x_c = \frac{\frac{\sin \alpha}{3} R^3}{\frac{\alpha}{2} R^2} = \frac{2R \sin \alpha}{3\alpha};$$

$$y_c = \frac{\frac{1 - \cos \alpha}{3} R^3}{\frac{\alpha}{2} R^2} = \frac{2R(1 - \cos \alpha)}{3\alpha}.$$



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



68

Закреть

Получили центр тяжести указанного сектора:

$$M_0(x_c, y_c) = M_0 \left( \frac{2R \sin \alpha}{3\alpha}, \frac{2R(1 - \cos \alpha)}{3\alpha} \right).$$

Очевидно, что центр тяжести (точка  $M_0$ ) лежит на биссектрисе угла  $\alpha$ . Найдем расстояние от точки  $M_0$  до вершины сектора (начало координат):

$$d(O, M_0) = \sqrt{\frac{4}{9\alpha^2} \left( 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \right)^2 R^2 + \frac{16}{9\alpha^2} \sin^4 \frac{\alpha}{2} R^2} = \frac{4R}{3\alpha} \sin \frac{\alpha}{2}.$$

**Ответ:**  $M_0(x_c, y_c) = M_0 \left( \frac{2R \sin \alpha}{3\alpha}, \frac{2R(1 - \cos \alpha)}{3\alpha} \right)$ . ▶

## 4.2 Момент инерции плоской материальной квадратируемой пластинки

Момент инерции материальной точки массы  $m$  относительно оси  $l$  – это произведение массы  $m$  на квадрат расстояния  $d$  до оси  $l$ .

Исходя из указанного определения и применяя метод интеграла при решении задач, будем иметь:

а)  $dI_{Ox} = y^2 \rho(x, y) dx dy$  – это элемент момента инерции материальной пластинки  $G$  относительно оси  $Ox$  ( $\rho(x, y)$  – плотность материальной пластинки  $G$ );



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



69

Закреть

б)  $dI_{Oy} = x^2 \rho(x, y) dx dy$  – это элемент момента инерции пластинки  $G$  относительно оси  $Oy$ ;

в)  $dI_{O(0,0)} = (x^2 + y^2) \rho(x, y) dx dy$  – это элемент момента инерции пластинки  $G$  относительно начала координат.

Тогда из указанного выше получаем формулы для вычисления соответствующих моментов инерции

$$I_{Ox} = \iint_G y^2 \rho(x, y) dx dy, \quad (4.2)$$

$$I_{Oy} = \iint_G x^2 \rho(x, y) dx dy, \quad (4.3)$$

$$I_{O(0,0)} = \iint_G (x^2 + y^2) \rho(x, y) dx dy. \quad (4.4)$$

**Пример 4.2.** Найти момент инерции относительно начала координат однородной пластинки плотности  $\rho_0$ , ограниченную линиями

$$x^2 + y^2 = 9, \quad x + y = 0, \quad x - y = 0 \quad (x \geq 0).$$

◀ Построим рисунок (рисунок 4.1) нашей пластинки в системе координат  $xOy$   $G = G_1 \cup G_2$



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



70

Закреть

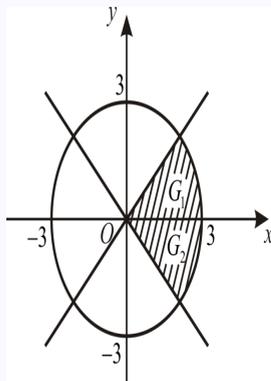


Рисунок 4.1

Для нахождения указанного момента инерции используем формулу (4.4)

$$\begin{aligned}
 I_O &= \iint_G (x^2 + y^2) \rho_0 dx dy = 2 \iint_{G_1} (x^2 + y^2) \rho_0 dx dy = \\
 &= 2\rho_0 \iint_{D_1} r^2 \cdot r dr d\varphi = 2\rho_0 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^3 r^3 dr = 2\rho_0 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{r^4}{4} \Big|_0^3 = \frac{3^4 \rho_0 \pi}{8}.
 \end{aligned}$$

При вычислении двойного интегрирования была учтена симметрия относительно оси  $Ox$  как области интегрирования, так и подынтегральной функции.



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



71

Закреть

Ответ:  $I_O = \frac{3^4 \rho_0 \pi}{8}$ . ►

## 4.3 Площадь поверхности

### 4.3.1 Площадь гладкой поверхности (графика функции $z = f(x, y)$ )

Пусть функция  $z = f(x, y)$  определена на замыкании  $\bar{G}$  области  $G$  с кусочно-гладкой границей  $\partial G$ . Сама функция  $f(x, y)$  и существующие ее частные производные  $\frac{\partial f}{\partial x}$  и  $\frac{\partial f}{\partial y}$  непрерывные на  $\bar{G}$ . В этом случае поверхность  $S$  – график функции  $f(x, y)$  будет гладкой. Геометрически это означает, что через любую точку поверхности  $S$  можно провести касательную плоскость, и при переходе от одной точки поверхности  $S$  к другой касательная плоскость меняется непрерывно.

Возьмём любое разбиение  $\tau_G$  на  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , частичных областей  $G_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ , с помощью системы из  $m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , кусочно-гладких кривых (области  $G_k$  не должны взаимно иметь общих внутренних точек). Произвольно выбираем точки  $M_k(x, y) \in G_k$ . Обозначим через  $\lambda_\tau = \max \{d_k\}$ , где  $d_k = \sup_{M'_k, M''_k \in G_k} \{d(M'_k, M''_k)\}$  – диаметр частичной области  $G_k$ .

Строим частичные цилиндрические поверхности с направляющими  $\partial G_k$  и образующими, параллельными оси  $Oz$ .

Точкам  $M_k(x_k, y_k) \in \bar{G}_k$  соответствующей на поверхности  $S$  точки



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



72

Закреть

$\overline{M}_k(x_k, y_k, z_k)$ , где  $z_k = f(x_k, y_k) = f(M_k)$ . Через точки  $\overline{M}_k$  проводим касательные плоскости к поверхности  $S$ . Указанные выше частичные цилиндрические поверхности вырезают соответственно в касательных плоскостях ограниченные частичные плоские фигуры  $D_k$  (квадрируемые). Составляем сумму

$$D_{\tau_G} = \sum_{k=1}^n S_{D_k}, \quad (4.5)$$

где  $S_{D_k}$  – площадь частичной плоской фигуры  $D_k$ .

Если существует предел

$$\lim_{\lambda_{\tau} \rightarrow 0} D_{\tau_G}, \quad (4.6)$$

не зависящий как от способа разбиения  $\tau_G$ , так и от выбора точек  $M_k(x_k, y_k) \in G_k$ , то он называется площадью гладкой поверхности  $S$ .

### 4.3.2 Вывод формулы площади гладкой поверхности

Для каждой точки  $\overline{M}_k(x_k, y_k, z_k)$  рассмотрим нормаль  $\vec{n}_k$  к поверхности  $S$ . С осью  $Oz$  эти частичные нормали будут иметь направляющие косинусы

$$\cos(\vec{n}_k, Oz) = \frac{1}{\sqrt{1 + f'_{kx}(M_k)^2 + f'_{ky}(M_k)^2}}.$$



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



73

Закреть

А тогда

$$S_{D_k} = S_{G_k} : \frac{1}{\sqrt{1 + f'_{kx}(M_k) + f'_{ky}(M_k)}}. \quad (4.7)$$

Подставляем (4.7) в (4.5) и получим

$$D_{\tau_G} = \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + f'_{kx}(M_k) + f'_{ky}(M_k)} S_{G_k}, \quad (4.8)$$

где правая часть (4.8) есть интегральная сумма Римана для двойного интеграла

$$\iint_G \sqrt{1 + f'_x(x, y) + f'_y(x, y)} dx dy. \quad (4.9)$$

Двойной интеграл (4.9) существует, так как подынтегральная функция непрерывна на  $\overline{G}$ . Получим:

$$\lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} D_{\tau_G} = \iint_G \sqrt{1 + f'_x(x, y) + f'_y(x, y)} dx dy. \quad (4.10)$$

Формула (4.9) служит для вычисления площади гладкой поверхности  $S$  – графика функции  $z = f(x, y)$ .

**Замечание 4.1.** Если поверхности заданы функциями  $x = F(y, z)$  или  $y = \Phi(x, z)$  с выполнением условий, аналогичных указанных выше



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



74

Закреть

для функции  $z = f(x, y)$ , то площади этих поверхностей вычисляются соответственно с помощью следующих двойных интегралов

$$\iint_H \sqrt{1 + F_y'^2(y, z) + F_z'^2(y, z)} dydz \quad (4.11)$$

и

$$\iint_\Delta \sqrt{1 + \Phi_x'^2(x, z) + \Phi_z'^2(x, z)} dx dz. \quad (4.12)$$

**Пример 4.3.** Найти площадь поверхности  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , если  $x^2 + y^2 \leq 2ax$ .

◀ Строим рисунок 4.2

$$x_2 + y_2 - 2ax + a_2 = a_2, \quad (x - a)^2 + y^2 = a^2, \quad G = G_1 \cup G_2.$$

$$z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Введем обозначение:  $S = S_1 \cup S_2$  – поверхность,  $|S| = |S_1| + |S_2|$  – площадь поверхности

$$|S| = \iint_G \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} dx dy = \iint_G \sqrt{2} dx dy = \sqrt{2} \pi a^2 \text{ (кв. ед.)}.$$

**Ответ:**  $S = \sqrt{2} \pi a^2$  (кв. ед.). ▶



На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



Закреть

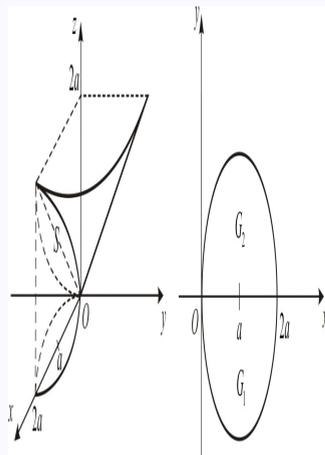


Рисунок 4.2



На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



Закреть

## 4.4 Тройной интеграл

### 4.4.1 Задача, приводящая к понятию тройного интеграла

**Задача 4.1.** О массе материального кублируемого тела.

◀ Пусть дано кублируемое материальное тело  $\Omega$  с квадрлируемой поверхностью  $\partial\Omega$ , например, кусочно-гладкой. Плотность тела  $u = \rho(x, y, z)$ . Необходимо дать понятие массы указанного тела и указать метод ее вычисления.

Если плотность  $\rho(x, y, z) = \rho_0 = \text{const}$ , то масса тела

$$m_\Omega = \rho_0 V_\Omega, \quad (4.13)$$

где  $V_\Omega$  – объем тела.

В дальнейшем предположим, что тело неоднородное, то есть

$$\rho(x, y, z) \neq \text{const}.$$

Возьмём любое разбиение  $\tau_\Omega$  тела  $\Omega$  на  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , частичных тел  $\Omega_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ , без общих внутренних точек с помощью системы из  $m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , частичных квадрлируемых поверхностей  $S_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ . Произвольно выбираем точки  $M_k(x_k, y_k, z_k) \in \overline{\Omega}_k$ . Считаем, что для любых точек  $M(x, y, z) \in \overline{\Omega}_k$  плотность будет постоянной и равной  $\rho_k = \rho(M_k)$ .



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



77

Закреть

Тогда частичная масса (при таком предположении) материального частичного тела  $\bar{\Omega}_k$  будет

$$m_{\Omega_k} = \rho_k \cdot V_{\Omega_k}. \quad (4.14)$$

А масса всего тела  $\bar{\Omega}$  будет

$$m_{\Omega} = \sigma_{\tau}(\rho, M_k) = \sum_{k=1}^n \rho_k V_{\Omega_k}. \quad (4.15)$$

Через  $\lambda_{\tau}$  обозначим максимальный из диаметров  $d_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ , частичных тел  $\bar{\Omega}_k$

$$d_k = \sup_{M'_k, M''_k \in \Omega_k} \{d(M'_k, M''_k)\}. \quad (4.16)$$

Если существует предел

$$\lim_{\lambda_{\tau} \rightarrow 0} \sigma_{\tau}(\rho, M_k) \quad (4.17)$$

и этот предел не зависит от разбиения  $\tau_{\Omega}$  и выбора точек  $M_k \in \bar{\Omega}_k$ , то он называется **массой материального тела  $\bar{\Omega}$** .►

**Замечание 4.2.** Можно привести и другие задачи, методы решения которых аналогичны методу решения предыдущей задачи, например, задача о моменте инерции материального тела, задача о притяжении материальной точки телом и другие задачи (методы решения некоторых из этих задач будут показаны ниже).



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



78

Закреть

## 4.4.2 Понятие тройного интеграла

Отвлекаясь от конкретного содержания предыдущей задачи, но повторяя рассуждения аналогичные, что и в этой задаче, мы приходим к понятию тройного интеграла.

Пусть функция  $u = f(x, y, z)$  определена на замыкании области  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  с квадратируемой границей  $\partial\Omega$ , например, кусочно-гладкой.

Возьмем любое разбиение  $\tau_\Omega$  области  $\Omega$  на  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  частей, без общих внутренних точек, с помощью системы из  $m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , квадратируемых поверхностей  $S_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ . Произвольно выбираем точки  $M_k(x_k, y_k, z_k)$  из  $\overline{\Omega}_k = \Omega_k \cup \partial\Omega_k$ . Составляем интегральные суммы Римана

$$\sigma_\tau(f, M_k) = \sigma_\tau = \sum_{k=1}^n f(M_k) \Delta V_k, \quad (4.18)$$

где  $\Delta V_k$  – объем частичной области  $\Omega_k$ .

Обозначим через  $\lambda_\tau = \max_k \{dk\}$ , где  $dk$  – диаметр частичной области  $\Omega_k$ .

**Определение 4.2.** Если существует конечный предел

$$\lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} \sigma_\tau, \quad (4.19)$$

и этот предел не зависит как от разбиения  $\tau_\Omega$ , так и от выбора точек  $M_k \in \overline{\Omega}_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ , то он называется **тройным интегралом**



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



79

Закреть

**функции**  $f(x, y, z)$  по области  $\Omega$ . Тройной интеграл обозначается

$$I = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz, \quad (4.20)$$

где  $f(x, y, z)$  – **подынтегральная функция**,  $f(x, y, z) dx dy dz$  – **подынтегральное выражение**,  $\Omega$  – **область интегрирования**.

По Коши существование интеграла (4.20), то есть предела (4.19), записывается следующим образом:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall T_{\Omega} \quad \forall \tau < \delta \quad \forall M_k(x_k, y_k, z_k) \in \bar{\Omega}_k \quad |\sigma_{\tau} - I| < \varepsilon.$$

**Замечание 4.3.** Аналогично, как и для двойного интеграла, для тройного справедливо необходимое условие интегрируемости: если функция  $f(x, y, z)$  интегрируема по области  $\Omega$ , то она ограничена на замыкании этой области, то есть на  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ .

Дальше строим суммы Дарбу:  $S_{\tau} = \sum_{k=1}^n M_k \Delta V_k$  – **верхняя сумма Дарбу**, где  $M_k = \sup_{(x,y,z) \in \bar{\Omega}_k} f(x, y, z)$  и  $\Delta V_k$  – объем области  $\Omega_k$ ;

$s_{\tau} = \sum_{k=1}^n m_k \Delta V_k$  – **нижняя сумма Дарбу**, где  $m_k = \inf_{(x,y,z) \in \bar{\Omega}_k} f(x, y, z)$ .

Изучаются свойства сумм Дарбу (аналогично, как и для двойного интеграла). В частности, показывается, что множество верхних сумм Дарбу ограничено снизу, а нижних – сверху по всем разбиением  $\tau_G$  и выборе



**Кафедра**  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



80

Закреть

точек  $M_k(x_k, y_k, z_k) \in \bar{\Omega}_k$ . В этом случае:  $I^* = \inf_{\tau_\Omega, M_k \in \Omega_k} \{S_\tau\}$  называется **верхним интегралом Дарбу**, а  $I_* = \sup_{\tau_\Omega, M_k \in \Omega_k} \{s_\tau\}$  – **нижним интегралом Дарбу**.

Справедливы следующие критерии интегрируемости функций.

**Теорема 4.1.** *Интеграл  $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$  существует тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} (S_\tau - s_\tau) = 0.$$

**Теорема 4.2 (критерий Дарбу).** *Интеграл*

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$$

*существует тогда и только тогда, когда  $I_* = I^* = I$ .*

**Теорема 4.3 (критерии Римана).** *Интеграл  $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$  существует тогда и только тогда, когда для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\tau_\Omega$ , что  $S_{\tau_\Omega} - s_{\tau_\Omega} < \varepsilon$ .*

**Замечание 4.4.** Используя выше сформулированные критерии, можно доказать следующие теоремы.



**Кафедра**  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



81

Закреть

**Теорема 4.4.** Если функция непрерывна на компакте (замкнутом ограниченном множестве), то она интегрируема на этом компакте.

**Теорема 4.5.** Если функция ограничена на компакте и непрерывна на нем всюду, кроме множества точек меры (объема) нуль, то функция интегрируема на этом компакте.

### 4.4.3 Свойства тройных интегралов

1) (свойство линейности). Пусть существуют интегралы

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz \text{ и } \iiint_{\Omega} g(x, y, z) dx dy dz,$$

где  $\Omega$  – область из  $\mathbb{R}^3$  с квадратируемой границей, и  $\alpha, \beta$  – любые действительные числа, то существует интеграл функции

$$\varphi(x, y, z) = \alpha f(x, y, z) + \beta g(x, y, z)$$

по области  $\Omega$  и справедлива формула

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} \varphi(x, y, z) dx dy dz = \\ & = \alpha \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz + \beta \iiint_{\Omega} g(x, y, z) dx dy dz. \end{aligned} \quad (4.21)$$



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



82

Закреть

2) (**свойство аддитивности**). Пусть область  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ , где области  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  не имеют общих внутренних точек, а границы областей кусочно-гладкие. Если существуют интегралы

$$\iiint_{\Omega_1} f(x, y, z) dx dy dz \text{ и } \iiint_{\Omega_2} f(x, y, z) dx dy dz,$$

то существует интеграл  $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$  и справедлива формула

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{G_1} f(x, y, z) dx dy dz + \iiint_{G_2} f(x, y, z) dx dy dz. \quad (4.22)$$

3) (**свойство монотонности**). Если для любых точек области  $\Omega$  с кусочно-гладкой границей справедливо неравенство

$$f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$$

и обе функции  $f(x, y, z)$  и  $g(x, y, z)$  интегрируемы по области  $\Omega$ , то справедливо неравенство

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz \leq \iiint_{\Omega} g(x, y, z) dx dy dz. \quad (4.23)$$



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



83

Закреть

4) (**оценка интеграла по модулю**). Пусть функция  $u = f(x, y, z)$  интегрируема по области  $\Omega$  с кусочно-гладкой границей  $\partial\Omega$ . Тогда интегрируема по области  $G$  и функция  $|f(x, y, z)|$  и справедлива оценка

$$\left| \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz \right| \leq \iiint_{\Omega} |f(x, y, z)| dx dy dz. \quad (4.24)$$

5) (**теорема о среднем**.) Пусть функция  $f(x, y, z)$  интегрируема по области  $\Omega$  с кусочно-гладкой границей  $\partial\Omega$  и  $m = \inf_{(x,y,z) \in \bar{\Omega}} f(x, y, z)$ , а

$$M = \sup_{(x,y,z) \in \bar{\Omega}} f(x, y, z).$$

Тогда справедлива формула

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \mu \cdot V_{\Omega}, \quad (4.25)$$

где  $\mu$  – некоторая точка из отрезка  $[m, M]$  и  $V_{\Omega}$  – объем области  $\Omega$ .

**Следствие 4.1.** Если дополнительно к условиям теоремы о среднем функция  $f(x, y, z)$  непрерывна на компакте  $\bar{\Omega}$ , то существует точка

$$M_0(x_0, y_0, z_0) \in \bar{\Omega}, \text{ что } \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = f(M_0) V_{\Omega}. \quad (4.26)$$



**Кафедра**  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



84

Закреть

## ЛЕКЦИЯ 5

Вычисление тройных интегралов. Криволинейные координаты. Замена переменных в тройном интеграле

### 5.1 Способы вычисления тройных интегралов

#### 5.1.1 Область интегрирования параллелепипед

Обозначим через

$$\bar{\Omega} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \left| \begin{array}{l} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \\ l \leq z \leq p \end{array} \right. \right\},$$

где  $a, b, c, d, l, p \in \mathbb{R}$ ; пусть

$$\bar{\Pi} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \left| \begin{array}{l} a \leq x \leq b, \\ c \leq y \leq d \end{array} \right. \right\}.$$

**Теорема 5.1.** *Если существует тройной интеграл*

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$$



Кафедра  
высшай  
матэматыкі

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



85

Закреть

для любых фиксированных точек  $(x, y) \in \bar{\Pi}$  и существует

$$\int_l^p f(x, y, z) dz = I(x, y),$$

то существует повторный интеграл

$$\iint_G dx dy \int_l^p f(x, y, z) dz = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz. \quad (5.1)$$

**Замечание 5.1.** Двойной интеграл  $\iint_G I(x, y) dx dy$  вычисляется по правилам вычисления двойных интегралов (теорема 2.1).

**Замечание 5.2.** Будут также справедливы теоремы, аналогичные теореме 5.1 (сформулировать самостоятельно), для которых формулы заключений теорем будут соответственно иметь вид:

$$\iint_Y dx dz \int_c^d f(x, y, z) dy = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz, \quad (5.2)$$

$$\iint_X dy dz \int_a^b f(x, y, z) dx = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz, \quad (5.3)$$



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



86

Закреть

где  $\bar{Y} = \left\{ (x, z) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{l} a \leq x \leq b, \\ l \leq z \leq p \end{array} \right\}$ ,  $\bar{X} = \left\{ (y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{l} c \leq y \leq d, \\ l \leq z \leq p \end{array} \right\}$ .

**Замечание 5.3.** Если функция  $f(x, y, z)$  непрерывна на  $\bar{\Omega}$  (замыкании области  $\Omega$  с кусочно-гладкой  $\partial\Omega$ ), то будут справедливы заключения теоремы 5.1 и теорем из замечания 5.2. Также будет выполняться равенство тройному интегралу всех повторных интегралов из формул (5.1)–(5.3).

### 5.1.2 Случай криволинейной области интегрирования

Рассмотрим криволинейную область  $\Omega_1$ , которая снизу и сверху ограничена кусочно-гладкими поверхностями – графиками функций  $z_1 = z_1(x, y)$  и  $z_2 = z_2(x, y)$ , определёнными на замыкании области  $G$  с кусочно-гладкой границей  $\partial G$ . Границей сбоку области  $\Omega_1$  является цилиндрическая поверхность, для которой направляющей будет  $\partial G$ , а образующие параллельную оси  $Oz$ . Такую область  $\Omega_1$  назовем простейшим цилиндрическим телом первого типа (рисунок 5.1).

**Теорема 5.2.** Пусть существует тройной интеграл

$$\iiint_{\Omega_1} f(x, y, z) dx dy dz,$$



Кафедра  
высшай  
матэматыкі

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



87

Закреть

где  $\Omega_1$  – простейшее цилиндрическое тело первого типа. Если для любой фиксированной точки  $(x, y) \in \overline{G}$  ( $\overline{G} = \text{Пр}_{xOy} \overline{\Omega_1}$  – проекция  $\overline{\Omega_1}$  на

плоскости  $xOy$ ) существует интеграл  $\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz = I(x, y)$ , то существует повторный интеграл

$$\iint_G I(x, y) dx dy = \iint_G dx dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz = \iiint_{\Omega_1} f(x, y, z) dx dy dz. \quad (5.4)$$

**Замечание 5.4.** Двойной интеграл  $\iint_G I(x, y) dx dy$  вычисляется по правилам вычисления двойных интегралов для криволинейных областей (теорема 2.2).

**Замечание 5.5.** Будут также справедливы теоремы, аналогичные теореме 5.2 (сформулировать самостоятельно), для которых формулы заключений теорем будут соответственно иметь вид:

$$\iint_Y K(x, z) dx dz = \iint_Y dx dz \int_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} f(x, y, z) dy = \iiint_{\Omega_2} f(x, y, z) dx dy dz, \quad (5.5)$$



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



88

Закреть

$$\iint_X L(y, z) dy dz = \iint_X dy dz \int_{x_1(y, z)}^{x_2(y, z)} f(x, y, z) dx = \iiint_{\Omega_2} f(x, y, z) dx dy dz. \quad (5.6)$$

Для формулы (5.5)  $\Omega_2$  – простейшее цилиндрическое тело второго типа, которое ограничено цилиндрической поверхностью, направляющей для нее служит граница проекции тела  $\Omega_2$  на плоскость  $xOz$  ( $\partial Y$ ). Кроме того, тело  $\Omega$  ограничено поверхностями – графиками функций  $y_1 = y_1(x, z)$  и  $y_2 = y_2(x, z)$ , определенными на замыкании области  $Y$  с кусочно-гладкой границей  $\partial Y$ , причем для любых точек  $M(x, z) \in \bar{Y}$  будет  $y_1(x, z) \leq y_2(x, z)$  (рисунок 5.1). Для формулы (5.6)  $\Omega_3$  – простейшее цилиндрическое тело третьего типа (определить самостоятельно).

**Замечание 5.6.** Если функция  $u = f(x, y, z)$  непрерывна на замыкании области  $\Omega$  с кусочно-гладкой границей  $\partial\Omega$ , то тройной интеграл  $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$  существует и будут справедливы формулы (5.4) – для простейшего цилиндрического тела первого типа; (5.5) – для простейшего цилиндрического тела второго типа; (5.6) – для простейшего цилиндрического тела третьего типа.

**Пример 5.1.** Вычислить тройной интеграл  $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$ , где  $\Omega$  есть область, ограниченная поверхностями  $x + y + z = 2$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ .



*Кафедра  
высшай  
матэматыкі*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



89

Закреть

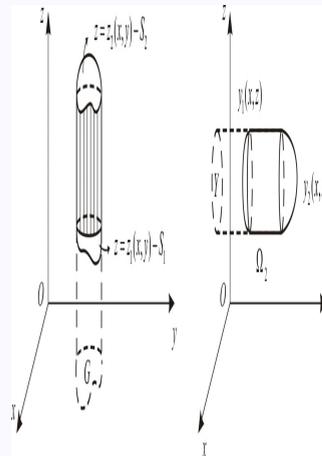


Рисунок 5.1



Брэсцкі  
Дзяржаўны ўніверсітэт  
імя А.С. Пушкіна

*Кафедра  
вышэйшай  
матэматыкі*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



90

Закреть

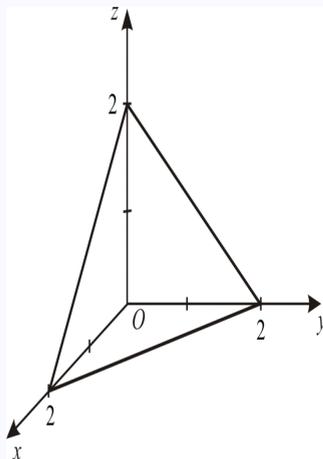


Рисунок 5.2

◀ Изобразим область интегрирования (рисунок 5.2). Видно, что область интегрирования есть простейшее тело как первого, так и второго, так и третьего типов.

$$\begin{aligned}
 I &= \iiint_{\Omega} z dx dy dz = \int_0^2 z dz \int_0^{2-z} dy \int_0^{2-y-z} dx = \\
 &= \int_0^2 z dz \int_0^{2-z} x \Big|_0^{2-y-z} dy = \int_0^2 z dz \int_0^{2-z} (2-y-z) dy =
 \end{aligned}$$



На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



Закреть

$$= \int_0^2 z \left( 2y - \frac{y^2}{2} - zy \right) \Big|_0^{2-z} dz =$$

$$= \int_0^2 \left( 4z - 2z^2 - \frac{1}{2}z(4 - 4z + z^2) - 2z^2 + z^3 \right) dz =$$

$$= \int_0^2 \left( 4z - 2z^2 - 2z + 2z^2 - \frac{1}{2}z^3 - 2z^2 + z^3 \right) dz = \iiint_{\Omega} z dx dy dz =$$

$$= \int_0^2 z dz \int_0^{2-z} dy \int_0^{2-y-z} dx = \int_0^2 z dz \int_0^{2-z} x \Big|_0^{2-y-z} dy = \int_0^2 z dz \int_0^{2-z} (2-y-z) dy =$$

$$= \int_0^2 z \left( 2y - \frac{y^2}{2} - zy \right) \Big|_0^{2-z} dz =$$

$$= \int_0^2 \left( 4z - 2z^2 - \frac{1}{2}z(4 - 4z + z^2) - 2z^2 + z^3 \right) dz =$$

$$= \int_0^2 \left( 4z - 2z^2 - 2z + 2z^2 - \frac{1}{2}z^3 - 2z^2 + z^3 \right) dz =$$



**Кафедра**  
высшай  
матэматыкі

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



92

Закреть

$$= \int_0^2 \left( 2z - 2z^2 + \frac{1}{2}z^3 \right) dz = z^2 \Big|_0^2 - \frac{2z^3}{3} \Big|_0^2 + \frac{z^4}{8} \Big|_0^2 = 4 - \frac{16}{3} + \frac{16}{8} = \frac{2}{3}.$$

Ответ:  $I = \frac{2}{3}$ . ►

## 5.2 Криволинейные координаты

### 5.2.1 Отображение пространственных областей

Пусть в системе координат  $Oxyz$  задана область  $G$  с кусочно-гладкой границей  $\partial G$ , а в системе координат  $Ouvw$  задана область  $D$  также с кусочно-гладкой границей  $\partial D$ .

Функции  $x = x(u, v, t)$ ,  $y = y(u, v, t)$  и  $z = z(u, v, t)$  биективно отображают область  $D$  на область  $G$  и границу  $\partial D$  на границу  $\partial G$ . Тогда существуют обратные функции  $u = x^{-1}(x, y, z)$ ,  $v = y^{-1}(x, y, z)$ ,  $t = z^{-1}(x, y, z)$ . Функции  $x = x(u, v, t)$ ,  $y = y(u, v, t)$ ,  $z = z(u, v, t)$

и обратные им функции (решение системы 
$$\begin{cases} x = x(u, v, t), \\ y = y(u, v, t), \\ z = z(u, v, t), \end{cases} \text{ уравне-}$$

ний), а также существующие их частные производные первого порядка непрерывны соответственно на замыкании областей  $D$  и  $G$ , то есть на  $\bar{D} = D \cup \partial D$  и  $\bar{G} = G \cup \partial G$ .



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



93

Закреть

Функциональный определить

$$I = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, t)} = \begin{vmatrix} x'_u, x'_v, x'_t \\ y'_u, y'_v, y'_t \\ z'_u, z'_v, z'_t \end{vmatrix} \neq 0 \text{ и } I \cdot J = 1,$$

где  $J = \begin{vmatrix} u'_x, u'_y, u'_z \\ v'_x, v'_y, v'_z \\ t'_x, t'_y, t'_z \end{vmatrix}$ .

Пусть даны указанные в пункте 1 две декартовы системы координат. Возьмем точку  $M(u_0, v_0, t_0) \in D$ . Плоскости  $u = u_0, v = v_0, t = t_0$  в системе координат  $Ouv$  называются координатными плоскостями. Эти координатные плоскости функции  $x(u, v, t), y(u, v, t), z(u, v, t)$  отображают в пространство  $Oxyz$  соответственно в криволинейные поверхности, а точка  $M_0(u_0, v_0, t_0)$  отображается в точку  $M'_0(u_0, v_0, t_0) \in G$  (пересечение указанных криволинейных поверхностей). Координаты точки  $M'_0$  называются криволинейными координатами в области  $G$ .

### 5.2.2 Цилиндрические координаты

Пусть роль функции  $x(u, v, t), y(u, v, t)$  и  $z(u, v, t)$ , указанных в пунктах 1 и 2, играют соответственно функции

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z, \quad (5.7)$$



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



94

Закреть

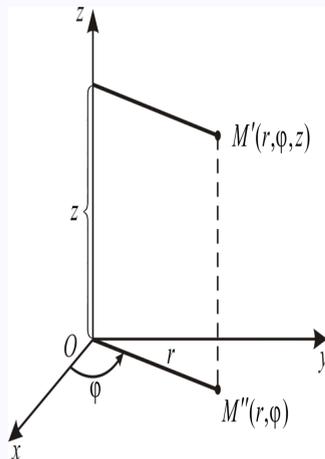


Рисунок 5.3

где  $r$  и  $\varphi$  – полярные координаты проекции точки  $M'(r, \varphi, z)$  пространства  $xyz$  на плоскость  $z = 0$  ( $0 \leq r < +\infty$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ ). Величины  $r, \varphi, z$  называются цилиндрическими координатами точки  $M'$  (рисунок 5.3).

Для цилиндрических координат имеем три семейства координатных поверхностей:

- 1)  $r = \text{const}$  ( $0 \leq r < +\infty$ ) – цилиндрические поверхности (при  $r = 0$  – ось  $Oz$ );
- 2)  $\varphi = \text{const}$  ( $0 \leq \varphi < 2\pi$ ) – вертикальные полуплоскости;
- 3)  $z = \text{const}$  ( $-\infty < z < +\infty$ ) – горизонтальные плоскости.



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



95

Закреть

## Якобиан

$$\begin{aligned} I &= \frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, z)} = \begin{vmatrix} (r \cos \varphi)'_r & (r \cos \varphi)'_\varphi & (r \cos \varphi)'_z \\ (r \sin \varphi)'_r & (r \sin \varphi)'_\varphi & (r \sin \varphi)'_z \\ z'_r & z'_\varphi & z'_z \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 \cdot r & 1 \end{vmatrix} = r \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= r \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix} = r. \end{aligned}$$

**Замечание 5.7.** Условия, накладываемые в пункте 1 на указанные там отображения, при цилиндрических координатах нарушаются на множестве точек меры нуль («объема» нуль). Например, для образа (точки  $M'_0(0, 0, z_0)$  в пространстве  $xyz$ ) прообразом будет в пространстве  $Or\varphi z$  полуинтервал  $r = 0, 0 \leq \varphi < 2\pi, z = z_0$  при отображении  $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = z$ . Также, как указано при рассмотрении полярных координат, на множестве точек меры нуль нарушается и непрерывность (самостоятельно изучить этот вопрос).



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



96

Закреть

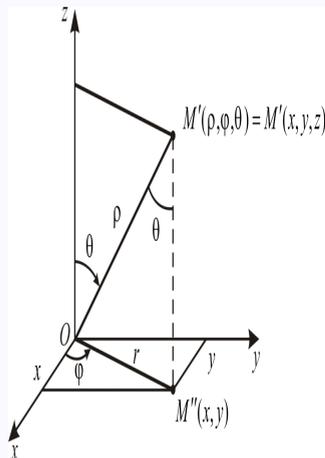


Рисунок 5.4

### 5.2.3 Сферические координаты

Рассматриваем также указанные выше отображения, где в качестве функций  $x(u, v, t)$ ,  $y(u, v, t)$ ,  $z(u, v, t)$  выступают соответственно функции

$$x = \rho \cos \varphi \sin \theta, \quad y = \rho \sin \varphi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \theta, \quad (5.8)$$

где  $M'(\rho, \varphi, \theta)$  из пространства  $Oxyz$ . Причем  $\rho$  – расстояние точки  $M'$  от начала координат,  $\varphi$  – полярная координата,  $\theta$  – угол между осью  $z$  и вектором  $OM'$  (рисунок 5.4).

Координаты указанной точки  $M'(\rho, \varphi, \theta)$  называются сферическими



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



97

Закреть

координатами, причем:  $0 \leq \rho < +\infty$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ .

Этим координатам соответствуют следующие координатные поверхности:

- 1)  $\rho = \text{const}$  – сферы, при  $r = 0$  – вырожденные  $0 \leq \rho < +\infty$ ;
- 2)  $\theta = \text{const}$  – полуконусы ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ), при  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$  – вырожденные;
- 3)  $\varphi = \text{const}$  – вертикальные полуплоскости  $0 \leq \varphi < 2\pi$ .

Найдём якобиан указанного отображения.

$$\begin{aligned}
 I &= \begin{vmatrix} (\rho \cos \varphi \sin \theta)'_{\rho} & (\rho \sin \varphi \sin \theta)'_{\rho} & (\rho \cos \theta)'_{\rho} \\ (\rho \cos \varphi \sin \theta)'_{\varphi} & (\rho \sin \varphi \sin \theta)'_{\varphi} & (\rho \cos \theta)'_{\varphi} \\ (\rho \cos \varphi \sin \theta)'_{\theta} & (\rho \sin \varphi \sin \theta)'_{\theta} & (\rho \cos \theta)'_{\theta} \end{vmatrix} = \\
 &= \begin{vmatrix} \cos \varphi \sin \theta & \sin \varphi \sin \theta & \cos \theta \\ -\rho \sin \theta \sin \varphi & \rho \sin \theta \cos \varphi & 0 \cdot \rho \cdot \sin \theta \\ \rho \cos \varphi \cos \theta & \rho \sin \varphi \cos \theta & -\rho \sin \theta \end{vmatrix} = \\
 &= \rho^2 \sin \theta \begin{vmatrix} \cos \varphi \sin \theta & \sin \varphi \sin \theta & \cos \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ \cos \varphi \cos \theta & \sin \varphi \cos \theta & -\sin \theta \end{vmatrix} = \\
 &= \rho^2 \sin \theta \left( (-1)^{1+3} \cos \theta \begin{vmatrix} -\sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \varphi \cos \theta & \sin \varphi \cos \theta \end{vmatrix} + \right.
 \end{aligned}$$



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



98

Закреть

$$\begin{aligned}
 &+(-1)^{3+3}(-\sin \theta) \begin{vmatrix} \cos \varphi \sin \theta & \sin \varphi \sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix} = \\
 &= \rho^2 \sin \theta(-\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = -\rho^2 \sin \theta.
 \end{aligned}$$

**Замечание 5.8.** Если рассматривать точки вида  $M'(\rho, \theta, \varphi)$ , то  $I = \rho^2 \sin \theta$ , но в обоих случаях  $|I| = \rho^2 \sin \theta$ .

### 5.2.4 Элемент объема в криволинейных координатах

Рассмотрим, как и в 1, пункта 5, отображение замыкания области  $D$  в системе декартовых координат пространства  $uvw$  на замыкание области  $G$  пространства  $Oxyz$ , для которого координаты  $u, v, t$  будут криволинейными, с помощью функций  $x = x(u, v, t)$ ,  $y = y(u, v, t)$ ,  $z = z(u, v, t)$ , удовлетворяющих всем указанным в 1, пункта 5 свойствам. Прямоугольный параллелепипед из области  $D$  с гранями, параллельными соответствующим координатным плоскостям, и бесконечно малыми ребрами отображается с помощью указанных выше функций в криволинейный параллелепипед области  $G$  (рисунок 5.5).

Пусть точка имеет декартовые координаты  $x, y, z$ , а криволинейные координаты  $u, v, t$ . Декартовые координаты точки  $M_1$  пусть будут  $x + dx$ ,  $y + dy$ ,  $z + dz$ , а криволинейные  $u + du, v, t$ . Тогда, как и при доказа-



*Кафедра  
высшай  
матэматыкі*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



99

Закреть

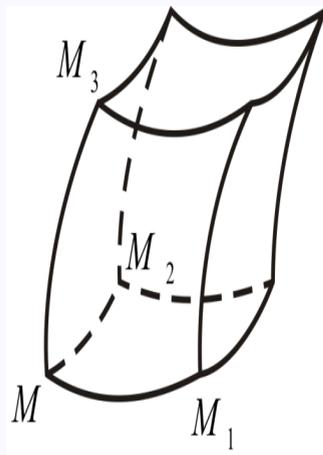


Рисунок 5.5



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



100

Закреть

тельстве теоремы 2.3, будем иметь вектор  $\overrightarrow{MM_1} = \left( \frac{\partial x}{\partial u} du, \frac{\partial y}{\partial u} du, \frac{\partial z}{\partial u} du \right)$ . Аналогично  $\overrightarrow{MM_2} = \left( \frac{\partial x}{\partial v} dv, \frac{\partial y}{\partial v} dv, \frac{\partial z}{\partial v} dv \right)$  и  $\overrightarrow{MM_3} = \left( \frac{\partial x}{\partial t} dt, \frac{\partial y}{\partial t} dt, \frac{\partial z}{\partial t} dt \right)$ .

Тогда объем параллелепипеда (криволинейного) будет равен с точностью, не превосходящей величину выше первого порядка малости по сравнению с этим объемом, определителю, составленному из координат выше указанных векторов по абсолютной величине

$$dv = \pm \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} du & \frac{\partial y}{\partial u} du & \frac{\partial z}{\partial u} du \\ \frac{\partial x}{\partial v} dv & \frac{\partial y}{\partial v} dv & \frac{\partial z}{\partial v} dv \\ \frac{\partial x}{\partial t} dt & \frac{\partial y}{\partial t} dt & \frac{\partial z}{\partial t} dt \end{vmatrix} = \pm \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, t)} dudvdt = \pm Idudvdt. \quad (5.9)$$

### 5.3 Замена переменных в тройном интеграле

Замена переменных в тройном интеграле вводится во многом аналогично, как и замена переменных в двойном интеграле:

**Теорема 5.3.** Пусть функции  $x = x(u, v, t)$ ,  $y = y(u, v, t)$ ,  $z = z(u, v, t)$  и существующие их частные производные первого порядка непрерывны на замыкании области  $D$  с кусочно-гладкой границей  $\partial D$  и биективно (указанные функции) отображают область  $D$  на область  $G$ , а границу  $\partial D$  на границу  $\partial G$  (кусочно-гладкую). Якобиан  $I = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, t)} \neq 0$ . Если функция  $f(x, y, z)$  непрерывна на  $G$  или ограничена на  $\overline{G}$  и непрерывна на  $G$  за исключением, может быть, множества



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



101

Закреть

точек меры нуль (объем нуль), то

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_D f(x(u, v, t), y(u, v, t), z(u, v, t)) |I| du dv dt. \quad (5.10)$$

◀ Доказательство теоремы 5.3 на уровне физической строгости, поэтому мы его опускаем (уметь доказывать самостоятельно). ▶

**Замечание 5.9.** Формула (5.10) в случае перехода от прямоугольных декартовых координат к криволинейным цилиндрическим и сферическим координатам примет соответственно вид (5.11) и (5.12).

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r d\varphi dr dz, \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} & \iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \\ & = \iiint_D f(\rho \cos \varphi \sin \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \theta) \rho^2 \sin \theta d\varphi d\theta d\rho. \quad (5.12) \end{aligned}$$

**Пример 5.2.** Вычислить тройной интеграл  $\iiint_G (x^2 + y^2) dx dy dz$ , где область  $G$  ограничена поверхностями  $2z = x^2 + y^2$  и  $z = 2$ .



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



102

Закреть

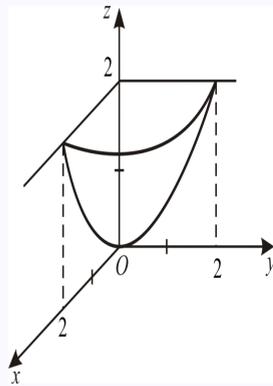


Рисунок 5.6

◀ Строим рисунок области интегрирования (рисунок 5.6), показывая её только в первом октанте, так как она симметрична относительно координатных плоскостей  $x = 0$  и  $y = 0$ . В тройном интеграле перейдем от декартовых координат к цилиндрическим. Поверхность  $x^2 + y^2 = 2z$  в цилиндрических координатах имеет вид

$$I = \iiint_G (x^2 + y^2) dx dy dz = \iiint_D r^2 r dr d\varphi dz = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^2 r^3 dr \int_{\frac{r^2}{2}}^2 dz =$$



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



103

Закрыть

$$\begin{aligned}
 &= 2\pi \int_0^2 r^3 z \Big|_{\frac{r^2}{2}}^2 dz = 2\pi \int_0^2 r^3 \left( 2 - \frac{r^2}{2} \right) dz = 2\pi \left( 2 \cdot \frac{r^4}{4} \Big|_0^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{r^6}{6} \Big|_0^2 \right) = \\
 &= 2\pi \left( \frac{1}{2} \cdot 16 - \frac{16}{3} \right) = 2\pi \frac{16}{6} = \frac{16}{3}\pi.
 \end{aligned}$$

**Ответ:**  $I = \frac{16}{3}\pi$ . ►

**Пример 5.3.** Вычислить тройной интеграл  $\iiint z^2 dx dy dz$ , где область  $G$  ограничена поверхностями  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  и  $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$ ,  $R > 0$ .

◀ Построим рисунок области  $G$  в первом октанте с учетом симметрии ее относительно координатных плоскостей  $x = 0$  и  $y = 0$ , а также симметрии и подынтегральной функции  $z^2 = z^2 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot y^2$  относительно этих плоскостей (рисунок 5.7). Вначале находим аппликату точек пересечения наших сфер, решая систему 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz. \end{cases}$$

Получаем  $R^2 = 2Rz$ ,  $z = \frac{R}{2}$ . Угол  $\theta$  определяем из  $\triangle O'OB$ :

$$\cos \theta = \frac{R}{2R}, \quad \cos \theta = \frac{1}{2}, \quad \theta = \frac{\pi}{3}.$$

Для вычисления тройного интеграла применим замену переменных, перейдя к сферическим координатам. При этом надо учесть, что при



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



104

Закреть

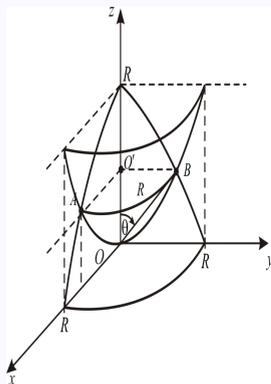


Рисунок 5.7

$z \geq 0$  лучи, выходящие из начала координат (точки  $O$ ) при  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$  пересекают границу области  $G$ , представленную уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

а при  $\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  — уравнением  $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$ . По этой причине представляем область  $G = G_1 \cup G_2$   $G_1$  — для  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ ,  $G_2$  — для  $\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ , где частичные области  $G_1$  и  $G_2$  не имеют общих точек. Далее воспользуемся свойством аддитивности тройного интеграла

$$I = \iiint_G z^2 dx dy dz = \iiint_{G_1} z^2 dx dy dz + \iiint_{G_2} z^2 dx dy dz =$$



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



105

Закреть

$$= \iiint_{D_1} \rho^4 \cos^2 \theta \cdot \sin \theta d\rho d\varphi d\theta + \iiint_{D_2} \rho^4 \cos^2 \theta \cdot \sin \theta d\rho d\varphi d\theta =$$

$$= 4 \left( \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin \theta \cdot \cos^2 \theta d\theta \int_0^R \rho^4 d\rho + \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cdot \cos^2 \theta d\theta \int_0^{2R \cos \theta} \rho^4 d\rho \right) =$$

$$= 4 \cdot \frac{\pi}{2} \left( -\frac{\cos^3 \theta}{3} \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} \cdot \frac{\rho^5}{5} \Big|_0^R + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cdot \cos^2 \theta \cdot \frac{\rho^5}{5} \Big|_0^{2R \cos \theta} d\theta \right) =$$

$$= 2\pi \left( \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{24} \right) \frac{R^5}{5} - \frac{32}{5} R^5 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^7 \theta d(\cos \theta) \right) =$$

$$= 2\pi \left( \frac{7R^5}{120} - \frac{32R^5}{5} \cdot \frac{\cos^8 \theta}{8} \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \right) = 2\pi \left( \frac{7R^5}{120} + \frac{32R^5}{5} \cdot \frac{1}{8 \cdot 2^8} \right) =$$



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



106

Закреть

$$= 2\pi \left( \frac{7R^5}{120} + \frac{R^5}{5 \cdot 64} \right) = \pi R^5 \left( \frac{7}{60} + \frac{1}{160} \right) = \pi R^5 \cdot \frac{56 + 3}{480} = \frac{59\pi R^5}{480}.$$

Ответ:  $I = \frac{59\pi R^5}{480}$ . ►



*Кафедра  
высшай  
матэматыкі*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



107

Закреть

## ЛЕКЦИЯ 6

### Геометрические и физические приложения тройных интегралов

#### 6.1 Вычисление массы тела

Из задачи о массе материального кубиреуемого тела и понятия тройного интеграла следует, что если указанное в задаче тело  $\Omega$  имеет объемную плотность  $\rho(x, y, z)$  (предположим, например, что функция  $\rho(x, y, z)$  непрерывна на замыкании области  $\Omega$ ), то масса тела  $\Omega$  вычисляется по формуле

$$m_{\Omega} = \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dx dy dz. \quad (6.1)$$

**Пример 6.1.** Определить массу тела, ограниченного поверхностями  $z = h$  ( $h > 0$ ) и  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ , если плотность в каждой точке тела пропорциональна аппликате этой точки, а в точке  $M(0, 0, h)$  эта плотность равна  $h$ .

◀ Плотность тела равна  $\rho = kz$ . Найдем коэффициент пропорциональности из начальных данных  $\rho(M) = h$ ,  $h = kh$ ,  $k = 1$ . Искомую массу вычисляем по формуле (6.1), переходя к цилиндрическим координатам (рисунок 6.1), учитывая симметрию  $\rho$  и  $\Omega$  относительно плоскостей  $x = 0$  и  $y = 0$ .



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



108

Закреть

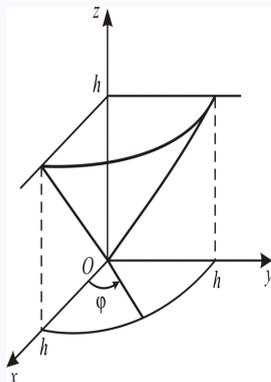


Рисунок 6.1

$$\begin{aligned}
 m_{\Omega} &= \iiint_{\Omega} z dx dy dz = \iiint_{\Omega} z z dr d\varphi dz = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^h r dr \int_r^h dz = \\
 &= [x^2 + y^2 = z^2, r^2 = z^2, z = r] = 4 \cdot \frac{\pi}{2} \int_0^h r \cdot \frac{z^2}{2} \Big|_r^h dr = \\
 &= \pi \int_0^h r (h^2 - r^2) dr = \pi \left( h^2 \cdot \frac{r^2}{2} \Big|_0^h - \frac{r^3}{3} \Big|_0^h \right) =
 \end{aligned}$$



На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



109

Закреть

$$= \pi \left( \frac{h^4}{2} - \frac{h^4}{4} \right) = \frac{\pi h^4}{4} \text{ (ед. массы).}$$

**Ответ:**  $m_\Omega = \frac{\pi h^4}{4}$  (ед. массы).▶

**Пример 6.2.** Определить массу сферического слоя между поверхностями  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  и  $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$  ( $a < 0$ ), если плотность в каждой его точке обратно пропорциональна расстоянию точки от начала координат.

◀ Построим рисунок 6.2 (учитываем при этом, а также при вычислении интеграла симметрию тела и подынтегральной функции относительно всех координатных плоскостей). Вычисляем искомую массу по формуле (6.1), переходя к сферическим координатам

$$\begin{aligned} m_\Omega &= \iiint_\Omega \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dx dy dz = k \iiint_\Omega \frac{1}{r} r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta \\ &= k \iiint_\Omega r \sin \theta dr d\varphi d\theta = 8k \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \int_a^{2a} r dr = \\ &= 8k \frac{\pi}{2} \left( -\cos \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) \frac{r^2}{2} \Big|_a^{2a} = 2k\pi (1 - 0) (4a^2 - a^2) = 6k\pi a^2 \text{ (ед. массы),} \end{aligned}$$



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



110

Закрыть

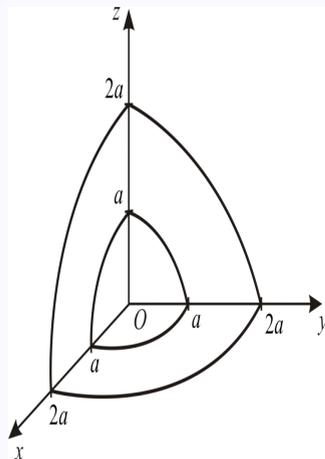


Рисунок 6.2



На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



Закреть

где  $k$  – коэффициент пропорциональности.

**Ответ:**  $m_\Omega = 6k\pi a^2$  (ед. массы).▶

## 6.2 Вычисление объемов тел

Если в формуле (6.1)  $\rho(x, y, z) = 1$ , то масса такого тела  $\Omega$  будет численно равна объему этого тела. Получим формулу через тройной интеграл вычисления объема тела

$$V_\Omega = \iiint_{\Omega} dx dy dz. \quad (6.2)$$

**Пример 6.3.** Вычислить с помощью тройного интеграла объем тела, ограниченного поверхностями  $z = x^2 + y^2$ ,  $z = 2x^2 + 2y^2$ ,  $y = x$ ,  $y = x^2$ .

◀ Объем тела находим по формуле (6.2). С помощью вспомогательных рисунков представим вид нашего тела. Рисунок 6.3 есть проекция нашего тела на плоскость  $xOy$ .

Цилиндрическая поверхность с направляющей (параболический сегмент – рисунок 6.3) и образующими, параллельными оси  $Oz$ , вырезает у поверхности  $z = x^2 + y^2$  частичную поверхность (нижнее основание цилиндрического тела рисунок – 6.4) и у поверхности  $z = 2x^2 + 2y^2$  частичную поверхность (верхнее основание цилиндрического тела – рисунок 6.5).



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



112

Закреть

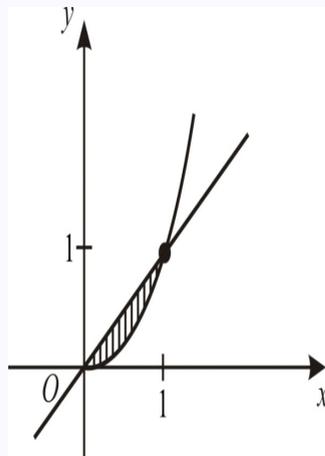


Рисунок 6.3



*Кафедра  
высшай  
матэматыкі*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



113

Закреть

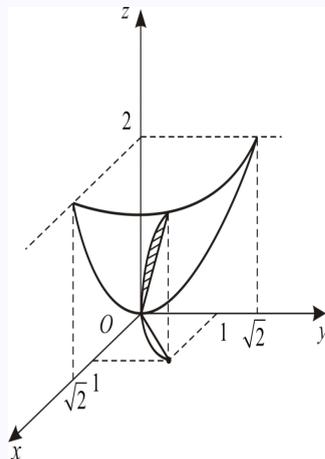


Рисунок 6.4



На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



Закреть

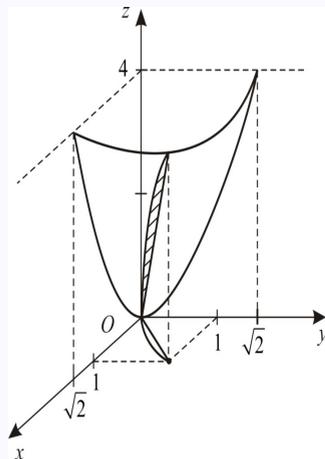


Рисунок 6.5



*Кафедра  
высшай  
матэматыкі*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



115

Закреть

Проведем вычисление объема тела через тройной интеграл в декартовой системе координат (Почему труднее в цилиндрических координатах? Пояснить самостоятельно).

$$\begin{aligned} V_{\Omega} &= \iiint_{\Omega} dx dy dz = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x dy \int_{x^2+y^2}^{2(x^2+y^2)} dz = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x (x^2 + y^2) dy = \\ &= \int_0^1 \left( x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{x^2}^x dx = \int_0^1 \left( x^3 - x^4 + \frac{1}{3} (x^3 - x^6) \right) dx = \\ &= \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 - \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 + \frac{1}{3} \left( \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 - \frac{x^7}{7} \Big|_0^1 \right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{12} - \frac{1}{21} = \frac{3}{35} \text{ (ед. объема)}. \end{aligned}$$

**Ответ:**  $V_{\Omega} = \frac{3}{35}$  (ед. объема).▶

**Пример 6.4.** Вычислить объём тела, ограниченного  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  и  $3z = x^2 + y^2$ .

◀ Построим рисунок данного тела (рисунок 6.6).



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



116

Закреть

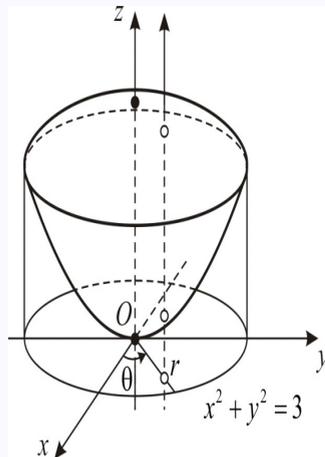


Рисунок 6.6



*Кафедра  
высшай  
матэматыкі*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



117

Закреть

Найдём проекцию линии пересечения сферы и параболоида на плоскость  $xOy$ . Для этого из системы уравнений

$$z^2 = 4 - (x^2 - y^2), \quad z^2 = \frac{(x^2 - y^2)}{9}$$

достаточно исключить переменную  $z$ . В результате получим

$$\frac{(x^2 - y^2)^2}{9} = 4 - (x^2 + y^2),$$

или  $(x^2 + y^2)^2 + 9(x^2 + y^2) - 36 = 0$ , откуда  $x^2 + y^2 = -12$  и  $x^2 + y^2 = 3$ . Следовательно, уравнением проекции будет окружность  $x^2 + y^2 = 3$ . В силу симметрии достаточно вычислить объём тела ( $G$ ), находящегося в первом октанте, и результат умножить на 4. Тогда согласно формуле (6.2) для искомого объёма  $V$  получим  $V = 4 \iiint_G dx dy dz$ . Так как проекция данного тела ( $G$ ) на плоскость  $xOy$  есть круг  $x^2 + y^2 \leq 3$ , то для вычисления последнего интеграла целесообразно перейти к цилиндрическим координатам. После преобразования по формулам (5.7) уравнения окружности  $x^2 + y^2 = 3$ , параболоида  $3z = x^2 + y^2$  и сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  соответственно принимают вид:  $r = \sqrt{3}$ ,  $z = \frac{1}{3}r^2$  и  $z = \sqrt{4 - r^2}$ . Из рисунка 6.6 видно, что в области интегрирования ( $D$ ) угол  $\theta$  изменяется



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



118

Закреть

от 0 до  $\frac{\pi}{2}$ ,  $r$  – от 0 до  $\sqrt{3}$ , а  $z$  – от  $z = \frac{1}{3}r^3$  до  $z = \sqrt{4-r^2}$ . Потому

$$\begin{aligned} V_{\Omega} &= 4 \iiint_G dx dy dz = 4 \iiint_D r dr d\theta dz = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} r dr \int_{\frac{1}{3}r^2}^{\sqrt{4-r^2}} dz = \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} r \left( \sqrt{4-r^2} - \frac{1}{3}r^2 \right) dr = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ -\frac{1}{3} (4-r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{12}r^4 \right]_0^{\sqrt{3}} d\theta = \\ &= \frac{19}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{19}{6}\pi \text{ (ед. объема)}. \end{aligned}$$

**Ответ:**  $V_{\Omega} = \frac{19}{6}\pi$  (ед. объема). ►

### 6.3 Статические моменты, момент инерции и центры тяжести материальных тел

Аналогично, как и при рассмотрении двойного интеграла, используя метод интеграла, получаем следующие формулы:

$$M_{xOz} = \iiint_{\Omega} y\rho(x, y, z) dx dy dz \quad (6.3)$$



На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



статический момент материального тела  $\Omega$  относительно плоскости  $xOz$ ,  
 $\rho(x, y, z)$  – объемная плотность тела  $\Omega$ .

$$M_{yOz} = \iiint_{\Omega} x\rho(x, y, z) dx dy dz \quad (6.4)$$

статический момент материального тела  $\Omega$  относительно плоскости  $yOz$ .

$$M_{xOy} = \iiint_{\Omega} z\rho(x, y, z) dx dy dz \quad (6.5)$$

статический момент материального тела  $\Omega$  относительно плоскости  $xOy$ .

$$I_{Oz} = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dx dy dz \quad (6.6)$$

момент инерции материального тела  $\Omega$  относительно оси  $Oz$ .

$$I_{Ox} = \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz \quad (6.7)$$

момент инерции материального тела  $\Omega$  относительно оси  $Ox$ .

$$I_{Oy} = \iiint_{\psi} (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz \quad (6.8)$$



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



120

Закреть

момент инерции материального тела  $\Omega$  относительно оси  $Oy$ .

По аналогии с выводом формул для вычисления координат центра тяжести плоской материальной пластинки получаем формулы для нахождения центра тяжести материального тела  $\Omega$ .

Если точка  $M_0(x_c, y_c, z_c)$  – центр тяжести материального тела  $\Omega$ , то

$$x_c = \frac{M_{y0z}}{m_\Omega}, \quad y_c = \frac{M_{x0z}}{m_\Omega}, \quad z_c = \frac{M_{x0y}}{m_\Omega}, \quad (6.9)$$

где  $m_\Omega$  – масса тела  $\Omega$ .

**Пример 6.5.** Найти координаты центра масс однородного тела ( $\rho = 1$ ), ограниченного поверхностями

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9, \quad x^2 + y^2 = 2\sqrt{3}z \quad (x^2 + y^2 \leq 2\sqrt{3}z).$$

◀ Построим рисунок 6.7 тела в первом октанте (тело симметрично как по объему, так и по массе относительно плоскостей  $xOz$  и  $yOz$ ). Находим аппликату точек поверхностей тела (по окружности пересечения).

$$z^2 + 2\sqrt{3}z - 9 = 0, \quad \frac{D}{4} = (\sqrt{3})^2 + 9 = 12, \quad z = \sqrt{12} - \sqrt{3}.$$

Дальше определяем радиус окружности пересечения поверхностей

$$x^2 + y^2 + (\sqrt{12} - \sqrt{3})^2 = 9, \quad x^2 + y^2 = 6, \quad R = \sqrt{6}.$$



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



121

Закреть

Из условий указанной выше симметрии первые две координаты центра тяжести тела равны нулю, то есть  $x_c = y_c = 0$ .

Координату  $z_c$  находим по третьей формуле (6.9). Учитываем также, что подынтегральные функции тройных интегралов в указанной формуле симметричны относительно плоскостей  $x = 0$  и  $y = 0$ .

$$\begin{aligned}
 m_{\Omega} &= \iiint_{\Omega} dx dy dz = \iiint_D r dr d\varphi dz = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sqrt{6}} r dr \int_{\frac{r^2}{2\sqrt{3}}}^{\sqrt{9-r^2}} dz = \\
 &= 2\pi \int_0^{\sqrt{6}} r z \Big|_{\frac{r^2}{2\sqrt{3}}}^{\sqrt{9-r^2}} dr = 2\pi \int_0^{\sqrt{6}} r \left( \sqrt{9-r^2} - \frac{r^2}{2\sqrt{3}} \right) dr = \\
 &= 2\pi \left( -\frac{1}{2} \cdot \frac{(9-r^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\sqrt{6}} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{r^4}{4} \Big|_0^{\sqrt{6}} \right) = \\
 &= 2\pi \left( -\frac{1}{3} \left( 3^{\frac{3}{2}} - 27 \right) - \frac{36}{2\sqrt{3} \cdot 4} \right) = \\
 &= 2\pi \left( 9 - \sqrt{3} - \frac{3}{2}\sqrt{3} \right) = 2\pi \left( 9 - \frac{5}{2}\sqrt{3} \right) \text{ (ед. массы)}.
 \end{aligned}$$



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



122

Закреть

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



Закреть

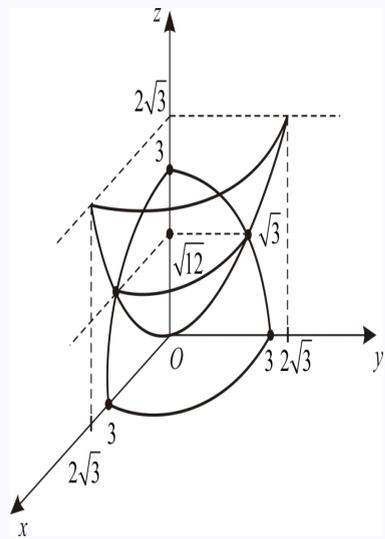


Рисунок 6.7

$$\begin{aligned}
 M_{xOy} &= \iiint_{\Omega} z dx dy dz = \iiint_D z r dr d\varphi dz = \\
 &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sqrt{6}} r dr \int_{\frac{r^2}{2\sqrt{3}}}^{\sqrt{9-r^2}} z dz = 2\pi \int_0^{\sqrt{6}} r \cdot \frac{z^2}{2} \Big|_{\frac{r^2}{2\sqrt{3}}}^{\sqrt{9-r^2}} dr = \\
 &= \pi \int_0^{\sqrt{6}} r \left( 9 - r^2 - \frac{r^4}{4 \cdot 3} \right) dr = \pi \left( \frac{9}{2} r^2 \Big|_0^{\sqrt{6}} - \frac{r^4}{4} \Big|_0^{\sqrt{6}} - \frac{1}{12} \cdot \frac{r^6}{6} \Big|_0^{\sqrt{6}} \right) = \\
 &= \pi \left( \frac{9}{2} \cdot 6 - 9 - \frac{6^3}{2 \cdot 6^2} \right) = \pi (18 - 3) = 15\pi.
 \end{aligned}$$

Тогда

$$z_c = \frac{15\pi}{\pi (18 - 5\sqrt{3})} = \frac{15 (18 + 5\sqrt{3})}{249} = \frac{5}{83} (18 + 5\sqrt{3}).$$

**Ответ:**  $M_0 (0; 0; \frac{5}{83} (18 + 5\sqrt{3}))$ . ►

**Пример 6.6.** Найти координаты центра тяжести однородного тела, ограниченного сферой  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  и параболоидом  $3z = x^2 + y^2$ .



*Кафедра  
высшай  
матэматыкі*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



124

Закреть

◀ Объём  $V$  данного тела вычислен в задаче 6.4 (рисунок 6.6):  $V = \frac{19}{6}\pi$ .

Так как данное тело симметрично относительно оси  $Oz$  и тело однородно, то центр тяжести его лежит на оси  $Oz$ , следовательно,  $x_c = y_c = 0$ . Остаётся найти аппликату центра тяжести тела, то есть  $z_c = \frac{M_{xOy}}{m_\Omega}$ . В нашем случае, для простоты, считаем тело однородным с плотностью равной единице, а тогда в этом случае  $m_\Omega = V$ . Переходя к цилиндрическим координатам, найдём статический момент  $M_{xOy}$  (тройной интеграл в числителе):

$$\begin{aligned} M_{xOy} &= \iiint_{\Omega} z dx dy dz = \iiint_D z r dr d\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} r dr \int_{\frac{1}{3}r^2}^{\sqrt{4-r^2}} z dz = \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} r \cdot \frac{z^2}{2} \Big|_{\frac{1}{3}r^2}^{\sqrt{4-r^2}} dr = \frac{1}{2} 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} r \left( 4 - r^2 - \frac{1}{9}r^4 \right) dr = \\ &= \pi \left( 2r^2 - \frac{1}{4}r^4 - \frac{1}{54}r^6 \right) \Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{13}{4}\pi. \end{aligned}$$

Следовательно,  $z_c = \frac{M_{xOy}}{V} = \frac{13}{4}\pi : \frac{19}{6}\pi = \frac{39}{38}$ . Таким образом, центр тяжести данного тела находится в точке  $M_0 \left( 0, 0, \frac{39}{38} \right)$ .

**Ответ:**  $M_0 \left( 0; 0; \frac{39}{38} \right)$ . ▶



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



125

Закреть

## ЛЕКЦИЯ 7

### Многомерные интегралы. Несобственные кратные интегралы

#### 7.1 Многомерные интегралы ( $n$ -кратные, $n \in \mathbb{N}$ , $n > 3$ )

Теория  $n$ -кратных интегралов,  $n \in \mathbb{N}$  и  $n > 3$ , во многом аналогична теории двойных и тройных интегралов. Кратко изложим некоторые ее моменты.

##### 7.1.1 Кубируемость $n$ -мерных областей

Пусть дано метрическое пространство  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  и  $n > 3$ . **Прямоугольным параллелепипедом в  $\mathbb{R}^n$**  называется множество точек  $M(x_1, \dots, x_n)$ ,  $x_k \in \mathbb{R}$ ,  $k = \overline{1, n}$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , из  $\mathbb{R}^n$  (обозначаем это множество через  $\overline{\Pi}$ ), что

$$\overline{\Pi} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_k \leq x_k \leq b_k, k = \overline{1, n}, a_k \in \mathbb{R}, b_k \in \mathbb{R}\}.$$

**Элементарным телом в  $\mathbb{R}^n$**  называется объединение конечного числа  $n$ -мерных прямоугольных параллелепипедов без общих внутренних точек.

Пусть  $G \subset \mathbb{R}^n$  – ограниченная область (открытое связное множество). Обозначим через  $P = \{P_\alpha\}$  множество всех элементарных тел, содержащихся в  $G$  (вписанных в  $G$ ), а через  $Q = \{Q_\beta\}$  – множество всех элемен-



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



126

Закреть

тарных тел, содержащих  $G$  (описанных около  $G$ ). Каждое элементарное тело кубируемо (измеримо). **Объемом  $n$ -мерного прямоугольного параллелепипеда** называется произведение длин всех его ребер, выходящих из одной вершины. Очевидно, что множество объемов  $P$  ограничено сверху (в качестве верхней границы можно взять объем любого элементарного тела, описанного около  $G$ ). Множество объемов  $Q$  ограничено снизу (в качестве нижней границы можно взять объем любого элементарного тела, вписанного в  $G$ ).

Введем обозначения:  $\tilde{I} = \sup_{\alpha} \{V_{P_{\alpha}}\}$  – **нижний объем области  $G$**  (по определению);  $\tilde{I} = \inf_{\beta} \{V_{Q_{\beta}}\}$  – **верхний объем области  $G$**  (по определению).

**Определение 7.1.** Область  $G$  называется **измеримой по Жордану (кубируемой)**, если  $\tilde{I} = \tilde{I} = I = \mu(G)$ , а  $I$  называется **мерой Жордана области  $G$** .

### 7.1.2 Понятие $n$ -мерного интеграла

Пусть функция  $u = f(x)$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $x_k \in \mathbb{R}$ ,  $k = \overline{1, n}$ , определена на замыкании  $\overline{G}$  ограниченной области  $G \subset \mathbb{R}^n$ , мера границы  $\partial G$  которой равна нулю. Берем любое разбиение  $\tau_G$  с помощью системы из  $m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $n - 1$  – мерных поверхностей меры нуль на  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , частич-



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



127

Закреть

ных областей  $G_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ , без общих внутренних точек. Произвольно выбираем точки  $M_k(x) \in G_k$ . Составляем интегральные суммы:

$$\sigma_{\tau_G} = \sigma_{\tau_G}(f, M_k) = \sum_{k=1}^n f(M_k) \Delta G_k, \quad (7.1)$$

где  $\Delta G_k$  – объем (мера) частичной области  $G_k$  (можно показать, что любая ограниченная область с границей меры нуль измерима по Жордану).

Обозначим через  $d_k = \sup \{d(M'_k, M''_k)\}$ ,  $M', M'' \in \overline{G}_k$ , где  $d(M', M'')$  – расстояние между точками  $M', M'' \in G'_k$  ( $d_k$  назовем диаметром частичной области  $G_k$ ). Также обозначим через  $\lambda_{\tau_G} = \max_k \{d_k\}$ .

**Определение 7.2.** Функция  $f(x)$  называется **интегрируемой по области  $G$** , если существует конечный предел

$$\lim_{\lambda_{\tau_G} \rightarrow 0} \sigma_{\tau_G}(f, M_k) \quad (7.2)$$

и этот предел не зависит как от разбиения  $\tau_G$ , так и от выбора точек  $M_k \in \overline{G}_k$ .

В этом случае указанный предел (7.2) называется  $n$ -мерным интегра-



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



128

Закреть

лом функции  $f(x)$  по области  $G$  и обозначается:

$$\lim_{\lambda_{\tau_G} \rightarrow 0} \sigma_{\tau_G}(f, M_k) = \iint_G \dots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = I = \int_G f(x) dx, \quad (7.3)$$

где  $dx = dx_1 \cdot \dots \cdot dx_n$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $x_k \in \mathbb{R}$ ,  $k = 1, n$ .

**Замечание 7.1.** По Коши интеграл (7.3) определяется следующим образом:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \tau_G \quad \lambda_{\tau_G} < \delta \quad \forall M_k \in \overline{G}_k \quad |I - \sigma_{\tau_G}| < \varepsilon.$$

**Замечание 7.2.** Так же как для двойных и тройных интегралов (аналогично), будет справедливо необходимое условие интегрируемости (ограниченность интегрируемой функции на замыкании области интегрирования) для  $n$ -мерных интегралов,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 3$ . По аналогии вводятся суммы Дарбу и изучаются их свойства, устанавливаются критерии и достаточные условия интегрируемости (существовать, например, будут интегралы от непрерывных на замыкании области интегрирования функций). Свойства  $n$ -мерных интегралов,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 3$ , аналогичны соответствующим свойствам для двойных и тройных интегралов.



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



129

Закреть

### 7.1.3 Вычисление $n$ -мерного интеграла

**Теорема 7.1.** Пусть существует интеграл

$$\iint \dots \int_G f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

Область  $G$  такая, что любая прямая, параллельная оси  $Ox_k$  ( $k$  – фиксировано) пересекает границу области  $G$  не более чем в двух точках, проекции которых на ось  $Ox_k$  будут  $a = a(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)$  и  $b = b(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)$ , причем  $a \leq b$ .

Также для любых  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n$ , существует одномерный интеграл

$$\int_a^b f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) dx_k.$$

Тогда существует  $(n-1)$  кратный интеграл

$$\iint \dots \int_{G_{n-1}} dx_1 \dots dx_{k-1} \cdot dx_{k+1} \dots dx_n \int_a^b f(x) dx = \int_G f(x) dx, \quad (7.4)$$

где  $G_{n-1}$  – проекция  $G$  на координатную гиперплоскость

$$Ox_1 \dots x_{k-1} x_{k+1} \dots x_n,$$



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



130

Закреть

$$x = (x_1, \dots, x_n), \quad dx = dx_1 \dots dx_n, \quad \int_G = \iiint_G \dots \int_G.$$

**Замечание 7.3.** В сформулированной теореме в качестве  $x_k$  может быть любая из координат  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Область в этом случае называется простой по переменной  $x_k$ . Например, указанный выше  $n$ -мерный прямоугольный параллелепипед будет простой областью по любой из переменных  $x_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ .

**Пример 7.1.** Вычислить 4-кратный интеграл

$$I = \iiint \dots \int (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4,$$

где  $\overline{G}_4$  – 4-мерный куб, заданный неравенствами  $0 \leq x_k \leq 1$ ,  $k = \overline{1, 4}$ .

$$\begin{aligned} \blacktriangleleft I &= \iiint_{G_3} dx_1 dx_2 dx_3 \int_0^1 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) dx_4 = \\ &= \iiint_{G_3} \left( (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) x_4 \Big|_0^1 \right) dx_1 dx_2 dx_3 = \\ &= \iiint_{G_3} \left( x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \frac{1}{3} \right) dx_1 dx_2 dx_3 = \end{aligned}$$



*Кафедра  
высшай  
матэматыкі*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



131

Закреть

$$\begin{aligned}
&= \iint_{G_2} dx_1 dx_2 \int_0^1 \left( x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \frac{1}{3} \right) dx^3 = \\
&= \iint_{G_2} \left( \left( x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{3} \right) x_3 \Big|_0^1 + \frac{x_3^3}{3} \Big|_0^1 \right) dx_1 dx_2 = \dots = \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

Ответ:  $I = \frac{4}{3}$ . ▶

### 7.1.4 Замена переменных в $n$ -интеграле

Пусть в пространстве  $\mathbb{R}^n$  дана кублируемая область  $G$  (измеримая, мера конечная). Функция  $u = f(x_1, \dots, x_n) = f(x)$  определена на замыкании области  $\bar{G} = G \cup \partial G$ , и существует  $n$ -кратный интеграл

$$\int_G f(x) dx = \iint \dots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n. \quad (7.5)$$

Далее предполагаем, что система функций

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t_1, \dots, t_n), \\ x_2 = x_2(t_1, \dots, t_n), \\ \dots \\ x_n = x_n(t_1, \dots, t_n) \end{cases} \quad (7.6)$$



Кафедра  
высшай  
матэматыкі

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



132

Закреть

биективно отображает область  $D$  переменных  $t = (t_1, \dots, t_n)$  на область  $G$ , а  $\partial D$  на  $\partial G$ . Пусть также функция  $x_k = x_k(t_1, \dots, t_n)$ ,  $k = \overline{1, n}$ , и существующие их частные производные первого порядка непрерывны на  $\overline{D} = D \cup \partial D$ , а якобиан

$$I = \frac{D(x_1, \dots, x_n)}{D(t_1, \dots, t_n)} \neq 0. \quad (7.7)$$

Тогда для интеграла (7.5) справедлива формула замены переменных

$$\int_G f(x) dx = \int_D f(x(t)) |I| dt, \quad (7.8)$$

где  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $t = (t_1, \dots, t_n)$ ,

$$\int_D f(x(t)) |I| dt = \iiint \dots \int f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) |I| dt_1 \dots dt_n.$$

**Замечание 7.4.** В  $n$ -мерном пространстве,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 3$ , сферические координаты определяются равенствами:

$$\begin{cases} x_1 = \rho \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{n-1}, \\ x_m = \rho \cos \theta_{m-1} \prod_{k=m}^{n-1} \sin \theta_k, \quad m = \overline{2, n-1}, \\ x_n = \rho \cos \theta_{n-1}, \end{cases} \quad (7.9)$$



На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



133

Закреть

где  $\rho \geq 0$ ,  $0 \leq \theta_1 < 2\pi$ ,  $0 \leq \theta_m \leq \pi$ ,  $m = \overline{2, n-1}$ ; а якобиан

$$I = \rho^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin^{k-1} \theta_k \quad (7.10)$$

$$\left( \prod_{k=1}^{n-1} \sin^{k-1} \theta_k = 1 \cdot \sin \theta_2 \cdot \sin^2 \theta_3 \cdot \dots \cdot \sin^{n-2} \theta_{n-1} \right).$$

Обратно, сферические координаты выражаются через декартовы по следующим формулам:

$$\rho = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}, \quad \sin \theta_m = \frac{\rho_m}{\rho_{m+1}}, \quad \cos \theta_m = \frac{x_{m+1}}{\rho_m},$$

где  $\rho_m = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_m^2}$ ,  $m = \overline{1, n-1}$ .

**Пример 7.2.** Найти объём 4-мерного шара радиуса  $R$ .

◀ Объём 4-мерного шара в декартовых координатах вычисляем по формуле

$$V_4 = \iiint\limits_G dx_1 dx_2 dx_3 dx_4. \quad (7.11)$$

В интеграле (7.11) переходим к сферическим координатам.

$$V_4 = \iiint\limits_D \rho^3 \sin \theta_2 \cdot \sin^2 \theta_3 d\rho d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 =$$



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



134

Закреть

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^\pi \sin \theta_2 d\theta_2 \int_0^\pi \sin^2 \theta_3 d\theta_3 \int_0^R \rho^3 d\rho = \\
&= 2\pi (-\cos \theta_2)|_0^\pi \cdot \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2\theta_3}{2} d\theta_3 \cdot \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^R = \\
&= -2\pi (-1 - 1) \cdot \frac{1}{2}\pi \cdot \frac{\rho^4}{4} = \frac{\pi^2 R^4}{2}. \text{ (ед. объема)}
\end{aligned}$$

**Ответ:**  $V_4 = \frac{\pi^2 R^4}{2}$  (ед. объема). ►

## 7.2 Несобственные кратные интегралы

**Замечание 7.5.** При рассмотрении многомерных собственных интегралов видно, что теория этих интегралов при  $n > 2$  во многом аналогична соответствующей теории двойных собственных интегралов.

### 7.2.1 Многомерные несобственные интегралы с неограниченной областью интегрирования

С учётом предыдущего замечания будем рассматривать в основном теорию двойных несобственных интегралов.

Пусть функция  $z = f(x, y)$  определена в области  $G$ , мера которой



*Кафедра  
высшай  
матэматыкі*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



135

Закреть

(площадь) равна  $+\infty$ . Пусть также для любой частичной квадрируемой области  $G' \subset G$  существует собственный двойной интеграл

$$\iint_{G'} f(x, y) dx dy.$$

Тогда запись (символ)

$$\iint_G f(x, y) dx dy \quad (7.12)$$

называется **несобственным двойным интегралом первого рода**.

**Определение 7.3.** Множество  $A \subset \mathbb{R}^n$  называется **множеством меры нуль в смысле Лебега**, если для любого  $\varepsilon > 0$  найдётся такое покрытие множества  $A$  не более чем счётной системой  $n$ -мерных промежутков (брусков), сумма объёмов которых меньше  $\varepsilon$ .

Можно дать и другие определения жорданова множества, эквивалентное определению 7.2 (доказать соответствующий критерий) а именно: множество  $D$  называется жордановым, если оно ограничено и мера Лебега его границы (множества граничных точек) равна нулю.

**Замечание 7.6.** (некоторые свойства множеств меры нуль в смысле Лебега):



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



136

Закреть



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



137

Закреть

1. Точка есть множество меры нуль.
2. Объединение любого не более чем счётного множества множеств меры нуль есть множество меры нуль.
3. Подмножество множества меры нуль есть множество меры нуль.
4. Если  $A \subset \mathbb{R}^n$  – ограниченное замкнутое множество и  $A = D(f)$  и функция  $f(x) \dots f(x_1, \dots, x_n)$  непрерывна на  $A$ , то график функции  $f(x)$  есть множество меры нуль.

**Определение 7.4.** Последовательность  $(G_n)$  жордановых множеств  $G_n \subset \mathbb{R}^n$  называется **монотонно исчерпывающей** множеством  $G \subset \mathbb{R}^n$ , если:

1.  $G_n \subset G_{n+1}$  для любого  $n \in \mathbb{N}$ ;
2.  $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ .

**Определение 7.5.** Если для любой указанной в определении 7.4 последовательности существует конечный один и тот же предел числовой последовательности  $\left( \iint_{G_n} f(x, y) dx dy \right)$ , то несобственный интеграл (7.12) в этом случае называется **сходящимся**, если же такой предел не существует, то несобственный интеграл (7.12) называется **расходящимся**.

**Замечание 7.7.** Указанное в определении 7.5 требование независимости предела  $\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{G_n} f(x, y) dx dy$  от выбора исчерпывания можно заменить требованием существования конечного указанного предела для любого исчерпывания. Достаточность такого требования связано с тем, что если существуют два исчерпывания, для которых указанные пределы будут различными, то обязательно найдётся исчерпывание, что этот конечный предел не существует.

**Пример 7.3.** Исследовать на сходимость несобственный интеграл

$$\iint_G \frac{x}{y} dx dy, \quad (7.13)$$

где  $\bar{G} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{matrix} y \geq 1 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{matrix} \right\}$ .

◀ Построим рисунок области интегрирования.

Выбираем следующие два исчерпывания множества  $\bar{G}$ .

1.  $(\bar{G}_n^1), \bar{G}_n^1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{matrix} -1 \leq y \leq n \\ -1 \leq x \leq 1 \end{matrix} \right\}$ ,
2.  $(\bar{G}_n^2), \bar{G}_n^2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{matrix} 0 \leq x \leq 1 \\ n \leq y \leq 2n \end{matrix} \right\} \cup G_n^1$ .

Очевидно, что функция  $f(x, y) = \frac{x}{y}$  непрерывна и на  $\bar{G}_n^1$ , и на  $\bar{G}_n^2$ . Это означает, что существуют интегралы Римана функции  $f(x)$  как по области  $G_n^1$  ( $f(x) \in \mathbb{R}(G_n^1)$ ), так и по области  $G_n^2$  ( $f(x) \in \mathbb{R}(G_n^2)$ ).



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



138

Закреть

Находим соответствующие пределы

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{G_n^1} \frac{x}{y} dx dy &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{dy}{y} \int_{-1}^1 x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \ln y \Big|_1^n \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^1 \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( (\ln n - \ln 1) \cdot \frac{1}{2} (1^2 - 1^2) \right) = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{G_n^2} \frac{x}{y} dx dy &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \iint_{(G_n^2)'} \frac{x}{y} dx dy + \iint_{(G_n^2)''} \frac{x}{y} dx dy \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_1^n \frac{dy}{y} \int_{-1}^1 x dx + \int_n^{2n} \frac{dy}{y} \int_0^1 x dx \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \ln y \Big|_1^{2n} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\ln 2n - \ln n) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \ln 2.\end{aligned}$$

Так как пределы разные, то наш несобственный интеграл расходится. ►



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



139

Закреть

## 7.2.2 Несобственный интеграл от неотрицательных функций

Справедлива теорема-критерий.

**Теорема 7.2.** *Несобственный интеграл (7.12) от неотрицательной в области  $G$  функции  $f(x, y)$  сходится тогда и только тогда, когда существует последовательность кубируемых областей  $(G_n)$ , монотонно исчерпывающих область  $G$ , для которой была бы ограничена соответствующая числовая последовательность*

$$a_n = \iint_{G_n} f(x, y) dx dy. \quad (7.14)$$

◀ **Необходимое условие.** Если интеграл (7.12) сходится, то последовательность  $\left( \iint_{G_n} f(x, y) dx dy \right)$  имеет конечный предел, поэтому она ограничена.

**Достаточное условие.** Последовательность (7.14) – неубывающая  $\overline{G}_n \subset \overline{G}_{n+1}$  и  $f(x, y) \geq 0 \Rightarrow a_n \leq a_{n+1}$  и ограничена, поэтому и ограничена сверху. Значит, последовательность (7.14) сходится к некоторому числу  $I$ . Можно доказать, что и для любой другой последовательности  $(G'_n)$  кубируемых областей, монотонно исчерпывающих областей  $G$ , соответствующая ей числовая последовательность вида (7.14). ▶



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



140

Закреть

**Следствие 7.1. (общий признак сравнения).** Пусть для любых точек  $M(x, y) \in G$  ( $G$  – неограниченная область из  $\mathbb{R}^2$ ) выполняется неравенство:

$$0 \leq f(x, y) \leq g(x, y), \quad (7.15)$$

а несобственный интеграл

$$\iint_G g(x, y) dx dy \quad (7.16)$$

сходится. Тогда несобственный интеграл

$$\iint_G f(x, y) dx dy \quad (7.17)$$

также сходится.

◀ Если  $(G_n)$  есть последовательность областей, монотонно исчерпывающих область  $G$ , то из неравенства

$$a_n = \iint_{G_n} f(x, y) dx dy \leq \iint_{G_n} g(x, y) dx dy = b_n \quad (7.18)$$

вытекает, что последовательность  $(a_n)$  – ограничена, так как  $(b_n)$  – ограничена. Но тогда из теоремы 7.1 следует, что интеграл (7.17) сходится. ▶



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



141

Закреть

**Следствие 7.2.** Если несобственный интеграл  $\iint_G |f(x, y)| dx dy$  сходится, то сходится и интеграл  $\iint_G f(x, y) dx dy$ .

◀ Введём следующие функции:

$$f_+(x, y) = \frac{|f(x, y)| + f(x, y)}{2}$$

и

$$f_-(x, y) = \frac{|f(x, y)| - f(x, y)}{2}.$$

Справедливы неравенства

$$0 \leq f_-(x, y) \leq |f(x, y)|$$

и

$$0 \leq f_+(x, y) \leq |f(x, y)|.$$

По следствию 7.1 сходятся интегралы

$$\iint_G f_-(x, y) dx dy \text{ и } \iint_G f_+(x, y) dx dy.$$

Тогда сходится и интеграл

$$\iint_G (f_+(x, y) - f_-(x, y)) dx dy = \iint_G f(x, y) dx dy. \blacktriangleright$$



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



142

Закреть

**Определение 7.6.** Интеграл  $\iint_G f(x, y) dx dy$  называется **абсолютно сходящимся**, если сходится интеграл  $\iint_G |f(x, y)| dx dy$ .

**Замечание 7.8.** Следствие 7.2 после определения 7.6 можно сформулировать следующим образом (даже для любого  $n$ -кратного,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , несобственного интеграла): если указанный интеграл абсолютно сходится то он сходится. Кроме того, для  $n$ -кратных несобственных интегралов ( $n \geq 2$ ) справедливо и обратное утверждение: если интеграл сходится, то он сходится абсолютно. То есть для этих интегралов нет понятия условной сходимости.

Причина такой ситуации кроется в том, что для одномерного случая, например: для луча  $[a, +\infty)$  в теории несобственных интегралов рассматривают исчерпывание только промежутками и не произвольными жордановыми множествами.



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



143

Закреть

### 7.2.3 Сведение несобственного кратного интеграла к повторному

**Теорема 7.3.** Если множество  $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in X, y \in X(x)\}$  и  $f(x, y) \geq 0$  для точек  $(x, y) \in G$ , то равенство

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_X dx \int_{X(x)} f(x, y) dy \quad (7.19)$$

справедливо в том смысле, что кратный и повторный интегралы или одновременно расходятся, или одновременно сходятся и равны по величине (теорему только формулировать).

**Пример 7.4.** Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость

$$\iint_G \frac{e^{-x}}{\sqrt{y}} dx dy, \quad (7.20)$$

где  $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, 0 < xy < 1\}$ .

◀ В нашем случае условия предыдущей теоремы выполняются. Сделаем эскиз чертежа области интегрирования (рисунок 7.1).



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



144

Закреть

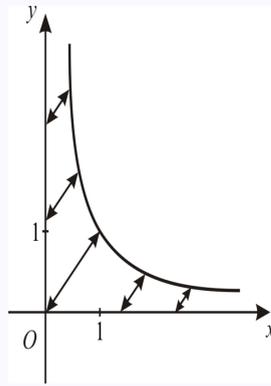


Рисунок 7.1

Заменяем интеграл (7.20) повторным

$$\iint_G \frac{e^{-x}}{\sqrt{y}} dx dy = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{dy}{\sqrt{y}} = I.$$

Тогда

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx \int_0^{\frac{1}{x}} y^{-\frac{1}{2}} dy = \int_0^{+\infty} e^{-x} \frac{y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \Big|_0^{\frac{1}{x}} dx = \int_0^{+\infty} 2\sqrt{\frac{1}{x}} e^{-x} dx =$$



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



145

Закрыть

$$\begin{aligned}
&= \left[ \begin{array}{l} \sqrt{x} = t \\ t_{\text{Н}} = 0 \\ t_{\text{В}} = \infty \end{array} \middle| \begin{array}{l} \sqrt{\frac{1}{x}} = \frac{1}{t} \\ x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{array} \middle| e^{-x} = e^{-t^2} \right] = \\
&= \int_0^{+\infty} 2\frac{1}{t}e^{-t^2}2tdt = 4 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = 4\frac{\sqrt{\pi}}{2} = 2\sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

**Ответ:**  $I = 2\sqrt{\pi}$ . ►

**Замечание 7.9.** Учитывая замечание 7.8 и теорему 7.2, несобственный интеграл вида

$$\iint_G f(x, y)g(x, y)dxdy, \quad (7.21)$$

где  $0 < C_1 \leq |f(x, y)| \leq C_2 < +\infty$  и  $f \in C(G)$ , а  $g(x, y) > 0$ , будет сходиться или расходиться одновременно с интегралом

$$\iint_G g(x, y)dxdy. \quad (7.22)$$

Для исследования на сходимость интеграла (7.22) достаточно взять одну (любую) последовательность  $(G_n)$  и исследовать на сходимость пре-



*Кафедра  
высшай  
матэматыкі*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



146

Закреть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_G g(x, y) dx dy. \quad (7.23)$$

**Пример 7.5.** Исследовать на сходимость несобственный интеграл

$$\iint_G \frac{-2 + \sin(x + y)}{(x^2 + y^2)^\alpha} dx dy, \quad (7.24)$$

где  $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 1\}$ .

◀ Обозначим:  $f(x, y) = -2 + \sin(x + y)$  и  $g(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^\alpha}$ . Функции  $f(x, y)$  и  $g(x, y)$  удовлетворяют условиям, указанным в предыдущем замечании. Тогда интеграл (7.24) сходится или расходится одновременно с интегралом

$$\iint_G \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^\alpha}. \quad (7.25)$$

В качестве исчерпывания множества  $G$  возьмём последовательность

$$(G_n), \quad G_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq n^2\}.$$



*Кафедра  
высшай  
матэматыкі*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



147

Закреть

В интеграле  $I_n = \iint_{G_n} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^\alpha}$  переходим к полярным координатам

$$I_n = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^n \frac{dr}{r^{2\alpha-1}} = 2\pi \int_1^n \frac{dr}{r^{2\alpha-1}},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{G_n} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2\pi \int_1^n \frac{dr}{r^{2\alpha-1}} = 2\pi \int_0^\infty \frac{dr}{r^{2\alpha-1}}. \quad (7.26)$$

Интеграл правой части (7.26) сходится, если  $2\alpha - 1 > 1$ ,  $\alpha > 1$ , и расходится при  $\alpha \leq 1$ . ►

**Замечание 7.10.** Для несобственных двойных интегралов также рассматривается аналогичная теория.



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



148

Закреть

## ЛЕКЦИЯ 8

### Криволинейные интегралы первого рода

При изучении физики в вузе приходится решать многие задачи с использованием так называемых криволинейных интегралов первого и второго рода. Это, например, нахождение массы материальной кривой, работы материальной точки, движущейся в силовом поле по определенной спрямляемой кривой, или нахождение полного заряда проводника, а также другие задачи физики.

#### 8.1 Задача, приводящая к понятию криволинейного интеграла первого рода

**Задача.** О массе материальной дуги.

◀ Пусть дана плоская материальная спрямляемая кривая  $L(B, C)$  (рисунок 8.1), линейная плотность которой  $\rho(x, y)$  – непрерывная функция на кривой  $L$ . Необходимо дать понятие массы кривой  $L$  и указать способ ее вычисления.

Берем любое разбиение  $\tau_L$  кривой  $L$  на частичные спрямляемые дуги  $L_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ , с помощью точек  $M_k$ ,  $k = \overline{0, n}$ . Пусть  $\Delta L_k$  – длина частичной дуги  $L_k$ . Берем любую точку  $\overline{M}_k(\overline{x}_k, \overline{y}_k) \in L_k$  и считаем, что в любой точке  $M(x, y) \in L_k$  плотность равна  $\rho(\overline{x}_k, \overline{y}_k)$ . Тогда масса частичной дуги  $L_k$  будет  $\Delta m_k \approx \rho(\overline{x}_k, \overline{y}_k) \Delta L_k$ , а вся масса кривой  $L$  будет



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



149

Закреть

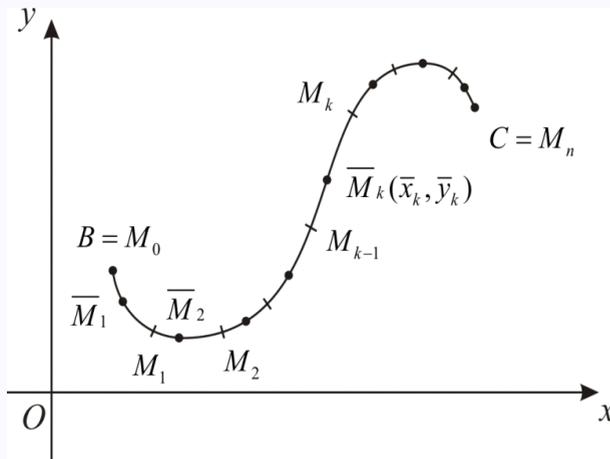


Рисунок 8.1

приближенно равна

$$\sigma_{\tau_L} \approx \sum_{k=1}^n \rho(\bar{x}_k, \bar{y}_k) \Delta L_k. \quad (8.1)$$

Обозначаем:  $\lambda_\tau = \max_k \{\Delta L_k\}$ . Если существует конечный предел

$$\lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} \sigma_{\tau_L} \quad (8.2)$$

и этот предел не зависит от способа разбиения  $\tau_L$  материальной спрямляемой кривой  $L$  на частичные спрямляемые дуги  $L_k$ , а также от выбора



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



150

Закреть

точек  $\overline{M}_k(\overline{x}_k, \overline{y}_k) \in L_k$ , то он называется **массой материальной кривой**  $L$ . ►

## 8.2 Понятие криволинейного интеграла первого рода

Отвлекаемся от физического смысла функции  $\rho(x, y)$ , но повторяем все рассуждения, приведенные в предыдущей задаче, и приходим к понятию криволинейного интеграла первого рода для функции  $f(x, y)$ .

Пусть функция  $f(x, y)$  определена и непрерывна на спрямляемой кривой  $L$ . Также вводим

$$\sigma_{\tau L}(f(x, y), \overline{L}_k) = \sigma_{\tau L} = \sum_{k=1}^n f(\overline{x}_k, \overline{y}_k) \Delta L_k. \quad (8.3)$$

**Определение 8.1.** Если существует конечный предел

$$\lim_{\lambda_{\tau} \rightarrow 0} \sigma_{\tau L} \quad (8.4)$$

и он не зависит от способа развития  $\tau L$  спрямляемой кривой  $L$  на частичные спрямляемые дуги  $L_k$ , а также от выбора точек  $\overline{M}_k(\overline{x}_k, \overline{y}_k) \in L_k$ , то этот предел называется **криволинейным интегралом первого рода (по длине дуги) функции  $f(x, y)$  по кривой  $L$** .



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



151

Закреть

Указанный интеграл обозначается

$$\int_L f(x, y) dL. \quad (8.5)$$

### 8.3 Существование и вычисление криволинейного интеграла первого рода

**Теорема 8.1.** Пусть функция  $f(x, y)$  определена и непрерывна на гладкой без особых точек кривой  $L$ , заданной параметрически

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta], \quad \alpha < \beta, \quad (8.6)$$

функции  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$  непрерывно дифференцируемы на отрезке  $[\alpha, \beta]$  и  $(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 > 0$  для любых  $t \in [\alpha, \beta]$ .

Тогда криволинейный интеграл первого рода  $\int_L f(x, y) dL$  существует и справедлива формула

$$\int_L f(x, y) dL = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt. \quad (8.7)$$

◀ Вначале на кривой  $L$  возьмем за параметр  $l$  – длину дуги, отсчитываемую от начальной точки  $B$  до текущей (рисунок 8.1). Через параметр



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



152

Закреть

$l$  наша кривая запишется системой уравнений

$$\begin{cases} x = x(l), \\ y = y(l), \end{cases} \quad 0 \leq l \leq |L|, \quad (8.8)$$

$|L|$  – длина кривой  $L$ , а функция  $f(x, y)$ , определенная на кривой  $L$ , примет вид  $f(x(l), y(l)) = \mu(l)$ . Пусть точке  $\bar{M}_k(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$  соответствует значение параметра  $\bar{l}_k$ . Тогда интегральная сумма (8.1) примет вид (считаем  $\rho(x, y) = f(x, y)$ ,  $\Delta L_k = \Delta l_k$ ).

$$\sigma_{\tau L}(f(x, y), \bar{l}_k) = \sum_{k=1}^n f(x(\bar{l}_k), y(\bar{l}_k)) \Delta l_k. \quad (8.9)$$

Получили интегральную сумму (8.9) для определенного интеграла

$$\int_0^{|L|} f(x(l), y(l)) dl. \quad (8.10)$$

Интегральные суммы (8.3) и (8.9) равны между собой, поэтому

$$\int_L f(x, y) dL = \int_0^{|L|} f(x(l), y(l)) dl. \quad (8.11)$$



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



153

Закреть

Формула (8.11), выражающая криволинейный интеграл первого рода через определенный интеграл, часто неудобна при вычислении криволинейных интегралов. По этой причине лучше ввести параметр по формуле (8.6) со всеми указанными там свойствами, причем возрастанию параметра  $t$  соответствует возрастание длины дуги  $l$ .

Тогда элемент длины дуги

$$dl = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt. \quad (8.12)$$

В правой части равенства (8.11) проведем замену переменной в определенном интеграле и получим формулу (8.7).►

**Замечание 8.1.** При задании кривой  $L$  как графика функции  $y = y(x)$  (при выполнении условий предыдущей теоремы) будем иметь формулу (8.7) в виде

$$\int_L f(x, y) dL = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx, \quad (8.13)$$

где функция  $y(x)$  определена на отрезке  $[a, b]$ ,  $a < b$ .

Если кривая  $L$  задана в полярной системе координат уравнением  $r = r(\varphi)$ ,  $\varphi \in [\alpha, \beta]$ ,  $\alpha < \beta$  (при выполнении условий теоремы 8.1),



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



154

Закреть

ТО

$$\int_L f(x, y) dL = \int_{\alpha}^{\beta} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \sqrt{r'^2(\varphi) + r^2(\varphi)} d\varphi. \quad (8.14)$$

**Замечание 8.2.** Из формулы (8.11) следует, что если функция  $f(M)$  непрерывна на спрямляемой кривой  $L$ , то существует  $\int_L f(M) dL$ .

**Пример 8.1.** Вычислить криволинейный интеграл первого рода по плоской кривой  $L$

$$\int_L f(x, y) dL,$$

где  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  и  $L$  – окружность  $x^2 + y^2 = ax$ ,  $a > 0$ .

◀ Изобразим на рисунке кривую  $L$  (рисунок 8.28.2)

$$x^2 + y^2 - ax = x^2 - 2x \frac{a}{2} + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} + y^2 = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{a^2}{4};$$
$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Перейдем к полярной системе координат  $L$ :

$$r^2 = ar \cos \varphi, \quad r = a \cos \varphi, \quad f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} = r,$$



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



155

Закреть

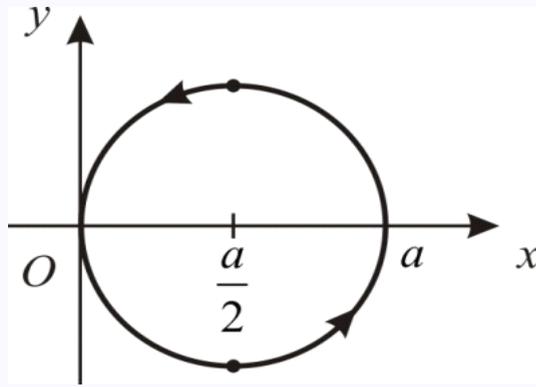


Рисунок 8.2

$$\int_L f(x, y) dL = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a \cos \varphi \cdot a d\varphi = a^2 \sin \varphi \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2a^2.$$

**Ответ:**  $\int_L f(x, y) dL = 2a^2.$  ►

**Замечание 8.3.** Аналогично плоскому случаю вводится криволинейный интеграл первого рода в пространстве. Также справедлива аналогичная теорема, что и теорема 8.1.



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



156

Закреть

Пусть в  $\mathbb{R}^3$  гладкая кривая  $L$  без особых точек задана параметрически

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = \gamma(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta], \quad \alpha < \beta, \quad (8.15)$$

Функция  $u = f(x, y, z)$  определена и непрерывна на кривой  $L$ . Тогда криволинейный интеграл

$$\int_L f(x, y, z) dL = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t), \gamma(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \gamma'^2(t)} dt. \quad (8.16)$$

Кривая  $L$  может быть в формуле (8.16) и кусочно-гладкой, а функция  $f(x, y, z)$  – кусочно-непрерывной на этой кривой.

**Пример 8.2.** Найти массу материальной пространственной кривой

$$\vec{r} = \cos t \cdot \vec{i} + \sin t \cdot \vec{j} + t \cdot \vec{k},$$

линейная плотность которой

$$\rho(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1},$$

если  $0 \leq t \leq 2\pi$ .



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



157

Закреть

◀ Наша кривая есть винтовая линия вида  $\vec{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ , которая представляет собой траекторию какой-либо точки  $M$  твердого тела, которая вращается вокруг неподвижной оси и скользит вдоль нее так, что перемещение пропорционально углу поворота (рисунок 8.3).

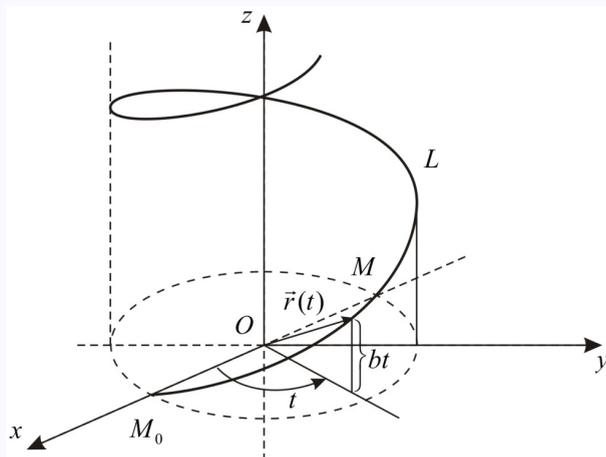


Рисунок 8.3

Воспользуемся аналогом задачи о массе плоской материальной дуги и понятием криволинейного интеграла первого рода. Тогда искомая масса

$$m_L = \int_L \rho(x, y, z) dL =$$



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



158

Закреть

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos^2 t + \sin^2 t + t^2} \sqrt{(\cos t)'^2 + (\sin t)'^2 + (t')^2} dt = \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+t^2} \sqrt{2} dt = \sqrt{2} \operatorname{arctg} t \Big|_0^{2\pi} = \sqrt{2} \operatorname{arctg} 2\pi \text{ (ед. массы)}.
\end{aligned}$$

**Ответ:**  $m_L = \sqrt{2} \operatorname{arctg} 2\pi$  (ед. массы). ►

## 8.4 Свойства криволинейного интеграла первого рода

Свойства криволинейного интеграла первого рода во многом аналогичны свойствам определенного интеграла. Их обоснование следует из формулы (8.10). В связи с этим перечислим эти свойства.

**Теорема 8.2 (свойство линейности).** Пусть существуют криволинейные интегралы  $\int_L f(M) dL$  и  $\int_L g(M) dL$ , где  $M(x, y)$  – для плоскости и  $M(x, y, z)$  – для пространства, а  $\alpha$  и  $\beta$  – любые фиксированные действительные числа. Тогда существует криволинейный интеграл

$$\int_L (\alpha f(M) + \beta g(M)) dL$$



**Кафедра**  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



159

Закреть

и справедлива формула

$$\int_L (\alpha f(M) + \beta g(M)) dL = \alpha \int_L f(M) dL + \beta \int_L g(M) dL. \quad (8.17)$$

**Теорема 8.3 (свойство аддитивности).** Пусть спрямляемая кривая  $L$  есть объединение двух спрямляемых кривых  $L_1$  и  $L_2$  без общих внутренних точек, а функция  $f(M)$  ( $M(x, y)$  или  $M(x, y, z)$ ) определена на кривой  $L$ . Тогда

$$\int_L f(M) dL = \int_{L_1} f(M) dL + \int_{L_2} f(M) dL, \quad (8.18)$$

причем интеграл в (8.18) слева существует тогда и только тогда, когда существуют интегралы справа.

**Теорема 8.4 (свойство монотонности).** Если существует

$$\int_L f(M) dL$$

и  $f(M) \geq 0$  на спрямляемой кривой  $L$ , то

$$\int_L f(M) dL \geq 0. \quad (8.19)$$



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



160

Закреть

**Следствие 8.1.** Пусть существуют интегралы

$$\int_L f(M)dL, \int_L g(M)dL$$

и  $f(M) \geq g(M)$  на спрямляемой кривой  $L$ . Тогда справедливо неравенство

$$\int_L f(M)dL \geq \int_L g(M)dL. \quad (8.20)$$

**Теорема 8.5 (оценка по модулю).** Если существует интеграл  $\int_L f(M)dL$ , то существует интеграл  $\int_L |f(M)| dL$  и справедлива оценка

$$\left| \int_L f(M)dL \right| \leq \int_L |f(M)| dL. \quad (8.21)$$

**Теорема 8.6 (теорема о среднем).** Если функция  $f(M)$  интегрируема по кривой  $L$  и  $m = \inf_{M \in L} f(M)$ ,  $M = \sup_{M \in L} f(M)$ , то существует  $\mu \in [m, M]$ , что

$$\int_L f(M)dL = \mu |L|. \quad (8.22)$$



**Кафедра**  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



161

Закреть

**Следствие 8.2.** Если дополнительно к условиям теоремы 8.6 будет еще функция непрерывна на кривой  $L$ , то существует точка  $M_0 \in L$ , что

$$\int_L f(M)dL = f(M_0) |L|. \quad (8.23)$$

**Теорема 8.7 (независимость от направления движения по кривой интегрирования).** Если существует  $\int_L f(M)dL$ , то существует и  $\int_{L^-} f(M)dL$  и справедливо равенство

$$\int_L f(M)dL = \int_{L^-} f(M)dL, \quad (8.24)$$

где  $L$  и  $L^-$  одна и та же кривая, но движения по этой кривой противоположны.

## 8.5 Некоторые приложения криволинейных интегралов первого рода

### 1. Масса материальной кривой

Ранее нами было показано, что масса спрямляемой материальной



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



162

Закреть

кривой  $L$  определяется по формуле

$$m_L = \int_L \rho(M) dL, \quad (8.25)$$

где  $\rho(M)$  – линейная плотность кривой.

**Пример 8.3.** Найти массу материальной кривой  $L$ , заданной соотношениями  $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$ ,  $a > 0$ ,  $x^2 + y^2 = z^2$ ,  $z \geq 0$ . Плотность кривой  $L$   $\rho = z$ .

◀ Из системы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2ax \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases}$$

исключим  $z$ , получим  $x^2 + y^2 = ax$ . Значит, проекция кривой  $L$  на плоскость  $z = 0$  будет окружность

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}. \quad (8.26)$$

Уравнение окружности (8.26) можно записать параметрически

$$\begin{cases} x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cos t, \\ y = \frac{a}{2} \sin t, \end{cases} \quad (8.27)$$

где  $t \in [-\pi, \pi]$ .



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



163

Закреть

Из уравнения  $x^2 + y^2 = z^2$  при  $z \geq 0$  находим ( $-\pi \leq t \leq \pi$ )

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cos t\right)^2 + \left(\frac{a}{2} \sin t\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} (1 + 2 \cos t + 1)} = \\ &= \sqrt{\frac{a^2}{2} (1 + \cos t)} = \sqrt{\frac{a^2}{2} 2 \cos^2 \frac{t}{2}} = a \cos \frac{t}{2}. \end{aligned}$$

Тогда масса кривой  $L$  будет

$$\begin{aligned} m_L &= \int_L \rho dL = \int_L z dL = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} a \cos t \sqrt{\left(-\frac{a}{2} \sin t\right)^2 + \left(\frac{a}{2} \cos t\right)^2 + \left(-\frac{a}{2} \cos \frac{t}{2}\right)^2} dt = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} a \cos \frac{t}{2} \cdot \frac{a}{2} \sqrt{1 + \sin^2 \frac{t}{2}} dt = \left[ d \left( \sin \frac{t}{2} \right) = \frac{1}{2} \cos \frac{t}{2} dt \right] = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} a^2 \sqrt{1 + \sin^2 \frac{t}{2}} d \left( \sin \frac{t}{2} \right) = \left[ u = \sin \frac{t}{2} \mid \begin{array}{l} u_{\text{H}} = -1 \\ u_{\text{B}} = 1 \end{array} \right] = \end{aligned}$$



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



164

Закреть

$$\begin{aligned}
&= a^2 \int_{-1}^1 \sqrt{1+u^2} du = 2a^2 \int_0^1 \sqrt{1+u^2} du = \\
&= 2a^2 \left[ y = \sqrt{1+u^2}, \quad dy = \frac{udu}{\sqrt{1+u^2}} \right]_0^1 = \\
&= 2a^2 \left( u\sqrt{1+u^2} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{u^2+1-1}{\sqrt{1+u^2}} du \right) = \\
&= 2a^2 \left( \sqrt{2} - \int_0^1 \sqrt{1+u^2} du + \ln \left( u + \sqrt{1+u^2} \right) \Big|_0^1 \right) = \\
&= -2a^2 \int_0^1 \sqrt{1+u^2} du + 2a^2 \left( \sqrt{2} + \ln \left( 1 + \sqrt{2} \right) \right) = \\
&= a^2 \left( \sqrt{2} + \ln \left( 1 + \sqrt{2} \right) \right) \text{ (ед. масс)}.
\end{aligned}$$

**Ответ:**  $m_L = a^2 (\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))$  (ед.масс). ►

**2. Статические моменты материальной кривой относительно координатных осей**



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



165

Закреть

Знаем, что статическим моментом материальной точки массы  $m$  относительно осей  $l$  будет

$$M_l = md, \quad (8.28)$$

где  $d$  – расстояние указанной точки до оси  $l$ .

Для нахождения формул для статических моментов материальной спрямляемой кривой относительно координатных осей применим метод интеграла. Знаем, что элемент массы кривой  $L$  есть  $\rho(x, y)dL$ , где  $\rho(x, y)$  – линейная плотность кривой  $L$ , а  $dL$  – элемент длины этой кривой. Тогда элементы искомых статических моментов будут:  $y\rho(x, y)dL$  – относительно оси  $Ox$  и  $x\rho(x, y)dL$  – относительно оси  $Oy$ . А соответствующие моменты вычисляются по формулам:

$$M_{Ox} = \int_L y\rho(x, y)dL, \quad (8.29)$$

$$M_{Oy} = \int_L x\rho(x, y)dL. \quad (8.30)$$

**Пример 8.4.** Найти статический момент однородной дуги эллипса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  плотности  $\rho$ , расположенной в первом квадрате, относительно оси  $Ox$  ( $a > b$ ).



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



166

Закреть

◀ Воспользуемся формулой (8.29). Используем параметрическое задание эллипса

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

$$\begin{aligned} M_{Ox} &= b\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt - \\ &\quad - b\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 + (b^2 - a^2) \cos t} d(\cos t) = \\ &= \begin{bmatrix} u = \cos t, \\ u_{\text{Н}} = 1, \\ u_{\text{В}} = 0 \end{bmatrix} = b\rho \int_0^1 \sqrt{a^2 + (b^2 - a^2)u^2} du = \\ &= b\rho \int_0^1 \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)u^2} du = \\ &= \left[ \int \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)u^2} du = \right. \end{aligned}$$



На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



$$\begin{aligned}
&= \left[ \begin{array}{l} y = \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)u^2}, \quad dy = \frac{(a^2 - b^2)udu}{\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)u^2}}, \\ dv = du, \quad v = u \end{array} \right] = \\
&= u\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)u^2} - \int \frac{-(a^2 - b^2)u^2 + a^2 - a^2}{\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)u^2}} du = \\
&= \frac{1}{2} \left( u\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)u^2} + \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2}u}{a} \right) = \\
&= \frac{b\rho}{2} \left( u\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)u^2} \Big|_0^1 + \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} u \Big|_0^1 \right) = \\
&= \rho \left( \frac{b^2}{2} + \frac{a^2b}{2\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \right).
\end{aligned}$$

**Ответ:**  $M_{Ox} = \rho \left( \frac{b^2}{2} + \frac{a^2b}{2\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \right)$ . ►

### 3. Центры тяжести материальных кривых

**Центром тяжести (центром масс)** материальной спрямляемой кривой  $L$  будет такая точка  $M_0(x_C, y_C) \in \mathbb{R}^2$ , что если в этой точке сосредоточить всю массу кривой  $L$ , то статистические моменты точки  $M_0(x_C, y_C)$  относительно координатных осей будут равны соответствен-



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



168

Закреть

но статистическим моментам самой кривой  $L$  относительно этих осей

$$\begin{cases} M_{Ox} = m_L \cdot y_C, \\ M_{Oy} = m_L \cdot x_C, \end{cases} \quad (8.31)$$

то есть

$$\begin{cases} x_C = \frac{M_{Oy}}{m_L}, \\ y_C = \frac{M_{Ox}}{m_L}. \end{cases} \quad (8.32)$$

**Пример 8.5.** Найти координаты центра масс, распределенных по плоской кривой  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ ,  $y \geq 0$  с линейной плоскостью  $\rho = 1$ .

◀ Наша кривая есть астроида в параметрическом виде  $x = a \cos^3 t$ ,  $y = a \sin^3 t$  в верхней полуплоскости (рисунок 8.4)

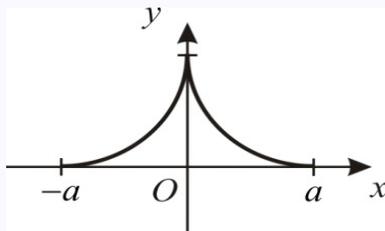


Рисунок 8.4

Видно, что  $x_C = 0$ . Ординату центра тяжести кривой  $L$  находим по



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



169

Закреть

формуле

$$y_C = \frac{\int y dL}{\int_L dL} \quad (8.33)$$

Находим

$$\begin{aligned} dL &= \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = \\ &= \sqrt{(3a \cos^2 t \cdot (-\sin t))^2 + (3a \sin^2 t \cdot \cos t)^2} = 3a \sin t \cdot |\cos t|. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} y_C &= \frac{\int_0^{\pi} a \sin^3 t \cdot 3a \sin t \cdot |\cos t| dt}{\int_0^{\pi} 3a \sin t \cdot |\cos t| dt} = \frac{a \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t d(\sin t) - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^4 t d(\sin t) \right)}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t d(\sin t) - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin t d(\sin t)} = \\ &= \frac{a \left( \frac{\sin^5 t}{5} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\sin^5 t}{5} \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right)}{\frac{\sin^2 t}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\sin^2 t}{2} \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}} = \frac{2}{5} a. \end{aligned}$$

Ответ:  $M_0 \left( 0, \frac{2}{5} a \right)$ . ►



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



170

Закреть

#### 4. Момент инерции плоской материальной спрямляемой кривой относительно координатных осей

Знаем, что моментами инерции материальной точки массы  $m$  относительно оси  $l$  будет

$$I_l = md^2, \quad (8.34)$$

где  $d$  – расстояние указанной точки от оси  $l$ .

Тогда элемент величины (момента инерции) относительно оси  $Ox$  будет  $dI_{Ox} = y^2\rho(x, y)dL$ , а относительно оси  $Oy$  –  $dI_{Oy} = x^2\rho(x, y)dL$ . Сам момент инерции вычисляется по формулам (для кривой  $L$ )

$$I_{Ox} = \int_L y^2\rho(x, y)dL \quad (8.35)$$

и

$$I_{Oy} = \int_L x^2\rho(x, y)dL. \quad (8.36)$$

**Пример 8.6.** Найти момент инерции  $I_{Ox}$  одной арки циклоиды  $x = a(t + \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$ ,  $a > 0$ ,  $|t| \leq \pi$ ,  $\rho = 1$ .

◀ Находим момент инерции по формуле

$$I_{Ox} = \int_L y^2dL \quad (8.37)$$



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



171

Заккрыть



На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



172

Закреть

$$\begin{aligned} dL &= \sqrt{(a(1 + \cos t))^2 + (a \sin t)^2} = a\sqrt{1 + 2 \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} = \\ &= a\sqrt{2(1 + \cos t)} = a\sqrt{2 \cdot 2 \cos^2 \frac{t}{2}} = 2a \cos \frac{t}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{Ox} &= 4a^3 \int_0^{\pi} (1 - \cos t)^2 \cos \frac{t}{2} dt = 4a^3 \int_0^{\pi} \left( 1 - 2 \cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2} \right) \cos \frac{t}{2} dt = \\ &= 4a^3 \int_0^{\pi} \left( \frac{3}{2} \cos \frac{t}{2} - 2 \cos t \cdot \cos \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \cos 2t \cdot \cos \frac{t}{2} \right) dt = \\ &= 4a^3 \left( 3 \sin \frac{t}{2} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \left( \cos \frac{t}{2} + \cos \frac{3}{2}t \right) dt + \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \left( \cos \frac{3}{2}t + \cos \frac{5}{2}t \right) dt \right) = \\ &= 4a^3 \left( 3 - 3 \sin \frac{t}{2} \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{3} \sin \frac{3}{2}t \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \sin \frac{3}{2}t \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} \sin \frac{5}{2}t \Big|_0^{\pi} \right) = \\ &= 4a^3 \left( 3 - 2 + \frac{2}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{10} \right) = \frac{32}{5}a^3. \end{aligned}$$

Ответ:  $I_{Ox} = \frac{32}{5}a^3$ . ►

5. Площадь конечной части цилиндрической поверхности



*Кафедра  
высшай  
матэматыкі*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



173

Закреть

Известно понятие площади криволинейной трапеции и вычисление этой площади с помощью определенного интеграла. В теории криволинейных интегралов первого рода является понятие площади конечной части цилиндрической поверхности и ее вычисление с помощью криволинейного интеграла.

Пусть в плоскости  $z = 0$  дана спрямляемая кривая  $L$  в качестве направляющей. Функция  $z = f(x, y)$  определена на кривой  $L$ , принимает неотрицательные значения, а ортогональная проекция ее графика совпадает с кривой  $L$ .

Цилиндрическая поверхность получена с помощью направляющей  $L$  и образующими перпендикулярными отрезками к плоскости  $z = 0$ , длина каждого из которых для любой точки  $M(x, y) \in L$  равна  $f(M)$  (рисунок 8.5).

Имеем формулу для вычисления площади указанной поверхности

$$S = \int_L f(M) dL. \quad (8.38)$$

**Пример 8.7.** Найти площадь цилиндрической поверхности

$$F(x, y) = R^2 - x^2 - y^2,$$

ограниченной снизу плоскостью  $z = 0$  и сверху поверхностью  $z = R + \frac{x^2}{R}$  ( $R > 0$ ).

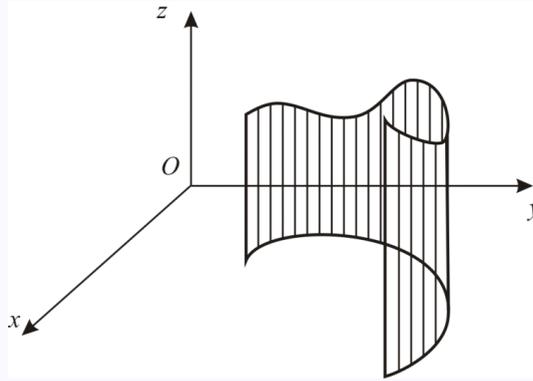


Рисунок 8.5

◀ У нас роль направляющей играет окружность  $x^2 + y^2 = R^2$  в плоскости  $z = 0$  (кривая  $L$ ), а функция  $f(M) = R + \frac{x^2}{R}$  (графиком ее является цилиндрическая поверхность параболического типа, поднятая над плоскостью  $z = 0$  вверх на расстояние  $R$  с образующими, параллельными оси  $Oy$ ).

Находим искомую площадь

$$S = \int_L f(M) dL = \left[ \begin{array}{l} f(M) = R + \frac{(R \cos t)^2}{R} = R(1 + \cos^2 t), \\ dL = \sqrt{(R(-\sin t))^2 + (R \cos t)^2} = R \end{array} \right] =$$



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



174

Закреть

$$\begin{aligned}
 &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} R (1 + \cos^2 t) R dt = 4R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( 1 + \frac{1 + \cos 2t}{2} \right) dt = \\
 &= 4R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{2} dt = 3\pi R^2 \text{ (кв. ед.)}.
 \end{aligned}$$

**Ответ:**  $S = 3\pi R^2$  (кв. ед.)▶

## 6. Притяжение точечной массы материальной кривой

Пусть  $L$  – спрямляемая материальная кривая, линейная плотность которой  $\rho(x, y)$ . Материальная точка массы  $m$  находится на координатной плоскости в точке  $M_o(x_0, y_0)$ . Тогда материальная кривая  $L$  притягивает точку массы  $m$  с силой  $\vec{F} = (F_{Ox}, F_{Oy})$ , где проекции силы  $\vec{F}$  на координатные оси определяются по формулам

$$F_{Ox} = \gamma m \int_L \frac{\rho(x, y)(x - x_0)}{r^3} dL \quad (8.39)$$

и

$$F_{Oy} = \gamma m \int_L \frac{\rho(x, y)(y - y_0)}{r^3} dL, \quad (8.40)$$

где  $\gamma$  – постоянная тяготения и  $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ .



**Кафедра**  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



175

Закреть

**Замечание 8.4.** Если рассматривать указанные физические явления в координатном пространстве, то к вектору силы  $\vec{F}$  добавляется третья координата, которая определяется по формуле

$$F_{oz} = \gamma m \int_L \frac{\rho(x, y, z)(z - z_0)}{r^3} dL. \quad (8.41)$$

**Пример 8.8.** Найти координаты силы притяжения однородной материальной окружности массы  $M$  и радиусом  $R$  массы  $m$ , помещенный в центре соответствующей окружности.

◀ Поместим нашу полуокружность в верхнюю полуплоскость  $\mathbb{R}^2$ . Ее уравнение тогда примет вид  $\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2, \\ y \geq 0, \end{cases}$  (рисунок 8.6).

В силу симметрии относительно оси  $Oy$  и одинаковой удалённости точек полуокружности от начала координат проекция силы  $\vec{F}$ , указанной в задаче, на ось  $Ox$  будет равна нулю. Дальше находим по формуле (8.40)

$$\begin{aligned} F_{Oy} &= \frac{\gamma m}{R^3} \cdot \frac{M}{\pi R} \int_L y dL = \\ &= \left[ \begin{array}{l} x = R \cos \varphi \\ y = R \sin \varphi \end{array} \middle| \begin{array}{l} dL = \sqrt{(-R \sin \varphi)^2 + (R \cos \varphi)^2} = R, \\ 0 \leq \varphi \leq \pi \end{array} \right] = \end{aligned}$$



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



176

Закреть

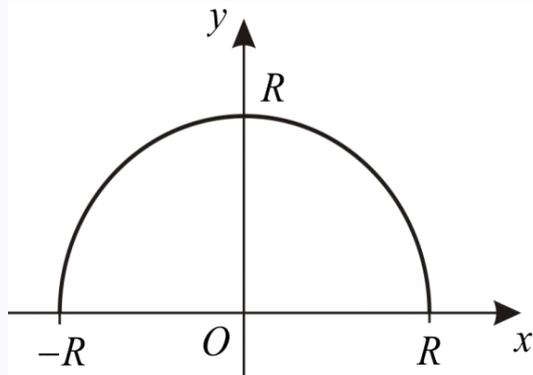


Рисунок 8.6

$$= \frac{\gamma m M}{\pi R^2} \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi = \frac{2\gamma m M}{\pi R^2}.$$

Ответ:  $\vec{F} = \left(0, \frac{2\gamma m M}{\pi R^2}\right)$ . ►



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



177

Закреть

## ЛЕКЦИЯ 9

### Криволинейные интегралы второго рода

#### 9.1 Задача, приводящая к понятию криволинейного интеграла второго рода

**Задача.** О работе плоского силового поля.

◀ Пусть в плоской области  $G$  декартовой плоскости задано силовое поле, то есть в каждой точке  $M(x, y) \in G$  приложена сила

$$\vec{F}(P(x, y), Q(x, y)),$$

где  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  – проекция этой силы соответственно на оси  $x$  и  $Oy$ . Найти работу этой силы при перемещении материальной точки единичной массы по спрямляемой кривой  $L \subset G$  из точки  $A(x, y) \in L$  в точку  $B(x, y) \in L$  (рисунок 9.1).

Возьмем любое разбиение  $\tau$  кривой  $L$  на  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , частичных спрямляемых дуг  $L_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ , с помощью точек

$$M_k \in L, \quad k = \overline{0, n}, \quad A = M_0, \quad B = M_n.$$

На каждой частичной дуге произвольно выбираем точки  $\overline{M}_k \in L_k$ . Считаем, что указанная материальная точка движется по векторам  $\overline{M}_{k-1}M_k$  – звеньям ломаной  $l_\tau$ , вписанной в кривую  $L$ . Кроме того, предполагаем,



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



178

Закреть

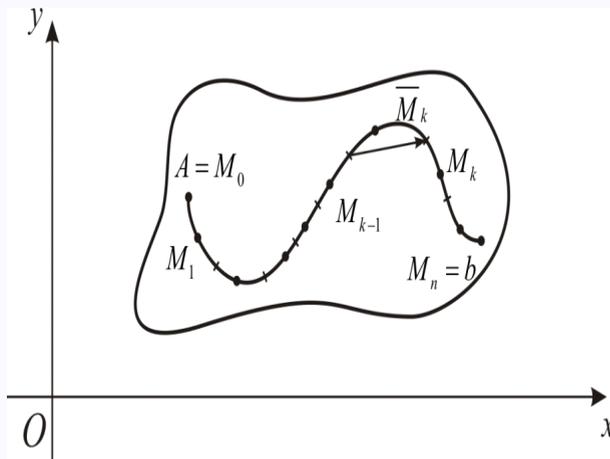


Рисунок 9.1

что при движении точки по звену ломаной (вектору  $\overrightarrow{M_{k-1}M_k}$ ) сила  $\vec{F}$  постоянная и равна силе в точке  $\overline{M}_k$ , то есть  $\vec{F}(P(\bar{x}_k, \bar{y}_k), Q(\bar{x}_k, \bar{y}_k))$ , где  $\overline{M}_k(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$ . Тогда работа силы  $\vec{F}$  по перемещению материальной точки по кривой  $L$  из точки  $M_{k-1}$  в точку  $M_k$  будет приближенно равна

$$A_k \approx (\vec{F}(\overline{M}_k), \overrightarrow{M_{k-1}M_k}) = P(\bar{x}_k, \bar{y}_k)\Delta x_k + Q(\bar{x}_k, \bar{y}_k)\Delta y_k, \quad (9.1)$$

где  $\Delta x_k$   $\Delta y_k$  – проекции векторов  $\overrightarrow{M_{k-1}M_k}$  соответственно на оси  $Ox$  и  $Oy$ .



На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



Закреть

А вся искомая работа

$$A_k \approx G_\tau(\vec{F}, \overline{M}_k) = \sum_{k=1}^n (\vec{F}(\overline{M}_k), \overrightarrow{M_{k-1}M_k}). \quad (9.2)$$

Точное значение указанной работы будет равно

$$A = \lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} \sigma_\tau(\vec{F}, \overline{M}_k), \quad (9.3)$$

если предел (9.3) существует и конечен, а также не зависит от разбиения  $\tau_L$  и выбора точек  $\overline{M}_k$ , где  $\lambda_\tau$  – максимальное значение длин частичных дуг  $L_k$ , то он называется **работой по перемещению материальной точки единичной массы**. ►

## 9.2 Понятие криволинейного интеграла второго рода

Отвлекаясь от конкретного содержания задачи (пункт 1) и повторяя (с сохранением обозначения) приведенные в этой задаче рассуждения, мы приходим к понятию криволинейного интеграла второго рода.

Пусть вектор-функция  $\vec{F}(P(x, y), Q(x, y))$  определена на кривой  $L$ , которая спрямляема.

**Определение 9.1.** Предел (9.3), если он существует и конечен, а также не зависит от разбиения  $\tau_L$  и выбора точек  $\overline{M}_k$ , называется



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



180

Закреть

*криволинейным интегралом второго рода от вектор-функции  $\vec{F}$  по кривой  $L$  и обозначается символом*

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy. \quad (9.4)$$

**Замечание 9.1.** Криволинейный интеграл (9.4) называется **полным криволинейным интегралом**. Он представляет собой сумму двух неполных криволинейных интегралов, соответственно по векторам  $(P, O)$  и  $(O, Q)$ . Кривая  $L$  может быть замкнутой. В этом случае обход по кривой можно начинать с любой её точки. Этот обход называется положительным, если при движении вдоль замкнутой кривой часть плоскости, ограниченная ею, все время будет слева (обход осуществляется против часовой стрелки). В этом случае криволинейный интеграл (9.4) обозначается символом

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy. \quad (9.5)$$

Обход называется отрицательным, если при движении вдоль замкнутой кривой часть плоскости, ограниченная ею, все время будет справа (обход осуществляется по часовой стрелке). В этом случае криволиней-



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



181

Закреть

ный интеграл (9.4) обозначается символом

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy. \quad (9.6)$$

При изменении направления движения по кривой  $L$  (замкнутой или незамкнутой) меняется знак перед криволинейным интегралом.

### 9.3 Теорема о существовании и вычислении криволинейного интеграла второго рода

**Теорема 9.1.** Пусть гладкая кривая  $L$  без особых точек задана параметрически  $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$  где функции  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$  непрерывно дифференцируемы на отрезке  $[\alpha, \beta]$ ,  $\alpha < \beta$ , и для любых  $t \in [\alpha, \beta]$ , будет  $\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) > 0$ . Функция  $P(x, y)$  непрерывна на  $L$  ( $P(x, y) \in C(L)$ ). Тогда неполный криволинейный интеграл

$$\int_L P(x, y)dx = \int_{\lambda}^{\beta} P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t)dt = I. \quad (9.7)$$



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



182

Закреть

Аналогично при  $Q(x, y) \in C(L)$ , будет существовать

$$\int_L Q(x, y) dy = \int_\lambda^\beta Q(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t) dt. \quad (9.8)$$

◀ Берем любое разбиение  $\tau_{[\alpha, \beta]}$  отрезка  $[\alpha, \beta]$  на  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , частичных отрезков  $[t_{k-1}, t_k]$ ,  $k = \overline{1, n}$ . Указанному разбиению соответствует разбиение кривой  $L$  на  $n$  частичных дуг  $L_k$ ,  $k = \overline{1, n}$  (обозначения пунктов 1 и 2 сохраняется). Получим интегральные суммы:

$$\sigma_\tau = \sigma_{\tau_{[\alpha, \beta]}}(P(x, y), \overline{M}_k) = \sum_{k=1}^n P(\overline{x}_k, \overline{y}_k) \Delta x_k, \quad (9.9)$$

где  $P(\overline{x}_k, \overline{y}_k) = P(\varphi(\overline{t}_k), \psi(\overline{t}_k))$ ,  $\overline{t}_k \in [t_{k-1}, t_k]$ ;

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi'(t) dt. \quad (9.10)$$

Тогда из существования интеграла ( $P(\varphi(t), \psi(t)) \in C[\alpha, \beta]$ )

$$I = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} P(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) dt \quad (9.11)$$



На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



183

Закреть

оценим сверху  $|\sigma - I|$ .

$$\sigma_\tau - I = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} (P(\varphi(\bar{t}_k), \psi(\bar{t}_k)) - P(\varphi(t), \psi(t))) \varphi'(t) dt. \quad (9.12)$$

При  $\lambda_\tau \rightarrow 0$  будет и  $\max_k \{\Delta t_k\} \rightarrow 0$  ( $\lambda_\tau = \max_k \{\Delta L_k\}$ ), где

$$\Delta L_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\varphi'(t) + \psi'(t)} dt; \quad \min_{[\alpha, \beta]} \left\{ \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} \right\} = m > 0;$$

$$\Delta L_k \geq m \int_{t_{k-1}}^{t_k} dt = m \Delta t_k, \quad 0 \leq \Delta t_k \leq \frac{\Delta L_k}{m} \rightarrow 0, \quad m_0 \Delta t_k \rightarrow 0.$$

Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \tau_{[\alpha, \beta]} \lambda_\tau < \delta \text{ (из } \max_k \{\Delta t_k\} \rightarrow 0 \text{ и } P(x, y) \in C(L))$$

будет

$$|P(\varphi(\bar{t}_k), \psi(\bar{t}_k)) - P(\varphi(t), \psi(t_k))| < \varepsilon.$$

Дальше оценим сверху  $|\sigma_\tau - I|$ .

$$|\sigma_\tau - I| < \varepsilon \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\varphi'(t)| dt \leq D\varepsilon \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} dt = \varepsilon D (\beta - \alpha),$$



Кафедра  
высшай  
матэматыкі

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



184

Закреть

( $\varphi'(t) \in C[\alpha, \beta]$  следует  $\varphi'(t)$  – ограничена на отрезке  $[\alpha, \beta]$ , то есть существует  $D > 0$ , что для любого  $x \in [\alpha, \beta]$  следует  $|\varphi'(t)| \leq D$ ), то есть

$$\exists \lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} \sigma_\tau = \int_L P(x, y) dx = I. \blacktriangleright$$

**Пример 9.1.** Найти работу упругой силы, направленной к началу координат, величина которой пропорциональна удалению точки от начала координат, если точка приложения силы описывает против часовой стрелки четверть эллипса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , лежащую в первом квадрате (рисунок 9.2).

$$\blacktriangleleft \left| \vec{F} \right| = kr, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$\begin{aligned} A &= \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_L -kx dx - ky dy = \\ &= -k \int_L x dx - k \int_L y dy = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Для неполного криволинейного интеграла  $I_1$  берем параметр  $t = x$ ,



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



185

Закреть

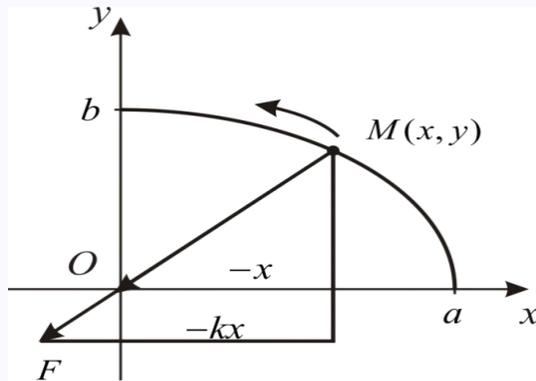


Рисунок 9.2

для  $I_2 - t = y$ . Тогда

$$A = k \left( \int_a^0 -x dx + \int_0^b -y dy \right) = k \left( \frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2} \right) \text{ (Дж.)}.$$

**Ответ:**  $A = k \left( \frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2} \right)$  (Дж.). ▶

**Пример 9.2.** Вычислить криволинейный интеграл:

$$I = \int_L (2a - y) dx + (y - a) dy, \quad (9.13)$$



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



186

Закреть

где  $L$  – дуга циклоиды  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , в направлении возрастания параметра  $t$ .

$$\begin{aligned} \blacktriangleleft I &= \int_0^{2\pi} ((2a - a + a \cos t)a(1 - \cos t) + (a - \cos t - a)a \sin t) dt = \\ &= a \int_0^{2\pi} \left( a(1 - \cos^2 t) - \frac{\sin 2t}{2} \right) dt = a \left( 2\pi a - \frac{a}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2t) dt \right) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin 2t dt = a \left( 2\pi a - \pi a + \frac{1}{4} \cos 2t \Big|_0^{2\pi} \right) = \pi a^2. \end{aligned}$$

**Ответ:**  $I = \pi a^2$ .  $\blacktriangleright$

**Замечание 9.2.** Понятие криволинейного интеграла второго рода в трехмерном декартовом пространстве аналогично, что и в двумерном пространстве. Также будет справедлива теорема, аналогичная теореме 9.1.



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



187

Закреть

**Пример 9.3.** Вычислить криволинейный интеграл второго рода по пространственной кривой.

$$I = \int_L xdx + ydy + (x + y - 1)dz, \quad (9.14)$$

где  $L$  – отрезок  $AB$ , проходящий от точки  $A(1, 1, 1)$  к точке  $B(2, 3, 4)$ .

◀ Запишем уравнение отрезка в параметрическом виде. Направляющий вектор для прямой есть вектор  $\vec{a}(1, 2, 3) = \vec{a}(m, n, l)$ . Тогда параметрическое уравнение отрезка в координатной форме будет при  $0 \leq t \leq 1$  ( $A(x_0, y_0, z_0)$ ):

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + lt, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 1 + 2t, \\ z = 1 + 3t. \end{cases} \quad (9.15)$$

Тогда

$$I = \int_0^1 (1 + t)dt + 2 \int_0^1 (1 + 2t)dt + 3 \int_0^1 (1 + 3t)dt = 13.$$

**Ответ:**  $I = 13$ .▶



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



188

Закреть

## 9.4 Свойства криволинейного интеграла второго рода

### 1. Свойство линейности

Для краткости записей будем рассматривать здесь и дальше неполные криволинейные интегралы второго рода, что не теряет общности рассуждений.

**Теорема 9.2.** *Если существуют криволинейные интегралы*

$$\int_L P_1(x, y)dx \text{ и } \int_L P_2(x, y)dx,$$

*а  $\alpha$  и  $\beta$  – любые фиксированные действительные числа, то существует криволинейный интеграл  $\int_L (\alpha P_1(x, y) + \beta P_2(x, y))dx$  и справедливо равенство*

$$\int_L (\alpha P_1(x, y) + \beta P_2(x, y)) dx = \alpha \int_L P_1(x, y)dx + \beta \int_L P_2(x, y)dx. \quad (9.16)$$

◀ По условию теоремы существуют указанные криволинейные интегралы, то есть

$$\lim_{\lambda_\tau} \sigma_{\tau'_L}(P_1, \overline{M}'_k) = \int_L P_1(x, y)dx \quad (9.17)$$



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



189

Закреть

$$\lim_{\lambda_\tau''} \sigma_{\tau_L''}(P_2, \overline{M}_k'') = \int_L P_2(x, y) dx. \quad (9.18)$$

Пусть  $\tau_L$  – объединение разбиений  $\tau_L'$  и  $\tau_L''$ , то есть их измельчение, а  $\lambda_\tau$  – максимальная длина частичной дуги при разбиении  $\tau_L$ . Далее воспользуемся свойством линейности для пределов

$$\begin{aligned} & \lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} (\alpha \sigma_\tau(P_1, M_k) + \beta \sigma_\tau(P_2, M_k)) = \\ & = \alpha \lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} \sigma_{\tau_L}(P_1, \overline{M}_k) + \beta \lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} \sigma_{\tau_L}(P_2, \overline{M}_k) = \\ & = \alpha \int_L P_1(x, y) dx + \beta \int_L P_2(x, y) dx. \blacktriangleright \end{aligned}$$

## 2. Свойство аддитивности

**Теорема 9.3.** Пусть спрямляемая без точек разрыва кривая  $L$  есть объединение двух спрямляемых кривых  $L_1$  и  $L_2$  без общих внутренних точек. Если существуют криволинейные интегралы  $\int_{L_1} P(x, y) dx$  и  $\int_{L_2} P(x, y) dx$ , то существует криволинейный интеграл  $\int_L P(x, y) dx$  и



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



190

Закреть

*справедлива формула-равенство*

$$\int_L P(x, y) dx = \int_{L_1} P(x, y) dx + \int_{L_2} P(x, y) dx. \quad (9.19)$$

◀ Точку «стыковки» кривых  $L_1$  и  $L_2$  берем одной из точек разбиения  $\tau_L$  кривой на частичные дуги. Получим, что

$$\sigma_{\tau_L}(P, \overline{M}_k) = \sigma_{\tau_{L_1}}(P, \overline{M}_k^{L_1}) + \sigma_{\tau_{L_2}}(P, \overline{M}_k^{L_2}). \quad (9.20)$$

В равенстве (9.20) переходим к пределу при  $\lambda_\tau \rightarrow 0$ ,  $\lambda_\tau$  – максимальная длина частичной дуги при разбиении  $\tau$  кривой  $L$  на частичные дуги. Получаем справедливость заключения теоремы.▶

**Теорема 9.4.** Пусть спрямляемая кривая  $L$  представима в виде объединения двух спрямляемых частичных дуг  $L_1$  и  $L_2$ . Если существует криволинейный интеграл  $\int_L P(x, y) dx$ , то существуют криволинейные интегралы  $\int_{L_1} P(x, y) dx$  и  $\int_{L_2} P(x, y) dx$ , а также справедлива формула (9.19).

◀ Рассмотрим частный случай, наиболее часто встречающийся на



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



191

Закреть

практике, когда выполняются условия теоремы 3.1. Тогда

$$\int_L P(x, y) dx = \int_\alpha^\beta P(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) dt. \quad (9.21)$$

Из свойств определенного интеграла (интеграла Римана) следует, что если существует  $\int_\alpha^\beta f(x) dx$ , то для любого  $[c, d] \subset [a, b]$  существует интеграл  $\int_c^d f(x) dx$ . В нашем случае криволинейному интегралу  $\int_{L_1} P(x, y) dx$  соответствует интеграл Римана вида (9.21) по некоторому отрезку

$$[\alpha_1, \beta_1] \subset [\alpha, \beta],$$

и этот интеграл существует и равен своему криволинейному. Также и для криволинейного интеграла  $\int_{L_2} P(x, y) dx$ . А тогда выполняются условия предыдущей теоремы, а поэтому справедливо и заключение нашей теоремы. Общий случай также будет справедлив. ►

### 3. Свойство изменения направления обхода по кривой

**Теорема 9.5.** Пусть точки  $A$  и  $B$  – концы спрямляемой кривой  $L$  и существует интеграл  $\int_{L(A,B)} P(x, y) dx$ . Тогда существует интеграл



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



192

Закреть

$\int_{L(B,A)} P(x, y) dx$  и справедливо равенство

$$\int_{L(A,B)} P(x, y) dx = - \int_{L(B,A)} P(x, y) dx. \quad (9.22)$$

◀ Если  $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} > 0$  при обходе по кривой, например, от точки  $A$  до точки  $B$ , то при противоположном обходе (от  $B$  до  $A$ ) по кривой  $L$  будет  $x_k = x_k - x_{k-1} = -\Delta x_k$ . Тогда будем иметь интегральные суммы, равные по модулю, но с противоположными знаками. Переходим к пределу в равенстве  $\sigma_{\tau_{L^+}} = -\sigma_{\tau_{L^-}}$  и получим заключение теоремы 9.5. ▶

#### 4. Оценка криволинейного интеграла

**Теорема 9.6.** Пусть функция  $P(x, y)$  задана на спрямляемой прямой  $L$  и ограничена, то есть существует  $M \in R_+$ , что для любых точек  $K(x, y) \in L$  будет  $|P(x, y)| \leq M$ . Кривая  $L$  задана параметрически

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta], \quad \alpha < \beta. \quad (9.23)$$

Криволинейный интеграл  $\int_L P(x, y) dx$  существует. Тогда справедлива оценка

$$\left| \int_L P(x, y) dx \right| \leq M \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \varphi(t), \quad (9.24)$$



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



193

Закреть

где

$$V_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) = \sum_{k=1}^n |\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})|. \quad (9.25)$$

◀ При параметрическом задании кривой  $L \Delta x_k = \varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})$ . Тогда

$$\begin{aligned} |\sigma_{\tau_L}(P, \overline{M}_k)| &= \left| \sum_{k=1}^n P(\overline{x}_k, \overline{y}_k)(\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})) \right| \leq \\ &\leq M \sum_{k=1}^n |\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})| \leq M V_{\alpha}^{\beta} \varphi(t). \quad \blacktriangleright \end{aligned} \quad (9.26)$$

**Замечание 9.3.** Если функции  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$  – функции с ограниченным изменением (функции с полной вариацией), то есть, например, (для функции  $\varphi(t)$ ) для любого разбиения  $\tau_{[\alpha, \beta]}$  множество сумм

$$V(\varphi) = \sum_{k=1}^n |\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})| \quad (9.27)$$

ограничено сверху. В этом случае точная верхняя грань сумм (9.27) обозначается  $V_{\alpha}^{\beta}(\varphi)$  и называется полным изменением (полной вариацией) функции  $\varphi(t)$  на отрезке  $[\alpha, \beta]$ .



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



194

Закреть

**Замечание 9.4.** Если функции  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$  – функции с ограниченным изменением, то кривая  $L$  спрямляема и справедлива оценка

$$V_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) \leq l, \quad (9.28)$$

где  $l$  – длина кривой. А тогда

$$\left| \int_L P(x, y) dx \right| \leq M \cdot l. \quad (9.29)$$

## 9.5 Криволинейный интеграл по замкнутому контуру

Рассмотрим простую замкнутую кривую  $L$  Жордана без точек самопересечения, а также без особых точек

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad (9.30)$$

где  $t \in [\alpha, \beta]$ ,  $\alpha < \beta$ ,  $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$ ,  $\psi(\alpha) = \psi(\beta)$ .

Такая кривая называется простым замкнутым контуром (слово простым означает, что существует параметрическое задание кривой  $L$ , которое на промежутке  $[\alpha, \beta]$  является биекцией, то есть для любых  $t_1, t_2 \in [\alpha, \beta]$ ,  $t_1 \neq t_2$ , хотя бы для одной из функций  $\varphi(t)$  или  $\psi(t)$  значения в точках  $t_1$  и  $t_2$  должны быть различны).



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



195

Закреть

Дополнительно потребуем, чтобы кривая  $L$  была кусочно-гладкой (кривая  $L$  называется **гладкой**, если функции  $\varphi(t)$  или  $\psi(t)$  непрерывно дифференцируемы на отрезке  $[\alpha, \beta]$  и  $(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 > 0$  – нет особых точек. Если кривая  $L$  состоит из конечного числа гладких частичных дуг, то она называется кусочно-гладкой, то есть отрезок  $[\alpha, \beta] = \bigcup_{k=1}^n [\alpha_k, \beta_k]$  без общих внутренних точек, что на любом интеграле  $(\alpha_k, \beta_k)$ ,  $k = \overline{1, n}$ , кривая  $L$  будет гладкой).

**Теорема 9.7.** Пусть функция  $P(x, y)$  непрерывна на простом кусочно-гладком замкнутом контуре  $L$ , определяемом системой (9.30). Значение криволинейного интеграла

$$\oint_L P(x, y) dx \quad \left( \oint P(x, y) dx \right)$$

в заданном направлении по кривой  $L$  не зависит от начала обхода.

◀ Для определенности рассмотрим рисунок 9.3.

По свойству аддитивности

$$\oint P(x, y) dx = \int_{L(B,C)} + \int_{L(C,B)}, \quad (9.31)$$



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



196

Закреть

$$\oint P(x, y)dx = \int_{L(C,B)} + \int_{L(B,C)} . \quad (9.32)$$

Левые части равенств (9.31) и (9.32) одинаковы, поэтому и правые части этих равенств будут равны между собой. ►

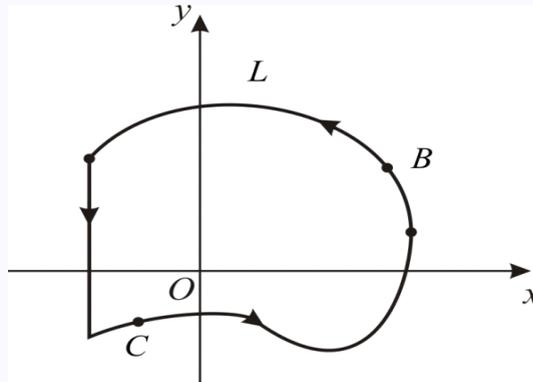


Рисунок 9.3

**Замечание 9.5.** Из задачи о работе плоского силового поля следует: значение работы вдоль замкнутого контура разбивает силовые поля на два класса:

1-й класс – потенциальные силовые поля при условии, что работа по замкнутому контуру равна нулю;



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



197

Закреть

2-й класс – непотенциальные силовые поля (указанная работа не равна нулю).

## 9.6 Формула Грина

В данном пункте необходимо указать условия, при которых криволинейный интеграл второго рода по замкнутому контуру заменяется двойным интегралом по области, границей которой является указанный контур. Вначале рассмотрим неполный криволинейный интеграл

$$\oint P(x, y)dx. \quad (9.33)$$

Пусть кусочно-гладкий замкнутый контур  $L$  есть граница так называемой области первого типа  $G$  (рисунок 9.4).

Граница  $\partial G = L$  состоит из отрезков  $AD$  и  $BC$  соответственно прямых  $x = a$  и  $x = b$  ( $a < b$ ) и кусочно-гладких графиков функций  $y = y_1(x)$  (кривая  $AB$ ) и  $y = y_2(x)$  (кривая  $DC$ ).

Пусть функция  $P(x, y)$  и существующая её частная производная  $\frac{\partial P}{\partial y}$  определены и непрерывны на  $\bar{G} = G \cup \partial G$  (на замыкании области).

**Теорема 9.8.** При указанных выше условиях справедлива формула



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



198

Закреть

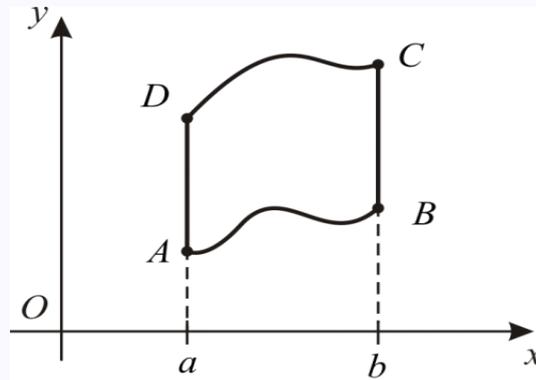


Рисунок 9.4

Грина

$$\iint_G \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy = - \oint_L P(x, y) dx. \quad (9.34)$$

◀ При условиях теоремы как двойной, так и криволинейный интегралы в равенстве (9.34) существуют. Также двойной интеграл заменяется повторным.

$$\iint_G \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dy = \int_a^b P(x, y) \Big|_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} dx =$$



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



199

Закреть

$$\begin{aligned}
&= \int_a^b (P(x, y_2(x)) - (P(x, y_1(x)))dx = \int_{L(D,C)} P(x, y)dx - \int_{L(A,B)} P(x, y)dx = \\
&= - \int_{L(C,D)} P(x, y)dx - \int_{L(A,B)} P(x, y)dx. \tag{9.35}
\end{aligned}$$

Дополнительно учтем, что если  $x = a = \text{const}$ , то  $dx = 0$ , также при  $x = b = \text{const}$  будет  $dx = 0$ . Тогда

$$- \int_{L(D,A)} P(x, y)dx = - \int_{L(B,C)} P(x, y)dx = 0. \tag{9.36}$$

С учетом равенств (9.35) и (9.36) получим справедливость заключения теоремы 9.8. ►

**Замечание 9.6.** Аналогично рассматривается простейшая область второго типа (рисунок 9.5).

Отрезки  $D$  и лежат соответственно на прямых  $y = d$  и  $y = c$ . Кривые  $AD$  и  $BC$  – соответственно кусочно-гладкие графики функций  $x = x_1(y)$  и  $x = x_2(y)$ . Обозначим также область (рисунок 9.5) через  $\Omega$  и  $\partial\Omega$  – ее кусочно-гладкая граница.



**Кафедра**  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



200

Закреть

**Теорема 9.9.** Если функция  $Q(x, y)$  и существующая ее частная производная  $\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$  определены и непрерывны на  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ , то справедлива формула Грина

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} dx dy = \oint_{\partial\Omega} Q(x, y) dy \quad (9.37)$$

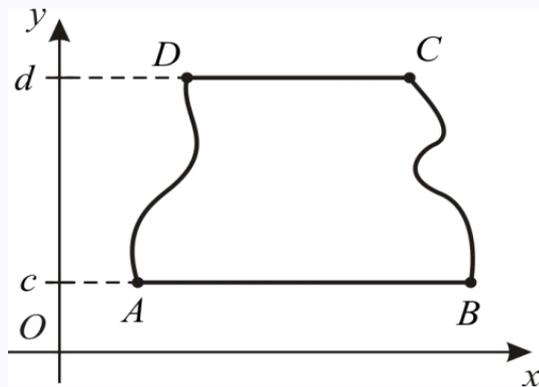


Рисунок 9.5

**Замечание 9.7.** Доказательство теоремы 9.9 аналогично доказательству теоремы 9.8.

По свойству аддитивности для двойных и криволинейных интегралов, а также тому, что сумма криволинейных неполных интегралов от



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



201

Закреть

одной и той же функции по одной и той же кривой, но в противоположных направлениях равны нулю, получим справедливость формул (9.34) и (9.37), если область  $G$  допускает представление в виде конечного числа простейших областей как первого, так и второго типа (другие условия теорем 9.8 и 9.9 должны сохраниться). В этом случае будет справедлива и полная формула Грина

$$\oint_{L=\partial G} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_G \left( \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx dy. \quad (9.38)$$

Областями, допускающими выше указанное разбиение на простейшие области как первого, так и второго типов будут многоугольные области. Но любая область  $G$  с кусочно-гладкой границей  $\partial G$  допускает аппроксимацию многоугольными областями со сколь угодно малой ошибкой по величине площади (можно доказать). По этой причине будет справедлива формула Грина вида (9.38) для более общего случая.

**Теорема 9.10.** Если функция  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$  и существующие их частные производные  $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y}$  и  $\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$  определены и непрерывны на замыкании  $\bar{G} = G \cup \partial G$  области  $G$  с кусочно-гладкой границей  $\partial G$ , то справедлива формула Грина (9.38), а также формулы (9.34) и (9.37).



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



202

Закреть

## 9.7 Приложения формулы Грина к вычислению площадей плоских фигур

Пусть плоская фигура в  $\mathbb{R}^2$  есть область  $G$  с кусочно-гладкой границей  $\partial G$ . Тогда по формуле (9.37) имеем:

$$\oint_{\partial G} x dy = \iint_G \frac{\partial}{\partial x} x dx dy = \iint_G dx dy = S_G \quad (9.39)$$

площади плоской фигуры  $G$ . Аналогично

$$S_G = - \oint_{\partial G} y dx. \quad (9.40)$$

Сложим (9.39) и (9.40), получим

$$S_G = \frac{1}{2} \oint_{\partial G} x dy - y dx. \quad (9.41)$$

**Пример 9.4.** Вычислить площадь эллипса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

◀ Используем параметрическое задание эллипса

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



203

Закреть

Тогда по формуле (7.3)

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \oint_L xdy - ydx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a \cos t \cdot b \cos t - b \sin t \cdot (-a \sin t)) dt = \\ &= 2ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \pi ab \text{ (кв. ед.)}. \end{aligned}$$

Ответ:  $S = \pi ab$  (кв. ед.).▶

## 9.8 Четыре равносильных условия для криволинейного интеграла второго рода

**Определение 9.2.** Плоская область  $G$  называется **односвязной**, если для любого замкнутого контура  $L \subset G$  (лежащего внутри  $G$ ) ограниченная  $L$  (конечная) часть плоскости целиком принадлежит  $G$ .

**Теорема 9.11.** Пусть функции  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$  и существующие их частные производные  $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$  определены и непрерывны на замыкании  $\bar{G}$  односвязной области  $G$  с кусочно-гладкой границей  $\partial G$ . Тогда четыре следующих условия равносильны, а именно:



На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



204

Закреть

1. По любому кусочно-гладкому замкнутому контуру  $L \subset G$  будет

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0. \quad (9.42)$$

2. Для любых точек  $B(x, y)$  и  $C(x, y)$  из области  $G$  криволинейный интеграл

$$\int_B^C P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

3. Не зависит от выбора пути (кусочно-гладкой кривой  $L$ ) интегрирования от точки до точки .

4. Выражение  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$  есть полный дифференциал некоторой однозначной функции, определенной в области  $G$ .

5. Для любых точек из области  $G$  выполняется условие

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}. \quad (9.43)$$

◀ Доказательство теоремы проведем по схеме  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$

а)  $1 \rightarrow 2$  (дано условие 1), доказать справедливость заключения 2)).

Для наглядности нарисуем рисунок 9.6.

Возьмем любые кусочно-гладкие кривые  $L_1$  и  $L_2$  из области  $G$ , концами которых будут точки  $B$  и  $C$ . Эти кривые образуют замкнутый



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



205

Закреть

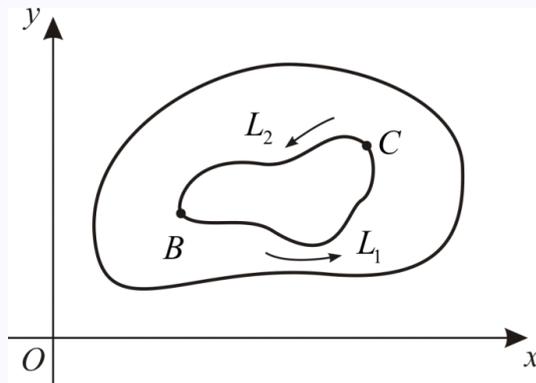


Рисунок 9.6

кусочно-гладкий контур  $L = L_1 \cup L_2$ . Из условия 1) имеем:

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0. \quad (9.44)$$

Из свойства аддитивности для криволинейных интегралов

$$\oint_L = \int_{L_1} + \int_{L_2} = 0.$$

Тогда  $\int_{L_1} = -\int_{L_2}$ , то есть  $\int_{L_1(B,C)} = \int_{L_2(B,C)}$ . Утверждение 2) доказано.

б)  $2 \rightarrow 3$  (дано условие 2), доказать справедливость утверждения 3)).



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



206

Закреть

Фиксируем точку  $B$ , а точка  $C(x, y)$  пусть будет текущей в области  $G$ . Через  $L$  обозначим переменную кусочно-гладкую кривую, началом которой будет точка  $B$  и концом точка  $C$ .

Тогда для любой точки  $C(x, y)$  криволинейный интеграл

$$\int_{L(B,C)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = u(x, y) \quad (9.45)$$

есть однозначная функция координат  $x$  и  $y$  точки  $C$ . Покажем, что функция  $u(x, y)$  дифференцируема в области  $G$  и ее полный дифференциал

$$du(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy = u'_x(x, y)dx + u'_y(x, y)dy. \quad (9.46)$$

Для наглядности нарисуем рисунок 9.7

Вначале докажем, что существует  $\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = P(x, y)$ . Придаем абсциссе  $x$  точки  $C$  любое приращение  $\Delta x \neq 0$ , но такое, что  $C_1(x + \Delta x, y) \in G$ . Тогда частное приращение

$$\Delta_x u(x, y) = u(x + \Delta x, y) - u(x, y) = \int_C^{C_1} P(x, y)dx + Q(x, y)dy, \quad (9.47)$$

причем  $dy = 0$  (криволинейный интеграл берем по отрезку, параллельному оси  $Ox$ ,  $y = \text{const}$ ).



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



207

Закреть

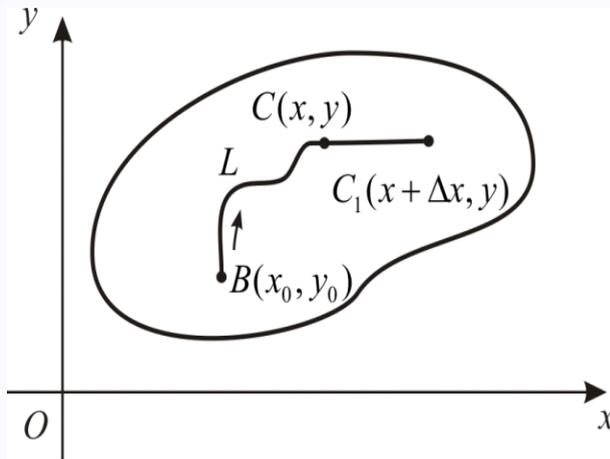


Рисунок 9.7

Разделим левую и правую части (9.47) на  $\Delta x$ , получим:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_x u(x, y)}{\Delta x} &= \frac{1}{\Delta x} \int_{(x, y)}^{(x + \Delta x, y)} P(x, y) dx = \\ &= \left[ \begin{array}{l} \text{теорема} \\ \text{о среднем} \end{array} \right] = P(x + \theta \Delta x, y), \theta \in (0, 1). \end{aligned} \quad (9.48)$$

Тогда

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} P(x + \theta \Delta x, y) = P(x, y). \quad (9.49)$$



Кафедра  
высшай  
матэматыкі

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



208

Закреть

При доказательстве (9.49) учитываем, что функция  $P(x, y)$  непрерывна в области  $G$ . Аналогично доказывается, что  $\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = Q(x, y)$  в области  $G$ .

Так как  $u'_x(x, y)$  и  $u'_y(x, y)$ , равные соответственно  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  непрерывны в области  $G$ , то функция  $u(x, y)$  дифференцируема в этой области (достаточный признак дифференцируемости функции  $u(x, y)$  в любой точке  $(x, y) \in G$ ).

Тогда

$$du(x, y) = u'_x(x, y)dx + u'_y(x, y)dy = P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Утверждение 3) доказано.

в) 3  $\rightarrow$  4 (дано условие 3), требуется доказать утверждение 4)).

Воспользуемся теоремой Шварца о равенстве смешанных производных. У нас  $\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = P(x, y)$  и  $\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = Q(x, y)$ .

Тогда  $\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}$  и  $\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$ , но частные производные  $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y}$  и  $\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$  непрерывны в  $G$ , поэтому в  $G$  будут непрерывны и смешанные производные  $\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y \partial x}$  и  $\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y}$ , а, значит, они будут равны, поэтому и  $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$ . Утверждение 4) доказано.

г) 4  $\rightarrow$  1 (дано условие 4), требуется доказать утверждение 1)).

При условиях теоремы справедлива формула Грина по любому кусоч-



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



209

Закреть

но-гладкому замкнутому контуру из  $G$

$$\oint_{L=\partial D} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_{D \subset G} \left( \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx dy. \quad (9.50)$$

Но из условия 4) имеем  $\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = 0$ . Тогда

$$\oint_{L=\partial D} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0. \blacktriangleright$$

## 9.9 Восстановление функции по ее полному дифференциалу с помощью криволинейного интеграла

**Теорема 9.12.** Пусть функции  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$  и существующие их частные производные  $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y}$  и  $\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$  определены и непрерывны в односвязной области  $G$ , а также выполняется равенство

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}. \quad (9.51)$$

Тогда в  $G$   $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$  есть полный дифференциал некоторой функции  $u(x, y)$ , которая находится с точностью до константы



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



210

Закреть

по формуле

$$u(x, y) = \int_{M_0(x_0, y_0)}^{M(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy + C, \quad (9.52)$$

где  $M_0(x_0, y_0)$  – любая фиксированная точка из области  $G$ , а  $M(x, y)$  – текущая точка из этой области, причем указанные точки есть концы любой кусочно-гладкой кривой без особых точек, по которой проводится интегрирование.

◀ У нас выполняются условия теоремы 9.11, поэтому равенство (9.51) будет выполняться тогда и только тогда, когда

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

есть полный дифференциал некоторой функции  $u(x, y)$  в области  $G$ . Также в теореме 9.11 было показано, что при выполнении равенства (9.51) условию

$$du(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy \quad (9.53)$$

удовлетворяет функция

$$u(x, y) = \int_{M_0(x_0, y_0)}^{M(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy. \quad (9.54)$$



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



211

Закреть

Далее учтем, что две функции, имеющие одинаковые полные дифференциалы, отличаются одна от другой только на постоянные слагаемые. Так как точки  $M_0(x_0, y_0)$  и  $M(x, y)$  могут быть концами любой кусочно-гладкой кривой без особых точек, то чаще всего в качестве такой кривой берут ломанную со звеньями, параллельными координатным осям. ►

**Замечание 9.8.** Доказанная теорема дает один из методов решения дифференциальных уравнений первого порядка в полных дифференциалах.

**Пример 9.5.** Решить дифференциальное уравнение

$$\left(12x^2y + \frac{1}{y^2}\right) dx + \left(4x^3 - \frac{2x}{y^3}\right) dy = 0. \quad (9.55)$$

◀ Наше уравнение имеет вид

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \quad (9.56)$$

где  $P(x, y) = 12x^2y + \frac{1}{y^2}$ ,  $Q(x, y) = 4x^3 - \frac{2x}{y^3}$ .

Ось  $Ox$  разбивает координатную плоскость  $\mathbb{R}^2$  на две односвязные области:  $G_1(y > 0)$  и  $G_2(y < 0)$ .

Решение уравнения (9.55) будем проводить в области  $G_1$ . Находим

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = 12x^2 - \frac{2}{y^3}$$



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



212

Закреть

И

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = 12x^2 - \frac{2}{y^3}.$$

Видно, что у нас выполняются условия предыдущей теоремы, поэтому левая часть уравнения (9.55) есть полный дифференциал некоторой функции  $u(x, y)$  в односвязной области  $G_1$ . По формуле (9.52) находим функцию  $u(x, y)$  с точностью до константы. В качестве кривой интегрирования берем ломаную  $L = L_1 \cup L_2$  (рисунок 9.8).

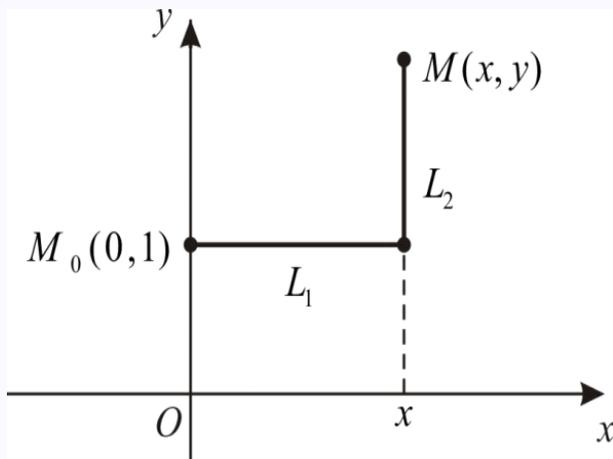


Рисунок 9.8



Кафедра  
вышэйшай  
матэматыкі

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



213

Закреть

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{L_1} + \int_{L_2} =$$

$$= \left[ \begin{array}{l|l} L_1 : y = 1, dy = 0, & L_2 : x = \text{const}, dx = 0, \\ x - \text{параметр}, & y - \text{параметр}, \\ 0 \leq x \leq x & 1 \leq y \leq y \end{array} \right] =$$

$$= \int_0^x (12x^2 + 1)dx + \int_1^y \left( 4x^3 - \frac{2x}{y^3} \right) = 4x^3y + \frac{x}{y^2} + C_1.$$

**Ответ:**  $u(x, y) = C$ , где  $u(x, y) = 4x^3y + \frac{x}{y^2}$  – решение уравнения (9.55). ►



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



214

Закреть

# ЛЕКЦИЯ 10

## Поверхностные интегралы первого рода

Поверхностные интегралы играют важную роль при решении многих задач физики. Например, решение задачи о плотности распределения зарядов на поверхности проводника или о скорости жидкости, протекающей через некоторую поверхность, или об освещенности поверхности или о притяжении простого слоя и т.д.

Теория поверхностных интегралов во многом аналогична теории криволинейных интегралов. Рассматриваются, как и для криволинейных интегралов, поверхностные интегралы первого и второго рода.

### 10.1 Задача, приводящая к понятию поверхностного интеграла первого рода

**Задача.** О притяжении поверхности, с распределённой массой по ней, материальной точки, находящейся вне поверхности.

◀ Пусть по поверхности  $S$  непрерывным образом распределены массы с заданной в каждой точке  $M(x, y, z)$  поверхности плотностью

$$\rho(M) = \rho(x, y, z).$$

Пусть далее, в точке  $A(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  (вне поверхности) находится единица массы. Требуется определить, с какой по величине и направлению силой  $\vec{F}$



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



215

Закреть

притягивается точка  $A(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  поверхностью  $S$ , если в основу положен Ньютонов закон притяжения.

Если бы точка  $A(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  притягивалась одной лишь материальной точкой  $M(x, y, z)$  с сосредоточенной в ней массой  $m$ , то величина силы притяжения была бы равна

$$F = \frac{m}{r^2},$$

где  $r$  есть расстояние  $|AM|$ , то есть.

$$r = \sqrt{(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 + (z - \bar{z})^2}.$$

Так как эта сила направлена от точки  $A$  к точки  $M$ , то её направляющие косинусы будут

$$\frac{x - \bar{x}}{r}, \frac{y - \bar{y}}{r}, \frac{z - \bar{z}}{r}$$

и, следовательно, проекция силы притяжения  $\vec{F}$  на оси координат выразится так:

$$F_x = m \frac{x - \bar{x}}{r^3}, F_y = m \frac{y - \bar{y}}{r^3}, F_z = m \frac{z - \bar{z}}{r^3}.$$

Рассмотрим элемент  $dS$  поверхности с массой  $\rho dS$ , как бы сосредоточенной в одной из его точек  $M(x, y, z)$ . Оказываемое им на точку



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



216

Закреть

$A(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  притяжение будет иметь проекции на оси:

$$dF_x = \rho \frac{x - \bar{x}}{r^2} ds, \quad dF_y = \rho \frac{y - \bar{y}}{r^2} dS, \quad dF_z = \rho \frac{z - \bar{z}}{r^2} dS.$$

Используя метод определенного интеграла, получим следующие формулы для проекции силы  $\vec{F}$  притяжения простого слоя на оси:

$$F_x = \iint_S \rho \frac{x - \bar{x}}{r^3} dS, \quad F_y = \iint_S \rho \frac{y - \bar{y}}{r^3} dS, \quad F_z = \iint_S \rho \frac{z - \bar{z}}{r^3} dS.$$

Этим сила  $\vec{F}$  определена полностью как по величине, так и по направлению. Такие интегралы называют **поверхностными интегралами первого рода**.▶

**Замечание 10.1.** Если бы притягиваемая точка  $A(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  сама лежала на поверхности  $S$ , то проекции притяжения на оси по-прежнему выражались бы интегралами, но на этот раз интегралы эти были бы несобственными, поскольку вблизи точки  $A(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  подынтегральные функции все перестают быть ограниченными.

## 10.2 Понятие поверхностного интеграла первого рода

Пусть  $S$  – конечная гладкая поверхность с кусочно-гладкой границей  $\partial S$  в координатном пространстве  $\mathbb{R}^3$ , на которой определена и ограничена функция. Поверхность называется гладкой, если в каждой ее точке



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



217

Закреть



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



218

Закреть

существует касательная плоскость и при переходе от точки к точке положение этой плоскости меняется непрерывно. Например, если поверхность  $S$  есть график функции  $z = f(x, y)$ , определенный в области  $G$  с кусочно-гладкой границей  $\partial G$ , то поверхность  $S$  будет гладкой, если существуют и непрерывны на  $\bar{G} = G \cup \partial G$  частные производные  $f'_x(x, y)$  и  $f'_y(x, y)$ . Берём любое разбиение  $\tau_s$  поверхности  $S$  набором из  $l$ ,  $l \in \mathbb{N}$ , кусочно-гладких кривых на  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , частичных гладких поверхностей  $S_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ , без общих внутренних точек. Обозначим через  $\Delta S_k$  площадь частичной поверхности  $S_k$ . Диаметром поверхности  $S_k$  будет  $d_k = \sup_{M_k, N_k \in S_k} \{\rho(M_k, N_k)\}$  для любых  $M_k, N_k \in S_k$ . Наибольший из диаметров  $d_k$  обозначен через  $\lambda_\tau$ . Произвольно выбираем точки  $M_k \in S_k$ . Составляем интегральную сумму

$$\sigma_\tau(f(x, y), M_k) = \sum_{k=1}^n f(M_k) \Delta S_k. \quad (10.1)$$

**Определение 10.1.** Если существует конечный предел

$$\lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} \sigma(f(x, y), M_k), \quad (10.2)$$

который не зависит от разбиения  $\tau_s$  и выбора точек  $M_k$ , то он называется **поверхностным интегралом первого рода** от функции  $f(M)$

$(M(x, y, z) \in S)$  по поверхности  $S$  и обозначается

$$\iint_S f(M) dS. \quad (10.3)$$

### 10.3 Теорема о существовании и вычислении поверхностного интеграла первого рода

**Теорема 10.1.** Пусть функция  $u = f(x, y, z)$  определена и непрерывна на замыкании  $\bar{S}$  гладкой поверхности  $S$  с кусочно-гладкой границей  $\partial S$  – графика функции  $z = z(x, y)$ , определенной в ограниченной области  $G$  с кусочно-гладкой границей  $\partial G$ . Тогда существует поверхностный интеграл первого рода  $\iint_S f(M) dS$  и он вычисляется по формуле

$$\iint_S f(M) dS = \iint_G f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z'_x{}^2 + z'_y{}^2} dx dy. \quad (10.4)$$

◀ Повторяем предыдущие рассуждения и выкладки, получим интегральную сумму

$$\sigma_\tau(f(x, y), M_k) = \sum_{k=1}^n f(M_k) \Delta S_k, \quad (10.5)$$

где  $M_k = M_k(x_k, y_k, z_k) \in S_k$ .



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



219

Закреть

Разбиению  $\tau_S$  соответствует разбиение  $G$  на  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , частичных областей  $G_k$ ,  $k = 1, n$ . Так как поверхность  $S$  – гладкая, то сама функция  $z = z(x, y)$  и существующие ее частные производные  $z'_x(x, y)$  и  $z'_y(x, y)$  непрерывны на  $\overline{G}$ . Тогда площадь поверхности  $S$  будет равна

$$S = \iint_G \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy, \quad (10.6)$$

а

$$\Delta S_k = \iint_{G_k} \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy. \quad (10.7)$$

Для двойного интеграла правой части (10.7) воспользуемся теоремой о среднем  $\left( \mu(x, y) = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} \in C(\overline{G_k}) \right)$ . Тогда

$$\Delta S_k = \sqrt{1 + z_x'^2(\bar{x}_k, \bar{y}_k) + z_y'^2(\bar{x}_k, \bar{y}_k)} \Delta G_k, \quad (10.8)$$

где  $\overline{M}_k(\bar{x}_k, \bar{y}_k) \in \overline{G}_k$ , а

$$\sigma_\tau(f(x, y), M_k) = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z(x_k, y_k)) \sqrt{1 + z_x'^2(\bar{x}_k, \bar{y}_k) + z_y'^2(\bar{x}_k, \bar{y}_k)} \Delta G_k. \quad (10.9)$$



На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



220

Закреть

Функция  $\varphi(x, y) = \sqrt{1 + z_x'^2(x, y) + z_y'^2(x, y)} \in C(\bar{G})$  (непрерывна на компакте  $\bar{G}$  – ограниченном замкнутом множестве), поэтому она будет и равномерно непрерывной на  $\bar{G}$  (теорема Кантора).

Пусть  $d_\tau$  – максимальный из диаметров частичных областей  $G_k$ . Имеем:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 \forall \tau_s \quad d_\tau < \delta_1 \quad |\varphi(x_k, y_k) - \varphi(\bar{x}_k, \bar{y}_k)| < \varepsilon.$$

Кроме того, из  $f(x, y, z) \in C(\bar{S})$  следует (теорема Вейерштрасса), что функция  $f(x, y, z)$  ограничена на  $\bar{S}$ , то есть существует  $K > 0$  ( $K = \text{const}$ ), что для любых  $(x, y, z) \in \bar{S}$  будет  $|f(x, y, z)| \leq K$ .

Обозначим через  $\bar{\sigma}_\tau(f(x, y, z), M_k)$  аналог (10.9) с заменой  $\bar{x}_k$  на  $x_k$  и  $\bar{y}_k$  на  $y_k$ . В этом случае  $\bar{\sigma}_\tau(f(x, y, z), M_k)$  будет интегральной суммой для двойного интеграла правой части (10.4). Оценим сверху

$$\begin{aligned} & |\sigma_\tau(f(x, y, z), M_k) - \bar{\sigma}_\tau(f(x, y, z), M_k)| = \\ & = \left| \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z(x_k, y_k)) (\varphi(\bar{x}_k, \bar{y}_k) - \varphi(x_k, y_k)) \Delta G_k \right| \leq K \varepsilon |G|, \end{aligned} \quad (10.10)$$

где  $|G|$  – площадь  $G$ .

Двойной интеграл (обозначим его через  $I$ ) правой части (10.4) существует, так как подынтегральная функция непрерывна на компакте  $\bar{G}$ ,



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



221

Закреть

а тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 \forall \tau_G \ d_\tau < \delta_2 \quad |I - \bar{\sigma}_\tau| < \varepsilon. \quad (10.11)$$

При  $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$  будут справедливы оценки (10.10) и (10.11). Тогда

$$|I - \sigma_\tau| < \varepsilon(1 + K |\sigma|), \quad (10.12)$$

причем оценка (10.12) будет при  $\lambda_\tau < \delta$ . ►

**Пример 10.1.** Вычислить поверхностный интеграл первого рода

$$\iint_S \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dS, \quad (10.13)$$

где  $S$  – конечная часть поверхности  $z = 1 - x^2 - y^2$ , отсечённая плоскостью  $z = 0$ .

◀ Построим рисунок поверхности  $S$  (рисунок 10.1).

Вычисление проводим по формуле (10.4). У нас  $z(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ .

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2x; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2y; \quad \sqrt{1 + z'_x{}^2 + z'_y{}^2} = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}.$$

$$\iint_S \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} ds = \iint_G (1 + 4x^2 + 4y^2) dx dy =$$



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



222

Закреть

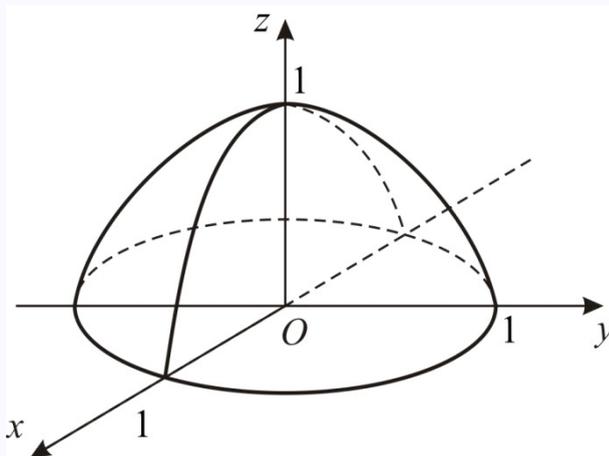


Рисунок 10.1

$$\begin{aligned}
 &= \left[ \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{array} \middle| 0 \leq \varphi \leq 2\pi \right] 1 + 4x^2 + 4y^2 = 1 + 4r^2 \Bigg] = \\
 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1 + 4r^2) r dr = 2\pi \left( \frac{r^2}{2} + r^4 \right) \Bigg|_0^1 = 3\pi.
 \end{aligned}$$

Ответ:  $3\pi$ . ►

**Замечание 10.2.** Аналогичные утверждения теореме 10.1 будут справедливы при соответствующих условиях и для поверхностей, определя-



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



223

Закреть

емых уравнениями  $x(y, z)$  и  $y(x, z)$ . Тогда формулы для вычисления соответствующих поверхностных интегралов первого рода будут

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_G f(x(y, z), y, z) \sqrt{1 + x_y'^2 + x_z'^2} dydz \quad (10.14)$$

и

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_G f(x, y(x, z), z) \sqrt{1 + y_x'^2 + y_z'^2} dx dz. \quad (10.15)$$

**Пример 10.2.** Вычислить поверхностный интеграл первого рода

$$\iint_S (x + y + z) dS, \quad (10.16)$$

где поверхность  $S$  – часть плоскости  $x + 2y + 4z = 4$ , удовлетворяющая условиям  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$ .

◀ Воспользуемся формулой (10.14). Выполним эскиз рисунка 10.2 нашей поверхности  $S$  и проекции поверхности  $S$  на плоскость  $xOy$  (область  $G$ ). Это плоскость  $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{1} = 1$ .

$$\iint_S (x + y + z) dS = \iint_G (4 - 2y - 4z + y + z) \sqrt{21} dz dy =$$



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



224

Закреть

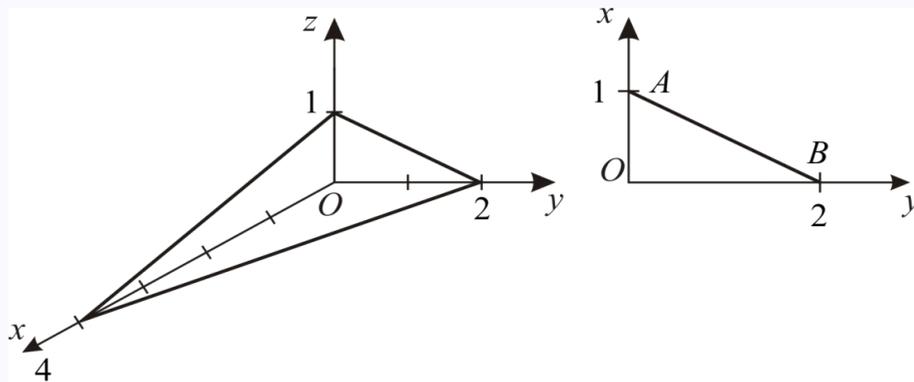


Рисунок 10.2

$$\begin{aligned}
 &= \iint_G (4 - y - 3z)\sqrt{21}dydz = \sqrt{21} \int_0^2 dy \int_0^{1-\frac{y}{2}} (4 - y - 3z)dz = \\
 &= \int_0^2 \left( 4z \Big|_0^{1-\frac{y}{2}} - yz \Big|_0^{1-\frac{y}{2}} - \frac{3}{2} z^2 \Big|_0^{1-\frac{y}{2}} \right) \sqrt{21}dy = \\
 &= \sqrt{21} \int_0^2 \left( \frac{5}{2} - \frac{3}{2}y + \frac{y^2}{8} \right) dy = \frac{7\sqrt{21}}{3}.
 \end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{7\sqrt{21}}{3}$ . ►



Кафедра  
вышэй  
матэматыкі

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



225

Закреть

**Пример 10.3.** Вычислить интеграл

$$\int_S (xy + yz + zx) dS, \quad (10.17)$$

где

$$S = \{x, y, z\} \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 < 2ax, a > 0\}.$$

◀ Наша поверхность  $S$  есть часть поверхности конуса  $z^2 = x^2 + y^2$ , лежащей выше плоскости  $z = 0$  внутри цилиндра  $x^2 + y^2 = 2ax$ . Изобразим эскиз рисунка нашей поверхности (рисунок 10.3) и проекции поверхности  $S$  на плоскость  $xOy$  (рисунок ??)

$$x^2 + y^2 - 2ax + a^2 = a^2, (x - a)^2 + y^2 = a^2.$$

Находим наш поверхностный интеграл по формуле (10.4)

$$I = \iint_S (xy + yz + zx) dS = \sqrt{2} \iint_G \left( xy + y\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2}x \right) dx dy, \quad (10.18)$$

где  $\sqrt{1 + z'_x{}^2 + z'_y{}^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2} = \sqrt{2}$ .

Двойной интеграл правой части (10.18) вычисляем, переходя к полярным координатам.



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



226

Закреть

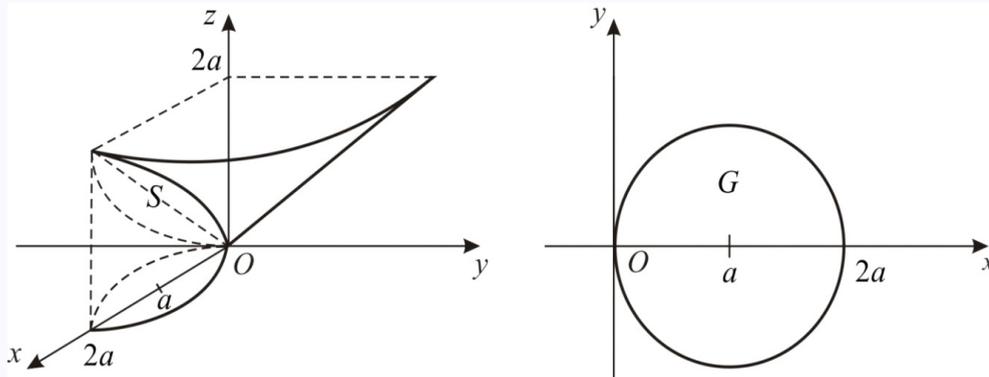


Рисунок 10.3

$$\begin{aligned}
 I &= \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2a \cos \varphi} (r^2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi + r^2 \sin \varphi + r^2 \cos \varphi) r dr d\varphi = \\
 &= \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin \varphi \cdot \cos \varphi + \sin \varphi + \cos \varphi) \frac{r^4}{4} \Big|_0^{2a \cos \varphi} d\varphi = \\
 &= \frac{16a^4 \sqrt{2} \cdot 2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \varphi d\varphi =
 \end{aligned}$$



На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



227

Закреть

$$= 8a^4\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 \varphi)^2 d(\sin \varphi) = \left[ \begin{array}{l} u = \sin \varphi \\ u_{\text{H}} = 0, u_{\text{B}} = 1 \end{array} \right] =$$

$$= 8a^4\sqrt{2} \int_0^1 (1 - t^2) dt = \frac{64\sqrt{2}a^4}{15}.$$

Ответ:  $\frac{64\sqrt{2}a^4}{15}$ . ►

## 10.4 Вычисление поверхностного интеграла первого рода при параметрическом задании поверхности

Рассмотрим кусочно-гладкую поверхность  $S$  с кусочно-гладкой границей, заданной с помощью вектор-функции  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ . Возьмем кривую на поверхности  $S$  – это  $\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t))$ . Введём координатные векторы

$$\vec{r}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \text{ и } \vec{r}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}. \quad (10.19)$$

Задание функций  $u(t)$  и  $v(t)$  на поверхности  $S$  порождает в каждой касательной плоскости к  $S$  невырожденный репер  $\vec{r}_u, \vec{r}_v$  (пару неколлинеарных векторов). Введем обозначения (через скалярное произведение).

$$g_{11} = (\vec{r}_u, \vec{r}_u); g_{21} = (\vec{r}_u, \vec{r}_v); g_{22} = (\vec{r}_v, \vec{r}_v). \quad (10.20)$$



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



228

Закреть

**Теорема 10.2.** Пусть кусочно-гладкая поверхность  $S$  задана уравнением  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ , и на ней определена ограниченная функция  $f(x, y, z)$ . Также существует двойной интеграл

$$\iint_G f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} dudv, \quad (10.21)$$

где  $G$  – ортогональная проекция поверхности  $S$  на плоскость в системе координат  $u, v$ . Тогда существует поверхностный интеграл

$$\iint f(x, y, z) dS = \iint f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} dudv. \quad (10.22)$$

**Замечание 10.3.** Если взять уравнение плоскости и задать его через декартовы координаты (параметры  $u$  и  $v$ ), то в этом случае  $\vec{r}_u = \vec{i}$ ,  $\vec{r}_v = \vec{j}$ . Тогда  $g_{11} = (\vec{i}, \vec{i}) = 1$ ;  $g_{12} = (\vec{i}, \vec{j}) = 0$ ;  $g_{22} = (\vec{j}, \vec{j}) = 1$ .

**Пример 10.4.** Вычислить поверхностный интеграл первого рода

$$\iint (xy + z) dS, \quad (10.23)$$

где  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = ax, y^2 + z^2 \leq x^2, z \geq 0\}$ .

◀ Изобразим эскиз рисунка поверхности  $S$  (рисунок 10.4) и проекции поверхности  $S$  на плоскость  $xOy$  (рисунок 10.4)



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



229

Закреть

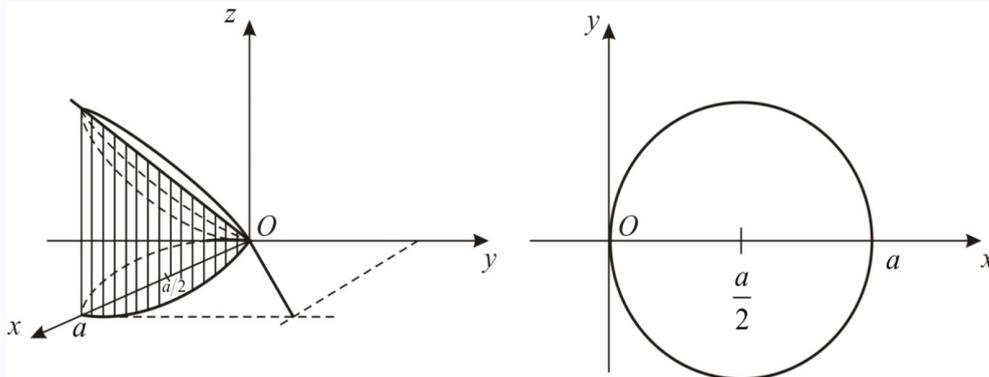


Рисунок 10.4

Поверхность  $S$  находится внутри конуса. Используем параметрическое задание уравнения цилиндра (окружность  $x^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$  задается параметрическими следующим образом  $x = \frac{a}{2}(1 + \cos t)$ ,  $y = \frac{a}{2} \sin t$ ):

$$x = \frac{a}{2}(1 + \cos t), \quad y = \frac{a}{2} \sin t, \quad z = h. \quad (10.24)$$

Для нахождения области значений точек  $M(t, h)$  соответствующим соотношениям (10.24) воспользуемся неравенством  $y^2 + z^2 \leq x^2$  и значениями  $x, y, z$  из (10.24)

$$\frac{a^2}{4} \sin^2 t + h^2 \leq \frac{a^2}{4} (1 + \cos t)^2; \quad h^2 \leq \frac{a^2}{4} (1 + 2 \cos t + \cos^2 t) - (1 - \cos^2 t) \frac{2a^2}{4};$$



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



230

Закреть

$$h^2 \leq \frac{a^2}{4}(2 \cos t + 2 \cos^2 t); \quad h^2 \leq \frac{a^2}{4}2 \cos t(1 + \cos t); \quad h^2 \leq a^2 \cos t \cdot \cos^2 \frac{t}{2};$$

$$0 \leq h \leq a \cos \frac{t}{2} \sqrt{\cos t}.$$

Из последней оценки видно, что  $\cos t \geq 0$ , поэтому  $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ , что соответствует и рисунку 10.4. Наша поверхность задается параметрически с помощью вектор-функции

$$\vec{r}(t, h) = \left( \frac{a}{2}(1 + \cos t), \frac{a}{2} \sin t, h \right). \quad (10.25)$$

Находим частные производные вектор-функции  $\vec{r}(t, h)$ .

$$\vec{r}'_t(t, h) = \left( -\frac{a}{2} \sin t, \frac{a}{2} \cos t, 0 \right) \quad \text{и} \quad \vec{r}'_h(t, h) = (0, 0, 1).$$

По формулам (10.20) находим величины  $g_{11}, g_{22}, g_{12}$

$$g_{11} = (\vec{r}'_t(t, h), \vec{r}'_t(t, h)) = |\vec{r}'_t|^2 = \frac{a^2}{4}; \quad g_{22} = (\vec{r}'_h(t, h), \vec{r}'_h(t, h)) = |\vec{r}'_h|^2 = 1;$$

$$g_{12} = (\vec{r}'_t(t, h), \vec{r}'_h(t, h)) = 0.$$

Тогда

$$dS = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} dt dh = \frac{a}{2} dt dh. \quad (10.26)$$



*Кафедра  
высшай  
матэматыкі*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



231

Закреть

Для вычисления поверхностного интеграла (10.23) воспользуемся формулой (10.22)

$$\begin{aligned}
 \int_S (xy + z) dS &= \iint_G \left( \frac{a}{2}(\cos t + 1) \frac{a}{2} \sin t + h \right) \frac{a}{2} dt dh = \\
 &= \frac{a}{2} \left( \iint_G \frac{a^2}{4} \sin t \cdot (\cos t + 1) dt dh + \iint_G h dt dh \right) = \\
 &= \frac{a}{2} \left( \frac{a^2}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cdot (\cos t + 1) dt \int_0^{a \cos \frac{t}{2} \sqrt{\cos t}} dh + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt \int_0^{a \cos \frac{t}{2} \sqrt{\cos t}} h dh \right) = \\
 &= \frac{a}{2} \left( 0 + \frac{1}{2} \cdot 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \frac{t}{2} \cdot \cos t dt \right) = \frac{a^3}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t + \cos^2 t) dt = \\
 &= \frac{a^3}{4} \left( \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{a^3}{4} \left( 1 + \frac{\pi}{4} \right).
 \end{aligned}$$

**Ответ:**  $\frac{a^3}{4} \left( 1 + \frac{\pi}{4} \right)$ . ►



На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



232

Закреть

## 10.5 Свойства поверхностного интеграла первого рода

Сформулируем некоторые свойства поверхностных интегралов первого рода.

**Теорема 10.3.** *Непрерывная на кусочно-гладкой поверхности  $S$  функция  $f(x, y, z)$  интегрируема на  $S$ .*

**Теорема 10.4 (свойство линейности).** *Если функции  $f(x, y, z)$  и  $g(x, y, z)$  интегрируемы на поверхности  $S$  и  $\alpha, \beta$  – любые фиксированные действительные числа, то функция  $\alpha f(x, y, z) + \beta g(x, y, z)$  интегрируема на поверхности  $S$  и справедлива формула*

$$\iint_S (\alpha f(x, y, z) + \beta g(x, y, z)) dS = \alpha \iint_S f(x, y, z) dS + \beta \iint_S g(x, y, z) dS. \quad (10.27)$$

**Определение 10.2.** *Поверхности  $S_1$  и  $S_2$  называются **непересекающимися**, если их общая часть состоит из не более чем конечного числа кусочно-гладких кривых.*

**Теорема 10.5 (свойство аддитивности).** *Если существуют интегралы  $\iint_{s_1} f(x, y, z) dS$ ,  $\iint_{s_2} f(x, y, z) dS$  и поверхности  $S_1$  и  $S_2$  не пере-*



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



233

Закреть

секаются, то существует интеграл функции  $f(x, y, z)$  по их объединению  $S = S_1 \cup S_2$  и справедлива формула

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{S_1} f(x, y, z) dS + \iint_{S_2} f(x, y, z) dS. \quad (10.28)$$

**Теорема 10.6.** Если  $f(x, y, z) = 1$  и  $S$  – конечная кусочно-гладкая поверхность, то

$$\iint_S 1 dS = |S|, \quad (10.29)$$

где  $|S|$  – площадь поверхности  $S$ .

**Теорема 10.7 (об интегрируемости модуля).** Если существует  $\iint_S f(x, y, z) dS$ , то существует интеграл функции  $|f(x, y, z)|$  по  $S$  и справедлива оценка

$$\left| \iint_S f(x, y, z) dS \right| \leq \iint_S |f(x, y, z)| dS. \quad (10.30)$$

**Теорема 10.8 (свойство монотонности).** Если  $f(x, y, z)$  и  $g(x, y, z)$  интегрируемы по поверхности  $S$  и для любых точек  $(x, y, z) \in S$  выпол-



На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



234

Закрыть

няется неравенство  $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$ , то справедливо неравенство

$$\iint_S f(x, y, z) dS \leq \iint_S g(x, y, z) dS. \quad (10.31)$$

**Теорема 10.9.** Пусть функции  $f(x, y, z)$ ,  $g(x, y, z)$  интегрируемы по поверхности  $S$  и  $g(x, y, z) \geq 0$  для любых точек  $(x, y, z) \in S$ , а  $\inf_{M(x,y,z) \in S} f(x, y, z) = m$  и  $\sup_{M(x,y,z) \in S} f(x, y, z) = M$ . Тогда справедливо

двойное неравенство

$$m \iint_S g(x, y, z) dS \leq \iint_S g(x, y, z) f(x, y, z) dS \leq M \iint_S g(x, y, z) dS, \quad (10.32)$$

в частности,

$$m |S| \leq \iint_S f(x, y, z) dS \leq M |S|. \quad (10.33)$$

Если, кроме того, функция  $f(x, y, z)$  непрерывна на поверхности  $S$ , то существует точка  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , что справедливо равенство (теорема о среднем)

$$\iint_S f(x, y, z) g(x, y, z) dS = f(M_0) \iint_S g(x, y, z) dS. \quad (10.34)$$



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



235

Закреть

**Замечание 10.4.** Если функции  $f(x, y, z)$  и  $g(x, y, z)$  интегрируемы по поверхности  $S$ , то будет интегрируемой по поверхности  $S$  функция, равная произведению функций  $f(x, y, z)$  и  $g(x, y, z)$ .

**Замечание 10.5.** При доказательстве свойств 1)–7) используется определение поверхностного интеграла первого рода и теоремы 10.1 и 10.2 (в качестве упражнений доказать указанные свойства самостоятельно).

## 10.6 Некоторые приложения поверхностных интегралов первого рода

### 1. Масса материальной поверхности

Пусть поверхность  $S$  – конечная кусочно-гладкая материальная с поверхностной плотностью  $\rho(x, y, z)$ , где функция  $\rho(x, y, z)$  непрерывна на  $\bar{S} = S \cup \partial S$  (граница  $\partial S$  поверхности  $S$  также кусочно-гладкая).

Используется метод интеграла, аналогичный, как и для одномерных и многомерных интегралов Римана, а также криволинейных интегралов первого рода, находим в нашем случае элемент массы

$$dm_s = \rho(x, y, z)dS. \quad (10.35)$$



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



236

Закреть

Тогда масса нашей поверхности  $S$  вычисляется по формуле

$$m_s = \iint_S \rho(x, y, z) dS. \quad (10.36)$$

**Пример 10.5.** Найти массу части цилиндра  $x^2 + z^2 = 2az$ , лежащей внутри конуса  $x^2 + y^2 = z^2$ , если плотность  $\rho(x, y, z) = |y|$ .

◀ Изобразим эскиз рисунка 10.5 для нашей поверхности.

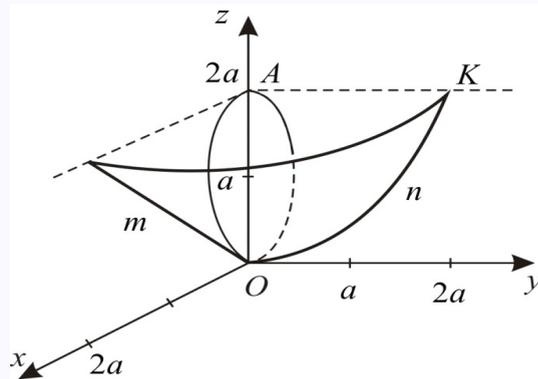


Рисунок 10.5

На рисунке 10.5 показана четверть указанной поверхности –  $AmOnK$ . Массу поверхности  $S$  вычисляем по формуле

$$2 \iint_S y dS. \quad (10.37)$$



Кафедра  
вышэйшай  
матэматыкі

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



237

Закреть

Цилиндрическую поверхность представим параметрически:

$$z = a(1 + \sin t), \quad x = a \cos t, \quad y = h, \quad \text{где } h \geq 0.$$

Верхнюю оценку для  $h$  находим из неравенства  $y^2 \leq z^2 - x^2$ , так наша цилиндрическая поверхность находится внутри конуса. Имеем:

$$\begin{aligned} h^2 &\leq a^2 (1 + \sin t)^2 - a^2 \cos^2 t = a^2 (1 + 2 \sin t + \sin^2 t) - a^2 \cos^2 t = \\ &= 2a^2 \sin t \cdot (1 + \sin t), \quad h \leq a \sqrt{2 \sin t \cdot (1 + \sin t)}. \end{aligned}$$

Видно, что  $\sin t \geq 0$ , то есть  $0 \leq t \leq \pi$ , а  $h \in [0, a \sqrt{2 \sin t \cdot (1 + \sin t)}]$ .

Тогда вектор-функция, определяющая параметрическое задание поверхности  $S$

$$\vec{r}(t, h) = (a \cos t, h, a(1 + \sin t)); \quad \vec{r}'_t = (-a \sin t, 0, a \cos t); \quad \vec{r}'_h = (0, 1, 0).$$

$$\text{Находим } g_{11} = (\vec{r}'_t, \vec{r}'_t) = a^2; \quad g_{22} = (\vec{r}'_h, \vec{r}'_h) = 1; \quad g_{12} = (\vec{r}'_t, \vec{r}'_h) = 0.$$

$$\text{Тогда } ds = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} dt dh = a dt dh.$$

$$\begin{aligned} m_s &= 2 \iint_s y ds = 2a \int_0^\pi \int_0^{a \sqrt{2 \sin t \cdot (1 + \sin t)}} h dh = \\ &= 2a^3 \int_0^\pi \left( \sin t + \frac{1 - \cos 2t}{2} \right) dt = 2a^3 \left( -\cos t \Big|_0^\pi + \frac{\pi}{2} \right) = \end{aligned}$$



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



238

Закреть

$$= 2a^3 \left( 2 + \frac{\pi}{2} \right) = a^3 (4 + \pi) \text{ (ед. массы).}$$

**Ответ:**  $m_s = a^3 (4 + \pi)$  (ед. массы).▶

## 2. Статические моменты конечной материальной кусочно-гладкой поверхности относительно координатных плоскостей

Также методом интегралов находим соответствующие формулы для статических моментов

$$M_{z=0} = \iint_s z g(x, y, z) ds, \quad (10.38)$$

$$M_{x=0} = \iint_s x g(x, y, z) ds, \quad (10.39)$$

$$M_{y=0} = \iint_s y g(x, y, z) ds. \quad (10.40)$$

## 3. Центры масс материальной конечной кусочно-гладкой поверхности

Пусть точка  $M(x_c, y_c, z_c) \in \mathbb{R}^3$  – центр тяжести конечной материальной кусочно-гладкой поверхности  $S$  с плотностью  $\rho(x, y, z) \in C(S)$ .



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



239

Закреть

Тогда

$$x_c = \frac{\iint_s x \rho(x, y, z) ds}{\iint_s \rho(x, y, z) ds}, \quad (10.41)$$

$$y_c = \frac{\iint_s y \rho(x, y, z) ds}{\iint_s \rho(x, y, z) ds}, \quad (10.42)$$

$$z_c = \frac{\iint_s z \rho(x, y, z) ds}{\iint_s \rho(x, y, z) ds}. \quad (10.43)$$

**Пример 10.6.** Найти координаты центра масс однородной сферы ( $\rho = 1$ )  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$ .

◀ Изобразим эскиз рисунка нашей поверхности (рисунок 10.6).

Из геометрических соображений и однородности поверхности  $S$  следует, что координаты искомого центра масс (точки  $M(x_c, y_c, z_c)$ ) равны между собой, то есть  $x_c = y_c = z_c$ . Находим, например,

$$z_c = \frac{\iint_s z ds}{\iint_s ds}. \quad (10.44)$$



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



240

Закреть

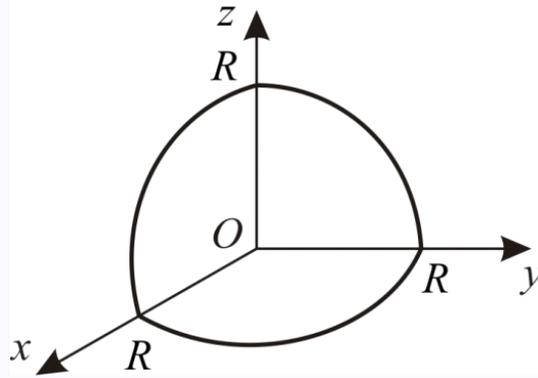


Рисунок 10.6

Видно, что масса поверхности  $S$  численно равна площади этой поверхности, то есть

$$m_s = \iint_s ds = \frac{\pi R^2}{2}. \quad (10.45)$$

Находим поверхностный интеграл

$$\iint_s z ds = \left[ \begin{array}{l} z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \\ z'_x = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \\ z'_y = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \end{array} \right] \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} =$$



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



241

Закреть

$$= \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} =$$

$$= R \iint_G dx dy = R \frac{\pi R^2}{4} = \frac{\pi R^3}{4}.$$

Тогда

$$z_c = \frac{\frac{\pi R^3}{4}}{\frac{\pi R^2}{2}} = \frac{R}{2}.$$

**Ответ:**  $M \left( \frac{R}{2}, \frac{R}{2}, \frac{R}{2} \right)$ . ▶

#### 4. Момент инерции конечной материальной кусочно-гладкой поверхности относительно координатных плоскостей и координатных осей

Применяя метод интеграла, получаем следующие искомые формулы для момента инерции.

$$I_{x=0} = \iint_s x^2 \rho(x, y, z) ds, \quad (10.46)$$



*Кафедра  
высшай  
матэматыкі*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



242

Закреть

$$I_{y=0} = \iint_s y^2 \rho(x, y, z) ds, \quad (10.47)$$

$$I_{z=0} = \iint_s z^2 \rho(x, y, z) ds, \quad (10.48)$$

$$I_{Ox} = \iint_s (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) ds, \quad (10.49)$$

$$I_{Oy} = \iint_s (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) ds, \quad (10.50)$$

$$I_{Oz} = \iint_s (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) ds. \quad (10.51)$$

**Пример 10.7.** Вычислить моменты инерции относительно координатных плоскостей однородной ( $\rho = \text{const}$ ) поверхности  $x + y + z = 1$ , расположенной в первом октанте.

◀ Начертим эскиз рисунка 10.7 поверхности

При условии однородности материальной поверхности и из геометрических соображений (рисунок 10.7) заключаем, что  $I_{z=0} = I_{y=0} = I_{x=0}$ .



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



243

Закреть

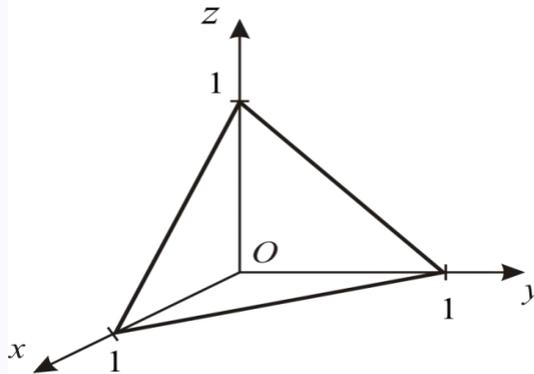


Рисунок 10.7

Вычисляем

$$\begin{aligned}
 I_{z=0} &= \iint_s z^2 ds = \left[ \begin{array}{l} z = 1 - x - y, \\ z'_x = z'_y = -1 \end{array} \middle| \sqrt{z'^2_x + z'^2_y + 1} = \sqrt{3} \right] = \\
 &= \iint_G (1 - x - y)^2 \sqrt{3} dx dy,
 \end{aligned}$$

где  $G$  – область-треугольник (рисунок 10.8).

Тогда

$$I_{z=0} = -\sqrt{3} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1 - x - y)^2 d(1 - x - y) =$$



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



244

Закреть

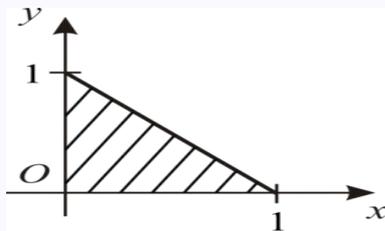


Рисунок 10.8

$$\begin{aligned}
 &= -\sqrt{3} \int_0^1 \frac{(1-x-y)^3}{3} \Big|_0^{1-x} dx = \\
 &= -\frac{\sqrt{3}}{3} \int_0^1 (1-x)^3 d(1-x) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{(1-x)^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{12}.
 \end{aligned}$$

**Ответ:**  $I_{z=0} = I_{x=0} = I_{y=0} = \frac{\sqrt{3}}{12}$ . ►



*Кафедра  
высшай  
матэматыкі*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



245

Закреть

# ЛЕКЦИЯ 11

## Поверхностные интегралы второго рода

### 11.1 Двусторонние и односторонние поверхности в $\mathbb{R}^3$

**Определение 11.1.** Гладкая поверхность  $S \subset \mathbb{R}^3$  называется **двусторонней**, если обход по любому замкнутому контуру  $L \subset S$  (лежащему на поверхности  $S$  и не имеющему общих точек с  $\partial S$  – границей поверхности  $S$ ) не меняет направления нормами к поверхности, в противном случае поверхность называется **односторонней**.

Примерами двусторонних поверхностей будут плоскость или любая ее часть, сфера, конус и многие другие поверхности. Односторонней поверхностью будет так называемый лист Мебиуса.

Если поверхность  $S$  двухсторонняя, то существуют две непрерывные вектор-функции  $\vec{n}_1(M)$  и  $\vec{n}_2(M)$  (и только), определенные на поверхности  $S$  и удовлетворяющие следующим условиям: 1) для любой точки  $M(x, y, z) \in S$  будет  $|\vec{n}_1(M)| = |\vec{n}_2(M)|$ ; 2) направления векторов  $\vec{n}_1(M)$  и  $\vec{n}_2(M)$  в любой точке  $M \in S$  противоположны; 3) в любой точке  $M \in S$  вектора  $\vec{n}_1(M)$  и  $\vec{n}_2(M)$  нормальны к поверхности  $S$ , то есть перпендикулярны к плоскости, касательной к поверхности в точке  $M$ . Любая из вектор-функций  $\vec{n}_1(M)$  и  $\vec{n}_2(M)$  образует так называемое непрерывное поле нормалей на поверхности  $S$ . Выбор на поверхности  $S$



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



246

Закреть

определенной из функций  $\vec{n}_1(M)$  и  $\vec{n}_2(M)$  (определенного непрерывного поля нормалей) называется **выбором стороны поверхности**  $S$ . Для односторонней поверхности нельзя построить непрерывное поле нормалей этой поверхности.

**Примеры:** 1. Пусть двусторонняя поверхность  $S$  есть график функции  $z = f(x, y)$ . В этом случае верхней стороной этой поверхности считаем ту ее сторону, что  $\cos(\vec{n}, Oz) > 0$ , а нижний –  $\cos(\vec{n}, Oz) < 0$ , где  $\vec{n}$  – единичный вектор нормали к поверхности  $S$ .

2. Пусть двусторонняя поверхность  $S$  – замкнутая (сфера, эллипсоид и т.д.). Если вектора непрерывного поля нормалей к поверхности  $S$  направлены внутрь объема, ограниченного этой поверхностью, то соответствующая сторона поверхности называется **внутренней**, в противном случае – **внешней** стороной поверхности.

**Определение 11.2.** *Двусторонняя поверхность называется **ориентируемой**, а выбор определенной стороны поверхности – **ориентацией**. Односторонние поверхности называются **неориентируемыми**.*

Далее рассмотрим такое понятие, как ориентация границы  $\partial S$  двусторонней поверхности  $S$ .

Пусть  $L$  – контур, входящий в состав  $\partial S$  – границы двусторонней поверхности  $S$ ;  $\vec{n}$  – единичный вектор нормали к поверхности  $S$  в точке



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



247

Закреть

$M \in L$ ;  $\vec{v}$  – вектор, нормальной к  $L$  и к  $\vec{n}$ , направим вектор  $\vec{v}$  в ту сторону, где расположена поверхность  $S$ . Положительное направление обхода контура  $L$  указывает вектор  $[\vec{v}, \vec{n}]$  (векторное произведение вектора  $\vec{v}$  на вектор  $\vec{n}$ ). Противоположное направление отрицательное (рисунок 11.1).

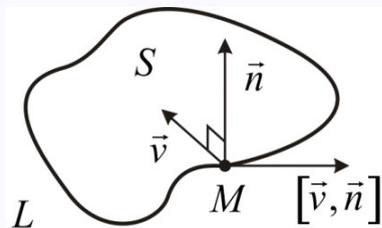


Рисунок 11.1

Если взята правая система координат и  $L$  – любой замкнутый контур (граница двусторонней поверхности  $S$ ), то направление обхода контура  $L$ , согласованное с ориентацией поверхности  $S$ , считаем то, при котором поверхность  $S$  остается слева.

## 11.2 Задача, приводящая к понятию поверхностного интеграла второго рода

**Задача.** О количестве жидкости, протекающей через замкнутую поверхность.

◀ Найти количество жидкости  $\Pi$ , протекающей через некоторую ори-



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



248

Закреть

ентированную поверхность  $S$  (двустороннюю гладкую) за единицу времени. Плотность жидкости  $\rho(x, y, z) = 1$ ; скорость ее протекания есть вектор-функция  $\vec{v}(P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$  в точке  $M(x, y, z) \in S$ .

Для наглядности изобразим эскиз рисунка (рисунок 11.2).

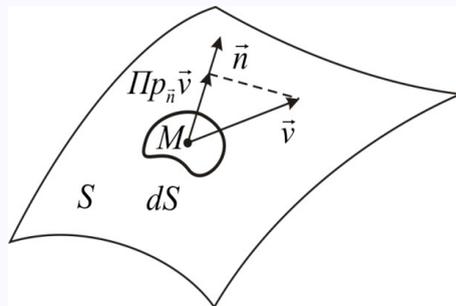


Рисунок 11.2

Обозначим через  $\vec{n} = \cos(\vec{n}, \hat{Ox})\vec{i} + \cos(\vec{n}, \hat{Oy})\vec{j} + \cos(\vec{n}, \hat{Oz})\vec{k}$  – единичный вектор нормали к поверхности  $S$  в текущей точке  $M \in S$ . А через  $dS$  обозначим площадь бесконечно малого элемента поверхности  $S$ , содержащего точку  $M(x, y, z)$ . Найдем проекции скорости  $\vec{v}$  на направление вектора  $\vec{n}$  – это

$$\text{Pr}_{\vec{n}}\vec{v} = |\vec{v}| \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{v}}) = |\vec{v}| \cdot |\vec{n}| \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{v}}) =$$



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



249

Закреть

$$= P(x, y, z) \cos(\vec{n}, \hat{Ox}) + Q(x, y, z) \cos(\vec{n}, \hat{Oy}) + R(x, y, z) \cos(\vec{n}, \hat{Oz}). \quad (11.1)$$

Тогда количество жидкости, протекающей за единицу времени через элемент площади  $dS$  будет

$$d\Pi = p_{\vec{n}} \vec{v} \cdot dS \cdot \rho = (\vec{v}, \vec{n}) dS, \quad (11.2)$$

где  $d$  – элемент потока для вектор-функции  $\vec{v}(P, Q, R)$ . Используя метод интеграла, получим формулу для вычисления всего потока:

$$\begin{aligned} \Pi &= \iint_s (\vec{v}, \vec{n}) dS = \\ &= \iint_s (P \cos(\vec{n}, \hat{Ox}) + Q \cos(\vec{n}, \hat{Oy}) + R \cos(\vec{n}, \hat{Oz})) dS = \\ &= \iint_S f(x, y, z) dS. \end{aligned} \quad (11.3)$$

Интеграл (11.3) есть поверхностный интеграл первого рода с той особенностью, что подынтегральная функция

$$f(x, y, z) = P \cos(\vec{n}, \hat{Ox}) + Q \cos(\vec{n}, \hat{Oy}) + R \cos(\vec{n}, \hat{Oz}) \quad (11.4)$$



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



250

Закреть

зависит не только от вектора-функции  $\vec{v}(P, Q, R)$ , но и от направления нормали к поверхности  $S$ . Такие интегралы называют **поверхностными интегралами второго рода**.►

### 11.3 Понятие поверхностного интеграла второго рода

Отвлечёмся от конкретного содержания предыдущей задачи. Пусть дана двусторонняя поверхность  $S$ . Выберем одну из ее сторон, то есть из двух непрерывных полей нормалей  $\vec{n}(M)$ , где  $M$  – текущая точка поверхности  $S$ . Пусть вектор-функция  $\vec{F}(P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$  определена на поверхности  $S$  (на выбранной стороне поверхности  $S$ ). Обозначим через

$$\text{Пр}_{\vec{n}}\vec{F} = P \cos(\vec{n}, \hat{Ox}) + Q \cos(\vec{n}, \hat{Oy}) + R \cos(\vec{n}, \hat{Oz}) \quad (11.5)$$

проекцию вектора  $\vec{F}$  на направление нормали  $\vec{n}(M)$ , где  $\cos(\vec{n}, \hat{Ox})$ ,  $\cos(\vec{n}, \hat{Oy})$ ,  $\cos(\vec{n}, \hat{Oz})$  – направляющие косинусы (координаты единичного вектора нормали  $\vec{n}(M)$  по соответствующим координатным осям). Кроме того, учтем, что  $\cos(\vec{n}, \hat{Ox})ds$ ,  $\cos(\vec{n}, \hat{Oy})ds$ ,  $\cos(\vec{n}, \hat{Oz})ds$  – это проекции элемента площади  $dS$  поверхности  $S$  на соответствующие координатные плоскости, то есть это будет соответственно  $dydz$ ,  $dzdx$ ,



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



251

Закреть

$dx dy$ . Тогда поверхностный интеграл (11.3) примет вид

$$\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdx dy \quad (11.6)$$

и будет называться полным поверхностным интегралом второго рода от вектор-функции  $\vec{F}(P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$  по выбранной стороне поверхности  $S$ . Если выбранную сторону поверхности  $S$  поменять, то знак значения интеграла (11.6) изменится на противоположный.

**Замечание 11.1.** Поверхностные интегралы второго рода можно определить и другим способом, а именно – через интегральные суммы. Не теряя общности, рассмотрим понятие неполного поверхностного интеграла, используя метод интегральных сумм.

Пусть функция  $u = f(x, y, z)$  определена на гладкой двусторонней конечной поверхности  $S$  (на определенной ее стороне) с кусочно-гладкой границей  $\partial S$ . Пусть также проекцией (однозначной) на плоскость  $xOy$  поверхности  $S$  (в этом случае графика некоторой функции  $z = z(x, y)$ ) будет область  $G$  с кусочно-гладкой границей  $\partial G$ .

Возьмем любое разбиение  $\tau_S$  поверхности  $S$  на  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , частичных поверхностей  $S_k$ ,  $k = 1, n$ , без общих внутренних точек системой из  $m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , кусочно-гладких кривых  $L_i$ ,  $i = 1, m$ . Этому разбиению соответствует разбиение области  $G$  на  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , частичных областей



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



252

Закреть

$G_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ , без общих внутренних точек ( $G_k$  – ортогональные проекции частичных поверхностей  $S_k$  на плоскость  $z = 0$ ). Произвольно выбираем точки  $M_k(x_k, y_k, z_k) \in \overline{S}_k$ , где  $\overline{S}_k = S_k \cup \partial S_k$ . Составляем интегральную сумму

$$\sigma_\tau(f(x, y, z), M_k) = \sum_{k=1}^n f(M_k) \Delta S_k, \quad (11.7)$$

где  $\Delta S_k$  – площадь частичной поверхности  $S_k$ . Обозначим через  $\lambda_\tau$  максимальный из диаметров  $d_k$  частичных поверхностей  $S_k$  ( $d_k = \left( \sup_{A_k, B_k \in S_k} \rho(A_k, B_k) \right)$ ).

**Определение 11.3.** Если существует конечный

$$\lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} \sigma_\tau(f(x, y, z), M_k) \quad (11.8)$$

и этот предел не зависит от разбиения  $\tau_S$  и выбора точек  $M_k \in \overline{S}_k$ , то он называется **неполным поверхностным интегралом** функции  $f(x, y, z)$  по выбранной стороне поверхности  $S$  и обозначается

$$\iint_S f(x, y, z) dS. \quad (11.9)$$



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



253

Закреть

## 11.4 Существование и вычисление поверхностного интеграла второго рода

**Теорема 11.1.** Пусть функция  $u = f(x, y, z)$  определена и непрерывна на замыкании гладкой двусторонней поверхности  $S$  – графика функции  $z = z(x, y)$ , которая определена в области  $G$  с кусочно-гладкой границей  $\partial G$ . Тогда существует поверхностный интеграл второго рода, равный двойному, то есть

$$\iint_S f(x, y, z) dx dy = \iint_G f(x, y, z(x, y)) dx dy \quad (11.10)$$

по верхней стороне поверхности  $S$  и

$$\iint_S f(x, y, z) dx dy = - \iint_G f(x, y, z(x, y)) dx dy \quad (11.11)$$

по нижней стороне поверхности  $S$ .

◀ Поверхностный интеграл второго рода правой части (11.10) можно представить следующим образом

$$\iint_S f(x, y, z) dx dy = \iint_S f(x, y, z) \cos(\vec{n}, \hat{Oz}) ds. \quad (11.12)$$



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



254

Закреть

Правая часть (11.12) есть поверхностный интеграл первого рода. По теореме 10.1 (поверхностные интегралы первого рода)

$$\begin{aligned} \iint_S f(x, y, z) \cos(\vec{n}, \hat{Oz}) dS &= \iint_G f(x, y, z(x, y)) \cos(\vec{n}, \hat{Oz}) \frac{dxdy}{\cos(\vec{n}, \hat{Oz})} = \\ &= \iint_G f(x, y, z(x, y)) dxdy \end{aligned}$$

( $dxdy$  есть проекция  $dS$  на плоскость  $z = 0$ , т.е.  $dxdy = dS \cdot \cos(\vec{n}, \hat{Oz})$ ).

Аналогично будет справедлива и формула (11.11). ►

**Замечание 11.2.** При соответствующих условиях, аналогичных условиям теоремы 11.1, будут справедливы следующие формулы (по верхней стороне поверхности)

$$\iint_S f(x, y, z) dxdz = \iint_G f(x, y(x, z), z) dxdz, \quad (11.13)$$

$$\iint_S f(x, y, z) dydz = \iint_G f(x(y, z), y, z) dydz \quad (11.14)$$

(по нижней стороне поверхности знак в правых частях (11.13) и (11.14) будет «минус»).



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



255

Закреть

**Пример 11.1.** Вычислить поверхностный интеграл второго рода

$$\iint_S (ax^2 + by^2 + bz^2) dydz, \quad (11.15)$$

где  $S$  – внутренняя сторона (нижняя) части полусферы

$$x = \sqrt{R^2 - y^2 - z^2},$$

вырезанной конусом

$$x = \sqrt{y^2 + z^2}.$$

◀ Изобразим эскиз рисунка нашей поверхности (рисунок 11.3).

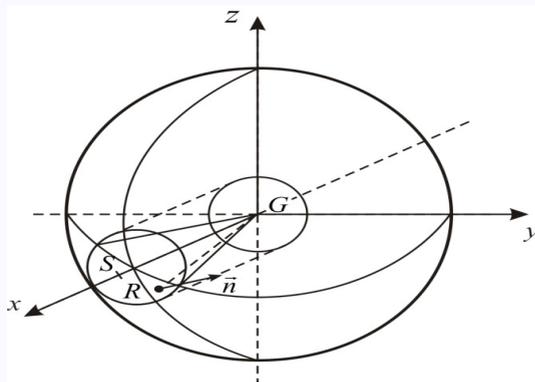


Рисунок 11.3



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



256

Закреть

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} x = \sqrt{R^2 - y^2 - z^2}, \\ x = \sqrt{y^2 + z^2}, \end{cases}$$

находим границу поверхности  $S$  на плоскость  $x = 0$ . Это будет окружность

$$y^2 + z^2 = \left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

Имеем  $\cos(\vec{n}, \hat{Ox}) < 0$  (угол между единичным вектором нормали  $\vec{n}$  и осью  $Ox$  – тупой). Тогда

$$\iint_S (ax^2 + by^2 + bz^2) dydz = - \iint_G (a(R^2 - y^2 - z^2) + by^2 + bz^2) dydz = I.$$

В двойном интеграле  $I$  переходим к полярным координатам

$$I = - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R/\sqrt{2}} r(aR^2 + (b-a)r^2) dr = -\frac{\pi R^4}{8}(b+3a).$$

**Ответ:**  $I = -\frac{\pi R^4}{8}(b+3a)$ . ►



*Кафедра  
высшай  
матэматыкі*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



257

Закреть

## 11.5 Два способа вычисления потока

**Пример 11.2.** Вычислить поток векторного поля

$$\vec{F} = (x - 2z)\vec{i} + (x + 3y + z)\vec{j} + (5x + y)\vec{k}$$

через сторону треугольника  $\sigma$ , вырезанного из плоскости  $(P)$ :

$$x + y + z - 1 = 0$$

координатными плоскостями, в том направлении нормали к плоскости, которая образует с осью  $Oz$  острый угол.

◀ Отвлекаясь от конкретного содержания задачи о вычислении потока жидкости через поверхность, но используя формулу (11.3), по которой этой поток вычисляется (заменяем в указанной формуле вектор-функцию  $\vec{v}$  на  $\vec{F}$ ),

$$\Pi = \iint_S (\vec{F}, \vec{n}) dS,$$

мы приходим к абстрактному понятию потока для вектор-функции. По этой формуле мы и будем вычислять искомый поток.

**1. Вычисление потока методом проектирования на одну из координатных плоскостей**



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



258

Закреть

Уравнение поверхности  $S$  – это  $P(x, y, z) = 0$ , конкретно:

$$x + y + z - 1 = 0.$$

Градиентом скалярного поля  $P$  будет вектор:

$$\overrightarrow{\text{grad}} P = (P'_x, P'_y, P'_z) = (1, 1, 1).$$

Градиент есть вектор, перпендикулярный поверхности  $u = P(x, y, z)$ . Зная это, найдем единичный вектор  $\vec{n}$  нормали к нашей поверхности, удовлетворяющий условию  $\cos(\vec{n}, \hat{Oz}) > 0$ .

$$\vec{n} = \pm \frac{P'_x \vec{i} + P'_y \vec{j} + P'_z \vec{k}}{|\text{grad } P|} = \pm \frac{\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{3}}. \quad (11.16)$$

Из формулы (11.16) и условия  $\cos(\vec{n}, \hat{Oz}) > 0$  находим, что

$$\vec{n} = \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

Вектор-функция

$$\vec{F} = (x - 2z, x + 3y + z, 5x + y), \quad \cos(\vec{n}, \hat{Oz}) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$



*Кафедра  
высшай  
матэматыкі*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



259

Закреть

Находим скалярное произведение  $(\vec{F}, \vec{n})$  при условии, что поверхность  $S = P$  проектируется на плоскость  $z = 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} (\vec{F}, \vec{n}) &= ((x - 2z) + (x + 3y + z) + (5x + y)) \frac{1}{\sqrt{3}} \Big|_{z=1-x-y} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} (7x - z + 4y) \Big|_{z=1-x-y} = \frac{1}{\sqrt{3}} (8x + 5y - 1). \end{aligned} \quad (11.17)$$

Кроме того, знаем, что  $dS = \frac{dxdy}{\cos(\vec{n}, \hat{Oz})} = \sqrt{3}dxdy$ . Тогда

$$\Pi = \iint_S (\vec{F}, \vec{n}) dS = \iint_G (8x + 5y - 1) dxdy. \quad (11.18)$$

Изобразим на рисунке область интегрирования  $G$  (рисунок 11.4) для двойного интеграла (правая часть (11.18)).

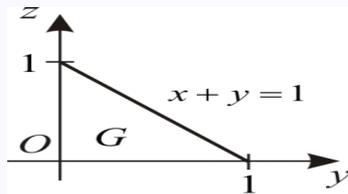


Рисунок 11.4



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



260

Закреть

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (8x + 5y - 1) dy = \frac{5}{3}.$$

Ответ:  $\Pi = \frac{5}{3}$ .

## 2. Вычисление потока векторного поля методом проектирования на три координатные плоскости

Рассмотрим предыдущую задачу. Наша поверхность образует острые углы всеми координатными осями. Тогда (теорема 11.1)

$$\begin{aligned} &= \iint_{(S)} (\vec{F}, \vec{n}) dS = \iint_S P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dx dy = \\ &= \iint_{G_{yOz}} P(x(y, z), y, z) dydz + \iint_{G_{xOz}} Q(x, y(x, z), z) dx dz + \\ &\quad + \iint_{G_{xOy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy = \\ &= \left[ \begin{array}{l} x + y + z - 1 = 0, \\ x(y, z) = 1 - y - z, \end{array} \left| \begin{array}{l} y(x, z) = 1 - x - z, \\ z(x, y) = 1 - x - y \end{array} \right. \right]. \end{aligned}$$

Изобразим эскизы рисунков областей интегрирования для двойных интегралов (рисунки 11.5 – 11.5).



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



261

Закреть

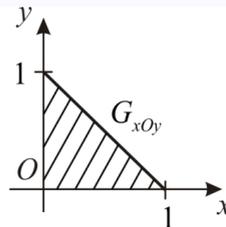
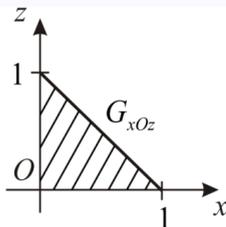
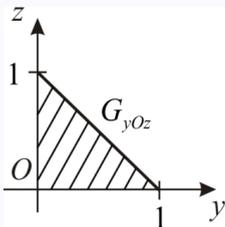


Рисунок 11.5

$$\begin{aligned}
 &= \iint_{G_{yOz}} (1 - y - 3z) dy dz + \iint_{G_{xOz}} (3 - 2x - 2z) dx dz + \iint_{G_{xOy}} (5x + y) dx dy = \\
 &= \int_0^1 dy \int_0^{1-y} (1 - y - 3z) dz + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (3 - 2x - 2z) dz + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (5x + y) dy = \frac{5}{3}.
 \end{aligned}$$

Ответ:  $\Pi = \frac{5}{3}$ . ▶

## 11.6 О существовании и вычислении поверхностного интеграла второго рода по поверхности, заданной параметрически

**Теорема 11.2.** Пусть гладкая двусторонняя поверхность  $S$  задана параметрическим уравнением  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ .



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



262

Закреть

Вектор-функция  $\vec{F} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$  определена и непрерывна на замыкании поверхности  $S$  с кусочно-гладкой границей  $\delta S$ , то есть  $\bar{S} = S \cup \delta S$ . Пусть также  $G$  – область изменения параметров  $u$  и  $v$  (граница  $\partial G$  – кусочно-гладкая), а  $q_{11}$ ,  $q_{22}$  и  $q_{12}$  – коэффициенты первой квадратичной формы поверхности, то есть

$$q_{11} = (\vec{r}'_u, \vec{r}'_u), \quad q_{22} = (\vec{r}'_v, \vec{r}'_v), \quad q_{12} = (\vec{r}'_u, \vec{r}'_v).$$

Тогда поверхностный интеграл второго рода

$$I = \iint_S P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dx dy$$

существует и справедлива формула

$$\begin{aligned} & \iint_S P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dx dy = \\ & = \iint \left( P \cos(\vec{n}, \hat{O}x) + Q \cos(\vec{n}, \hat{O}y) + R \cos(\vec{n}, \hat{O}z) \right) \sqrt{q_{11}q_{22} - q_{12}^2} du dv. \end{aligned} \quad (11.19)$$

**Замечание 11.3.** Если ввести обозначение

$$A = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad (11.20)$$



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



263

Закреть

то

$$\sqrt{q_{11}q_{22} - q_{12}^2} = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \quad (11.21)$$

и

$$\begin{aligned} \cos(\vec{n}, \hat{O}x) &= \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \quad \cos(\vec{n}, \hat{O}y) = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \\ \cos(\vec{n}, \hat{O}z) &= \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \end{aligned} \quad (11.22)$$

Тогда формула (11.19) примет вид

$$\begin{aligned} \iint_S P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dx dy = \\ = \iiint_G (PA + QB + RC) dudv, \end{aligned} \quad (11.23)$$

где

$$P = P(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \quad (11.24)$$

и аналогично  $Q$  и  $R$ .

**Пример 11.3.** Вычислить интеграл

$$\iiint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy, \quad (11.25)$$



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



264

Закреть



Изобразим эскиз рисунка (рисунок 11.7) области интегрирования  $G$  для двойного интеграла формулы (правой ее части) (11.23)

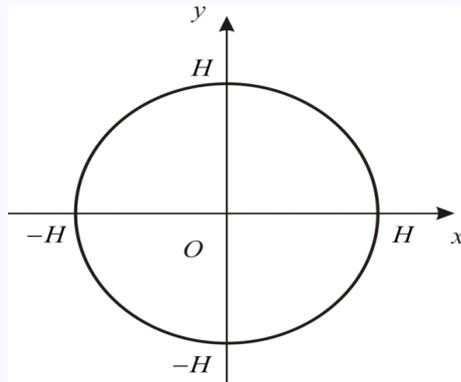


Рисунок 11.7

Будем иметь:

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy = \\
 &= \iint_G (v^2 \cos^2 u \cdot v \cos u + v^2 \sin^2 u \cdot v \sin u - v^3) dudv = \\
 &= \int_0^{2\pi} (\cos^3 u + \sin^3 u - 1) du = \int_0^H v^3 dv =
 \end{aligned}$$



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



266

Закреть

$$\begin{aligned}
 &= \frac{H^4}{4} \left( \int_0^{2\pi} (1 - \sin^2 u) d(\sin u) - \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2 u) d(\cos u) - 2\pi \right) = \\
 &= \frac{H^4}{4} (-2\pi) = -\frac{\pi H^4}{2}.
 \end{aligned}$$

Ответ:  $I = -\frac{\pi H^4}{2}$ . ▶

## 11.7 Формула Остроградского – Гаусса

В пункте 9.6 рассмотрена задача сведения криволинейного интеграла второго рода к двойному. Получена так называемая формула Грина. Сейчас мы докажем справедливость так называемой формулы Остроградского – Гаусса, которая заменяет поверхностный интеграл второго рода тройным интегралом.

**Определение 11.4.** Область  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  называем «*z-цилиндрической*», если она сверху и снизу ограничена кусочно-гладкими поверхностями  $S_2$  (графиком функции  $z = z_2(x, y)$ ) и  $S_1$  (графиком функции  $z = z_1(x, y)$ ) соответственно с кусочно-гладкими границами  $\partial S_2$  и  $\partial S_1$ , и боковой поверхности области  $\Omega$  есть цилиндрическая поверхность с образующими, параллельными оси  $Oz$ . Проекция  $\Omega$  на плоскость  $z = 0$  есть плоская область  $G$  с кусочно-гладкой границей  $\partial G$ .



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



267

Закреть

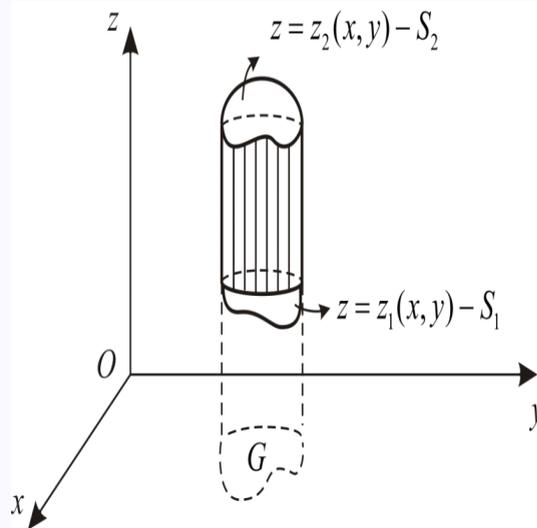


Рисунок 11.8

Изобразим эскиз рисунка области  $\Omega$  (рисунок 11.8).

**Теорема 11.3.** Пусть функция  $u = f(x, y, z)$  вместе со своей существующей частной производной  $\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z}$  определена и непрерывна на замыкании указанной выше « $z$ -области»  $\Omega$ , то есть на  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ .

Тогда справедливо равенство

$$\iint_{S=\partial\Omega} f(x, y, z) dx dy = \iiint_{\Omega} f'_z(x, y, z) dx dy dz. \quad (11.27)$$



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



268

Закреть

◀ Тройной интеграл (правая часть (11.27)) существует, так как функция  $f'_z(x, y, z) \in C(\bar{\Omega})$  (непрерывна на компакте  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ ). Также существует и неполный поверхностный интеграл (левая часть равенства (11.27)) (смотри теорему 10.1). Докажем равенство этих интегралов. В тройном интеграле переходим к повторному.

$$\begin{aligned}
 \iiint_{\Omega} f'_z(x, y, z) dx dy dz &= \iint_G dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f'_z(x, y, z) dz = \\
 &= \iint_G f(x, y, z) \Big|_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} dx dy = \iint_G (f(x, y, z_2(x, y)) - f(x, y, z_1(x, y))) dx dy = \\
 &= \iint_{S_2} f(x, y, z) ds + \iint_{S_1} f(x, y, z) ds + \iint_{S_3} f(x, y, z) ds = \\
 &= \iint_{S=\partial\Omega} f(x, y, z) dS, \tag{11.28}
 \end{aligned}$$

где  $S_3$  – цилиндрическая часть поверхности  $S = \partial\Omega$  области  $\Omega$ . Поверхностный интеграл функции  $f(x, y, z)$  по  $S_3$  равен нулю, так как плоская мера Лебега (площадь) проекции  $S_3$  ( $\text{Пр}_{z=0} S_3 = \partial G$ ) равна нулю. ▶



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



269

Закреть

**Замечание 11.4.** Аналогичные теоремы будут справедливы, если область  $\Omega$  будет « $x$ -цилиндрической» или « $y$ -цилиндрической». Тогда соответствующие формулы типа (11.27) для этих областей соответственно будут

$$\iint_S f(x, y, z) dx dy = \iiint_{\Omega} f'_x(x, y, z) dx dy dz \quad (11.29)$$

и

$$\iint_S f(x, y, z) dx dy = \iiint_{\Omega} f'_y(x, y, z) dx dy dz. \quad (11.30)$$

**Определение 11.5.** Область  $\Omega$  с кусочно-гладкой границей  $\partial\Omega$  называется **простейшей**, если она представляет собой объединение конечного числа частичных областей без общих внутренних точек с кусочно-гладкими границами как « $z$ -областей», также « $x$ -областей» и « $y$ -областей». Простейшей областью будет любой многогранник (имеет конечное число граней – многоугольников).

Можно доказать, что любая область  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  с кусочно-гладкой границей  $\partial\Omega$  аппроксимируется (приближается) многогранными областями со сколь угодно высокой точностью. Тогда будет справедлива следующая теорема.



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



270

Закреть

**Теорема 11.4.** Пусть вектор-функция

$$\vec{F} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

и ее частные производные  $\frac{\partial P}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial y}$  и  $\frac{\partial R}{\partial z}$  определены и непрерывны на замыкании области  $\Omega = \mathbb{R}^3$  с кусочно-гладкой границей  $\partial\Omega = S$ . Тогда справедлива полная формула Остроградского – Гаусса

$$\begin{aligned} \iint_S P(x, y, z)dydz + Q(x, y, z)dzdx + R(x, y, z)dxdy = \\ = \iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz \end{aligned} \quad (11.31)$$

## 11.8 Формула Остроградского – Гаусса в векторной форме

**Определение 11.6.** Дивергенцией векторного поля

$$\vec{F} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)),$$

определённого на замыкание области  $\Omega = \mathbb{R}^3$  с кусочно-гладкой границей  $\partial\Omega = S$ , где функции  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$  и существующие их частные производные непрерывны на  $\bar{\Omega}$ , называется скаляр,



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



271

Закреть

обозначаемый  $\operatorname{div} \vec{F}$  и определяемый равенством

$$\operatorname{div} \vec{F} = \lim_{\mu V_{\Omega} \rightarrow \infty} \frac{\iint_S (\vec{F}, \vec{n}) ds}{\mu V_{\Omega}}, \quad (11.32)$$

где  $V_{\Omega}$  – объём области  $\Omega$ ;  $\iint_S (\vec{F}, \vec{n}) ds$  – поток вектор-функции  $\vec{F}$  через кусочно-гладкую границу  $\partial\Omega = S$ ;

$$\vec{n} = \left( \cos(\vec{n}, \hat{Ox}), \cos(\vec{n}, \hat{Oy}), \cos(\vec{n}, \hat{Oz}) \right) -$$

единичный вектор нормали к внешней стороне поверхности  $S$ .

**Замечание 11.5.** При указанных выше условиях

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \quad (11.33)$$

Укажем физический смысл дивергенции для некоторых векторных полей.

1. Пусть  $\vec{F}$  – поле скоростей несжимаемой жидкости, протекающей в некоторой области из  $\mathbb{R}^3$ . Тогда тройной интеграл  $\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz$  есть суммарная мощность источников, которые расположены в области  $\Omega$ , а



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



272

Закреть

$\operatorname{div} \vec{F}$  есть плотность источников (мощность на единицу объёма). Если в этом случае нет ни стоков, ни истоков, то  $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ , а векторное поле называется соленоидальным (трубчатым).

2. Дивергенция гравитационного поля в области  $\Omega$  распределённых масс равна объёмной плотности  $\rho(x, y, z)$ , умноженной на  $4\pi$ , этого распределения.

3. Пусть в области  $\Omega$  задано электростатическое поле  $\vec{F} = (P, Q, R)$ , тогда  $\operatorname{div} \vec{F}$  есть плотность зарядов поля, умноженная на  $4\pi$  (теорема Гаусса).

Запишем формулу Остроградского – Гаусса в векторной форме (условия теоремы 11.4 должны соблюдаться)

$$\iint_{S=\partial\Omega} (\vec{F}, \vec{n}) ds = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz. \quad (11.34)$$

**Пример 11.4.** С помощью формулы Остроградского – Гаусса вычислить поверхностный интеграл  $I = \iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$ , где  $S$  – внешняя сторона границы куба  $\bar{\Omega} = [0, a] \times [0, a] \times [0, a]$ ,  $a > 0$ .

◀ Для вычисления поверхностного интеграла используем формулу (11.31). У нас  $P(x, y, z) = x^2$ ;  $Q(x, y, z) = y^2$ ;  $R(x, y, z) = z^2$ . Тогда



$$\frac{\partial P}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = 2y; \quad \frac{\partial R}{\partial z} = 2z.$$

$$I = \iiint_{\Omega} (2x + 2y + 2z) dx dy dz = \int_0^a dz \int_0^a dy \int_0^a (2x + 2y + 2z) dx = 3a^4.$$

Ответ:  $I = 3a^4$ . ►

**Пример 11.5.** Вычислить поток векторного поля  $\vec{a} = x\vec{i} + 2y\vec{j} - z\vec{k}$  через замкнутую поверхность  $S$ :  $\begin{cases} z^2 = x^2 + y^2 \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}$  непосредственно и по формуле Остроградского – Гаусса.

◀ Изображаем эскиз рисунка (четверть части) поверхности  $S$  в первом октанте (рисунок 11.9) и области интегрирования (рисунок 11.9).

### 1. Непосредственное вычисление.

1. Поток через  $S_1$  внутреннюю поверхность конуса  $z^2 = x^2 + y^2$ .

Поток будем вычислять методом проектирования на одну плоскость  $z = 0$  (задача 11.2)  $F(x, y, z) = 0$ , где  $F(x, y, z) = z^2 - x^2 - y^2$  – скалярное поле. Находим  $\text{grad } \vec{F} = (-2x, -2y, 2z)$ . Очевидно, что единичный вектор  $\vec{n}$  нормали образует с осью  $Oz$  острый угол. Вектор  $\vec{n}$  определяем из равенства:

$$\vec{n} = \pm \frac{\text{grad } \vec{F}}{|\text{grad } \vec{F}|} = \pm \frac{-2x\vec{i} - 2y\vec{j} + 2z\vec{k}}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \pm \frac{-x\vec{i} - y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \quad (11.35)$$



На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



274

Закреть

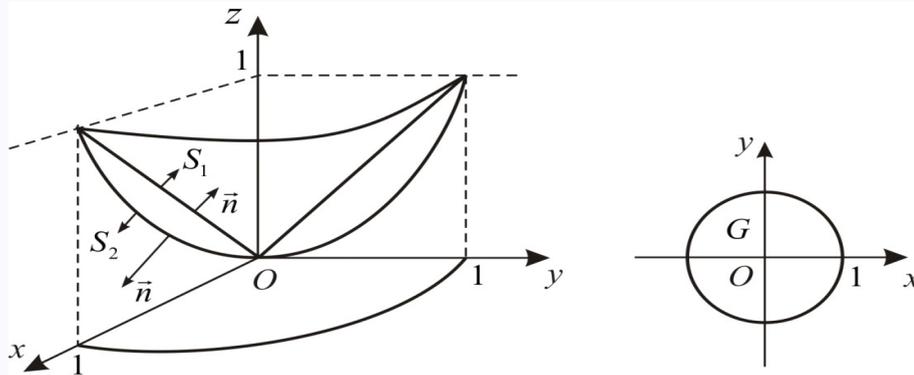


Рисунок 11.9

Из (11.35) и  $\cos(\vec{n}, \hat{Oz})$  получаем:

$$\vec{n} = \left( \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right). \quad (11.36)$$

Тогда

$$(\vec{a}, \vec{n}) = \frac{-x^2 - 2y^2 - z^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \text{ и } dS = \frac{dxdy}{\cos(\vec{n}, \hat{Oz})} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dxdy}{z}. \quad (11.37)$$



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



275

Закреть

Вычислим искомую часть потока через поверхность  $S_1$  ( $\text{Pr}_{z=0} S_1 = G$ ).

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \iint_{S_1} (\vec{a}, \vec{n}) dS = \iint_G (-2x^2 - 4y^2 - 2(x^2 + y^2)) \frac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \\ &= \iint_G \frac{-2x^2 - 3y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} dxdy. \end{aligned} \quad (11.38)$$

Для вычисления интеграла (11.38) (правая часть) переходим к полярным координатам.

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= - \iint_D \frac{2r^2 \cos^2 \varphi + 3r^2 \sin^2 \varphi}{r} r dr d\varphi = \\ &= - \iint_D \left( 2 + \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \right) r^2 dr d\varphi = \\ &= - \int_0^{2\pi} \left( \frac{5}{2} - \frac{\cos 2\varphi}{2} \right) d\varphi \int_0^1 r^2 dr = -\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{2} \cdot 2\pi = -\frac{5}{3}\pi. \end{aligned}$$

2. Поток через  $S_2$  – внешнюю поверхность параболы  $z = x^2 + y^2$ .



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



276

Закреть

Аналогично предыдущему имеем:

$$F(x, y, z) = z - x^2 - y^2, \quad F'_x(x, y, z) = -2x,$$

$$F'_y(x, y, z) = -2y, \quad F'_z(x, y, z) = 1,$$

$$\cos(\vec{n}, \hat{Oz}) < 0, \quad \vec{n} = \pm \frac{2x\vec{i} + 2y\vec{j} - 1 \cdot \vec{k}}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}; \quad \vec{n} = (2x, 2y, -1) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}};$$

$$dS = \frac{dxdy}{\cos(\vec{n}, \hat{Oz})} = -\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dxdy.$$

$$\Pi_2 = - \iint_G - (2x^2 + 4y^2 + x^2 + y^2) dxdy = \iint_G (3x^2 + 5y^2) dxdy =$$

$$= \iint_D (3r^2 \cos^2 \varphi + 5r^2 \sin^2 \varphi) r d\varphi dr =$$

$$= \int_0^{2\pi} (4 - \cos 2\varphi) d\varphi \int_0^1 r^3 dr = 4 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{4} = 2\pi.$$

Тогда весь поток  $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = -\frac{5}{3}\pi + 2\pi = \frac{\pi}{3}$ .

**2. Вычислим поток с помощью формулы Остроградского – Гаусса**



**Кафедра**  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



277

Закреть

Имеем векторное поле

$$\vec{a} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)),$$

где  $P = x$ ,  $Q = 2y$ ,  $R = -z$ .

Тогда

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = 2, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = -1, \quad \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 2.$$

$$\begin{aligned} \Pi &= \iiint_{\Omega} 2dx dy dz = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \int_0^1 r dr \int_{r^2}^r dz = \\ &= 4\pi \int_0^1 (r^2 - r^3) dr = 4\pi \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

**Ответ:**  $\Pi = \frac{\pi}{3}$ . ►

**Пример 11.6.** Вычислить поток векторного поля

$$\vec{a} = r\vec{e}_r - \cos \varphi \vec{e}_\varphi + z\vec{e}_z,$$

заданного в цилиндрических координатах, по замкнутой поверхности  $S$ , образованный цилиндром  $r = 2$  и плоскостями  $z = 2$  и  $z = 0$ .



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



278

Закреть

◀ Вычисление потока проведем по формуле Остроградского – Гаусса.

$$\Pi = \iint_{S=\partial\Omega} (\vec{a}, \vec{n}) dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{a}(x, y, z) dx dy dz. \quad (11.39)$$

Выразим дивергенцию векторного поля  $\vec{a}$  в цилиндрических координатах. В криволинейных координатах  $u, v, t$

$$\operatorname{div} \vec{a}(u, v, t) = \frac{1}{L_u L_v L_t} \left( \frac{\partial}{\partial u} (P L_v L_t) + \frac{\partial}{\partial v} (Q L_u L_t) + \frac{\partial}{\partial t} (R L_u L_v) \right);$$

$L_u L_v L_t$  – параметры (коэффициенты) Ламэ, (11.40)

причём

$$L_u = \sqrt{x_u'^2 + y_u'^2 + z_u'^2}, \quad L_v = \sqrt{x_v'^2 + y_v'^2 + z_v'^2}, \quad L_t = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}, \quad (11.41)$$

где

$$x = x(u, v, t) = x(r, \varphi, z) = r \cos \varphi; \quad y = y(u, v, t) = y(r, \varphi, z) = r \sin \varphi,$$

$$z = z(u, v, t) = z(r, \varphi, z) = z.$$

Тогда  $L_u = L_r = 1, L_v = L_\varphi = r, L_t = L_z = 1.$

$$\operatorname{div} \vec{a}(r, \varphi, z) = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot r \cdot 1) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (-\cos \varphi \cdot 1 \cdot 1) + \frac{\partial}{\partial z} (z \cdot 1 \cdot r) \right) =$$



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



279

Закреть

$$= \frac{1}{r} (3r + \sin \varphi) = 3 + \frac{\sin \varphi}{r}.$$

$$\begin{aligned} \Pi &= \iiint_{\Omega} (3r + \sin \varphi) dr d\varphi dz = \int_0^2 dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (3r + \sin \varphi) dr = \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \left( \frac{3}{2} r^2 + r \sin \varphi \right) \Big|_0^2 d\varphi = 2 \int_0^{2\pi} (6 + 2 \sin \varphi) d\varphi = 24\pi. \end{aligned}$$

**Ответ:**  $\Pi = 24\pi$ . ►

**Пример 11.7.** Найти поток векторного поля, заданного в сферических координатах,

$$\vec{a} = \rho^2 \vec{e}_\rho + R^2 \rho \sin \theta \cdot \cos \varphi \vec{e}_\varphi,$$

через замкнутую поверхность, ограниченную сферой  $\rho = R$  и координатными плоскостями  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , используя формулу Остроградского – Гаусса.

$$\blacktriangleleft \Pi = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{a}(x, y, z) dx dy dz = \iiint_G \rho^2 \sin \theta \operatorname{div} \vec{a}(\rho, \varphi, \theta) d\rho d\varphi d\theta =$$



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



280

Закреть

$$\begin{aligned}
&= [\operatorname{div} \vec{a}(\rho, \varphi, \theta) = \\
&= \frac{1}{L_\rho L_\varphi L_\theta} \left( \frac{\partial}{\partial \rho} (PL_\varphi L_\theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (QL_\rho L_\theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (RL_\rho L_\varphi) \right) = \\
&= \frac{1}{1 \cdot \rho \sin \theta \cdot \rho} \left( \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 \cdot \rho \sin \theta \cdot \rho) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (R^2 \rho \sin \theta \cdot \cos \varphi \cdot \rho) \right) = \\
&= \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} (4\rho^3 \sin \theta + R^2 \rho^2 \sin \theta (-\sin \varphi)) = 4\rho - R^2 \sin \varphi \Big] = \\
&= \iiint_G \rho^2 \sin \theta (4\rho - R^2 \sin \varphi) d\rho d\varphi d\theta = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R (4\rho^3 - \rho^2 R^2 \sin \varphi) d\rho = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \rho^4 - R^2 \frac{\rho^3}{3} \sin \varphi \right) \Big|_0^R d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( R^4 - \frac{R^5}{3} \sin \varphi \right) d\varphi = \\
&= R^4 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{R^5}{3} \cos \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi R^4}{2} - \frac{R^5}{3}.
\end{aligned}$$

Ответ:  $\Pi = \frac{\pi R^4}{2} - \frac{R^5}{3}$ . ►



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



281

Закреть

## 11.9 Вычисление объемов тел с помощью поверхностных интегралов второго рода

Указанная проблема решается аналогично тому, как с помощью криволинейных интегралов проводилось вычисление площадей плоских фигур. Знаем, что объем тела  $\Omega$  с кусочно-гладкой границей вычисляется по формуле

$$V_{\Omega} = \iiint_{\Omega} dx dy dz. \quad (11.42)$$

В формуле Остроградского – Гаусса

$$\begin{aligned} \iint_{S=\partial\Omega} (\vec{F}, \vec{n}) ds &= \iint_{S=\partial\Omega} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy = \\ &= \iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz \end{aligned} \quad (11.43)$$

подберем функции  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$  так, чтобы

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1. \quad (11.44)$$

Это, например, будет, если

$$P(x, y, z) = \frac{1}{3}x, \quad Q(x, y, z) = \frac{1}{3}y, \quad R(x, y, z) = \frac{1}{3}z.$$



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



282

Закреть

Тогда объем тела  $\Omega$  с кусочно-гладкой границей  $\partial\Omega$  будет

$$V_{\Omega} = \frac{1}{3} \left| \iint_{S=\partial\Omega} xdydz + ydxdz + zdxdy \right| = \frac{1}{3} \left| \iint_S (\vec{F}, \vec{n}) ds \right|. \quad (11.45)$$

**Пример 11.8.** Найти объем тела, ограниченного поверхностями  $z = 0$  и  $z = 1 - x^2 - y^2$ .

◀ Нарисуем эскиз рисунка (рисунок 11.10) тела в первом октанте (четвертая часть тела, симметричного относительно плоскостей  $x = 0$  и  $y = 0$ ). Для вычисления объема тела  $\Omega$  воспользуемся неполным поверхностным интегралом второго рода

$$V_{\Omega} = \iint_S z dx dy. \quad (11.46)$$

Очевидно, что поверхностный интеграл по  $S_1 : \begin{cases} z = 0, \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$  равен нулю. Находим поверхностный интеграл (11.46) по поверхности параболоида

$$S_1 : \begin{cases} z \geq 0, \\ z = 1 - x^2 - y^2. \end{cases}$$

$$V_{\Omega} = \iint_{S_2} z dx dy = 4 \iint_G (1 - x^2 - y^2) dx dy, \quad (11.47)$$



*Кафедра  
высшай  
матэматыкі*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



283

Закреть

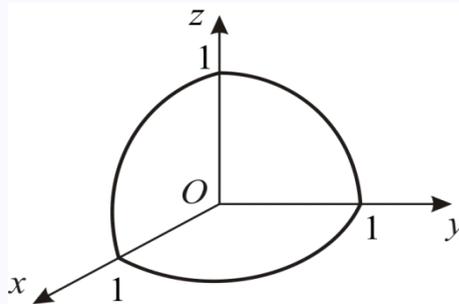


Рисунок 11.10

где  $G$  – четверть круга  $\begin{cases} z = 0, \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$  в первой четверти плоскости  $xOy$ .

При вычислении двойного интеграла (правая часть (11.47)) переходим к полярным координатам.

$$V_{\Omega} = 4 \iint_D (1 - r^2) r dr d\varphi = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 (r - r^3) dr = \frac{\pi}{2} \text{ (куб. ед).}$$

**Ответ:**  $V_{\Omega} = \frac{\pi}{2}$ . ►

## 11.10 Формула Стокса

Пусть дано векторное поле  $\vec{a} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$  в односвязной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  с кусочно-гладкой границей  $\partial G$  (область  $\Omega$



*Кафедра  
высшай  
матэматыкі*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



284

Закреть

называется **односвязной**, если для любой кусочно-гладкой замкнутой поверхности  $S \subset \Omega$  внутренность этой поверхности есть подмножество  $\Omega$ ). Потребуем, чтобы функции  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$  и существующие их частные производные были непрерывны на  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$  (на замыкании  $\Omega$ ).

Пусть дана любая кусочно-гладкая замкнутая кривая  $L \subset \Omega$ , положительно ориентированная (при обходе кривой  $L$  против часовой стрелки).

**Определение 11.7.** *Криволинейный интеграл второго рода*

$$\oint_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz \quad (11.48)$$

называется *циркуляцией векторного поля*

$$\vec{a} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)dz)$$

вдоль кривой  $L$ , то есть

$$\Pi = \oint_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz \quad (11.49)$$

или в векторной форме

$$\Pi = \oint_L (\vec{a}, d\vec{r}), \quad (11.50)$$



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



285

Закреть

где

$$d\vec{r} = (dx, dy, dz). \quad (11.51)$$

**Пример 11.9.** Найти циркуляцию векторного поля  $\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j} + z\vec{k}$  по контуру

$$L : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ x^2 + y^2 = z^2, z \geq 0. \end{cases}$$

◀ Выполним эскиз рисунка к задаче (четвертая часть в первом октанте рисунок 11.11).

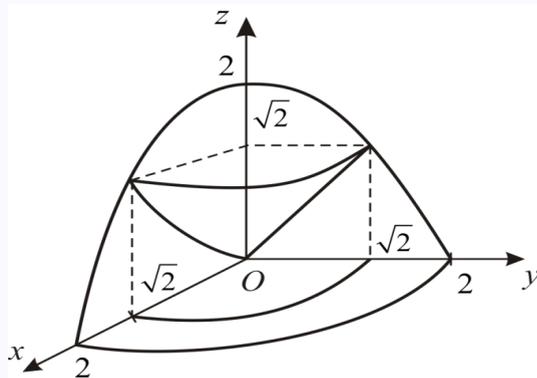


Рисунок 11.11



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



286

Закреть

По формуле (11.49) находим искомую циркуляцию

$$\begin{aligned} \text{Ц} &= \oint_L ydx - xdy + zdz = \left[ \begin{array}{l} x = \sqrt{2} \cos \varphi, \\ y = \sqrt{2} \sin \varphi, \\ z = \sqrt{2} \end{array} \left| \begin{array}{l} dx = -\sqrt{2} \sin \varphi d\varphi, \\ dy = \sqrt{2} \cos \varphi d\varphi, \\ dz = 0 \end{array} \right. \right] = \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \sqrt{2} \sin \varphi \cdot (-\sqrt{2}) \sin \varphi - \sqrt{2} \cos \varphi \cdot \sqrt{2} \cos \varphi \right) d\varphi = -4\pi. \end{aligned}$$

**Ответ:**  $\text{Ц} = -4\pi$ . ►

**Замечание 11.6.** Если  $\vec{a} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))dz$  – силовое векторное поле, то его циркуляция вдоль указанной кривой  $L$  есть работа вдоль кривой указанного силового поля. Кривая  $L$  в формуле (11.49) может быть и не замкнутой.

Дальше рассмотрим понятие ротора. Пусть дано векторное поле

$$\vec{a} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)). \quad (11.52)$$

**Определение 11.8.** *Ротором векторного поля  $\vec{a}$  называется вектор, обозначенный через  $\text{rot } \vec{a}$  и определяемый равенством*

$$\text{rot } \vec{a} = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} \quad (11.53)$$



**Кафедра**  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



287

Закреть

или (в удобной для запоминания форме)

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \quad (11.54)$$

**Замечание 11.7.** Определитель (правая часть (11.54)) раскрывается по элементам первой строки, а умножение знака частной производной на соответствующую функцию означает взятие частной производной от этой функции, например:  $\frac{\partial}{\partial x} \cdot Q = \frac{\partial Q}{\partial x}$ .

**Пример 11.10.** Найти ротор вектора  $\vec{a} = z^3 \vec{i} + y^3 \vec{j} + x^3 \vec{k}$ .

◀ Для нахождения ротора вектора  $\vec{a}$  используем формулу (11.54)

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{a} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^3 & y^3 & x^3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \vec{i} \left( \frac{\partial}{\partial y} x^3 - \frac{\partial}{\partial z} y^3 \right) + \\ &+ (-1)^{1+2} \vec{j} \left( \frac{\partial}{\partial x} x^3 - \frac{\partial}{\partial z} z^3 \right) + \\ &+ (-1)^{1+3} \vec{k} \left( \frac{\partial}{\partial x} y^3 - \frac{\partial}{\partial y} z^3 \right) = 3(z^2 - x^2) \vec{j}. \end{aligned}$$



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



288

Закреть

**Ответ:**  $\text{rot } \vec{a} = 3(z^2 - x^2)\vec{j}$ .▶

### Физический смысл ротора

Пусть дано векторное поле скоростей движущейся жидкости

$$\vec{v}(P(x, yz), Q(x, yz), R(x, yz)).$$

В этом случае  $\text{rot } \vec{v}$  характеризует «вращательную компоненту» поля скоростей, он равен удвоенной угловой скорости вращения бесконечно малой частицы жидкости.

### Ротор векторного поля в криволинейных координатах

Пусть дано векторное поле  $\vec{a}(u, v, t)$  с репером  $(\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_t)$  или  $\vec{a} = (P(u, v, t), Q(u, v, t), R(u, v, t))$ . Тогда

$$\text{rot } \vec{a} = \begin{vmatrix} \frac{\vec{e}_u}{L_u L_t} & \frac{\vec{e}_v}{L_v L_t} & \frac{\vec{e}_t}{L_u L_v} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial t} \\ PL_u & QL_v & RL_t \end{vmatrix}, \quad (11.55)$$

где  $L_u, L_v, L_t$  – параметры (коэффициенты) Ламэ в частности:

1. Для цилиндрической системы координат  $\rho, \varphi, z$  параметры Ламэ будут:  $L_\rho = 1, L_\varphi = r, L_z = 1$ ;

2. Для сферической системы координат  $\rho, \varphi, \theta$  параметры Ламэ будут:  $L_\rho = 1, L_\varphi = \rho \sin \theta, L_\theta = \rho$ .

### Потенциальное векторное поле



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



289

Закреть

## Определение 11.9. Векторное поле

$$\vec{a} = (P(u, v, t), Q(u, v, t), R(u, v, t))$$

заданное на замыкании односвязной области  $\Omega$  называется потенциальным, если его можно представить как градиент некоторого скалярного поля. В этом случае само скалярное поле называется потенциалом векторного поля  $\vec{a} = (P(u, v, t), Q(u, v, t), R(u, v, t))$ .

Указанное определение равносильно тому, что  $\operatorname{rot} \vec{a} = 0$ .

**Пример 11.11.** Показать, что векторное поле

$$\vec{a} = \frac{2 \cos \theta}{\rho^3} \vec{e}_\rho + \frac{\sin \theta}{\rho^3} \vec{e}_\theta$$

в сферических координатах является потенциальным.

◀ Для доказательства справедливости утверждения задачи покажем, что  $\operatorname{rot} \vec{a} = 0$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{a} &= \begin{vmatrix} \frac{\vec{e}_\rho}{L_\theta L_\varphi} & \frac{\vec{e}_\theta}{L_\rho L_\varphi} & \frac{\vec{e}_\varphi}{L_\rho L_\theta} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{2 \cos \theta}{\rho^3} L_\rho & \frac{\sin \theta}{\rho^3} L_\theta & 0 \cdot L_\varphi \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \leq \rho \leq +\infty, \\ 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{bmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\vec{e}_\rho}{\rho^2 \sin \theta} & \frac{\vec{e}_\theta}{\rho \sin \theta} & \frac{\vec{e}_\varphi}{\rho} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{2 \cos \theta}{\rho^3} & \frac{\sin \theta}{\rho^3} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \cdot 0 \cdot \vec{e}_\rho - \frac{1}{\rho \sin \theta} \cdot 0 \cdot \vec{e}_\theta + \end{aligned}$$



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



290

Закреть

$$+\frac{1}{\rho} \left( -\frac{2 \sin \theta}{\rho^3} + \frac{2 \sin \theta}{\rho^3} \right) \vec{e}_\varphi = \vec{0}.$$

**Ответ:** Векторное поле  $\vec{a}$  в  $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus (0, 0, 0)$  является потенциальным.



**Теорема 11.5.** Пусть вектор-функция

$$\vec{a} = (P(u, v, t), Q(u, v, t), R(u, v, t))$$

определена и непрерывна вместе с существующими частными производными функций  $P(u, v, t)$ ,  $Q(u, v, t)$  и  $R(u, v, t)$  в односвязной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Поверхность  $S$  из  $\Omega$  двусторонняя кусочно-гладкая ограниченная без особых точек с кусочно-гладкой границей  $\partial S$ , причем поверхность  $S$  такая, что однозначно ортогонально проектируется на любую из координатных плоскостей. Ориентация единичного вектора нормали  $\vec{n}$  к поверхности  $S$  согласована с ориентацией контура  $L = \partial S$  так, чтобы из конца нормали  $\vec{n}$  обход контура в выбранном направлении был виден совершающимся против часовой стрелки. Тогда справедлива формула Стокса

$$\oint_{L=\partial S} (\vec{a}, d\vec{r}) = \iint_S (\text{rot } \vec{a}, \vec{n}) dS. \quad (11.56)$$



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



291

Закреть

**Замечание 11.8.** При указанных в теореме условиях ее заключение можно сформулировать следующим образом: циркуляция вектора  $\vec{a}$  по замкнутому контуру  $L = \partial S$  равна потоку ротора этого вектора через любую кусочно-гладкую двустороннюю без особых точек поверхность  $S \subset \Omega$ , натянутую на контур  $L = \partial S$ .

◀ Вначале рассмотрим неполный криволинейный интеграл

$$I_1 = \oint_L \rho(x, y, z) dx, \quad (11.57)$$

где поверхность  $S$  есть график функции  $z = z(x, y)$ . Вначале интеграл  $I_1$  заменим криволинейным интегралом по контуру  $\partial G$ , где  $\partial G$  – кусочно-гладкая граница односвязной области  $G$  – ортогональной проекции поверхности  $S$  на плоскость  $z = 0$ . Затем полученный криволинейный интеграл по контуру  $\partial G$  заменяем двойным интегралом по области  $G$ , применяя формулу Грина. Далее двойной интеграл переводим в поверхностный по поверхности  $S$ . Покажем все указанные выше переходы аналитически.

$$I_1 = \oint_{L=\partial S} P(x, y, z) dx = \oint_{\partial G} P(x, y, z(x, y)) dx. \quad (11.58)$$

К интегралу (правой части равенства (11.58)) применим формулу



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



292

Закреть

$$\oint_{\partial G} P(x, y, z(x, y)) dx = - \iint_G \left( \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial z}{\partial y} \right) dx dy. \quad (11.59)$$

Знаем, что если  $F(x, y, z) = z - z(x, y) = 0$  – уравнение, задающее нашу поверхность, то направляющие косинусы единичного вектора  $\vec{n}$  нормали к поверхности  $S : z = z(x, y)$  находим из формулы.

$$\vec{n} = \pm \frac{\overrightarrow{\text{grad } F}}{|\overrightarrow{\text{grad } F}|} = \pm \frac{F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}}{\sqrt{F_x'^2 + F_y'^2 + F_z'^2}} = \pm \frac{-z'_x \vec{i} - z'_y \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{z_x'^2 + z_y'^2 + 1}}. \quad (11.60)$$

С учетом того, что угол между векторами  $\vec{n}$  и осью  $Oz$  острый, то есть  $\cos(\vec{n}, \hat{Oz}) > 0$ , получим, что

$$\frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{\cos(\vec{n}, \hat{Oy})}{\cos(\vec{n}, \hat{Oz})}. \quad (11.61)$$

Подставляем (11.61) в (11.59), Получим:

$$I_1 = - \iint_G \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\cos(\vec{n}, \hat{Oy})}{\cos(\vec{n}, \hat{Oz})} \right) dx dy. \quad (11.62)$$



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



293

Закреть

Интеграл (11.62) заменяем поверхностным, учитывая равенство

$$dxdy = \cos(\vec{n}, \hat{Oz})dS.$$

$$\begin{aligned} I_1 &= - \iint_S \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\cos(\vec{n}, \hat{Oy})}{\cos(\vec{n}, \hat{Oz})} \right) \cos(\vec{n}, \hat{Oz})dS = \\ &= \iint_S \left( \frac{\partial P}{\partial z} \cos(\vec{n}, \hat{Oy}) - \frac{\partial P}{\partial y} \cos(\vec{n}, \hat{Oz}) \right) dS = \oint_{L=\partial S} Pdx. \end{aligned} \quad (11.63)$$

**Замечание 11.9.** Аналогично доказывается, что

$$\oint_{L=\partial S} Qdy = \iint_S \left( \frac{\partial Q}{\partial x} \cos(\vec{n}, \hat{Oz}) - \frac{\partial Q}{\partial z} \cos(\vec{n}, \hat{Ox}) \right) dS \quad (11.64)$$

и

$$\oint_{L=\partial S} Rdz = \iint_S \left( \frac{\partial R}{\partial y} \cos(\vec{n}, \hat{Ox}) - \frac{\partial R}{\partial x} \cos(\vec{n}, \hat{Oy}) \right) dS. \quad (11.65)$$

Складываем равенства (11.63)–(11.65), получим:

$$\oint_{L=\partial S} Pdx + Qdy + Rdz = \oint_{L=\partial S} (\vec{a}, d\vec{r}) = \iint_S \left( \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos(\vec{n}, \hat{Oz}) + \right.$$



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



294

Закреть

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos(\vec{n}, \hat{Ox}) + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos(\vec{n}, \hat{Oy}) \Big) dS = \\
= & \iint_S \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx = \\
& = \iint_S (\operatorname{rot} \vec{a}, \vec{n}) dS. \blacktriangleright \tag{11.66}
\end{aligned}$$

**Пример 11.12.** Найти циркуляцию векторного поля в сферических координатах

$$\vec{a} = \rho \vec{e}_\rho + \rho(R + \rho) \sin^2 \theta \vec{e}_\varphi \tag{11.67}$$

по контуру  $L$ , представляющему собой окружность радиуса  $R$  в плоскости  $z = 0$  с центром в начале координат.

◀ На контур  $L$  натянем полусферу при  $z \geq 0$  радиуса  $R$  ( $\rho = R$ ,  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ ). За единичный вектор нормали к сферической поверхности  $S$  ведем  $\vec{n} = \vec{e}_\rho$ , где  $\vec{e}_\rho$  – орт в сферической системе координат.

Для нахождения указанной в задаче циркуляции воспользуемся формулой Стокса.

$$\text{Ц} = \oint_L (\vec{a}, d\vec{r}) = \iint_S (\operatorname{rot} \vec{a}, \vec{n}) dS, \tag{11.68}$$



**Кафедра**  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



295

Закреть

где  $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$ .

Вначале найдём  $\text{rot } \vec{a}$  в сферических координатах:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{a} &= \begin{vmatrix} \frac{\vec{e}_\rho}{\rho^2 \sin \theta} & \frac{\vec{e}_\theta}{\rho \sin \theta} & \frac{\vec{e}_\varphi}{\rho} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \rho & 0 & \rho(R + \rho) \sin^2 \theta \end{vmatrix} = \\ &= \frac{2(R + \rho) \cos \theta}{\rho} \vec{e}_\rho - \frac{1}{\rho} (R + 2\rho) \sin \theta \vec{e}_\theta. \end{aligned}$$

Далее находим  $(\text{rot } \vec{a}, \vec{n}) = (\text{rot } \vec{a}, \vec{e}_\rho)$ , где  $\vec{e}_\rho = (1, 0, 0)$ . Тогда

$$(\text{rot } \vec{a}, \vec{n}) = \frac{2(R + \rho)}{\rho} \cos \theta.$$

По формуле (11.68) находим

$$\begin{aligned} \Omega &= \iint_S \frac{2(R + \rho)}{\rho} \cos \theta ds = [\rho = R] = 4 \iint_S \cos \theta ds = \\ &= [ds = L_\theta L_\varphi d\theta d\varphi = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi] \varphi = 4R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \cdot \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi R^2. \end{aligned}$$

**Ответ:**  $\Omega = 4\pi R^2$ . ►



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



296

Закреть

**Пример 11.13.** Показать, что векторное поле

$$\vec{a} = (y + z)\vec{i} + (x + z)\vec{j} + (y + x)\vec{k} \quad (11.69)$$

является потенциальным. Найти его потенциал.

$$\leftarrow \operatorname{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y + z & x + z & y + x \end{vmatrix} = \vec{i}(1 - 1) - \vec{j}(1 - 1) + \vec{k}(1 - 1) = \vec{0}.$$

Потенциальность поля доказана. Найдем потенциал поля с точностью до константы. Это будет такое скалярное поле  $u = u(x, y, z)$ , что  $\overrightarrow{\operatorname{grad}} u = \vec{a}$ . Потенциал  $u = u(x, y, z)$  находим по формуле

$$u(x, y, z) = \int_L (y + x)dx + (x + z)dy + (y + x)dz. \quad (11.70)$$

Функции  $P(x, y, z) = (y + x)$ ,  $Q(x, y, z) = (x + z)$ ,  $R(x, y, z) = (y + x)$  определены и не непрерывны вместе со своими частными производными в односвязной области  $G = \mathbb{R}^3$ . Для криволинейных интегралов второго рода в пространстве так же, как и на плоскости, по любой кусочно-гладкой кривой  $L$  от фиксированной любой точки  $M_0(x_0, y_0, z_0) \in G$  до



Кафедра  
высшей  
математики

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



297

Закреть

текущей точки  $M(x, y, z)$  значение криволинейного интеграла не будет зависеть от  $L$ . В нашем случае в качестве  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  берем начало координат, то есть  $M_0(0, 0, 0)$ . В качестве  $L$  берем ломаную  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  до точки  $M(x, y, z)$  с первым звеном на оси  $Ox$  (до точки  $x$ ), вторым звеном, параллельным оси  $Oy$  (от точки  $(x, 0, 0)$  до точки  $(x, y, 0)$ ), и третьим звеном, параллельным оси  $Oz$  (от точки  $(x, y, 0)$  до точки  $M(x, y, z)$ ).

Изобразим эскиз рисунка (рисунок 11.12)  $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3$ .

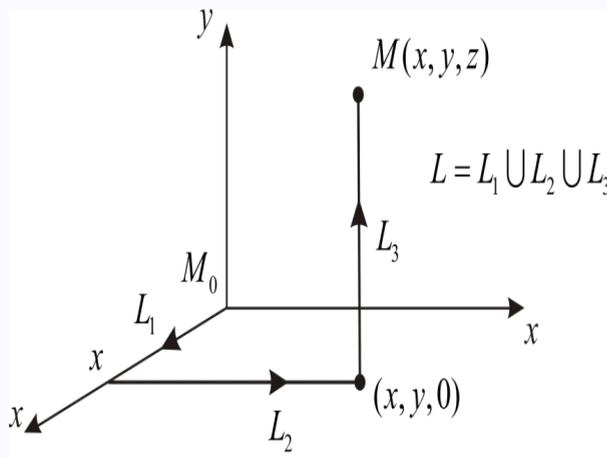


Рисунок 11.12



На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



298

Закреть



Кафедра  
вышэй  
матэматыкі

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



299

Закреть

$$u(x, y, z) = \int_L (y + z)dx + (x + z)dy + (y + z)dz = \int_{L_1} + \int_{L_2} + \int_{L_3} =$$
$$= \int_0^x (0+0)dx + \int_0^y xdy + \int_0^z (y+x)dz = xy + (y+x)z + c - \text{искомый потенциал.}$$

**Ответ:**  $u(x, y, z) = xy + (y + x)z + C$ . ►

## Литература

1. Элементарные функции: пособие для студентов физико-математических специальностей университета / Н.П. Семенчук, Н.Н. Сендер, С.А. Марзан; Брест. гос. ун-т. – Брест : Изд-во БрГУ, 2007. – 41 с.
2. Кудрявцев, Л.Д. Курс математического анализа : в 2 т. / Л.Д. Кудрявцев. – М. : Высшая школа, 1988. – Т. 1 : Курс математического анализа. – 687 с.
3. Ильин, В.А. Основы математического анализа : в 2 т. / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – М. : Наука, 1982. – Т. 1. – 599 с.

4. Фихтенгольц, Г.М. Основы математического анализа: в 3 т. / Г.М. Фихтенгольц. – СПб. : Лань, 2001. – Т. 1 : Основы математического анализа. – 440 с.
5. Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б.П. Демидович. – М. : Наука, 1977. – 528 с.
6. Виноградова, И.А. Задачи и упражнения по математическому анализу : в 2 кн. / И.А. Виноградова, С.Н. Олехник, В.А. Садовничий; под ред. В.А. Садовниченко. – 2-е изд., перераб. – М. : Высш. шк., 2002. – Кн. 1 : Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной. – 725 с.
7. Давыдов, Н.А. Сборник задач по математическому анализу : учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак-тов пед. ин-тов / Н.А. Давыдов, П.П. Коровкин, В.Н. Никольский ; под ред. Н.А. Давыдова. – М. : Просвещение, 1973. – 256 с.
8. Задачник по курсу математического анализа : учеб. пособие для студентов заоч. отделений физ.-мат. фак-тов пединститута : в 2 т. / Н.Я. Виленкин [и др.] ; под общ. ред. Н.Я. Виленкина. – М. : Просвещение, 1971. – Т. 1. – 343 с.
9. Бохан, К.А. Курс математического анализа : в 2 т. / К.А. Бохан,



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



300

Закреть

И.А. Егорова, К.В. Лащенко. – М. : Просвещение, 1972. – Т. 1 : Курс математического анализа. — 439 с.

10. Уваренков, И.М. Курс математического анализа : в 2 т. / И.М. Уваренков, М.З. Маллер. – М. : Просвещение, 1966. – Т. 1 : Курс математического анализа. — 639 с.
11. Дадаян, А.А. Математический анализ / А.А. Дадаян. – Минск. : Высшая школа, 1990. — 428 с.
12. Герасимович, А.И. Математический анализ : в 2 ч. / А.И. Герасимович, И.А. Рысюк. – Минск. : Высшая школа, 1989. – Ч. 1. — 287 с.
13. Семенчук, Н.П. Математический анализ. Дифференциальное исчисление : курс лекций для студ. физ. фак. / Н.П. Семенчук, Н.Н. Сендер, С.А. Марзан ; Брест. гос. ун-т им. А.С. Пушкина – Брест : Изд-во БрГУ, 2008. — 64 с.



*Кафедра  
высшай  
матэматыкі*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



301

Закреть

## Приложение

По приводимым ниже ссылкам расположены графики основных элементарных функций.

1. Степенная функция с натуральным четным показателем

$$y = x^{2m}, m \in N.$$

2. Степенная функция с натуральным нечетным показателем

$$y = x^{2m-1}, m \in N.$$

3. Степенная функция с целым отрицательным четным показателем

$$y = x^{-2m}, m \in N.$$

4. Степенная функция с целым отрицательным нечетным показателем

$$y = x^{-(2m-1)}, m \in N.$$

5. Степенная функция с рациональным положительным показателем

$$y = x^{\frac{m}{n}}, m \in N, n \in N.$$

6. Степенная функция с рациональным отрицательным показателем

$$y = x^{-\frac{m}{n}}, m \in N, n \in N.$$



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



302

Закреть

7. Степенная функция с действительным положительным показателем

$$y = x^\alpha, \alpha > 0.$$

8. Степенная функция с действительным отрицательным показателем

$$y = x^\alpha, \alpha < 0.$$

9. Показательная функция

$$y = a^x, 0 < a \neq 1.$$

10. Логарифмическая функция

$$y = \log_a x, 0 < a \neq 1.$$

11. Тригонометрическая функция

$$y = \sin x.$$

12. Тригонометрическая функция

$$y = \cos x.$$

13. Тригонометрическая функция

$$y = \operatorname{tg} x.$$



*Кафедра  
высшей  
математики*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



303

Закреть

14. Тригонометрическая функция

$$y = \operatorname{ctg} x.$$

15. Обратная тригонометрическая функция

$$y = \arcsin x.$$

16. Обратная тригонометрическая функция

$$y = \arccos x.$$

17. Обратная тригонометрическая функция

$$y = \operatorname{arctg} x.$$

18. Обратная тригонометрическая функция

$$y = \operatorname{arctg} x.$$



*Кафедра  
высшай  
матэматыкі*

На весь экран

Начало

Содержание

Приложение

Назад



304

Закреть